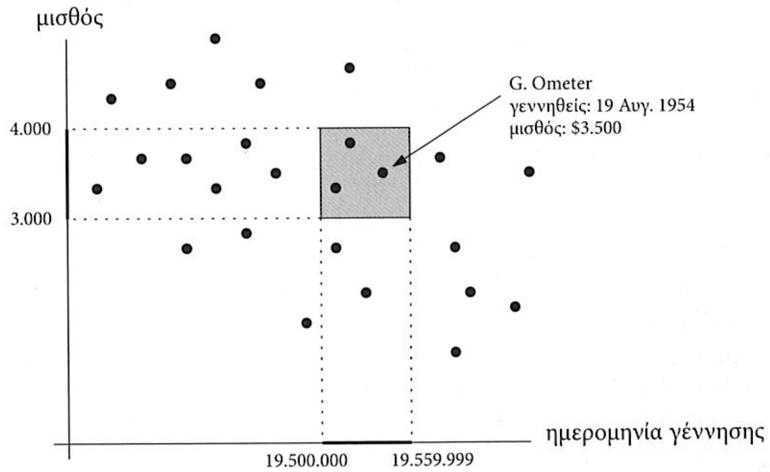
5 Ορθογωνική εκτασιακή αναζήτηση

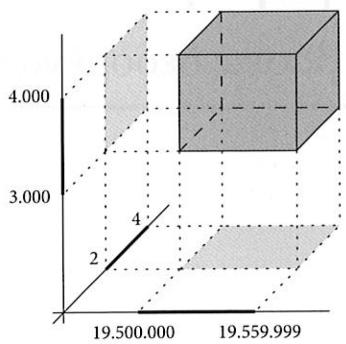
Ερωτήματα προς βάσεις δεδομένων

Εκ πρώτης όψεως, οι βάσεις δεδομένων δεν φαίνεται να έχουν μεγάλη σχέση με τη γεωμετρία. Εντούτοις, πολλά είδη ερωτήσεων –που στο εξής θα αποκαλούνται *ερωτήματα*– σχετικά με τα δεδομένα μιας βάσης μπορούν να ερμηνευθούν ως γεωμετρικά ερωτήματα. Για τον σκοπό αυτό, μετασχηματίζουμε τα «δελτία» μιας βάσης δεδομένων σε σημεία ενός πολυδιάστατου χώρου, και τα ερωτήματα σχετικά με τα δελτία σε ερωτήματα για αυτό το σύνολο σημείων. Ας αποσαφηνίσουμε την κατάσταση με ένα παράδειγμα.



Σχήμα 5.1
Γεωμετρική ερμηνεία ενός ερωτήματος σε βάση δεδομένων

Ας θεωρήσουμε μια βάση δεδομένων για τη διοίκηση του προσωπικού μιας εταιρείας. Σε μια τέτοια βάση αποθηκεύονται το ονοματεπώνυμο, η διεύθυνση, η ημερομηνία γέννησης, ο μισθός, κ.λπ., κάθε εργαζόμενου. Ένα τυπικό ερώτημα που πιθανόν να θέλει να θέσει κανείς είναι το εξής: να βρεθούν όλοι οι εργαζόμενοι που έχουν γεννηθεί μεταξύ του 1950 και του 1955 και έχουν μηνιαίο μισθό από \$3.000 έως \$4.000. Για να διατυπώσουμε το ερώτημα αυτό ως γεωμετρικό πρόβλημα αναπαριστούμε κάθε εργαζόμενο με ένα σημείο στο επίπεδο. Η πρώτη συντεταγμένη του σημείου είναι η ημερομηνία γέννησης, που αναπαρίσταται από τον ακέραιο $10.000 \times \textit{έτος} + 100 \times \textit{μήνας} + \textit{ημέρα}$, και η δεύτερη συντεταγμένη είναι ο μηνιαίος μισθός. Μαζί με το σημείο αποθηκεύουμε και τις άλλες πληροφορίες που έχουμε για τον εργαζόμενο, όπως είναι το ονοματεπώνυμο και η διεύθυνσή του. Το ερώτημα στο οποίο ζητούνται όλοι οι εργαζόμενοι που έχουν γεννηθεί μεταξύ του 1950 και του 1955 και έχουν αποδοχές από \$3.000 έως \$4.000 τον μήνα μετασχηματίζεται στο ακόλουθο γεωμετρικό ερώτημα: να βρεθούν όλα τα σημεία των οποίων η πρώτη συντεταγμένη βρίσκεται μεταξύ 19.500.000 και 19.559.999 και η δεύτερη συντεταγμένη βρίσκεται μεταξύ 3.000 και 4.000. Με άλλα λόγια, θέλουμε να βρούμε όλα τα σημεία εντός ενός αξονοπαράλληλου ορθογωνίου, δηλ. ενός ορθογωνίου με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες –βλ. Σχήμα 5.1.



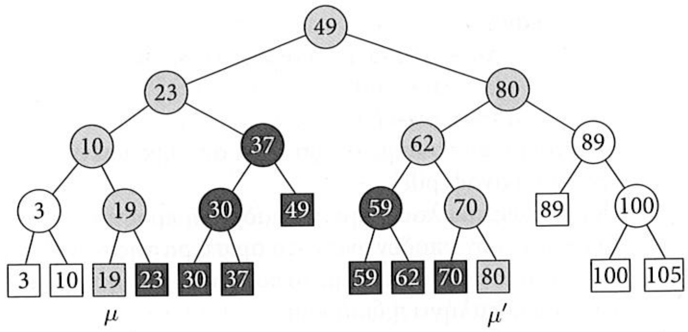
Τι συμβαίνει όμως αν έχουμε επίσης πληροφορίες για το πλήθος των παιδιών κάθε εργαζόμενου, και θέλουμε να μπορούμε να θέτουμε ερωτήματα όπως «να βρεθούν όλοι οι εργαζόμενοι που έχουν γεννηθεί μεταξύ του 1950 και του 1955, έχουν αποδοχές από \$3.000 έως \$4.000 τον μήνα, και έχουν από δύο έως τέσσερα παιδιά»; Σε αυτήν την περίπτωση αναπαριστούμε κάθε εργαζόμενο με ένα σημείο στον τριδιάστατο χώρο: η πρώτη συντεταγμένη παριστάνει την ημερομηνία γέννησης, η δεύτερη τον μισθό, και η τρίτη το πλήθος των παιδιών. Για να απαντήσουμε το ερώτημα, θα πρέπει τώρα να βρούμε όλα τα σημεία εντός του αξονοπαράλληλου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου $[19.500.000 : 19.559.999] \times [3.000 : 4.000] \times [2 : 4]$. Γενικά, αν μας ενδιαφέρει να απαντάμε ερωτήματα που αφορούν d από τα πεδία των δελτίων της βάσης μας, μετασχηματίζουμε τα δελτία σε σημεία του d-διάστατου χώρου. Έτσι, ένα ερώτημα που ζητάει να βρεθούν όλα τα δελτία των οποίων τα πεδία βρίσκονται μεταξύ κάποιων συγκεκριμένων τιμών μετασχηματίζεται σε ένα ερώτημα που ζητάει να βρεθούν όλα τα σημεία εντός ενός d-διάστατου αξονοπαράλληλου «κουτιού». Στην υπολογιστική γεωμετρία ένα τέτοιο ερώτημα λέγεται *ορθογωνικό εκτασιακό ερώτημα*. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε δομές δεδομένων για τέτοια ερωτήματα.

5.1 Μονοδιάστατη εκτασιακή αναζήτηση

Πριν προσπαθήσουμε να αντιμετωπίσουμε το διδιάστατο ή πολυδιάστατο πρόβλημα της ορθογωνικής εκτασιακής αναζήτησης, ας εξετάσουμε τη μονοδιάστατη εκδοχή. Τα δεδομένα μας είναι ένα σύνολο σημείων στον μονοδιάστατο χώρο –με άλλα λόγια, ένα σύνολο πραγματικών αριθμών. Το ερώτημα ζητάει τα σημεία που βρίσκονται εντός ενός «μονοδιάστατου ορθογωνίου» –δηλαδή μιας μονοδιάστατης «έκτασης» $[x : x']$.

Έστω $P := \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ το δεδομένο σύνολο σημείων επάνω στην πραγματική ευθεία. Μπορούμε να λύσουμε δραστικά το μονοδιάστατο πρόβλημα εκτασιακής αναζήτησης χρησιμοποιώντας μια ευρέως γνωστή δομή δεδομένων: ένα ισοσταθμισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης $\mathcal{T}$. (Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε μια συστοιχία. Ωστόσο, η λύση αυτή δεν μπορεί να γενικευτεί σε περισσότερες διαστάσεις, ούτε επιτρέπει τη δραστική ενημέρωση του P.) Στα φύλλα του $\mathcal{T}$ αποθηκεύονται τα σημεία του P, και στους εσωτερικούς κόμβους του αποθηκεύονται διχαστικές τιμές που καθοδηγούν την αναζήτηση. Η διχαστική τιμή που αποθηκεύεται στον κόμβο ν συμβολίζεται με x_ν. Υποθέτουμε ότι το αριστερό υπόδεντρο ενός κόμβου ν περιέχει όλα τα σημεία που είναι μικρότερα ή ίσα της x_ν, και το δεξιό υπόδεντρο περιέχει όλα τα σημεία που είναι μεγαλύτερα της x_ν.

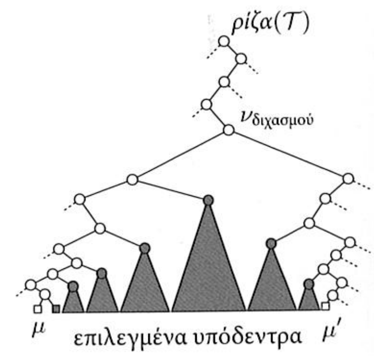
Για να εντοπίσουμε τα σημεία σε κάποια έκταση ενδιαφέροντος $[x : x']$, εργαζόμαστε ως εξής. Αναζητούμε στο $\mathcal{T}$ τα όρια x και x'. Έστω μ και μ' αντίστοιχα τα δύο φύλλα στα οποία καταλήγουν οι αναζητήσεις. Τότε τα σημεία που βρίσκονται εντός της έκτασης $[x : x']$ είναι εκείνα που βρίσκονται αποθηκευμένα στα φύλλα μεταξύ των μ και μ' συν, ενδεχομένως, το σημείο που είναι αποθηκευμένο στο μ και το σημείο που είναι αποθηκευμένο στο μ'. Για παράδειγμα, κατά την αναζήτηση στο δέντρο του Σχήματος 5.2 με έκταση ενδιαφέροντος $[18 : 77]$, πρέπει να αναφέρουμε όλα τα σημεία που είναι αποθηκευμένα στα σκούρα γκρίζα φύλλα, συν το σημείο που είναι αποθηκευμένο στο φύλλο μ. Πώς μπορούμε να βρούμε τα φύλλα που βρίσκονται μεταξύ των μ και μ'; Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2, τα ζητούμενα φύλλα είναι τα φύλλα ορισμένων υποδέντρων που βρίσκονται ανάμεσα στις διαδρομές αναζήτησης οι οποίες καταλήγουν στα μ και μ'. (Στο Σχήμα 5.2, αυτά τα υπόδεντρα απεικονίζονται με σκούρο γκρίζο χρώμα, ενώ οι κόμβοι των διαδρομών αναζήτησης με ανοιχτό γκρίζο χρώμα.) Ακριβέστερα, επιλέγουμε τα υπόδεντρα των οποίων οι ριζικοί κόμβοι ν κείνται μεταξύ των δύο διαδρομών αναζήτησης και έχουν τους πατρι-



Σχήμα 5.2
Ένα μονοδιάστατο εκτασιακό ερώτημα σε δυαδικό δέντρο αναζήτησης

κούς τους κόμβους πάνω σε κάποια από τις διαδρομές αυτές. Για να βρούμε αυτούς τους κόμβους, αναζητούμε αρχικά τον κόμβο $\nu_{\text{διχασμού}}$ στον οποίο διχάζονται μεταξύ τους οι διαδρομές αναζήτησης των x και x'. Αυτό γίνεται με το ακόλουθο υποπρόγραμμα. Με $\alpha\theta(\nu)$ και $\delta\theta(\nu)$ συμβολίζουμε αντίστοιχα τον αριστερό και τον δεξιό θυγατρικό κόμβο ενός κόμβου ν.

ΕΥΡΕΣΗ ΔΙΧΑΣΤΙΚΟΥ ΚΟΜΒΟΥ($\mathcal{T}, x, x'$)
Είσοδος. Ένα δέντρο $\mathcal{T}$ και δύο τιμές x και x' με $x \leqslant x'$.
Έξοδος. Ο κόμβος ν στον οποίο διχάζονται μεταξύ τους οι διαδρομές προς τις x και x', ή το φύλλο όπου καταλήγουν αμφότερες οι διαδρομές.
1. $\nu \leftarrow$ *ρίζα*($\mathcal{T}$)
2. **ενόσω** ο ν δεν είναι φύλλο **και** ($x' \leqslant x_\nu$ **ή** $x > x_\nu$)
3. **εάν** $x' \leqslant x_\nu$
4. **τότε** $\nu \leftarrow \alpha\theta(\nu)$
5. **άλλως** $\nu \leftarrow \delta\theta(\nu)$
6. **επιστροφή** ν



Στη συνέχεια, ξεκινώντας από τον $\nu_{\text{διχασμού}}$ ακολουθούμε τη διαδρομή αναζήτησης του x. Σε κάθε κόμβο όπου η διαδρομή συνεχίζεται προς τα αριστερά, αναφέρουμε όλα τα φύλλα του δεξιού υποδέντρου, διότι αυτό το υπόδεντρο κείται μεταξύ των δύο διαδρομών αναζήτησης. Παρομοίως, ακολουθούμε τη διαδρομή αναζήτησης του x' και αναφέρουμε τα φύλλα του αριστερού υποδέντρου κάθε κόμβου στον οποίο η διαδρομή συνεχίζεται προς τα δεξιά. Τέλος, θα πρέπει να ελέγξουμε και τα σημεία που είναι αποθηκευμένα στα φύλλα όπου καταλήγουν οι δύο διαδρομές· καθένα από αυτά μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στην έκταση $[x : x']$.

Εν συνεχεία θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο απάντησης του ερωτήματος με περισσότερες λεπτομέρειες. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί ένα υποπρόγραμμα ΑΝΑΦΟΡΑ ΥΠΟΔΕΝΤΡΟΥ, το οποίο διανύει το υπόδεντρο που έχει ως ρίζα έναν δεδομένο κόμβο και αναφέρει τα σημεία που είναι αποθηκευμένα στα φύλλα του. Δεδομένου ότι το πλήθος των εσωτερικών κόμβων κάθε δυαδικού δέντρου είναι μικρότερο από το πλήθος των φύλλων του, ο χρόνος που απαιτεί αυτό το υποπρόγραμμα είναι γραμμικός ως προς το πλήθος των αναφερόμενων σημείων.

Αλγόριθμος ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟ ΕΚΤΑΣΙΑΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ($\mathcal{T}, [x : x']$)
Είσοδος. Ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης $\mathcal{T}$ και μια έκταση $[x : x']$.
Έξοδος. Όλα τα σημεία που είναι αποθηκευμένα στο $\mathcal{T}$ τα οποία εμπίπτουν στην έκταση.
1. $\nu_{\text{διχασμού}} \leftarrow$ ΕΥΡΕΣΗ ΔΙΧΑΣΤΙΚΟΥ ΚΟΜΒΟΥ($\mathcal{T}, x, x'$)
2. **εάν** ο $\nu_{\text{διχασμού}}$ είναι φύλλο
3. **τότε** ελέγχουμε αν το σημείο που είναι αποθηκευμένο στον $\nu_{\text{διχασμού}}$ πρέπει να αναφερθεί
4. **άλλως** (∗ Ακολουθούμε τη διαδρομή προς το x και αναφέρουμε τα σημεία των υποδέντρων στα δεξιά της. ∗)
5. $\nu \leftarrow \alpha\theta(\nu_{\text{διχασμού}})$
6. **ενόσω** ο ν δεν είναι φύλλο

```
        εάν x ⩽ x_ν
            τότε ΑΝΑΦΟΡΑ ΥΠΟΔΕΝΤΡΟΥ(δθ(ν))
                ν ← αθ(ν)
        άλλως ν ← δθ(ν)
    Ελέγχουμε αν το σημείο που είναι αποθηκευμένο στο φύλλο ν
    πρέπει να αναφερθεί.
    Παρομοίως, ακολουθούμε τη διαδρομή προς το x', αναφέρουμε
    τα σημεία των υποδέντρων στα αριστερά της, και ελέγχουμε αν
    πρέπει να αναφερθεί το σημείο που είναι αποθηκευμένο στο φύλ-
    λο όπου καταλήγει η διαδρομή.
```

Ας αποδείξουμε κατ' αρχάς την ορθότητα του αλγορίθμου.

Λήμμα 5.1 *Ο αλγόριθμος* ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟ ΕΚΤΑΣΙΑΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ *αναφέρει όλα τα σημεία που εμπίπτουν στην έκταση ενδιαφέροντος και μόνο αυτά.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε αρχικά ότι κάθε αναφερόμενο σημείο p εμπίπτει στην έκταση ενδιαφέροντος. Αν το p είναι αποθηκευμένο στο φύλλο όπου καταλήγει η διαδρομή προς το x ή το x', τότε ο αλγόριθμος ελέγχει ρητά εάν εμπίπτει στην έκταση ενδιαφέροντος. Διαφορετικά, το p αναφέρεται μέσω κάποιας κλήσης της διαδικασίας ΑΝΑΦΟΡΑ ΥΠΟΔΕΝΤΡΟΥ. Ας υποθέσουμε ότι αυτή η κλήση έγινε κατά τη διαδρομή προς το x. Έστω ν ο κόμβος της διαδρομής στου οποίου την κλήση ΑΝΑΦΟΡΑ ΥΠΟΔΕΝΤΡΟΥ$(\delta\theta(\nu))$ αναφέρθηκε το σημείο p. Δεδομένου ότι ο ν, άρα και ο $\delta\theta(\nu)$, κείται στο αριστερό υπόδεντρο του $\nu_{\text{διχασμού}}$, έχουμε ότι $p \leqslant x_{\nu_{\text{διχασμού}}}$. Δεδομένου ότι στον $\nu_{\text{διχασμού}}$ η διαδρομή αναζήτησης του x' συνεχίζεται προς τα δεξιά, έπεται ότι $p < x'$. Από την άλλη πλευρά, στον κόμβο ν η διαδρομή αναζήτησης του x συνεχίζεται προς τα αριστερά, και το p κείται στο δεξιό υπόδεντρο του ν, επομένως $x < p$. Συνεπώς, $p \in [x : x']$. Η περίπτωση που το p έχει αναφερθεί κατά τη διαδρομή προς το x' αντιμετωπίζεται με συμμετρικό σκεπτικό.

Μένει να αποδείξουμε ότι ο αλγόριθμος αναφέρει οποιοδήποτε τυχόν σημείο p εντός της έκτασης. Έστω μ το φύλλο όπου είναι αποθηκευμένο το p, και ν ο χαμηλότερος πρόγονος του μ που επισκέπτεται ο αλγόριθμος απάντησης του ερωτήματος. Ισχυριζόμαστε ότι $\nu = \mu$, πράγμα που σημαίνει ότι το p αναφέρεται. Ας υποθέσουμε, αντίθετα προς το αποδεικτέο, ότι $\nu \neq \mu$. Παρατηρούμε ότι ο ν δεν μπορεί να είναι κάποιος κόμβος που επισκέφθηκε ο αλγόριθμος σε μια κλήση της διαδικασίας ΑΝΑΦΟΡΑ ΥΠΟΔΕΝΤΡΟΥ, διότι ο αλγόριθμος επισκέπτεται όλους τους απογόνους ενός τέτοιου κόμβου. Επομένως, ο ν βρίσκεται είτε στη διαδρομή αναζήτησης του x, είτε στη διαδρομή αναζήτησης του x', είτε και στις δύο. Καθώς οι τρεις περιπτώσεις είναι παρόμοιες, θα εξετάσουμε μόνο την τελευταία. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι το μ βρίσκεται στο αριστερό υπόδεντρο του ν. Στην περίπτωση αυτή, στον ν η διαδρομή αναζήτησης του x συνεχίζεται προς τα δεξιά (διαφορετικά ο ν δεν θα ήταν ο χαμηλότερος πρόγονος που επισκέφθηκε ο αλγόριθμος). Όμως αυτό σημαίνει ότι $p < x$. Αντίστοιχα, αν το μ βρίσκεται στο δεξιό υπόδεντρο του ν, τότε στον ν η διαδρομή αναζήτησης του x' συνεχίζεται προς τα αριστερά, οπότε $p > x'$. Και στις δύο περιπτώσεις, συμπεραίνουμε ότι το p δεν εμπίπτει στην έκταση ενδιαφέροντος, αντίθετα προς την αρχική μας υπόθεση. $\square$

Ας εξετάσουμε τώρα τη δραστικότητα της δομής δεδομένων. Ως ισοσταθμισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης, χρησιμοποιεί χώρο $O(n)$ και μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $O(n \log n)$. Τι ισχύει για τον χρόνο απάντησης του ερωτήματος; Στη χειρότερη περίπτωση, όλα τα σημεία εμπίπτουν στην έκταση ενδιαφέροντος, οπότε ο χρόνος απάντησης θα είναι $\Theta(n)$. Η επίδοση αυτή δεν φαίνεται ικανοποιητική. Μάλιστα, για να επιτευχθεί χρόνος απάντησης $\Theta(n)$ δεν μας χρειάζεται καμία δομή δεδομένων· συγκρίνοντας απλώς κάθε σημείο με την έκταση ενδιαφέροντος καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Ωστόσο, στην περίπτωση που πρέπει να αναφερθούν όλα τα σημεία ο χρόνος απάντησης

$\Theta(n)$ είναι αναπόφευκτος. Ως εκ τούτου, θα αναλύσουμε με περισσότερες λεπτομέρειες τον χρόνο απάντησης. Συγκεκριμένα, στην ανάλυσή μας θα λάβουμε υπ' όψιν όχι μόνο το πλήθος n των σημείων του συνόλου P, αλλά και το πλήθος k των αναφερόμενων σημείων. Με άλλα λόγια, θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος απάντησης του ερωτήματος είναι *εξοδοεξαρτώμενος*, μια έννοια που συναντήσαμε ήδη στο Κεφάλαιο 2.

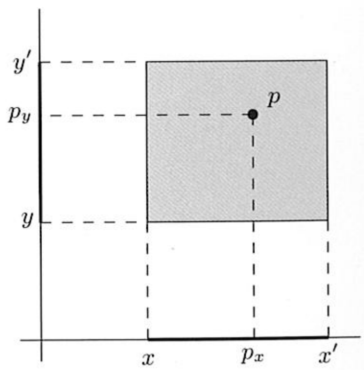
Υπενθυμίζουμε ότι ο χρόνος που αναλώνεται σε μία κλήση της διαδικασίας ΑΝΑΦΟΡΑ ΥΠΟΔΕΝΤΡΟΥ είναι γραμμικός ως προς το πλήθος των αναφερόμενων σημείων. Επομένως, ο συνολικός χρόνος που αναλώνεται σε όλες αυτές τις κλήσεις είναι $O(k)$. Οι υπόλοιποι κόμβοι που επισκέπτεται ο αλγόριθμος βρίσκονται πάνω στη διαδρομή αναζήτησης του x ή του x'. Καθώς το $\mathcal{T}$ είναι ισοσταθμισμένο, το μήκος αυτών των διαδρομών είναι $O(\log n)$. Ο χρόνος που αναλώνεται σε κάθε κόμβο είναι $O(1)$, άρα ο συνολικός χρόνος που αναλώνεται σε αυτούς τους κόμβους είναι $O(\log n)$, και επομένως ο χρόνος απάντησης του ερωτήματος είναι $O(\log n + k)$.

Το θεώρημα που ακολουθεί συνοψίζει τα συμπεράσματά μας για τη μονοδιάστατη εκτασιακή αναζήτηση:

Θεώρημα 5.2 *Έστω P ένα σύνολο n σημείων στον μονοδιάστατο χώρο. Το P μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα ισοσταθμισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης, που καταλαμβάνει χώρο $O(n)$, μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $O(n \log n)$, και επιτρέπει την αναφορά όλων των σημείων που εμπίπτουν σε κάποια έκταση ενδιαφέροντος σε χρόνο $O(k + \log n)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων σημείων.*

5.2 kd-δέντρα

Ας περάσουμε τώρα στο διδιάστατο πρόβλημα ορθογωνικής εκτασιακής αναζήτησης. Έστω P ένα σύνολο n σημείων στο επίπεδο. Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα υποθέσουμε ότι οι τετμημένες των σημείων του P είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους, όπως και οι τεταγμένες. Ο περιορισμός αυτός δεν είναι πολύ ρεαλιστικός, ειδικά αν τα σημεία αναπαριστούν εργαζόμενους και οι συντεταγμένες είναι τιμές όπως ο μισθός ή το πλήθος των παιδιών. Ευτυχώς, ο περιορισμός μπορεί να παρακαμφθεί με ένα έξυπνο τέχνασμα που θα περιγράψουμε στην Ενότητα 5.5.



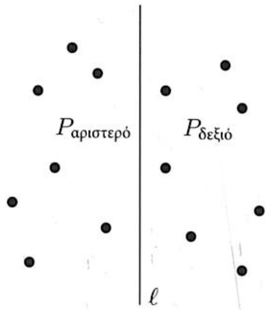
Σε ένα διδιάστατο ορθογωνικό εκτασιακό ερώτημα για το σύνολο P, το ζητούμενο είναι να βρεθούν τα σημεία του P που κείνται εντός κάποιου ορθογωνίου ενδιαφέροντος $[x : x'] \times [y : y']$. Ένα σημείο $p := (p_x, p_y)$ κείται εντός αυτού του ορθογωνίου εάν και μόνο εάν

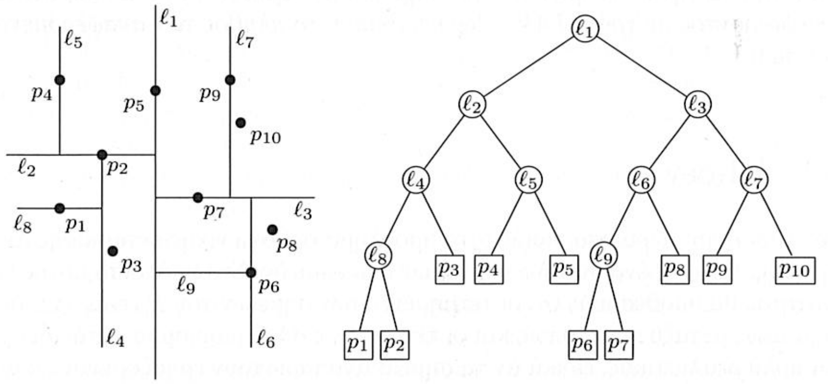
$$p_x \in [x : x'] \quad \text{και} \quad p_y \in [y : y'].$$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ένα διδιάστατο ορθογωνικό εκτασιακό ερώτημα αποτελείται από δύο μονοδιάστατα υποερωτήματα, ένα για την τετμημένη των σημείων και ένα για την τεταγμένη.

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάσαμε μια δομή δεδομένων για μονοδιάστατα εκτασιακά ερωτήματα. Πώς μπορούμε να γενικεύσουμε αυτήν τη δομή –που ήταν απλώς ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης– για διδιάστατα εκτασιακά ερωτήματα; Ας θεωρήσουμε τον ακόλουθο αναδρομικό ορισμό ενός δυαδικού δέντρου αναζήτησης: το σύνολο των (μονοδιάστατων) σημείων χωρίζεται σε δύο υποσύνολα του ίδιου περίπου μεγέθους· το ένα υποσύνολο περιέχει τα σημεία που είναι μικρότερα ή ίσα της διχαστικής τιμής, και το άλλο περιέχει τα σημεία που είναι μεγαλύτερά της. Η διχαστική τιμή αποθηκεύεται στη ρίζα, και τα δύο υποσύνολα αποθηκεύονται αναδρομικά στα δύο υπόδεντρα.

Στη διδιάστατη περίπτωση κάθε σημείο έχει δύο σημαντικές τιμές: την τετμημένη και την τεταγμένη του. Επομένως, διχάζουμε πρώτα με βάση την τετμημένη, έπειτα με βάση την τεταγμένη, μετά ξανά με βάση την τετμημένη, κ.ο.κ. Ακριβέστερα, η διαδικασία έχει ως εξής. Στη ρίζα χωρίζουμε το σύνολο P μέσω μίας κατακόρυφης ευθείας ℓ σε δύο υποσύνολα του ίδιου περίπου μεγέθους. Η διχαστική ευθεία αποθηκεύεται στη ρίζα. Το υποσύνολο $P_{\text{αριστερό}}$ των σημείων στα αριστερά ή επί της διχαστικής ευθείας αποθηκεύεται στο αριστερό υπόδεντρο, ενώ το υποσύνολο $P_{\text{δεξιό}}$ των σημείων στα δεξιά της διχαστικής ευθείας αποθηκεύεται στο δεξιό υπόδεντρο. Στον αριστερό θυγατρικό κόμβο της ρίζας χωρίζουμε το $P_{\text{αριστερό}}$ σε δύο υποσύνολα μέσω μιας οριζόντιας ευθείας· τα σημεία κάτω από αυτήν την ευθεία ή επί της ευθείας αποθηκεύονται στο αριστερό υπόδεντρο του αριστερού θυγατρικού, ενώ τα σημεία πάνω από την ευθεία αποθηκεύονται στο δεξιό υπόδεντρο. Στον ίδιο τον αριστερό θυγατρικό αποθηκεύεται η διχαστική ευθεία. Παρομοίως, το σύνολο $P_{\text{δεξιό}}$ χωρίζεται μέσω μιας οριζόντιας ευθείας σε δύο υποσύνολα, τα οποία αποθηκεύονται στο αριστερό και στο δεξιό υπόδεντρο του δεξιού θυγατρικού. Στους εγγονούς της ρίζας, διχάζουμε τα σημεία και πάλι με κατακόρυφες ευθείες. Γενικά, στους κόμβους άρτιου βάθους ο διχασμός γίνεται με κατακόρυφες ευθείες, ενώ στους κόμβους περιττού βάθους ο διχασμός γίνεται με οριζόντιες ευθείες. Στο Σχήμα 5.3 φαίνεται η διαδικασία του διχασμού και η μορφή που έχει το αντίστοιχο δυαδικό δέντρο. Τα δέντρα αυτού του τύπου λέγονται *kd-δέντρα*. Αρχικά, η ονομασία αυτή σήμαινε «k-διάστατο δέντρο»· έτσι, το δέντρο που περιγράψαμε παραπάνω θα ήταν ένα 2d-δέντρο. Σήμερα, η αρχική σημασία έχει λησμονηθεί, και αυτό που παλιότερα ονομαζόταν 2d-δέντρο σήμερα αποκαλείται διδιάστατο kd-δέντρο.





Σχήμα 5.3
Ένα kd-δένδρο: αριστερά οι διαδοχικές διαιρέσεις του επιπέδου και δεξιά το αντίστοιχο δυαδικό δέντρο

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα kd-δέντρο με την αναδρομική διαδικασία που περιγράφεται παρακάτω, η οποία δέχεται δύο παραμέτρους εισόδου: ένα σύνολο σημείων και έναν ακέραιο. Η πρώτη παράμετρος είναι το σύνολο για το οποίο θέλουμε να κατασκευάσουμε το kd-δέντρο· αρχικά, αυτό είναι το σύνολο P. Η δεύτερη παράμετρος είναι το βάθος της αναδρομής ή, με άλλα λόγια, το βάθος της ρίζας του υποδέντρου που κατασκευάζεται στην αναδρομική κλήση. Κατά την πρώτη κλήση, η παράμετρος του βάθους έχει τιμή μηδέν. Η σημασία του βάθους έγκειται στο ότι, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, καθορίζει αν η διχαστική ευθεία πρέπει να είναι κατακόρυφη ή οριζόντια. Η διαδικασία επιστρέφει τη ρίζα του kd-δέντρου.

Αλγόριθμος Κατασκευη KD -Δεντρου(P, *βάθος*)
Είσοδος. Ένα σύνολο σημείων P και το τρέχον βάθος *βάθος*.
Έξοδος. Η ρίζα ενός kd-δέντρου που περιέχει το P.
εάν το P περιέχει μόνο ένα σημείο
    τότε επιστροφή ένα φύλλο που περιέχει αυτό το σημείο
  άλλως εάν το *βάθος* είναι άρτιο
        τότε Χωρίζουμε το P σε δύο υποσύνολα με μια κατακόρυφη ευθεία ℓ που διέρχεται από τη διάμεση τετμημένη των

σημείων του P. Έστω P_1 το σύνολο των σημείων στα αριστερά ή επί της ℓ, και P_2 το σύνολο των σημείων στα δεξιά της ℓ.

5. **άλλως** Χωρίζουμε το P σε δύο υποσύνολα με μια οριζόντια ευθεία ℓ που διέρχεται από τη διάμεση τεταγμένη των σημείων του P. Έστω P_1 το σύνολο των σημείων κάτω από την ℓ ή επ' αυτής, και P_2 το σύνολο των σημείων πάνω από την ℓ.
6. $\nu_{\text{αριστερός}} \leftarrow$ Κατασκευη KD-Δεντρου($P_1, \beta\acute{\alpha}\theta o\varsigma + 1$)
7. $\nu_{\text{δεξιός}} \leftarrow$ Κατασκευη KD-Δεντρου($P_2, \beta\acute{\alpha}\theta o\varsigma + 1$)
8. Δημιουργούμε έναν κόμβο ν στον οποίο αποθηκεύουμε την ℓ, και θέτουμε τους $\nu_{\text{αριστερός}}$ και $\nu_{\text{δεξιός}}$ αριστερό θυγατρικό και δεξιό θυγατρικό του ν, αντίστοιχα.
9. **επιστροφή** ν

Ο αλγόριθμος εφαρμόζει τη σύμβαση ότι το σημείο επί της διχαστικής ευθείας (αυτό που καθορίζει τη διάμεση τετμημένη ή τεταγμένη) ανήκει στο υποσύνολο αριστερά ή κάτω από τη διχαστική ευθεία. Για να λειτουργήσει η διαδικασία αυτή σωστά, ο διάμεσος ενός συνόλου n τιμών θα πρέπει να έχει οριστεί ως η $\lceil n/2 \rceil$-οστή μικρότερη τιμή. Αυτό σημαίνει ότι ο διάμεσος δύο τιμών είναι η μικρότερη από τις δύο, πράγμα που εξασφαλίζει ότι ο αλγόριθμος τερματίζει.

Προτού εξετάσουμε τον αλγόριθμο απάντησης του ερωτήματος, ας αναλύσουμε τον χρόνο κατασκευής ενός διδιάστατου kd-δέντρου. Σε κάθε αναδρομική κλήση, το πιο χρονοβόρο βήμα είναι η εύρεση της διχαστικής ευθείας, η οποία απαιτεί τον εντοπισμό της διαμέσης τετμημένης ή τεταγμένης, ανάλογα με το αν το βάθος είναι άρτιο ή περιττό. Γενικά, η εύρεση διαμέσου μπορεί να επιτευχθεί σε γραμμικό χρόνο. Ωστόσο, οι αλγόριθμοι που το επιτυγχάνουν αυτό είναι μάλλον περίπλοκοι. Μια καλύτερη μέθοδος είναι να προταξινομήσουμε το σύνολο των σημείων, τόσο κατά τετμημένη όσο και κατά τεταγμένη. Έτσι, το σύνολο P διαβιβάζεται στη διαδικασία υπό τη μορφή δύο ταξινομημένων καταλόγων, του πρώτου κατά τετμημένη και του δεύτερου κατά τεταγμένη. Έχοντας στη διάθεσή μας τους δύο ταξινομημένους καταλόγους, είναι εύκολο να βρούμε τη διάμεση τετμημένη (όταν το βάθος είναι άρτιο) ή τη διάμεση τεταγμένη (όταν το βάθος είναι περιττό) σε γραμμικό χρόνο. Είναι επίσης εύκολο να κατασκευάσουμε σε γραμμικό χρόνο από τους δεδομένους καταλόγους τους ταξινομημένους καταλόγους για τις δύο αναδρομικές κλήσεις. Επομένως, ο χρόνος κατασκευής $T(n)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

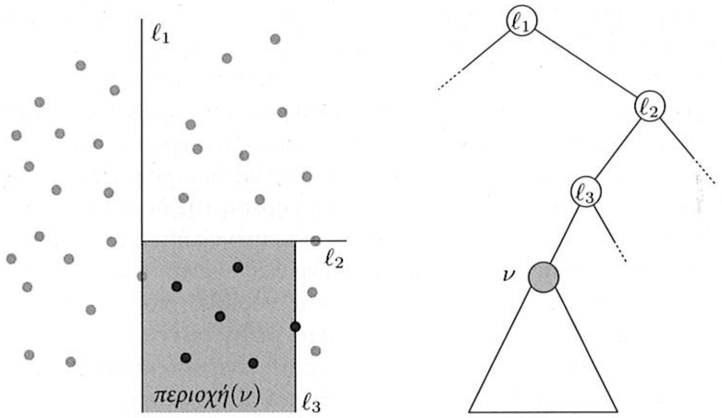
$$T(n) = \begin{cases} O(1), & \text{αν } n = 1, \\ O(n) + 2T(\lceil n/2 \rceil), & \text{αν } n > 1, \end{cases}$$

που έχει λύση $O(n \log n)$. Αυτό το άνω φράγμα υπερκαλύπτει τον χρόνο που αναλώνουμε για την προταξινόμηση των σημείων κατά τετμημένη και κατά τεταγμένη.

Για να υπολογίσουμε ένα φράγμα για τον απαιτούμενο χώρο, παρατηρούμε ότι σε κάθε φύλλο του kd-δέντρου αποθηκεύεται ένα διαφορετικό σημείο του P. Συνεπώς, το πλήθος των φύλλων είναι n. Δεδομένου ότι το kd-δέντρο είναι δυαδικό και ότι κάθε φύλλο ή εσωτερικός κόμβος χρησιμοποιεί χώρο $O(1)$, συμπεραίνουμε ότι ο συνολικός χώρος είναι $O(n)$. Καταλήγουμε έτσι στο λήμμα που ακολουθεί.

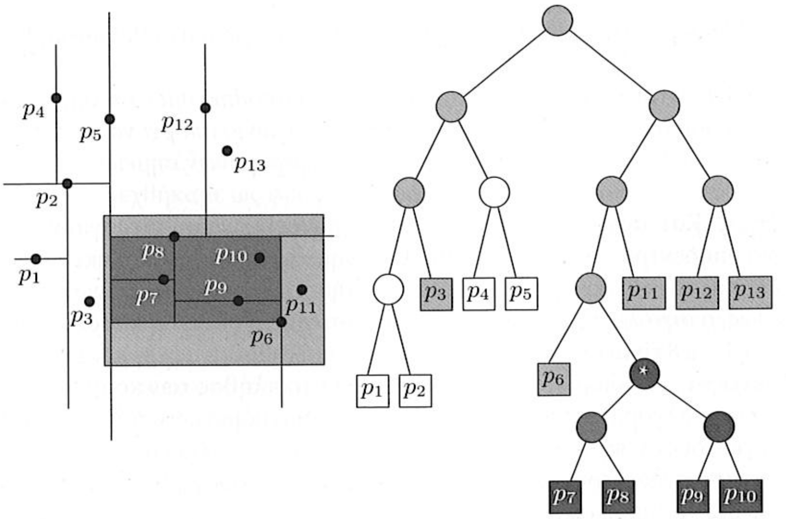
Λήμμα 5.3 *Ένα kd-δέντρο για ένα σύνολο n σημείων καταλαμβάνει χώρο $O(n)$ και μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $O(n \log n)$.*

Ας εξετάσουμε τώρα τον αλγόριθμο απάντησης του ερωτήματος. Η διχαστική ευθεία που είναι αποθηκευμένη στη ρίζα χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα. Τα σημεία που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο αποθηκεύονται στο αριστερό υπόδεντρο, και εκείνα που βρίσκονται στο δεξιό ημιεπίπεδο αποθηκεύονται στο δεξιό υπόδεντρο. Κατά μία έννοια, ο αριστερός θυγατρικός της ρίζας αντιστοιχεί στο αριστερό ημιεπίπεδο και ο δεξιός θυγατρικός στο δεξιό ημιεπίπεδο. (Η σύμβαση που ακολουθείται στη διαδικασία ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ KD-ΔΕΝΤΡΟΥ, σύμφωνα με την οποία το σημείο πάνω στη διχαστική ευθεία ανήκει στο αριστερό υποσύνολο συνεπάγεται ότι το αριστερό ημιεπίπεδο είναι δεξιά κλειστό και το δεξιό ημιεπίπεδο αριστερά ανοιχτό.) Οι άλλοι κόμβοι ενός kd-δέντρου αντιστοιχούν επίσης σε περιοχές του επιπέδου. Για παράδειγμα, ο αριστερός θυγατρικός του αριστερού θυγατρικού της ρίζας αντιστοιχεί στην περιοχή που οριοθετείται εκ δεξιών από τη διχαστική ευθεία που είναι αποθηκευμένη στη ρίζα και εκ των άνω από τη διχαστική ευθεία που είναι αποθηκευμένη στον αριστερό θυγατρικό της ρίζας. Γενικά, η περιοχή που αντιστοιχεί σε έναν κόμβο ν είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που ενδέχεται να μην είναι φραγμένο (δηλ. οριοθετημένο) σε μία ή περισσότερες πλευρές του. Κάθε τέτοιο παραλληλόγραμμο οριοθετείται από διχαστικές ευθείες που είναι αποθηκευμένες σε προγόνους τού ν –βλ. Σχήμα 5.4. Η περιοχή που αντιστοι-



Σχήμα 5.4
Αντιστοιχία μεταξύ κόμβων ενός kd-δέντρου και περιοχών του επιπέδου

χεί σε έναν κόμβο ν συμβολίζεται *περιοχή*(ν). Η περιοχή που αντιστοιχεί στη ρίζα ενός kd-δέντρου είναι απλώς ολόκληρο το επίπεδο. Παρατηρούμε ότι ένα σημείο είναι αποθηκευμένο στο υπόδεντρο με ρίζα έναν κόμβο ν εάν και μόνο εάν ανήκει στην *περιοχή*(ν). Για παράδειγμα, το υπόδεντρο του κόμβου ν στο Σχήμα 5.4 περιέχει τα σημεία που αναπαρίστανται με μαύρες κουκκίδες. Επομένως, το υπόδεντρο με ρίζα ν πρέπει να διερευνηθεί μόνο εάν το ορθογώνιο ενδιαφέροντος τέμνει την *περιοχή*(ν). Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στον εξής αλγόριθμο απάντησης: διανύουμε το kd-δέντρο, αλλά επισκεπτόμαστε μόνο κόμβους των οποίων η περιοχή τέμνεται από το ορθογώνιο ενδιαφέροντος. Όποτε μια περιοχή εμπεριέχεται εξ ολοκλήρου στο ορθογώνιο ενδιαφέροντος, μπορούμε να αναφέρουμε όλα τα σημεία που είναι αποθηκευμένα στο υπόδεντρο της. Όποτε η διάνυση φτάνει σε φύλλο, θα πρέπει να ελέγχουμε αν το σημείο που είναι αποθηκευμένο στο φύλλο εμπεριέχεται στο ορθογώνιο ενδιαφέροντος και, αν ναι, να το αναφέρουμε. Στο Σχήμα 5.5 απεικονίζεται μια ενδεικτική εκτέλεση του αλγορίθμου. (Σημειωτέον ότι το kd-δέντρο του Σχήματος 5.5 δεν θα μπορούσε να έχει κατασκευαστεί από τον αλγόριθμο ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ KD-ΔΕΝΤΡΟΥ, διότι κάποιες από τις επιλεγμένες διχαστικές τιμές δεν είναι οι διάμεσες.) Οι γκρίζοι κόμβοι είναι αυτοί που επισκεπτόμαστε όταν χρησιμοποιούμε ως ορθογώνιο ενδιαφέροντος το γκρίζο πλαίσιο. Ο κόμβος με τον αστερίσκο αντιστοιχεί σε μια περιοχή που εμπεριέχεται εξ ολοκλήρου στο ορθογώνιο ενδιαφέροντος· πρόκειται για την ορθογώνια περιοχή που απεικονίζεται με σκούρο γκρίζο χρώμα. Συνεπώς, ο αλγόριθμος διανύει το σκούρο γκρίζο υπόδεντρο με ρίζα αυτόν τον κόμβο, και αναφέρει όλα τα αποθηκευμένα σε αυτό σημεία. Τα υπόλοιπα φύλλα που επισκέπτεται ο αλγόριθμος εμπίπτουν σε περιοχές που εμπεριέχονται μόνο εν μέρει στο ορθογώνιο ενδιαφέροντος. Άρα θα πρέπει να ελεγχθεί αν τα εκεί αποθηκευμένα σημεία περιλαμβάνονται στην έκταση ενδιαφέροντος· ως αποτέλεσμα αυτού του ελέγχου, ο αλγόριθμος αναφέρει τα σημεία p_6 και p_{11}, αλλά όχι τα σημεία p_3, p_{12}, και p_{13}.



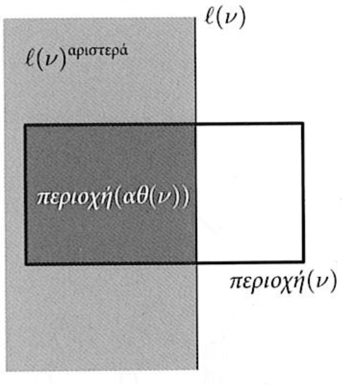
Σχήμα 5.5
Ένα ερώτημα προς κάποιο kd-δέντρο

Ο αλγόριθμος απάντησης περιγράφεται από την παρακάτω αναδρομική διαδικασία, που δέχεται ως ορίσματα τη ρίζα ενός kd-δέντρου και την έκταση ενδιαφέροντος R. Χρησιμοποιεί ένα υποπρόγραμμα Αναφορα Υποδεντρου(ν), που διανύει το υπόδεντρο με ρίζα τον κόμβο ν και αναφέρει όλα τα σημεία που είναι αποθηκευμένα στα φύλλα του. Υπενθυμίζουμε ότι με $\alpha\theta(\nu)$ και $\delta\theta(\nu)$ συμβολίζουμε τον αριστερό και τον δεξιό θυγατρικό κόμβο του ν αντίστοιχα.

Αλγόριθμος Διερευνηση KD -Δεντρου(ν, R)
Είσοδος. Η ρίζα (κάποιου υποδέντρου) ενός kd-δέντρου, και κάποια έκταση R.
Έξοδος. Όλα τα σημεία των φύλλων κάτω από τον ν που κείνται εντός της R.

εάν ο ν είναι φύλλο
    τότε αναφέρουμε το αποθηκευμένο στον ν σημείο, εφόσον κείται εντός της R
άλλως εάν η *περιοχή*$(\alpha\theta(\nu))$ εμπεριέχεται εξ ολοκλήρου στην R
    τότε Αναφορα Υποδεντρου($\alpha\theta(\nu)$)
    άλλως εάν η *περιοχή*$(\alpha\theta(\nu))$ τέμνει την R
        τότε Διερευνηση KD-Δεντρου($\alpha\theta(\nu), R$)
    εάν η *περιοχή*$(\delta\theta(\nu))$ εμπεριέχεται εξ ολοκλήρου στην R
    τότε Αναφορα Υποδεντρου($\delta\theta(\nu)$)
    άλλως εάν η *περιοχή*$(\delta\theta(\nu))$ τέμνει την R
        τότε Διερευνηση KD-Δεντρου($\delta\theta(\nu), R$)

Ο κύριος έλεγχος που εκτελεί ο αλγόριθμος απάντησης του ερωτήματος αφορά το αν η έκταση R του ερωτήματος τέμνει την περιοχή που αντιστοιχεί σε κάποιον κόμβο ν. Για να είμαστε σε θέση να εκτελούμε αυτόν τον έλεγχο, μπορούμε στο στάδιο της προεπεξεργασίας να έχουμε υπολογίσει και αποθηκεύσει την *περιοχή*(ν), για κάθε ν. Ωστόσο, αυτό δεν είναι απαραίτητο: μπορούμε να τηρούμε την τρέχουσα περιοχή κατά τις αναδρομικές κλήσεις χρησιμοποιώντας τις ευθείες που είναι αποθηκευμένες στους εσωτερικούς κόμβους. Για παράδειγμα, η περιοχή που αντιστοιχεί στον αριστερό θυγατρικό ενός κόμβου ν άρτιου βάθους μπορεί να υπολογιστεί από την *περιοχή*(ν) ως εξής:



$$\textit{περιοχή}(\alpha\theta(\nu)) = \textit{περιοχή}(\nu) \cap \ell(\nu)^{\text{αριστερά}},$$

όπου $\ell(\nu)$ η διχαστική ευθεία που είναι αποθηκευμένη στον ν, και $\ell(\nu)^{\text{αριστερά}}$ το ημιεπίπεδο στα αριστερά της $\ell(\nu)$ που περιλαμβάνει και την $\ell(\nu)$.

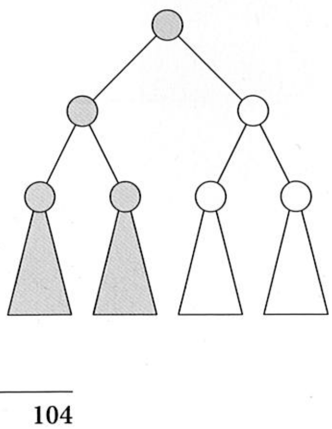
Παρατηρούμε ότι πουθενά στον παραπάνω αλγόριθμο απάντησης του ερωτήματος δεν προϋποτίθεται ότι η έκταση R του ερωτήματος έχει σχήμα ορθογωνίου. Πράγματι, ο αλγόριθμος λειτουργεί σωστά και για οποιαδήποτε άλλη έκταση ενδιαφέροντος.

Ας αναλύσουμε στη συνέχεια τον χρόνο απάντησης για μια ορθογωνική έκταση.

Λήμμα 5.4 *Σε ένα kd-δέντρο όπου βρίσκονται αποθηκευμένα n σημεία, κάθε ερώτημα που αφορά ένα αξονοπαράλληλο ορθογώνιο μπορεί να απαντηθεί σε χρόνο $O(\sqrt{n}+k)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων σημείων.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, παρατηρήστε ότι ο χρόνος που απαιτείται για να διανυθεί ένα υπόδεντρο και να αναφερθούν τα σημεία που είναι αποθηκευμένα στα φύλλα του είναι γραμμικός ως προς το πλήθος των αναφερόμενων σημείων. Συνεπώς, ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για τη διάνυση υποδέντρων στα βήματα 4 και 8 είναι $O(k)$, όπου k το συνολικό πλήθος αναφερόμενων σημείων. Απομένει να προσδιορίσουμε ένα φράγμα για το πλήθος των κόμβων που επισκέπτεται ο αλγόριθμος απάντησης εκτός των διανυόμενων υποδέντρων. (Πρόκειται για τους ανοιχτούς γκρίζους κόμβους του Σχ. 5.5.) Για κάθε τέτοιον κόμβο ν, η έκταση ενδιαφέροντος τέμνει «γνησίως» την *περιοχή*(ν), δηλαδή την τέμνει χωρίς να την εμπεριέχει εξ ολοκλήρου. Με άλλα λόγια, το σύνορο της έκτασης ενδιαφέροντος τέμνει την *περιοχή*(ν). Για να εκτιμήσουμε το πλήθος αυτών των κόμβων, θα υπολογίσουμε ένα φράγμα για το πλήθος των περιοχών που τέμνονται από οποιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία. Με τον τρόπο αυτό θα προσδιορίσουμε ένα άνω φράγμα για το πλήθος των περιοχών που τέμνονται από την αριστερή και τη δεξιά πλευρά του ορθογωνίου ενδιαφέροντος. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να προσδιοριστεί και ένα φράγμα για το πλήθος των περιοχών που τέμνονται από την άνω και την κάτω πλευρά της έκτασης ενδιαφέροντος.

Έστω ℓ μια κατακόρυφη ευθεία και $\mathcal{T}$ ένα kd-δέντρο. Έστω $\ell(\textit{ρίζα}(\mathcal{T}))$ η διχαστική ευθεία που είναι αποθηκευμένη στη ρίζα του kd-δέντρου. Η ευθεία ℓ τέμνει είτε την περιοχή στα αριστερά της $\ell(\textit{ρίζα}(\mathcal{T}))$ είτε την περιοχή στα δεξιά της $\ell(\textit{ρίζα}(\mathcal{T}))$, αλλά όχι και τις δύο. Η παρατήρηση αυτή φαίνεται να συνεπάγεται ότι το πλήθος $Q(n)$ των τεμνόμενων περιοχών σε ένα kd-δέντρο που έχει αποθηκευμένα n σημεία ικανοποιεί την αναδρομική σχέση $Q(n) = 1+Q(n/2)$. Όμως αυτό δεν ισχύει, διότι στους θυγατρικούς κόμβους της ρίζας οι διχαστικές ευθείες είναι οριζόντιες. Αυτό σημαίνει ότι αν η ευθεία ℓ τέμνει, π.χ., την *περιοχή*$(\textit{αθ}(\textit{ρίζα}(\mathcal{T})))$, τότε θα τέμνει πάντα τις περιοχές που αντιστοιχούν και στους δύο θυγατρικούς του $\textit{αθ}(\textit{ρίζα}(\mathcal{T}))$. Συνεπώς, η νέα κατάσταση της αναδρομικής διαδικασίας δεν είναι ίδια με την αρχική, και επομένως η παραπάνω αναδρομική σχέση είναι λανθασμένη. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η νέα κατάσταση της αναδρομικής διαδικασίας είναι ακριβώς ίδια με την αρχική: η διχαστική ευθεία στη ρίζα του υποδέντρου πρέπει να είναι κατακόρυφη. Οδηγούμαστε έτσι στο να ορίσουμε εκ νέου την τιμή $Q(n)$ ως το πλήθος των τεμνόμενων περιοχών σε ένα kd-δέντρο με n σημεία και κατακόρυφη διχαστική ευθεία στη ρίζα. Για να διατυπώσουμε μια αναδρομική σχέση για την $Q(n)$ θα πρέπει τώρα να πάμε δύο επίπεδα παρακάτω στο δέντρο. Καθένας από τους τέσσερεις κόμβους του δέντρου σε βάθος δύο αντιστοιχεί σε μια περιοχή που περιέχει $n/4$ σημεία. (Για την ακρίβεια, κάθε τέτοια περιοχή μπορεί να περιέχει το πολύ $\lceil \lceil n/2 \rceil /2 \rceil = \lceil n/4 \rceil$ σημεία, αλλά ασυμπτωτικά αυτό δεν επηρεάζει τη λύση της παρακάτω αναδρομικής σχέσης.) Δύο από τους τέσσερεις κόμβους αντιστοιχούν σε τεμνόμενες περιοχές, οπότε θα πρέπει να μετρήσουμε αναδρομικά το πλήθος των τεμνόμενων περιοχών σε αυτά τα υπόδεντρα. Επιπλέον, η ℓ τέμνει την περιοχή της ρίζας και ενός εκ των θυγατρικών της κόμβων. Επομένως η $Q(n)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση



$$Q(n) = \begin{cases} O(1), & \text{αν } n = 1, \\ 2 + 2Q(n/4), & \text{αν } n > 1. \end{cases}$$

Η λύση αυτής της σχέσης είναι $Q(n) = O(\sqrt{n})$. Με άλλα λόγια, κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει $O(\sqrt{n})$ περιοχές ενός kd-δέντρου. Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το συνολικό πλήθος περιοχών που τέμνονται από μια οριζόντια ευθεία είναι $O(\sqrt{n})$. Το συνολικό πλήθος περιοχών που τέμνονται από το σύνορο μιας ορθογώνιας έκτασης ενδιαφέροντος είναι επίσης $O(\sqrt{n})$. ◻

Στην παραπάνω ανάλυση μάλλον υπερεκτιμήσαμε τον χρόνο απάντησης του ερωτήματος: δεχθήκαμε ως φράγμα για το πλήθος των περιοχών που τέμνουν μια πλευρά του ορθογωνίου ενδιαφέροντος το πλήθος των περιοχών που τέμνουν τον «φορέα» της πλευράς (την ευθεία που διέρχεται από αυτήν). Σε πολλές περιπτώσεις που εμφανίζονται στην πράξη, η έκταση ενδιαφέροντος είναι μικρή, οπότε οι πλευρές έχουν μικρό μήκος και τέμνουν πολύ λιγότερες περιοχές. Για παράδειγμα, όταν η έκταση ενδιαφέροντος είναι $[x:x] \times [y:y]$ –οπότε ουσιαστικά ρωτάμε αν το σημείο (x, y) ανήκει στο σύνολο των σημείων– ο χρόνος απάντησης είναι $O(\log n)$.

Το θεώρημα που ακολουθεί συνοψίζει τα συμπεράσματά μας για την απόδοση των kd-δέντρων.

Θεώρημα 5.5 *Ένα kd-δέντρο για ένα σύνολο P από n σημεία στο επίπεδο καταλαμβάνει χώρο $O(n)$ και μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $O(n \log n)$. Ένα ορθογωνικό εκτασιακό ερώτημα προς το kd-δέντρο μπορεί να απαντηθεί σε χρόνο $O(\sqrt{n} + k)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων σημείων.*

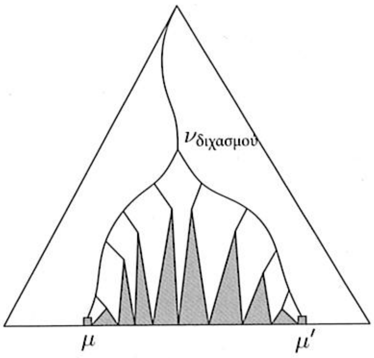
Τα kd-δέντρα μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για σημειοσύνολα σε τρεις ή περισσότερες διαστάσεις. Ο αλγόριθμος κατασκευής είναι παρόμοιος με αυτόν της διδιάστατης περίπτωσης: Στη ρίζα χωρίζουμε το σύνολο των σημείων σε δύο υποσύνολα του ίδιου περίπου μεγέθους μέσω ενός υπερεπιπέδου κάθετου στον άξονα x_1. Με άλλα λόγια, στη ρίζα το σημειοσύνολο διαμερίζεται ως προς την πρώτη συντεταγμένη των σημείων. Στους θυγατρικούς κόμβους της ρίζας η διαμέριση γίνεται ως προς τη δεύτερη συντεταγμένη, στους κόμβους βάθους 2 ως προς την τρίτη συντεταγμένη, κ.ο.κ., μέχρι το βάθος $d - 1$ όπου διαμερίζουμε ως προς την τελευταία συντεταγμένη. Στο βάθος d αρχίζουμε πάλι από την αρχή, διαμερίζοντας ως προς την πρώτη συντεταγμένη. Η αναδρομή τερματίζεται όταν έχει απομείνει μόνο ένα σημείο, το οποίο και αποθηκεύεται σε κάποιο φύλλο. Δεδομένου ότι ένα d-διάστατο kd-δέντρο για σύνολο n σημείων αποτελεί δυαδικό δέντρο με n φύλλα, καταλαμβάνει χώρο $O(n)$. Ο χρόνος κατασκευής είναι $O(n \log n)$. (Ως συνήθως, υποθέτουμε ότι το πλήθος d είναι σταθερό.)

Όπως και στο επίπεδο, οι κόμβοι ενός d-διάστατου kd-δέντρου αντιστοιχούν σε περιοχές. Ο αλγόριθμος απάντησης ερωτημάτων επισκέπτεται τους κόμβους που αντιστοιχούν σε περιοχές οι οποίες τέμνονται γνησίως από την έκταση ενδιαφέροντος, και διανύει τα υπόδεντρα των οποίων οι ριζικοί κόμβοι αντιστοιχούν σε περιοχές που εμπεριέχονται εξ ολοκλήρου στην έκταση ενδιαφέροντος (για να αναφέρει τα σημεία που είναι αποθηκευμένα στα φύλλα των υποδέντρων αυτών). Αποδεικνύεται ότι ο χρόνος απάντησης διέπεται από το φράγμα $O(n^{1-1/d} + k)$.

5.3 Εκτασιακά δέντρα

Τα kd-δέντρα, που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, έχουν χρόνο απάντησης σε ερωτήματα $O(\sqrt{n} + k)$. Επομένως, όταν το πλήθος των αναφερόμενων σημείων είναι μικρό, ο χρόνος απάντησης είναι σχετικά μεγάλος. Σε αυτήν την ενότητα θα περιγράψουμε μια άλλη δομή δεδομένων για ορθογωνικά εκτασιακά ερωτήματα, το *εκτασιακό δέντρο*, που έχει μικρότερο χρόνο απάντησης, και συγκεκριμένα $O(\log^2 n + k)$. Το τίμημα για αυτήν τη βελτίωση είναι η αύξηση στον απαιτούμενο χώρο από $O(n)$ για τα kd-δέντρα σε $O(n \log n)$ για τα εκτασιακά.

Όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως, ένα διδιάστατο εκτασιακό ερώτημα αποτελείται ουσιαστικά από δύο μονοδιάστατα υποερωτήματα, ένα για την τετμημένη των σημείων και ένα για την τεταγμένη. Η παρατήρηση αυτή οδήγησε στην ιδέα να διχάζουμε το εκάστοτε σημειοσύνολο εναλλάξ ως προς τετμημένη και τεταγμένη· με τον τρόπο αυτό προέκυψε το kd-δέντρο. Για να φτάσουμε στο εκτασιακό δέντρο, θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την παρατήρηση με διαφορετικό τρόπο.

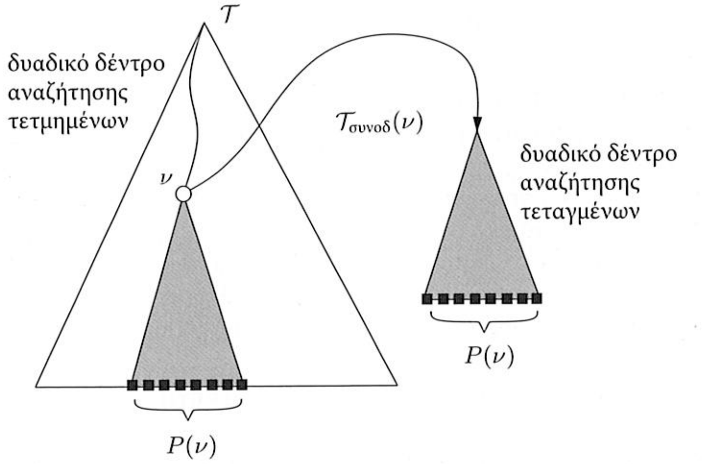


Έστω P ένα σύνολο n σημείων στο επίπεδο τα οποία θέλουμε να προεπεξεργαστούμε προκειμένου να απαντάμε σε ορθογωνικά εκτασιακά ερωτήματα. Έστω $[x : x'] \times [y : y']$ η έκταση ενδιαφέροντος. Αρχικά εστιάζουμε την προσοχή μας στην εύρεση των σημείων με τετμημένη στο διάστημα $[x : x']$, το οριζόντιο διάστημα του ορθογωνίου ενδιαφέροντος, και αφήνουμε τις τεταγμένες για αργότερα. Αν μας ενδιαφέρει μόνο η τετμημένη, τότε το ερώτημα είναι ένα μονοδιάστατο εκτασιακό ερώτημα. Στην Ενότητα 5.1 είδαμε πώς μπορεί να απαντηθεί ένα τέτοιο ερώτημα: με ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης επί των τετμημένων των σημείων. Σε γενικές γραμμές, ο αλγόριθμος απάντησης είχε ως εξής. Αναζητούμε στο δέντρο τα όρια x και x' μέχρι να φτάσουμε σε έναν κόμβο $\nu_{\text{διχασμού}}$ όπου οι διαδρομές αναζήτησης διχάζονται. Από τον αριστερό θυγατρικό κόμβο του $\nu_{\text{διχασμού}}$ συνεχίζουμε την αναζήτηση του x, και σε κάθε κόμβο ν όπου η διαδρομή συνεχίζεται αριστερά, αναφέρουμε όλα τα σημεία του δεξιού υποδέντρου του ν. Παρομοίως, συνεχίζουμε την αναζήτηση του x' από τον δεξιό θυγατρικό κόμβο του $\nu_{\text{διχασμού}}$, και σε κάθε κόμβο ν όπου η διαδρομή συνεχίζεται δεξιά αναφέρουμε όλα τα σημεία του αριστερού υποδέντρου του ν. Τέλος, ελέγχουμε αν τα φύλλα μ και μ' όπου τερματίζουν οι δύο διαδρομές περιέχουν σημεία εντός της έκτασης ενδιαφέροντος. Ουσιαστικά, επιλέγουμε ένα σύνολο $O(\log n)$ υποδέντρων που περιέχουν συλλογικά ακριβώς τα σημεία των οποίων η τετμημένη κείται στο οριζόντιο διάστημα του ορθογωνίου ενδιαφέροντος.

Για κάθε κόμβο ν, ονομάζουμε *κανονικό υποσύνολο* του ν το υποσύνολο των σημείων που είναι αποθηκευμένα στα φύλλα του υποδέντρου με ρίζα τον ν. Έτσι, π.χ., το κανονικό υποσύνολο της ρίζας του δέντρου είναι ολόκληρο το σύνολο P. Το κανονικό υποσύνολο ενός φύλλου είναι απλώς το σημείο που είναι αποθηκευμένο στο συγκεκριμένο φύλλο. Συμβολίζουμε το κανονικό υποσύνολο του κόμβου ν με $P(\nu)$. Όπως είδαμε αμέσως παραπάνω, το υποσύνολο των σημείων των οποίων η τετμημένη ανήκει σε κάποια έκταση ενδιαφέροντος μπορεί να εκφραστεί ως ξένη ένωση $O(\log n)$ κανονικών υποσυνόλων: των συνόλων $P(\nu)$ των κόμβων ν που αποτελούν τις ρίζες των επιλεγόμενων υποδέντρων. Από όλα τα σημεία κάθε τέτοιου κανονικού υποσυνόλου $P(\nu)$, θέλουμε να αναφέρουμε μόνο όσα έχουν τεταγμένη στο διάστημα $[y : y']$. Αυτό είναι ένα δεύτερο μονοδιάστατο ερώτημα, το οποίο μπορούμε επίσης να απαντήσουμε, αρκεί να έχουμε στη διάθεσή μας ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης ως προς τις τεταγμένες των σημείων του $P(\nu)$. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η ακόλουθη δομή δεδομένων για ορθογώνια εκτασιακά ερωτήματα επί ενός συνόλου P από n σημεία στο επίπεδο.

- Το κυρίως δέντρο είναι ένα ισοσταθμισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης $\mathcal{T}$ επί των τετμημένων των σημείων του P.

- Για κάθε εσωτερικό κόμβο ή φύλλο ν του $\mathcal{T}$, το κανονικό υποσύνολο $P(\nu)$ αποθηκεύεται σε ένα ισοσταθμισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης $\mathcal{T}_{\text{συνοδ}}(\nu)$ επί των τεταγμένων των σημείων. Στον κόμβο ν αποθηκεύεται ένας δείκτης προς τη ρίζα του δέντρου $\mathcal{T}_{\text{συνοδ}}(\nu)$, το οποίο ονομάζεται *συνοδευτική δομή* του ν.



Σχήμα 5.6
Ένα διδιάστατο εκτασιακό δέντρο

Αυτή η δομή δεδομένων λέγεται εκτασιακό δέντρο. Στο Σχήμα 5.6 απεικονίζεται η δομή ενός εκτασιακού δέντρου. Οι δομές δεδομένων στις οποίες οι κόμβοι έχουν δείκτες προς συνοδευτικές δομές ονομάζονται συχνά *πολυβαθμιδικές δομές δεδομένων*. Το κυρίως δέντρο $\mathcal{T}$ ονομάζεται *δέντρο πρώτης βαθμίδας*, και οι συνοδευτικές δομές ονομάζονται *δέντρα δεύτερης βαθμίδας*. Οι πολυβαθμιδικές δομές δεδομένων παίζουν σημαντικό ρόλο στην υπολογιστική γεωμετρία· περισσότερα παραδείγματα μπορείτε να βρείτε στα Κεφάλαια 10 και 16.

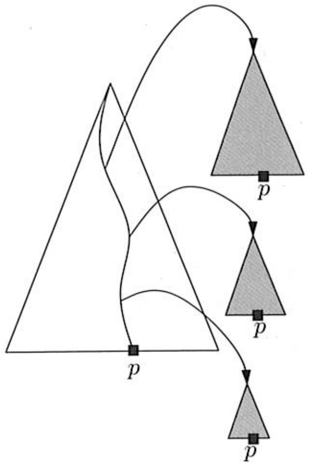
Ένα εκτασιακό δέντρο μπορεί να κατασκευαστεί με τον ακόλουθο αναδρομικό αλγόριθμο, που δέχεται ως είσοδο το σύνολο των σημείων $P := \{p_1, \ldots, p_n\}$ ταξινομημένο κατά τετμημένη και επιστρέφει τη ρίζα ενός διδιάστατου εκτασιακού δέντρου $\mathcal{T}$ για το P. Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, υποθέτουμε ότι τόσο οι τετμημένες όσο και οι τεταγμένες των σημείων είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Η παραδοχή αυτή θα αρθεί στην Ενότητα 5.5.

Αλγόριθμος Κατασκευη Διδιαστατου Εκτασιακου Δεντρου(P)
Είσοδος. Ένα σύνολο P σημείων στο επίπεδο.
Έξοδος. Η ρίζα ενός διδιάστατου εκτασιακού δέντρου για το P.
1. Δημιουργούμε τη συνοδευτική δομή: Κατασκευάζουμε ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης $\mathcal{T}_{\text{συνοδ}}$ για το σύνολο P_y των τεταγμένων των σημείων του P. Στα φύλλα του $\mathcal{T}_{\text{συνοδ}}$ αποθηκεύουμε όχι απλώς τις τεταγμένες των σημείων του P, αλλά τα ίδια τα σημεία.
2. **εάν** το P περιέχει μόνο ένα σημείο
3. **τότε** δημιουργούμε ένα φύλλο ν όπου αποθηκεύεται αυτό το σημείο, και θέτουμε το $\mathcal{T}_{\text{συνοδ}}$ συνοδευτική δομή του ν
4. **άλλως** Χωρίζουμε το P σε δύο υποσύνολα· το ένα υποσύνολο $P_{\text{αριστερό}}$ περιέχει τα σημεία με τετμημένη μικρότερη ή ίση της διάμεσης τετμημένης $x_{\text{διάμ}}$, ενώ το άλλο υποσύνολο $P_{\text{δεξιό}}$ περιέχει τα σημεία με τετμημένη μεγαλύτερη της $x_{\text{διάμ}}$.
5. $\nu_{\text{αριστερός}} \leftarrow$ Κατασκευη Διδιαστατου
6. Εκτασιακου Δεντρου($P_{\text{αριστερό}}$)
7. $\nu_{\text{δεξιός}} \leftarrow$ Κατασκευη Διδιαστατου
8. Εκτασιακου Δεντρου($P_{\text{δεξιό}}$)
9. Δημιουργούμε έναν κόμβο ν όπου αποθηκεύεται η $x_{\text{διάμ}}$, θέτουμε τον $\nu_{\text{αριστερός}}$ αριστερό θυγατρικό του ν, τον $\nu_{\text{δεξιός}}$ δεξιό θυγατρικό του ν, και το $\mathcal{T}_{\text{συνοδ}}$ συνοδευτική δομή του ν.
10. **επιστροφή** ν

Σημειωτέον ότι στα φύλλα των συνοδευτικών δομών δεν αποθηκεύουμε απλώς τις τεταγμένες των σημείων αλλά τα ίδια τα σημεία. Αυτό είναι σημαντικό διότι, όταν διερευνούμε τις συνοδευτικές δομές, πρέπει να αναφέρουμε τα σημεία και όχι απλώς τις τεταγμένες τους.

Λήμμα 5.6 *Ένα εκτασιακό δέντρο για ένα σύνολο n σημείων στο επίπεδο απαιτεί χώρο $O(n \log n)$.*

Απόδειξη. Κάθε σημείο p του P αποθηκεύεται μόνο στις συνοδευτικές δομές των κόμβων που βρίσκονται πάνω στη διαδρομή του $\mathcal{T}$ προς το φύλλο που περιέχει το p. Επομένως, για όλους τους κόμβους σε κάποιο δεδομένο βάθος του $\mathcal{T}$, το σημείο p αποθηκεύεται σε μία και μόνο μία συνοδευτική δομή. Καθώς τα μονοδιάστατα εκτασιακά δέντρα χρησιμοποιούν γραμμικό χώρο, έπεται ότι οι συνοδευτικές δομές όλων των κόμβων του $\mathcal{T}$ σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο βάθος χρησιμοποιούν συνολικά χώρο $O(n)$. Το βάθος του $\mathcal{T}$ είναι $O(\log n)$. Συνεπώς, ο συνολικός χώρος που απαιτείται είναι $O(n \log n)$. ⊡



Όπως τον περιγράψαμε, ο αλγόριθμος Κατασκευη Διδιαστατου Εκτασιακου Δεντρου δεν επιτυγχάνει τον βέλτιστο χρόνο κατασκευής, που είναι $O(n \log n)$. Για να επιτύχουμε αυτόν τον χρόνο πρέπει να εργαστούμε προσεκτικότερα. Η κατασκευή ενός δυαδικού δέντρου αναζήτησης από ένα αταξινόμητο σύνολο n τιμών απαιτεί χρόνο $O(n \log n)$. Αυτό σημαίνει ότι η κατασκευή της συνοδευτικής δομής στη γραμμή 1 θα απαιτούσε χρόνο $O(n \log n)$. Μπορούμε όμως να βελτιώσουμε την απόδοση αν τα σημεία του συνόλου P_y προταξινομηθούν κατά τεταγμένη· στην περίπτωση αυτή, το δυαδικό δέντρο αναζήτησης μπορεί να κατασκευαστεί από κάτω προς τα πάνω σε γραμμικό χρόνο. Επομένως, κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου κατασκευής τηρούμε το σύνολο των σημείων σε δύο καταλόγους, έναν ταξινομημένο κατά τετμημένη και έναν ταξινομημένο κατά τεταγμένη. Με τον τρόπο αυτόν, ο χρόνος που αναλώνουμε σε έναν κόμβο του κυρίως δέντρου $\mathcal{T}$ είναι γραμμικός ως προς το μέγεθος του κανονικού του υποσυνόλου. Επομένως, ο συνολικός χρόνος κατασκευής ισούται με τον απαιτούμενο χώρο, δηλαδή είναι της τάξης $O(n \log n)$. Καθώς η προταξινόμηση απαιτεί επίσης χρόνο $O(n \log n)$, ο συνολικός χρόνος κατασκευής είναι και πάλι $O(n \log n)$.

Στον αλγόριθμο απάντησης του ερωτήματος επιλέγονται αρχικά $O(\log n)$ κανονικά υποσύνολα που περιέχουν συλλογικά τα σημεία των οποίων η τετμημένη βρίσκεται στην έκταση $[x : x']$. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω του μονοδιάστατου αλγορίθμου απάντησης. Στη συνέχεια, από αυτά τα υποσύνολα αναφέρουμε τα σημεία των οποίων η τεταγμένη βρίσκεται στην έκταση $[y : y']$. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε επίσης τον μονοδιάστατο αλγόριθμο απάντησης, εφαρμόζοντάς τον αυτήν τη φορά επί των συνοδευτικών δομών που περιέχουν τα επιλεγμένα κανονικά υποσύνολα. Άρα ο αλγόριθμος απάντησης είναι ουσιαστικά ίδιος με τον μονοδιάστατο αλγόριθμο απάντησης Μονοδιαστατο Εκτασιακο Ερωτημα· η μόνη διαφορά είναι ότι οι κλήσεις της διαδικασίας Αναφορα Υποδεντρου αντικαθίστανται από κλήσεις της διαδικασίας Μονοδιαστατο Εκτασιακο Ερωτημα.

Αλγόριθμος Διδιαστατο Εκτασιακο Ερωτημα$(\mathcal{T}, [x : x'] \times [y : y'])$
Είσοδος. Ένα διδιάστατο εκτασιακό δέντρο $\mathcal{T}$ και μια έκταση $[x : x'] \times [y : y']$.
Έξοδος. Όλα τα σημεία του $\mathcal{T}$ που κείνται μέσα στην έκταση.

```
ν_διχασμού ← Ευρεση Διχαστικου Κομβου(T, x, x')
εάν ο κόμβος ν_διχασμού είναι φύλλο
    τότε ελέγχουμε αν το σημείο που είναι αποθηκευμένο στον ν_διχασμού
         πρέπει να αναφερθεί
  άλλως (* Ακολουθούμε τη διαδρομή αναζήτησης του x και καλούμε
         τη διαδικασία Μονοδιαστατο Εκτασιακο Ερωτημα για κάθε
         υπόδεντρο δεξιά της διαδρομής. *)
         ν ← αθ(ν_διχασμού)
         ενόσω ο κόμβος ν δεν είναι φύλλο
             εάν x ⩽ x_ν
                 τότε Μονοδιαστατο Εκτασιακο Ερωτημα
                         (T_συνοδ(δθ(ν)), [y : y'])
```

9. $\nu \leftarrow \alpha\theta(\nu)$
10. **άλλως** $\nu \leftarrow \delta\theta(\nu)$
11. Ελέγχουμε αν πρέπει να αναφερθεί το σημείο που είναι αποθηκευμένο στον κόμβο ν.
12. Παρομοίως, ακολουθούμε τη διαδρομή αναζήτησης του x' από τον $\delta\theta(\nu_{\text{διχασμού}})$, καλούμε τη διαδικασία Μονοδιαστατο Εκτασιακο Ερωτημα για την έκταση $[y : y']$ επί των συνοδευτικών δομών των υποδέντρων αριστερά της διαδρομής, και ελέγχουμε αν πρέπει να αναφερθεί το σημείο που είναι αποθηκευμένο στο φύλλο όπου καταλήγει η διαδρομή.

Λήμμα 5.7 *Οποιοδήποτε ερώτημα για αξονοπαράλληλο ορθογώνιο το οποίο υποβάλλεται σε ένα εκτασιακό δέντρο όπου έχουν αποθηκευτεί n σημεία απαιτεί χρόνο $O(\log^2 n + k)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων σημείων.*

Απόδειξη. Σε κάθε κόμβο ν του κυρίως δέντρου $\mathcal{T}$ αναλώνουμε σταθερό χρόνο για να προσδιορίσουμε προς τα πού συνεχίζεται η διαδρομή αναζήτησης, και ενδεχομένως καλούμε τη διαδικασία Μονοδιαστατο Εκτασιακο Ερωτημα. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2, ο χρόνος που αναλώνεται σε αυτήν την αναδρομική κλήση είναι $O(\log n + k_\nu)$, όπου k_ν το πλήθος των αναφερόμενων σημείων κατά την κλήση. Επομένως, ο συνολικός χρόνος που αναλώνεται είναι

$$\sum_\nu O(\log n + k_\nu),$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλους τους κόμβους του κυρίως δέντρου $\mathcal{T}$ που επισκεπτόμαστε. Παρατηρούμε ότι το άθροισμα $\sum_\nu k_\nu$ ισούται με k, το συνολικό πλήθος των αναφερόμενων σημείων. Επιπλέον, οι διαδρομές αναζήτησης των x και x' στο κυρίως δέντρο $\mathcal{T}$ έχουν μήκος $O(\log n)$. Συνεπώς, $\sum_\nu O(\log n) = O(\log^2 n)$, οπότε το λήμμα έχει αποδειχθεί. $\square$

Το θεώρημα που ακολουθεί συνοψίζει τα συμπεράσματά μας για τη δραστικότητα των διδιάστατων εκτασιακών δέντρων.

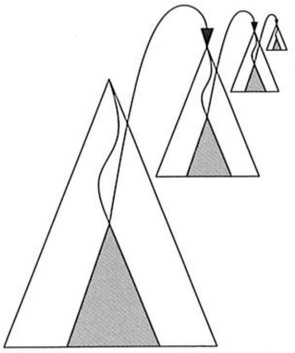
Θεώρημα 5.8 *Έστω P ένα σύνολο n σημείων στο επίπεδο. Ένα εκτασιακό δέντρο για το P καταλαμβάνει χώρο $O(n \log n)$ και μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $O(n \log n)$. Ένα ορθογωνικό εκτασιακό ερώτημα προς αυτό το εκτασιακό δέντρο μπορεί να απαντηθεί σε χρόνο $O(\log^2 n + k)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων σημείων.*

Ο χρόνος απάντησης που αναφέρεται στο Θεώρημα 5.8 μπορεί να βελτιωθεί σε $O(\log n + k)$ μέσω μιας τεχνικής που ονομάζεται *κλασματική επαλληλία* και περιγράφεται στην Ενότητα 5.6.

5.4 Εκτασιακά δέντρα περισσότερων διαστάσεων

Η γενίκευση των διδιάστατων εκτασιακών δέντρων σε περισσότερες διαστάσεις είναι σχετικά εύκολη. Θα περιγράψουμε μόνο τη γενική μεθοδολογία.

Έστω P ένα σύνολο σημείων στον d-διάστατο χώρο. Κατασκευάζουμε ένα ισοσταθμισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης ως προς την πρώτη συντεταγμένη των σημείων. Το κανονικό υποσύνολο $P(\nu)$ ενός κόμβου ν σε αυτό το δέντρο πρώτης βαθμίδας, το κυρίως δέντρο, αποτελείται από τα σημεία που είναι αποθηκευμένα στα φύλλα του υποδέντρου με ρίζα τον ν. Για κάθε κόμβο ν, κατασκευάζουμε μια συνοδευτική δομή $\mathcal{T}_{\text{συνοδ}}(\nu)$· το δέντρο δεύτερης βαθμίδας $\mathcal{T}_{\text{συνοδ}}(\nu)$ είναι ένα $(d-1)$-διάστατο εκτασιακό δέντρο για τα σημεία του



$P(\nu)$, περιορισμένα στις $d-1$ τελευταίες τους συντεταγμένες. Αυτό το $(d-1)$-διάστατο εκτασιακό δέντρο κατασκευάζεται αναδρομικά με τον ίδιο τρόπο: είναι ένα ισοσταθμισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης ως προς τη δεύτερη συντεταγμένη των σημείων, στο οποίο κάθε κόμβος περιέχει έναν δείκτη προς ένα $(d-2)$-διάστατο εκτασιακό δέντρο για τα σημεία του υποδέντρου του, περιορισμένα στις $d-2$ τελευταίες συντεταγμένες. Η αναδρομή τερματίζεται όταν έχουν απομείνει σημεία περιορισμένα στην τελευταία τους συντεταγμένη· αυτά αποθηκεύονται σε ένα μονοδιάστατο εκτασιακό δέντρο -ένα ισοσταθμισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης.

Ο αλγόριθμος απάντησης ερωτημάτων είναι επίσης παρόμοιος με εκείνον της διδιάστατης περίπτωσης. Χρησιμοποιώντας το δέντρο πρώτης βαθμίδας, εντοπίζουμε $O(\log n)$ κόμβους των οποίων τα κανονικά υποσύνολα περιέχουν συλλογικά όλα τα σημεία των οποίων η πρώτη συντεταγμένη βρίσκεται στο σωστό διάστημα. Αυτά τα κανονικά υποσύνολα διερευνώνται περαιτέρω μέσω ενός εκτασιακού ερωτήματος προς τις αντίστοιχες δομές δεύτερης βαθμίδας. Σε κάθε δομή δεύτερης βαθμίδας επιλέγουμε $O(\log n)$ κανονικά υποσύνολα. Αυτό σημαίνει ότι το συνολικό πλήθος των κανονικών υποσυνόλων στις δομές δεύτερης βαθμίδας είναι $O(\log^2 n)$. Τα σύνολα αυτά περιέχουν συνολικά όλα τα σημεία των οποίων η πρώτη και η δεύτερη συντεταγμένη βρίσκονται στα σωστά διαστήματα. Στη συνέχεια διερευνώνται οι δομές τρίτης βαθμίδας όπου βρίσκονται αποθηκευμένα αυτά τα κανονικά υποσύνολα μέσω ενός ερωτήματος σχετικά με το διάστημα της τρίτης συντεταγμένης, κ.ο.κ., μέχρι να φτάσουμε σε μονοδιάστατα δέντρα. Σε αυτά, βρίσκουμε τα σημεία των οποίων η τελευταία συντεταγμένη βρίσκεται στο σωστό διάστημα και τα αναφέρουμε. Η μέθοδος αυτή οδηγεί στο ακόλουθο συμπέρασμα.

Θεώρημα 5.9 *Έστω P ένα σύνολο n σημείων στον d-διάστατο χώρο, όπου $d \geqslant 2$. Ένα εκτασιακό δέντρο για το P καταλαμβάνει χώρο $O(n \log^{d-1} n)$ και μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $O(n \log^{d-1} n)$. Ένα ορθογωνικό εκτασιακό ερώτημα προς αυτό το εκτασιακό δέντρο μπορεί να απαντηθεί σε χρόνο $O(\log^d n + k)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων σημείων.*

Απόδειξη. Έστω $T_d(n)$ ο χρόνος κατασκευής ενός εκτασιακού δέντρου για ένα σύνολο n σημείων στον d-διάστατο χώρο. Από το Θεώρημα 5.8 γνωρίζουμε ότι $T_2(n) = O(n \log n)$. Η κατασκευή ενός d-διάστατου εκτασιακού δέντρου συνίσταται στην κατασκευή ενός ισοσταθμισμένου δυαδικού δέντρου αναζήτησης, η οποία απαιτεί χρόνο $O(n \log n)$, και στην κατασκευή συνοδευτικών δομών. Σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο βάθος του δέντρου πρώτης βαθμίδας, κάθε σημείο είναι αποθηκευμένο σε ακριβώς μία από τις συνοδευτικές δομές. Ο χρόνος που απαιτείται για την κατασκευή όλων των συνοδευτικών δομών των κόμβων κάποιου βάθους είναι $O\big(T_{d-1}(n)\big)$, ο χρόνος που απαιτείται για την κατασκευή της συνοδευτικής δομής της ρίζας. Αυτό προκύπτει από το ότι ο χρόνος κατασκευής είναι τουλάχιστον γραμμικός. Συνεπώς, ο συνολικός χρόνος κατασκευής ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$T_d(n) = O(n \log n) + O(\log n) \cdot T_{d-1}(n).$$

Δεδομένου ότι $T_2(n) = O(n \log n)$, η λύση αυτής της σχέσης είναι $O(n \log^{d-1} n)$. Το φράγμα για τον χώρο προκύπτει με τον ίδιο τρόπο.

Έστω $Q_d(n)$ ο χρόνος απάντησης για ένα d-διάστατο εκτασιακό δέντρο με n σημεία, χωρίς να συνυπολογίζουμε τον χρόνο για την αναφορά των σημείων. Για να απαντηθεί κάποιο ερώτημα σε ένα d-διάστατο εκτασιακό δέντρο θα πρέπει να διερευνηθεί ένα δέντρο πρώτης βαθμίδας, πράγμα που απαιτεί χρόνο $O(\log n)$, και να απαντηθούν ερωτήματα προς ένα λογαριθμικό πλήθος $(d-1)$-διάστατων εκτασιακών δέντρων. Συνεπώς,

$$Q_d(n) = O(\log n) + O(\log n) \cdot Q_{d-1}(n),$$

όπου $Q_2(n) = O(\log^2 n)$. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα, η λύση της αναδρομικής αυτής σχέσης είναι $Q_d(n) = O(\log^d n)$. Συνυπολογίζοντας τον χρόνο $O(k)$ για την αναφορά των σημείων, καταλήγουμε στο ζητούμενο φράγμα για τον χρόνο απάντησης του ερωτήματος. ⊔⊓

Όπως και στη διδιάστατη περίπτωση, ο χρόνος απάντησης μπορεί να βελτιωθεί κατά έναν λογαριθμικό παράγοντα –βλ. Ενότητα 5.6.

5.5 Τυχόντα σύνολα σημείων

Μέχρι στιγμής επιβάλλαμε τον περιορισμό ότι τόσο οι τετμημένες όσο και οι τεταγμένες των σημείων είναι διαφορετικές μεταξύ τους, ο οποίος σε πολλές πραγματικές εφαρμογές δεν ισχύει. Ευτυχώς, αυτό διορθώνεται εύκολα. Η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι δεν υποθέσαμε πουθενά ότι οι τιμές των συντεταγμένων είναι πραγματικοί αριθμοί. Αρκεί να προέρχονται από έναν ολικά διατεταγμένο χώρο αναφοράς, έτσι ώστε να μπορούμε να συγκρίνουμε οποιεσδήποτε δύο από αυτές και να υπολογίζουμε διάμεσες τιμές. Μπορούμε επομένως να εφαρμόσουμε το τέχνασμα που περιγράφεται παρακάτω.

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες, που είναι πραγματικοί αριθμοί, με στοιχεία του λεγόμενου *χώρου των σύνθετων αριθμών*. Τα στοιχεία αυτού του χώρου είναι ζεύγη πραγματικών αριθμών. Ο *σύνθετος αριθμός* δύο πραγματικών a και b συμβολίζεται με $(a|b)$. Ως ολική διάταξη στον χώρο των σύνθετων αριθμών χρησιμοποιούμε μια λεξικογραφική διάταξη. Έτσι, για δύο σύνθετους αριθμούς $(a|b)$ και $(a'|b')$, έχουμε ότι

$$(a|b) < (a'|b') \quad \Leftrightarrow \quad a < a' \text{ ή } (a = a' \text{ και } b < b').$$

Έστω τώρα ότι μας δίνεται ένα σύνολο P από n σημεία στο επίπεδο. Τα σημεία είναι μεν διαφορετικά, αλλά πολλά από αυτά μπορούν να έχουν ίδια τετμημένη ή τεταγμένη. Αντικαθιστούμε κάθε σημείο $p := (p_x, p_y)$ με ένα νέο σημείο $\hat{p} := ((p_x|p_y), (p_y|p_x))$ που έχει ως συντεταγμένες σύνθετους αριθμούς. Έτσι παίρνουμε ένα νέο σύνολο $\widehat{P}$ με n σημεία. Οι πρώτες συντεταγμένες δύο οποιωνδήποτε σημείων του $\widehat{P}$ είναι διαφορετικές· το ίδιο ισχύει και για τις δεύτερες συντεταγμένες. Χρησιμοποιώντας τη διάταξη που ορίσαμε παραπάνω, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε kd-δέντρα και διδιάστατα εκτασιακά δέντρα για το $\widehat{P}$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να αναφέρουμε τα σημεία του P που κείνται σε μια έκταση $R := [x : x'] \times [y : y']$. Για τον σκοπό αυτό, θα πρέπει να εκτελέσουμε ένα ερώτημα στο δέντρο που έχουμε κατασκευάσει για το $\widehat{P}$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει επίσης να μετασχηματίσουμε την έκταση ενδιαφέροντος ώστε να αναφέρεται στον νέο χώρο των σύνθετων αριθμών. Η μετασχηματισμένη έκταση $\widehat{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\widehat{R} := [(x| -\infty) : (x'| +\infty)] \times [(y| -\infty) : (y'| +\infty)].$$

Απομένει να δείξουμε ότι η μέθοδός μας είναι σωστή, δηλαδή ότι τα σημεία του $\widehat{P}$ που αναφέρονται ως απάντηση του ερωτήματος για την $\widehat{R}$ αντιστοιχούν ακριβώς στα σημεία του P που βρίσκονται μέσα στην R.

Λήμμα 5.10 *Έστω p ένα σημείο και R μια ορθογώνια έκταση. Τότε*

$$p \in R \quad \Leftrightarrow \quad \hat{p} \in \widehat{R}.$$

Απόδειξη. Έστω $R := [x : x'] \times [y : y']$ και $p := (p_x, p_y)$. Εξ ορισμού, το p βρίσκεται μέσα στην έκταση R εάν και μόνο εάν $x \leqslant p_x \leqslant x'$ και $y \leqslant p_y \leqslant y'$.

Όπως όμως μπορεί κανείς να αντιληφθεί εύκολα, αυτό ισχύει εάν και μόνο εάν $(x| - \infty) \leqslant (p_x|p_y) \leqslant (x'| + \infty)$ και $(y| - \infty) \leqslant (p_y|p_x) \leqslant (y'| + \infty)$, δηλαδή εάν και μόνο εάν το $\hat{p}$ βρίσκεται μέσα στην $\widehat{R}$. ◻

Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μέθοδός μας είναι όντως ορθή: η απάντηση που θα λάβουμε σε κάθε ερώτημα θα είναι η σωστή. Σημειωτέον ότι, στην πραγματικότητα, δεν χρειάζεται να αποθηκεύουμε τα μετασχηματισμένα σημεία: μπορούμε απλώς να αποθηκεύουμε τα αρχικά σημεία, αρκεί οι συγκρίσεις μεταξύ δύο τετμημένων ή δύο τεταγμένων να γίνονται στον χώρο των σύνθετων αριθμών.

Η μέθοδος της χρήσης σύνθετων αριθμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε περισσότερες διαστάσεις.

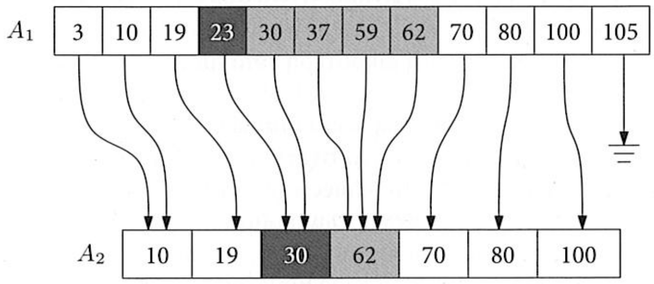
5.6* Κλασματική επαλληλία

Στην Ενότητα 5.3 περιγράψαμε μια δομή δεδομένων για ορθογωνικά εκτασιακά ερωτήματα στο επίπεδο, το λεγόμενο εκτασιακό δέντρο, ο χρόνος απάντησης του οποίου είναι $O(\log^2 n + k)$ -όπου n το συνολικό πλήθος των σημείων που είναι αποθηκευμένα στη δομή δεδομένων, και k το πλήθος των αναφερόμενων σημείων. Σε αυτήν την ενότητα θα περιγράψουμε μια τεχνική, που ονομάζεται *κλασματική επαλληλία*, με την οποία μπορούμε να μειώσουμε τον χρόνο απάντησης σε $O(\log n + k)$.

Ας θυμηθούμε εν συντομία τον τρόπο λειτουργίας ενός εκτασιακού δέντρου. Ένα εκτασιακό δέντρο για ένα σύνολο P από σημεία στο επίπεδο είναι μια δομή δεδομένων με δύο βαθμίδες. Το κυρίως δέντρο είναι ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης για τις τετμημένες των σημείων. Κάθε κόμβος ν στο κυρίως δέντρο συνοδεύεται από μια δομή $\mathcal{T}_{\text{συνοδ}}(\nu)$, που είναι ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης για τις τεταγμένες των σημείων του $P(\nu)$, δηλαδή του κανονικού υποσυνόλου του ν. Ένα ερώτημα για μια ορθογώνια έκταση $[x : x'] \times [y : y']$ απαντάται ως εξής: Πρώτον, εντοπίζεται στο κυρίως δέντρο μια συλλογή $O(\log n)$ κόμβων των οποίων τα κανονικά υποσύνολα περιέχουν συλλογικά τα σημεία με τετμημένη εντός της έκτασης $[x : x']$. Δεύτερον, υποβάλλεται στις συνοδευτικές δομές αυτών των κόμβων ένα ερώτημα για την έκταση $[y : y']$. Κάθε τέτοιο ερώτημα προς μια συνοδευτική δομή $\mathcal{T}_{\text{συνοδ}}(\nu)$ είναι ένα μονοδιάστατο εκτασιακό ερώτημα, και επομένως απαιτεί χρόνο $O(\log n + k_\nu)$, όπου k_ν το πλήθος των αναφερόμενων σημείων. Έτσι, ο συνολικός χρόνος απάντησης είναι $O(\log^2 n + k)$.

Αν μπορούσαμε να εκτελούμε τις αναζητήσεις στις συνοδευτικές δομές σε χρόνο $O(1+k_\nu)$, ο συνολικός χρόνος απάντησης θα μειωνόταν σε $O(\log n+k)$. Αλλά πώς μπορούμε να το πετύχουμε αυτό; Γενικά, δεν είναι δυνατόν να απαντήσουμε ένα μονοδιάστατο εκτασιακό ερώτημα σε χρόνο $O(1 + k)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων σημείων. Αυτό που μας επιτρέπει να εξοικονομήσουμε χρόνο είναι το ότι πρέπει να εκτελέσουμε *πολλές* μονοδιάστατες αναζητήσεις με την *ίδια έκταση* και ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα μίας αναζήτησης για να επιταχύνουμε άλλες.

Σε πρώτη φάση, θα εξηγήσουμε την ιδέα της κλασματικής επαλληλίας με ένα απλό παράδειγμα. Έστω S_1 και S_2 δύο σύνολα αντικειμένων, όπου το κάθε αντικείμενο έχει ως «κλειδί» έναν πραγματικό αριθμό. Τα σύνολα αυτά είναι αποθηκευμένα ταξινομημένα στις συστοιχίες A_1 και A_2. Έστω ότι θέλουμε να αναφέρουμε όλα τα αντικείμενα των S_1 και S_2 των οποίων τα κλειδιά βρίσκονται μέσα σε κάποιο διάστημα ενδιαφέροντος $[y : y']$. Μπορούμε να εργαστούμε ως εξής: εκτελούμε στην A_1 μια δυαδική αναζήτηση του ορίου y ώστε να βρούμε το μικρότερο κλειδί που είναι μεγαλύτερο ή ίσο του y. Από εκεί διατρέχουμε τη συστοιχία προς τα δεξιά, αναφέροντας όσα αντικείμενα προσπερνάμε, μέχρις ότου συναντήσουμε ένα κλειδί μεγαλύτερο του y'. Τα αντικείμενα από το σύνολο S_2 μπορούν να αναφερθούν με παρόμοιο τρόπο. Αν το συνολικό πλήθος των αναφερόμενων αντικειμένων είναι k, τότε ο χρόνος απάντησης θα είναι $O(k)$ συν τον χρόνο που απαιτείται για δύο δυαδικές αναζητήσεις, μία στην A_1 και μία στην A_2. Αν όμως τα κλειδιά των αντικειμένων του S_2 αποτελούν υποσύνολο των κλειδιών των αντικειμένων του S_1, μπορούμε να αποφύγουμε τη δεύτερη δυαδική αναζήτηση, ως εξής. Προσθέτουμε δείκτες από τις θέσεις της A_1 προς τις θέσεις της A_2: αν η θέση $A_1[i]$ περιέχει ένα αντικείμενο με κλειδί y_i, τότε εισάγουμε έναν δείκτη προς τη θέση του A_2 με το μικρότερο κλειδί που είναι μεγαλύτερο ή ίσο του y_i. Αν δεν υπάρχει τέτοιο κλειδί τότε ο δείκτης από τη θέση $A_1[i]$ έχει τιμή **κενό**. Στο Σχήμα 5.7 βλέπουμε ένα σχετικό παράδειγμα (στο συγκεκριμένο σχήμα απεικονίζονται μόνο τα κλειδιά, όχι τα αντίστοιχα αντικείμενα.)



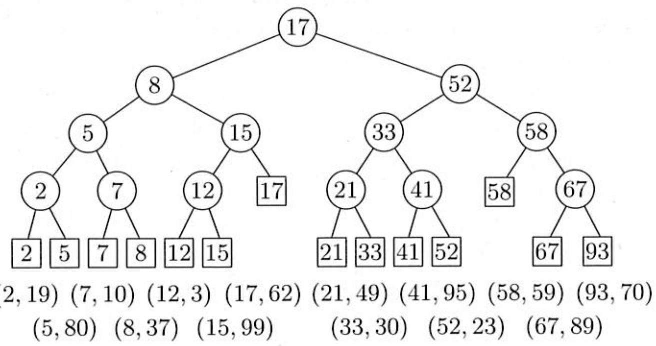
Σχήμα 5.7
Επιτάχυνση της αναζήτησης με την προσθήκη δεικτών

Πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν τη δομή για να αναφέρουμε τα αντικείμενα των S_1 και S_2 των οποίων τα κλειδιά εμπίπτουν σε κάποιο διάστημα ενδιαφέροντος $[y : y']$; Η αναφορά των αντικειμένων του S_1 εξακολουθεί να γίνεται όπως και πριν: εκτελούμε στη συστοιχία A_1 μια δυαδική αναζήτηση του y, και κατόπιν διατρέχουμε την A_1 προς τα δεξιά μέχρις ότου συναντήσουμε ένα κλειδί μεγαλύτερο του y'. Για να αναφέρουμε τα αντικείμενα του S_2 εργαζόμαστε ως εξής. Έστω $A_1[i]$ η θέση στην οποία κατέληξε η αναζήτηση του y στην A_1. Επομένως, το κλειδί του αντικειμένου $A_1[i]$ είναι το μικρότερο στο S_1 που είναι μεγαλύτερο ή ίσο του y. Δεδομένου ότι τα κλειδιά του συνόλου S_2 αποτελούν υποσύνολο αυτών του S_1, ο δείκτης από τη θέση $A_1[i]$ πρέπει να υποδεικνύει το μικρότερο κλειδί του S_2 που είναι μεγαλύτερο ή ίσο του y. Επομένως, μπορούμε να ακολουθήσουμε αυτόν τον δείκτη και, ξεκινώντας από τη θέση την οποία υποδεικνύει, να διατρέξουμε τη συστοιχία A_2 προς τα δεξιά. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε τη δυαδική αναζήτηση στην A_2, και η αναφορά των αντικειμένων του S_2 απαιτεί χρόνο μόλις $O(1 + k)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων αντικειμένων.

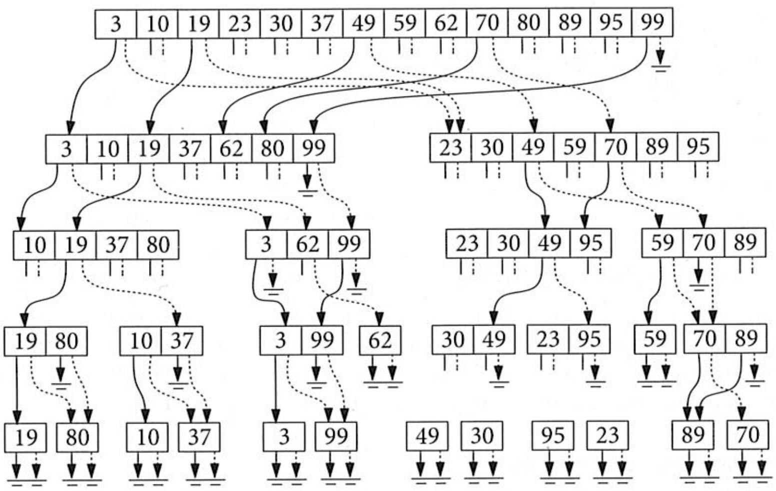
Στο Σχήμα 5.7 βλέπουμε ένα ενδεικτικό ερώτημα. Το διάστημα του ερωτήματος είναι το $[20 : 65]$. Χρησιμοποιώντας δυαδική αναζήτηση στη συστοιχία A_1, βρίσκουμε την τιμή 23, που είναι το μικρότερο κλειδί που είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 20. Από εκεί διατρέχουμε τη συστοιχία προς τα δεξιά μέχρις ότου συναντήσουμε ένα κλειδί μεγαλύτερο του 65. Τα αντικείμενα που προσπερνάμε έχουν τα κλειδιά τους εντός του διαστήματος, και επομένως αναφέρονται. Κατόπιν ακολουθούμε τον δείκτη από το κλειδί 23 προς τη συστοιχία A_2, που μας οδηγεί στο κλειδί 30, το μικρότερο κλειδί της συστοιχίας A_2 που είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 20. Από εκεί κινούμαστε επίσης προς τα δεξιά μέχρις ότου συναντήσουμε ένα κλειδί μεγαλύτερο του 65, και αναφέρουμε τα αντικείμενα του S_2 των οποίων τα κλειδιά εμπίπτουν στην έκταση ενδιαφέροντος.

Ας επανέλθουμε στα εκτασιακά δέντρα. Εδώ, η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι αμφότερα τα κανονικά υποσύνολα $P(\alpha\theta(\nu))$ και $P(\delta\theta(\nu))$ είναι υποσύνολα του $P(\nu)$. Μπορούμε επομένως να εφαρμόσουμε την ίδια ιδέα για να μειώσουμε τον χρόνο απάντησης. Οι λεπτομέρειες είναι κάπως πιο περίπλοκες, διότι τώρα έχουμε δύο υποσύνολα του $P(\nu)$ προς τα οποία χρειαζόμαστε ταχεία προσπέλαση, και όχι μόνο ένα. Έστω $\mathcal{T}$ ένα εκτασιακό δέντρο για ένα σύνολο P από n σημεία στο επίπεδο. Κάθε κανονικό υποσύνολο $P(\nu)$ είναι αποθηκευμένο σε μια συνοδευτική δομή. Ωστόσο, αντί να χρησιμοποιήσουμε ως συνοδευτική δομή ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης, όπως κάναμε στην Ενότητα 5.3, αποθηκεύουμε το κανονικό υποσύνολο σε μια συστοιχία $A(\nu)$, η οποία ταξινομείται κατά τεταγμένη. Επιπλέον, κάθε θέση της συστοιχίας $A(\nu)$ περιέχει δύο δείκτες: έναν προς τη συστοιχία $A(\alpha\theta(\nu))$ και έναν προς την $A(\delta\theta(\nu))$. Πιο συγκεκριμένα, προσθέτουμε τους δύο δείκτες ως εξής. Έστω ότι στη θέση $A(\nu)[i]$ είναι αποθηκευμένο ένα σημείο p. Στην περίπτωση αυτή, αποθηκεύουμε έναν δείκτη από τη θέση $A(\nu)[i]$ προς τη θέση του $A(\alpha\theta(\nu))$ που περιέχει το σημείο p' με τη μικρότερη τεταγμένη που είναι μεγαλύτερη ή ίση της p_y. Όπως σημειώσαμε παραπάνω, το $P(\alpha\theta(\nu))$ είναι υποσύνολο του $P(\nu)$. Επομένως, αν ανάμεσα στα σημεία του $P(\nu)$ το p έχει τη μικρότερη τεταγμένη που είναι μεγαλύτερη ή ίση κάποιας τιμής y, τότε το p' έχει τη μικρότερη τεταγμένη που είναι μεγαλύτερη ή ίση της y ανάμεσα στα σημεία του $P(\alpha\theta(\nu))$. Ο δείκτης προς τη συστοιχία $A(\delta\theta(\nu))$ ορίζεται με τον ίδιο τρόπο: υποδεικνύει τη θέση η οποία περιέχει το σημείο με τη μικρότερη τεταγμένη που είναι μεγαλύτερη ή ίση της p_y.

Αυτή η τροποποιημένη εκδοχή του εκτασιακού δέντρου ονομάζεται *διαστρωματωμένο εκτασιακό δέντρο*· ένα σχετικό παράδειγμα φαίνεται στα Σχήματα 5.8 και 5.9. (Οι θέσεις στις οποίες έχουν σχεδιαστεί οι συστοιχίες στο Σχήμα 5.9 αντιστοιχούν στις θέσεις των κόμβων του δέντρου τους οποίους συνοδεύουν: η ανώτερη συστοιχία συνοδεύει τη ρίζα, η αριστερή συστοιχία κάτω από αυτήν συνοδεύει τον αριστερό θυγατρικό κόμβο της ρίζας, κ.ο.κ. Στο σχήμα δεν απεικονίζονται όλοι οι δείκτες.)



Σχήμα 5.8
Το κυρίως δέντρο ενός διαστρωματωμένου εκτασιακού δέντρου: στα φύλλα αναγράφονται μόνο οι τετμημένες· τα αποθηκευμένα σημεία παρατίθενται ακριβώς κάτω από τα φύλλα.



Σχήμα 5.9
Οι συστοιχίες που συνοδεύουν τους κόμβους του κυρίως δέντρου, με ταξινομημένες τις τεταγμένες των σημείων των κανονικών υποσυνόλων (κάποιοι δείκτες έχουν παραλειφθεί)

Ας δούμε πώς μπορεί να απαντηθεί ένα ερώτημα σχετικά με κάποια έκταση $[x : x'] \times [y : y']$ σε ένα διαστρωματωμένο εκτασιακό δέντρο. Όπως και πριν, αναζητώντας στο κυρίως δέντρο $\mathcal{T}$ τα όρια x και x', εντοπίζουμε $O(\log n)$ κόμβους των οποίων τα κανονικά υποσύνολα περιέχουν συλλογικά όλα τα σημεία με τετμημένη εντός της έκτασης $[x : x']$. Οι κόμβοι αυτοί εντοπίζονται ως εξής. Έστω $\nu_{\text{διχασμού}}$ ο κόμβος στο οποίον διχάζονται οι δύο διαδρομές αναζήτησης. Οι ζητούμενοι κόμβοι είναι κάθε κόμβος κάτω από τον $\nu_{\text{διχασμού}}$ ο οποίος αποτελεί είτε δεξιό θυγατρικό ενός κόμβου της διαδρομής αναζήτησης του x στον οποίο η διαδρομή αυτή συνεχίζεται προς τα αριστερά, είτε αριστερό θυγατρικό ενός κόμβου της διαδρομής αναζήτησης του x' στον οποίο η διαδρομή αυτή συνεχίζεται προς τα δεξιά. Στον κόμβο $\nu_{\text{διχασμού}}$ βρίσκουμε τη θέση της συστοιχίας $A(\nu_{\text{διχασμού}})$ που περιέχει τη μικρότερη τεταγμένη η οποία είναι μεγαλύτερη ή ίση του y. Αυτό μπορεί να γίνει με δυαδική αναζήτηση σε χρόνο $O(\log n)$. Καθώς συνεχίζουμε την αναζήτηση των x και x' στο κυρίως δέντρο, τηρούμε καταγεγραμμένες τις θέσεις των συνοδευτικών συστοιχιών που περιέχουν τη μικρότερη τεταγμένη που είναι μεγαλύτερη ή ίση του y. Μπορούμε να τηρούμε τις θέσεις αυτές σε σταθερό χρόνο, ακολουθώντας τους δείκτες που είναι αποθηκευμένοι στις συστοιχίες. Έστω τώρα ν ένας από τους $O(\log n)$ κόμβους που έχουμε επιλέξει. Πρέπει να αναφέρουμε τα σημεία της $A(\nu)$ των οποίων η τεταγμένη βρίσκεται στην έκταση $[y : y']$. Για τον σκοπό αυτό, αρκεί να μπορούμε να βρούμε το σημείο με τη μικρότερη τεταγμένη που είναι μεγαλύτερη ή ίση του y· από εκεί μπορούμε απλώς να διατρέξουμε τη συστοιχία, αναφέροντας τα σημεία με τεταγμένη μικρότερη ή ίση του y'. Το σημείο αυτό μπορεί να βρεθεί σε σταθερό χρόνο, διότι ο πατρικός κόμβος του ν βρίσκεται πάνω στη διαδρομή αναζήτησης, και για τις συστοιχίες επί της διαδρομής αναζήτησης έχουμε τηρήσει καταγεγραμμένα τα σημεία με τη μικρότερη τεταγμένη που είναι μεγαλύτερη ή ίση του y. Συνεπώς, μπορούμε να αναφέρουμε τα σημεία της $A(\nu)$ των οποίων η τεταγμένη βρίσκεται στην έκταση $[y : y']$ σε χρόνο $O(1+k_\nu)$, όπου k_ν το πλήθος των αναφερόμενων σημείων στον κόμβο ν. Έτσι, ο συνολικός χρόνος απάντησης μειώνεται σε $O(\log n + k)$.

Η κλασματική επαλληλία βελτιώνει επίσης τον χρόνο απάντησης των εκτασιακών δέντρων περισσοτέρων διαστάσεων κατά έναν λογαριθμικό παράγοντα. Υπενθυμίζουμε ότι ένα d-διάστατο εκτασιακό ερώτημα απαντήθηκε αρχικά με επιλογή των σημείων με πρώτη συντεταγμένη εντός της σωστής έκτασης σε $O(\log n)$ κανονικά υποσύνολα, και στη συνέχεια με εκτέλεση ενός $(d-1)$-διάστατου ερωτήματος σε αυτά τα υποσύνολα. Το $(d-1)$-διάστατο ερώτημα απαντάται αναδρομικά με τον ίδιο τρόπο. Αυτό συνεχίζεται μέχρις ότου φτάσουμε σε ένα διδιάστατο ερώτημα, το οποίο μπορεί να απαντηθεί όπως περιγράψαμε παραπάνω. Καταλήγουμε έτσι στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 5.11 *Έστω P ένα σύνολο n σημείων στον d-διάστατο χώρο, όπου $d \geqslant 2$. Ένα διαστρωματωμένο εκτασιακό δέντρο για το P καταλαμβάνει χώρο $O(n \log^{d-1} n)$ και μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $O(n \log^{d-1} n)$. Ένα ορθογωνικό εκτασιακό ερώτημα προς αυτό το διαστρωματωμένο εκτασιακό δέντρο μπορεί να απαντηθεί σε χρόνο $O(\log^{d-1} n + k)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων σημείων.*

5.7 Σημειώσεις και σχόλια

Στη δεκαετία του 1970 –στις πρώτες μέρες της υπολογιστικής γεωμετρίας– η ορθογωνική εκτασιακή αναζήτηση ήταν ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα του κλάδου, με αποτέλεσμα να ασχοληθούν με αυτό πολλοί ερευνητές. Από την προσπάθεια αυτή προέκυψαν πολλά συμπεράσματα, μερικά από τα οποία αναφέρουμε παρακάτω.

Μια από τις πρώτες δομές δεδομένων για ορθογωνική εκτασιακή αναζήτηση ήταν το τετραδικό δέντρο, που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 14 στο πλαίσιο των πλεγμάτων. Δυστυχώς, η συμπεριφορά χειρότερης περίπτωσης των τετραδικών δέντρων είναι πολύ κακή. Τα kd-δέντρα, που περιγράφηκαν αρχικά από τον Bentley [44] το 1975, αποτελούν βελτίωση των τετραδικών δέντρων. Τα τετραδικά δέντρα, τα kd-δέντρα, και οι εφαρμογές τους παρουσιάζονται πολύ αναλυτικά στα βιβλία του Samet [333, 334]. Μερικά χρόνια αργότερα, επινοήθηκε ανεξάρτητα από διάφορους ερευνητές [46, 251, 261, 387] το εκτασιακό δέντρο. Η βελτίωση του χρόνου απάντησης ερωτημάτων σε $O(\log n+k)$ μέσω της κλασματικής επαλληλίας περιγράφηκε από τους Lueker [261] και Willard [386]. Στην πραγματικότητα, η κλασματική επαλληλία μπορεί να εφαρμοστεί όχι μόνο στα εκτασιακά δέντρα, αλλά και σε πολλές περιπτώσεις όπου εκτελούνται πολλαπλές αναζητήσεις του ίδιου κλειδιού. Οι Chazelle και Guibas [105, 106] εξετάζουν αυτήν την τεχνική στην πλήρη γενικότητά της. Η κλασματική επαλληλία μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης σε δυναμικές καταστάσεις [275]. Η δραστικότερη δομή δεδομένων για διδιάστατα εκτασιακά ερωτήματα είναι μια τροποποιημένη εκδοχή του διαστρωματωμένου εκτασιακού δέντρου, που περιγράφηκε από τον Chazelle [87], ο οποίος κατάφερε να βελτιώσει τον χώρο σε $O(n \log n/ \log\log n)$ διατηρώντας ταυτόχρονα τον χρόνο απάντησης στο $O(\log n + k)$. Ο Chazelle [90, 91] απέδειξε επίσης ότι η απόδοση αυτή είναι και η βέλτιστη. Αν η έκταση ενδιαφέροντος είναι μη φραγμένη σε μία πλευρά, π.χ. αν είναι της μορφής $[x : x'] \times [y : +\infty]$, τότε μπορούμε να επιτύχουμε χρόνο απάντησης $O(\log n)$ σε γραμμικό χώρο, χρησιμοποιώντας ένα προτεραϊκό δέντρο αναζήτησης -βλ. Κεφάλαιο 10. Στις περισσότερες διαστάσεις το καλύτερο αποτέλεσμα για την ορθογωνική εκτασιακή αναζήτηση έχει επιτευχθεί επίσης από τον Chazelle [90], ο οποίος έχει αναπτύξει μια δομή για d-διάστατα ερωτήματα που καταλαμβάνει χώρο $O\big(n(\log n/ \log\log n)^{d-1}\big)$ και έχει πολυλογαριθμικό χρόνο απάντησης. Και πάλι, η απόδοση αυτή είναι βέλτιστη. Υπάρχουν επίσης εναλλακτικές μέθοδοι που βελτιώνουν τον χρόνο απάντησης εις βάρος του χώρου και αντιστρόφως [338, 391].

Το κάτω φράγμα ισχύει μόνο για ορισμένα πλαίσια υπολογισμού. Έτσι, για κάποιες ειδικές περιπτώσεις είναι δυνατόν να υπάρξουν καλύτερες επιδόσεις. Ειδικότερα, ο Overmars [300] έχει περιγράψει δραστικότερες δομές δεδομένων για εκτασιακή αναζήτηση όταν τα σημεία κείνται σε ένα ομοιόμορφο πλέγμα $U \times U$, με χρόνο απάντησης $O(\log\log U + k)$ ή $O(\sqrt{U} + k)$, ανάλογα με τον χρόνο που διατίθεται για προεπεξεργασία. Τα συμπεράσματα αυτά βασίζονται στη χρήση δομών δεδομένων που είχαν περιγραφεί προηγούμενως από τον Willard [389, 390]. Σε πολλά προβλήματα της υπολογιστικής γεωμετρίας, ο περιορισμός ότι οι συντεταγμένες των αντικειμένων κείνται στα σημεία ενός ομοιόμορφου πλέγματος μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερα χρονικά φράγματα από αυτά που επιτυγχάνονται στη γενική περίπτωση. Ενδεικτικά τέτοια προβλήματα είναι η αναζήτηση του πλησιέστερου γείτονα [224, 225], ο εντοπισμός σημείου [287], και η τομή ευθύγραμμων τμημάτων [226].

Στις βάσεις δεδομένων, τα εκτασιακά ερωτήματα θεωρούνται ο πιο γενικός από τρεις βασικούς τύπους πολυδιάστατων ερωτημάτων. Οι δύο άλλοι τύποι είναι τα *ερωτήματα πλήρους συμμόρφωσης* και τα *ερωτήματα μερικής συμμόρφωσης*. Τα ερωτήματα πλήρους συμμόρφωσης είναι απλώς ερωτήματα του τύπου: Υπάρχει στη βάση δεδομένων αντικείμενο (σημείο) με τις τάδε συγκεκριμένες τιμές γνωρισμάτων (συντεταγμένες); Η προφανής ενδεδειγμένη δομή δεδομένων για ερωτήματα πλήρους συμμόρφωσης είναι το ισοσταθμισμένο δυαδικό δέντρο που χρησιμοποιεί, π.χ., μια λεξικογραφική διάταξη των συντεταγμένων. Με αυτήν τη δομή, τα ερωτήματα πλήρους συμμόρφωσης μπορούν να απαντώνται σε χρόνο $O(\log n)$. Αν το πλήθος d των διαστάσεων -δηλαδή των γνωρισμάτων- αυξάνεται, τότε είναι χρήσιμο να εκφράζουμε τη δραστικότητα συναρτήσει όχι μόνο του n, αλλά και του d. Αν χρησιμοποιούμε ένα δυαδικό δέντρο για ερωτήματα πλήρους συμμόρφωσης, ο χρόνος απάντησης είναι $O(d \log n)$ διότι η σύγκριση δύο σημείων απαιτεί χρόνο $O(d)$. Ο χρόνος αυτός μπορεί εύκολα να μειωθεί σε $O(d + \log n)$, που είναι και το βέλτιστο φράγμα. Σε ένα ερώτημα μερικής συμμόρφωσης καθορίζονται τιμές μόνο για ένα υποσύνολο των συντεταγμένων και ζητούνται όλα τα σημεία με τις καθοριζόμενες τιμές συντεταγμένων. Για παράδειγμα, σε ένα ερώτημα μερικής συμμόρφωσης στο επίπεδο καθορίζεται μόνο η τετμημένη ή μόνο η τεταγμένη. Από γεωμετρική σκοπιά, σε ένα τέτοιο ερώτημα ζητούνται τα σημεία που βρίσκονται επάνω σε μια οριζόντια ή σε μια κατακόρυφη ευθεία. Με ένα d-διάστατο kd-δέντρο, ένα ερώτημα μερικής συμμόρφωσης στο οποίο καθορίζονται s συντεταγμένες (όπου $s < d$) μπορεί να απαντηθεί σε χρόνο $O(n^{1-s/d} + k)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων σημείων [44].

Σε πολλές εφαρμογές, αντί για ένα συνόλο σημείων μας δίνεται ένα σύνολο αντικειμένων όπως, π.χ., πολυγώνων. Αν θέλουμε να αναφερθούν τα αντικείμενα που εμπεριέχονται εξ ολοκλήρου σε κάποια έκταση $[x : x'] \times [y : y']$, τότε είναι δυνατόν να μετασχηματίσουμε το ερώτημα σε ένα ερώτημα για σημειακά δεδομένα σε περισσότερες διαστάσεις –βλ. Άσκηση 5.13. Συχνά θέλουμε επίσης να βρούμε τα αντικείμενα που εμπεριέχονται μόνο εν μέρει στην έκταση ενδιαφέροντος. Το συγκεκριμένο πρόβλημα ονομάζεται πρόβλημα παραθυρικής εστίασης και εξετάζεται στο Κεφάλαιο 10.

Άλλες παραλλαγές του προβλήματος εκτασιακής αναζήτησης προκύπτουν αν επιτραπούν τα ερωτήματα και για άλλα είδη εκτάσεων, όπως κύκλους ή τρίγωνα. Πολλές από αυτές τις παραλλαγές μπορούν να επιλυθούν μέσω των λεγόμενων διαμεριστικών δέντρων, που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 16.

5.8 Ασκήσεις

5.1 Στην απόδειξη για τον χρόνο απάντησης ερωτήματος για ένα kd-δέντρο προέκυψε η εξής αναδρομική σχέση:

$$Q(n) = \begin{cases} O(1), & \text{αν } n = 1, \\ 2 + 2Q(n/4), & \text{αν } n > 1. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η λύση αυτής της σχέσης είναι $Q(n) = O(\sqrt{n})$. Επίσης, δείξτε ότι για τον χρόνο απάντησης ερωτήματος σε ένα kd-δέντρο ισχύει το κάτω φράγμα $\Omega(\sqrt{n})$, ορίζοντας κατάλληλα ένα σύνολο n σημείων και μια ορθογώνια έκταση ενδιαφέροντος.

5.2 Περιγράψτε αλγορίθμους για την εισαγωγή και τη διαγραφή σημείων σε ένα kd-δέντρο. Οι αλγόριθμοί σας δεν χρειάζεται να ισοσταθμίζουν εκ νέου τη δομή.

5.3 Στην Ενότητα 5.2 υποδείξαμε ότι τα kd-δέντρα μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για την αποθήκευση σημειοσυνόλων ενός χώρου περισσότερων διαστάσεων. Έστω P ένα σύνολο n σημείων στον d-διάστατο χώρο. Στα παρακάτω ερωτήματα α′. και β′. μπορείτε να θεωρήσετε ότι το πλήθος d είναι σταθερό.

α′. Περιγράψτε έναν αλγόριθμο για την κατασκευή ενός d-διάστατου kd-δέντρου για τα σημεία του P. Αποδείξτε ότι το δέντρο καταλαμβάνει γραμμικό χώρο και ότι ο αλγόριθμός σας απαιτεί χρόνο $O(n \log n)$.

β′. Περιγράψτε τον αλγόριθμο απάντησης σε ένα d-διάστατο εκτασιακό ερώτημα. Αποδείξτε ότι για τον χρόνο απάντησης ισχύει το φράγμα $O(n^{1-1/d} + k)$.

γ′. Δείξτε ότι ο χώρος που χρησιμοποιείται είναι γραμμικός ως προς d, δηλαδή ότι αν το d δεν θεωρείται σταθερό, τότε ο χρησιμοποιούμενος χώρος είναι $O(dn)$. Αναλύστε επίσης την εξάρτηση του χρόνου κατασκευής και του χρόνου απάντησης από το d.

5.4 Τα kd-δέντρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για ερωτήματα μερικής συμμόρφωσης. Σε ένα διδιάστατο ερώτημα μερικής συμμόρφωσης, καθορίζεται μια τιμή για κάποια από τις συντεταγμένες και ζητούνται όλα τα σημεία που έχουν αυτήν την τιμή για τη συγκεκριμένη συντεταγμένη. Στις περισσότερες διαστάσεις καθορίζονται τιμές για ένα υποσύνολο των συντεταγμένων. Στην προκειμένη περίπτωση επιτρέπεται περισσότερα από ένα σημεία να έχουν ίδιες τιμές σε συντεταγμένες τους.

α′. Δείξτε ότι με τα διδιάστατα kd-δέντρα μπορούμε να απαντάμε ερωτήματα μερικής συμμόρφωσης σε χρόνο $O(\sqrt{n}+k)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων σημείων.

β′. Περιγράψτε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα διδιάστατο εκτασιακό δέντρο για να απαντάμε σε ερωτήματα μερικής συμμόρφωσης. Ποιος είναι ο χρόνος απάντησης;

γ′. Περιγράψτε μια δομή δεδομένων που καταλαμβάνει γραμμικό χώρο και μας επιτρέπει να απαντάμε σε διδιάστατα ερωτήματα μερικής συμμόρφωσης σε χρόνο $O(\log n + k)$.

δ′. Δείξτε ότι μέσω ενός d-διάστατου kd-δέντρου μπορούμε να απαντάμε σε ένα d-διάστατο ερώτημα μερικής συμμόρφωσης σε χρόνο $O(n^{1-s/d} + k)$, όπου s (με $s < d$) το πλήθος των καθοριζόμενων συντεταγμένων.

ε′. Περιγράψτε μια δομή δεδομένων που καταλαμβάνει γραμμικό χώρο και μας επιτρέπει να απαντάμε σε d-διάστατα ερωτήματα μερικής συμμόρφωσης σε χρόνο $O(\log n+k)$. *Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε μια δομή της οποίας ο απαιτούμενος χώρος είναι εκθετική συνάρτηση του d (ακριβέστερα, μια δομή που απαιτεί χώρο $O(d2^d n)$).

5.5 Ο αλγόριθμος Διερευνηση KD-Δεντρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για ερωτήματα που αφορούν μη ορθογώνιες εκτάσεις. Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος δίνει σωστή απάντηση και σε ερωτήματα όπου η έκταση είναι τριγωνική.

α′. Δείξτε ότι ο χρόνος απάντησης για τριγωνικά εκτασιακά ερωτήματα είναι γραμμικός στη χειρότερη περίπτωση, ακόμη και αν δεν αναφέρεται κανένα σημείο. *Υπόδειξη:* Όλα τα σημεία που αποθηκεύονται στο kd-δέντρο να επιλεγούν από την ευθεία $y = x$.

β′. Ας υποθέσουμε ότι χρειαζόμαστε μια δομή δεδομένων που να μας επιτρέπει να απαντάμε σε τριγωνικά εκτασιακά ερωτήματα, αλλά μόνο για τρίγωνα με πλευρές οριζόντιες, κατακόρυφες, ή με κλίση $+1$ ή -1. Σχεδιάστε μια δομή δεδομένων γραμμικού μεγέθους που να μας επιτρέπει να απαντάμε σε τέτοια εκτασιακά ερωτήματα σε χρόνο $O(n^{3/4} + k)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων σημείων. *Υπόδειξη:* Επιλέξτε 4 άξονες συντεταγμένων στο επίπεδο και χρησιμοποιήστε ένα τετραδιάστατο kd-δέντρο.

γ′. Βελτιώστε τον χρόνο απάντησης σε $O(n^{2/3} + k)$. *Υπόδειξη:* Λύστε πρώτα την Άσκηση 5.4.

5.6 Περιγράψτε αλγορίθμους για την εισαγωγή και διαγραφή σημείων σε ένα εκτασιακό δέντρο. Οι αλγόριθμοί σας δεν χρειάζεται να ισοσταθμίζουν εκ νέου τη δομή.

5.7 Στην απόδειξη του Λήμματος 5.7, κάναμε μια αρκετά χονδρική εκτίμηση για τον χρόνο απάντησης στις συνοδευτικές δομές, αναφέροντας ότι έχει ως άνω φράγμα την ποσότητα $O(\log n)$. Στην πραγματικότητα, ο χρόνος απάντησης εξαρτάται από το πλήθος των σημείων στη συνοδευτική δομή. Αν συμβολίσουμε με n_ν το πλήθος των σημείων στο κανονικό υποσύνολο $P(\nu)$, ο συνολικός χρόνος που αναλώνεται είναι

$$\sum_{\nu} \Theta(\log n_\nu + k_\nu),$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλους τους κόμβους του κυρίως δέντρου $\mathcal{T}$ που διατρέχονται. Δείξτε ότι αυτό το φράγμα εξακολουθεί να είναι $\Theta(\log^2 n + k)$. (Δηλαδή η προσεκτικότερη ανάλυσή μας βελτιώνει μόνο τη σταθερά του φράγματος, όχι την τάξη μεγέθους του.)

5.8 Στο Θεώρημα 5.8 δείξαμε ότι ένα εκτασιακό δέντρο για ένα σύνολο n σημείων στο επίπεδο απαιτεί χώρο $O(n \log n)$. Μπορούμε να μειώσουμε τις απαιτήσεις σε χώρο διατηρώντας συνοδευτικές δομές μόνο για ένα υποσύνολο των κόμβων του κυρίως δέντρου.

α'. Έστω ότι μόνο οι κόμβοι βάθους $0, 2, 4, 6, \ldots$ έχουν συνοδευτικές δομές. Δείξτε πώς μπορούμε να τροποποιήσουμε τον αλγόριθμο απάντησης ώστε να απαντά σωστά στα ερωτήματα.

β'. Αναλύστε τον απαιτούμενο χώρο και τον χρόνο απάντησης για μια τέτοια δομή δεδομένων.

γ'. Έστω ότι μόνο οι κόμβοι βάθους $0, \lfloor \frac{1}{j} \log n \rfloor, \lfloor \frac{2}{j} \log n \rfloor, \ldots$, όπου $j \geqslant 2$ μια σταθερά, έχουν συνοδευτικές δομές. Αναλύστε τον απαιτούμενο χώρο καθώς και τον χρόνο απάντησης για αυτήν τη δομή δεδομένων. Εκφράστε τα φράγματα συναρτήσει των n και j.

5.9 Οι δομές δεδομένων που περιγράφηκαν σε αυτό το κεφάλαιο μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσδιοριστεί αν ένα συγκεκριμένο σημείο (a, b) ανήκει σε ένα δεδομένο σύνολο, μέσω ενός εκτασιακού ερωτήματος με έκταση $[a : a] \times [b : b]$.

α'. Αποδείξτε ότι για να απαντηθεί ένα τέτοιο εκτασιακό ερώτημα σε ένα kd-δέντρο απαιτείται χρόνος $O(\log n)$.

β'. Ποιο είναι το χρονικό φράγμα για ένα τέτοιο ερώτημα σε ένα εκτασιακό δέντρο; Αποδείξτε το αποτέλεσμά σας.

5.10 Σε κάποιες εφαρμογές μας ενδιαφέρει μόνο να προσδιοριστεί το πλήθος των σημείων που εμπεριέχονται σε κάποια έκταση, και όχι να αναφερθούν όλα τα σημεία αναλυτικά. Τέτοια ερωτήματα ονομάζονται συχνά *εκτασιακά καταμετρητικά ερωτήματα*. Για ερωτήματα αυτού του είδους θα θέλαμε να αποφύγουμε τον προσθετικό όρο $O(k)$ στον χρόνο απάντησης.

α'. Περιγράψτε πώς μπορούμε να τροποποιήσουμε ένα μονοδιάστατο εκτασιακό δέντρο ώστε να μας δίνει τη δυνατότητα να απαντάμε σε εκτασιακά καταμετρητικά ερώτηματα σε χρόνο $O(\log n)$. Αποδείξτε το φράγμα για τον χρόνο απάντησης.

β'. Χρησιμοποιώντας τη λύση για το μονοδιάστατο πρόβλημα, περιγράψτε πώς μπορούμε να απαντάμε σε d-διάστατα εκτασιακά καταμετρητικά ερωτήματα σε χρόνο $O(\log^d n)$. Αποδείξτε το φράγμα για τον χρόνο απάντησης.

γ'.* Περιγράψτε πώς μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της κλασματικής επαλληλίας ώστε να βελτιώσουμε κατά έναν παράγοντα $O(\log n)$ τον χρόνο απάντησης για τα εκτασιακά καταμετρητικά ερωτήματα δύο ή περισσότερων διαστάσεων.

5.11 Έστω S_1 ένα σύνολο n ξένων οριζόντιων ευθύγραμμων τμημάτων και S_2 ένα σύνολο m ξένων κατακόρυφων ευθύγραμμων τμημάτων. Καταστρώστε έναν αλγόριθμο σάρωσης επιπέδου που να προσδιορίζει το πλήθος των σημείων τομής στο σύνολο $S_1 \cup S_2$ σε χρόνο $O\big((n+m)\log(n+m)\big)$.

5.12 Στην Ενότητα 5.5 περιγράψαμε πώς μπορεί κανείς να χειριστεί σύνολα σημείων στο επίπεδο που δεν έχουν πάντα διαφορετικές συντεταγμένες χρησιμοποιώντας σύνθετους αριθμούς. Επεκτείνετε αυτήν την έννοια σε σημεία του d-διάστατου χώρου. Για τον σκοπό αυτό, θα πρέπει να ορίσετε τον σύνθετο αριθμό d αριθμών και μια κατάλληλη διάταξη των αριθμών αυτού του τύπου. Κατόπιν, δείξτε πώς μπορεί να μετασχηματιστεί σύμφωνα με αυτήν τη διάταξη το σημείο $p := (p_1, \dots, p_d)$ και η έκταση $R := [r_1 : r_1'] \times \cdots \times [r_d : r_d']$. Ο μετασχηματισμός θα πρέπει να είναι τέτοιος ώστε $p \in R$ εάν και μόνο εάν το μετασχηματισμένο σημείο κείται στη μετασχηματισμένη έκταση.

5.13 Σε πολλές εφαρμογές, θέλουμε να εκτελούμε εκτασιακές αναζητήσεις μεταξύ μη σημειακών αντικειμένων.

α'. Έστω S ένα σύνολο από n αξονοπαράλληλα ορθογώνια στο επίπεδο. Θέλουμε να μπορούμε να αναφέρουμε όλα τα ορθογώνια του S που εμπεριέχονται εξ ολοκλήρου σε ένα ορθογώνιο ενδιαφέροντος $[x : x'] \times [y : y']$. Περιγράψτε μια δομή δεδομένων για αυτό το πρόβλημα που να καταλαμβάνει χώρο $O(n \log^3 n)$ και να έχει χρόνο απάντησης $O(\log^4 n + k)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων ορθογωνίων. *Υπόδειξη:* Μετασχηματίστε το πρόβλημα σε πρόβλημα ορθογωνικής εκτασιακής αναζήτησης σε κάποιον χώρο περισσότερων διαστάσεων.

β'. Έστω P ένα σύνολο n πολυγώνων στο επίπεδο. Όπως και πριν, περιγράψτε μια δομή δεδομένων με την οποία να μπορούν να αναφερθούν όλα τα πολύγωνα που εμπεριέχονται εξ ολοκλήρου στο ορθογώνιο ενδιαφέροντος. Ο απαιτούμενος χώρος θα πρέπει να είναι $O(n \log^3 n)$ και ο χρόνος απάντησης $O(\log^4 n + k)$, όπου k το πλήθος των αναφερόμενων πολυγώνων.

γ'.* Βελτιώστε τον χρόνο απάντησης των λύσεών σας (τόσο στο σκέλος α' όσο και στο σκέλος β') σε $O(\log^3 n + k)$.

5.14* Αποδείξτε τα φράγματα $O(n \log^{d-1} n)$ για τον απαιτούμενο χώρο και τον χρόνο κατασκευής στο Θεώρημα 5.11.