Διατάξεις Ευθειών Γραμμών

Λεωνίδας Παληός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

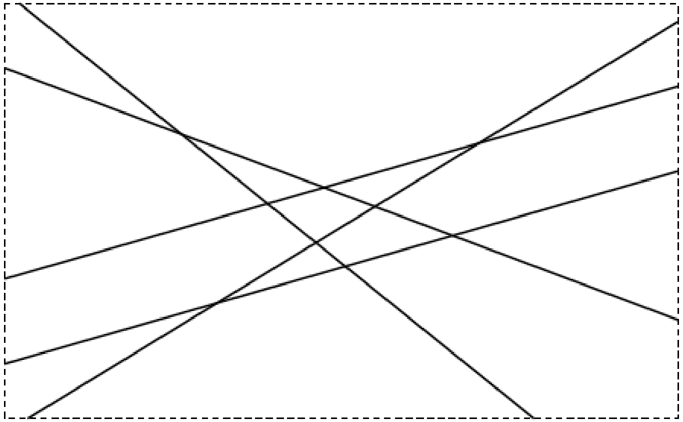
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Διάταξη Γεωμετρ. Αντικειμένων

Διάταξη (arrangement)

Δοθέντος ενός πεπερασμένου συνόλου ***S*** γεωμετρικών αντικειμένων στο $\boldsymbol{R^d}$, η διάταξη ***A(S)*** είναι η **διαμέριση** του $\mathbf{R}^d$ σε **ανοικτά** συνεκτικά σύνολα **διάστασης 0, 1, …, *d*** που ορίζονται από το ***S***.

- ευθείες, υπερεπίπεδα
- καμπύλες, επιφάνειες
- ευθύγραμμα τμήματα
- κύκλοι, σφαίρες
- …

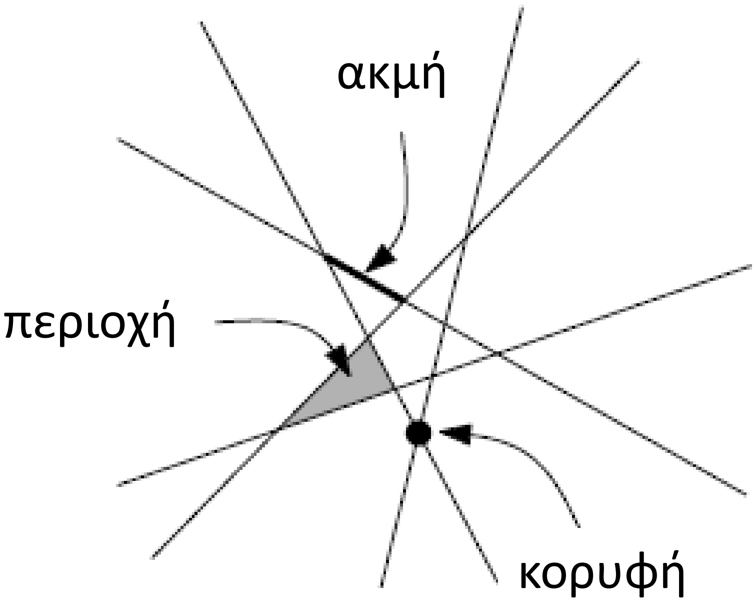


Εφαρμογές: hidden surface removal, …

Διάταξη Ευθειών Γραμμών

Διάταξη ευθειών γραμμών

διαμέριση του **επιπέδου**
σε
- ***κορυφές*** ***(vertices)***
- ***ακμές*** ***(edges)***
- ***περιοχές*** ***(faces)***



Απλή (simple) διάταξη ευθειών

κάθε ζεύγος ευθειών τέμνεται σε **διαφορετικό σημείο**

$\Rightarrow$ **δεν** υπάρχουν **2 παράλληλες** ευθείες
& **δεν** υπάρχουν **3 ευθείες** που **συντρέχουν** στο ίδιο σημείο

Απλή Διάταξη Ευθειών Γραμμών

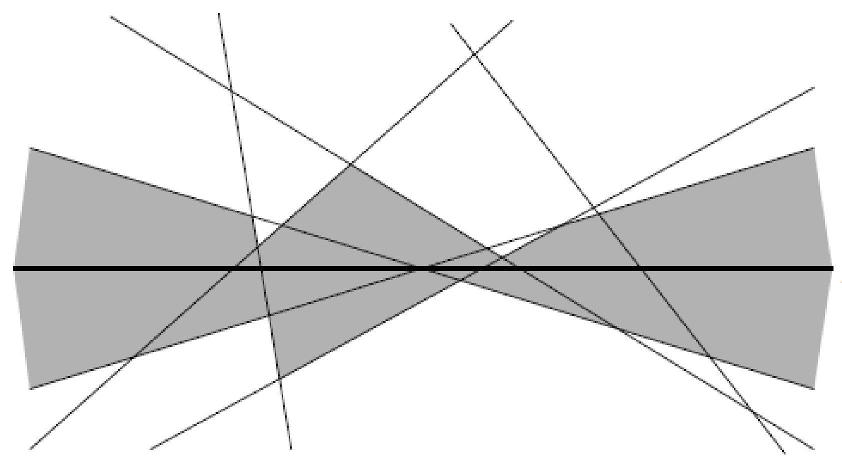
Απλή διάταξη ευθειών $\Rightarrow$ **μέγιστο μέγεθος**

Θεώρημα

Σε μια **απλή** διάταξη n ευθειών γραμμών

- πλήθος **κορυφών** $V = n(n-1)/2$
- πλήθος **ακμών** $E = n^2$
- πλήθος **περιοχών** $F = n(n-1)/2 + n + 1$

Απόδειξη



- Κορυφές $V = n(n-1)/2$
- Ακμές $E = n^2$

  *Κάθε ευθεία τέμνεται από τις **υπόλοιπες n-1 ευθείες***
- Περιοχές $F = n(n-1)/2 + n + 1$

  Επαγωγή στο πλήθος n των ευθειών

Απλή Διάταξη Ευθειών Γραμμών

$\boxed{\text{Απλή διάταξη ευθειών} \Rightarrow \text{μέγιστο μέγεθος}}$

Θεώρημα

Σε μια **απλή** διάταξη n ευθειών γραμμών

- πλήθος **κορυφών** $V = n\,(n\text{-}1)\,/\,2$
- πλήθος **ακμών** $E = n^2$
- πλήθος **περιοχών** $F = n\,(n\text{-}1)\,/\,2 \;+\; n \;+\; 1$

Πόρισμα

Μια διάταξη n ευθειών γραμμών είναι μια διαμέριση του επι-πέδου πολυπλοκότητας $O(n^2)$.

Οι διατάξεις ευθειών γραμμών βρίσκουν πολλές **εφαρμογές** ιδιαίτερα σε συνδυασμό με τον **μετασχηματισμό δυικότητας**.

Αυξητικός Αλγόριθμος

Αναπαράσταση

διπλά συνδεδεμένη λίστα ακμών (DCEL)

με **πλαίσιο** (*bounding box*) που **περικλείει όλες τις κορυφές**

Αυξητικός Αλγόριθμος

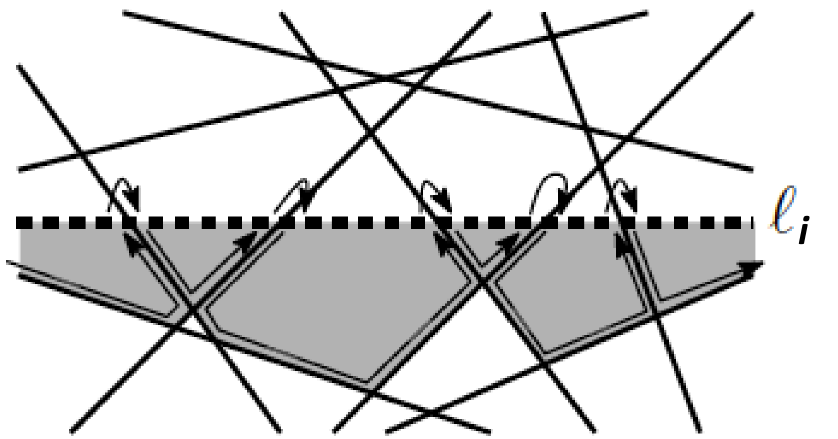
1. υπολόγισε **πλαίσιο**
2. κατασκευάσε ***DCEL*** αναπαράσταση
3. for i:=1 to n do

    εισαγωγή ευθείας ℓ_i

Εισαγωγή Ευθείας

Έστω ότι έχουμε ήδη εισάγει ***i*** **-1** ευθείες και τώρα **εισάγουμε την *i*-οστή ευθεία** ℓ_i.

- Κινούμαστε κατά μήκος του **πλαισίου**, βρίσκουμε κάποιο σημείο στο οποίο η ℓ_i **τέμνει το πλαίσιο** και προσδιορίζουμε σε ποια **περιοχή** εισέρχεται.
- Όταν είμαστε σε μια **περιοχή**, προσδιορίσουμε από ποιο σημείο **εξέρχεται** η ℓ_i από την περιοχή.
  Δηλ., κινούμαστε κατά μήκος του συνόρου της περιοχής και βρίσκουμε σε ποιο άλλο σημείο η ℓ_i τέμνει την περιοχή.

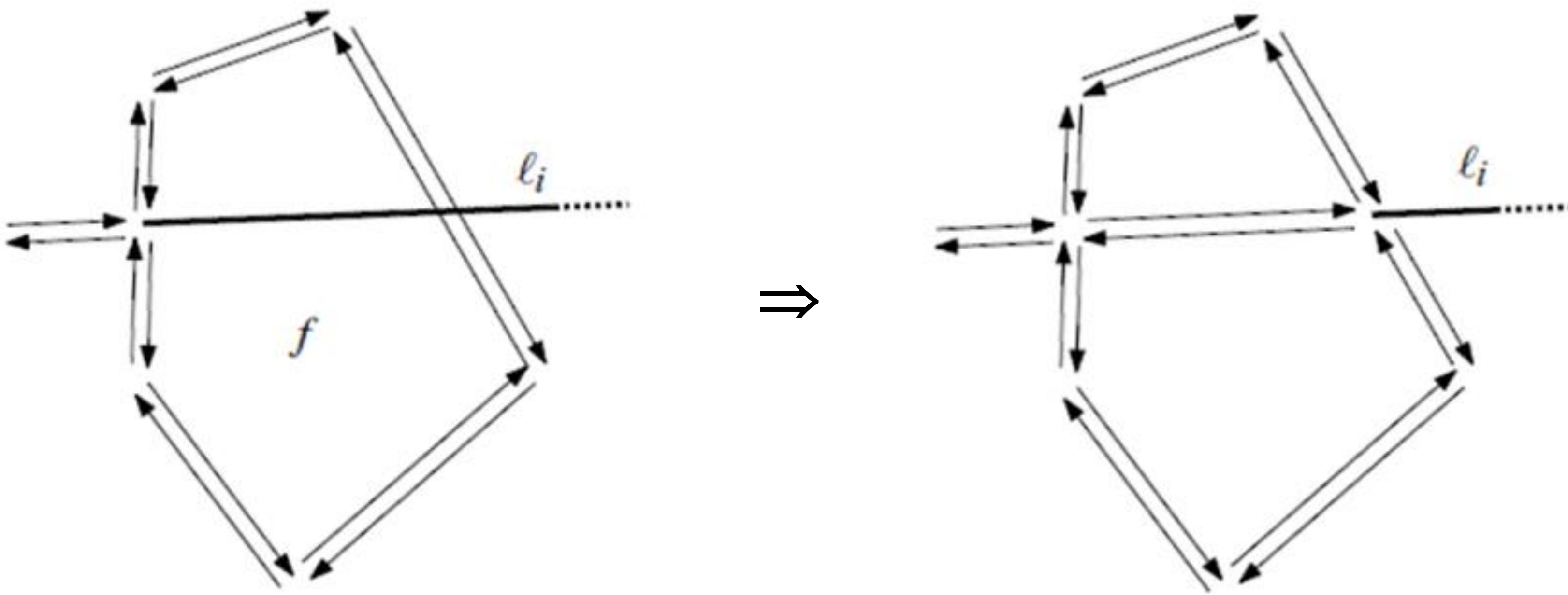


Διαχωρισμός Περιοχής

Αφού έχουμε διασχίσει μια περιοχή,

τη **χωρίζουμε** σε **δύο** περιοχές και

ενημερώνουμε τη ***DCEL*** αναπαράσταση όπως φαίνεται.



Αυξητικός Αλγόριθμος - Πολυπλοκότητα

Αυξητικός Αλγόριθμος

1. υπολόγισε **πλαίσιο**	$\boxed{O(n \log n)}$	
2. κατασκευάσε ***DCEL*** *αναπαράσταση*	$O(1)$	
3. for i:=1 to n do	n	επαναλήψεις
εισαγωγή i-οστής ευθείας ℓ_i	$O(i^2)$	ανά επανάληψη

Συνολικά: $O(\Sigma_i^n i^2) = O(n^3)$

Χάρις στο **Θεώρημα Ζώνης**, αποδεικνύεται ότι:

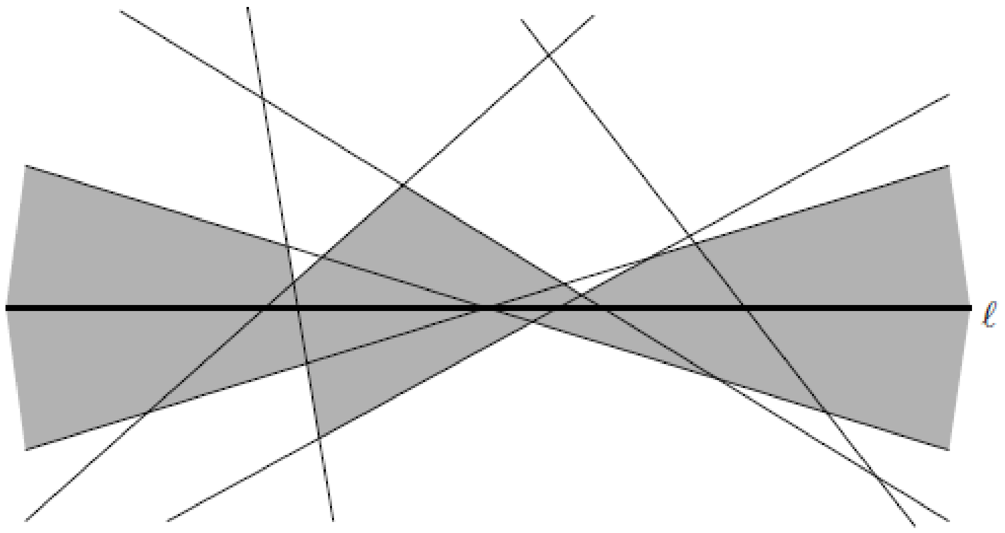
- η εισαγωγή της i-οστής ευθείας ℓ_i απαιτεί $O(i)$ χρόνο
- άρα συνολικά έχουμε $O(\Sigma_i^n i) = O(n^2)$.

βέλτιστος

Θεώρημα Ζώνης

Ζώνη ευθείας ℓ

σύνολο **περιοχών** που **τέμνονται** από την ευθεία ℓ



Θεώρημα

Το συνολικό πλήθος **ακμών** z_k σε **όλες** τις περιοχές που τέμνονται από μια ευθεία σε μια διάταξη k ευθειών είναι $O(k)$. Πιο συγκεκριμένα, $z_k \leq 6k$.

Απόδειξη του Θεωρήματος Ζώνης

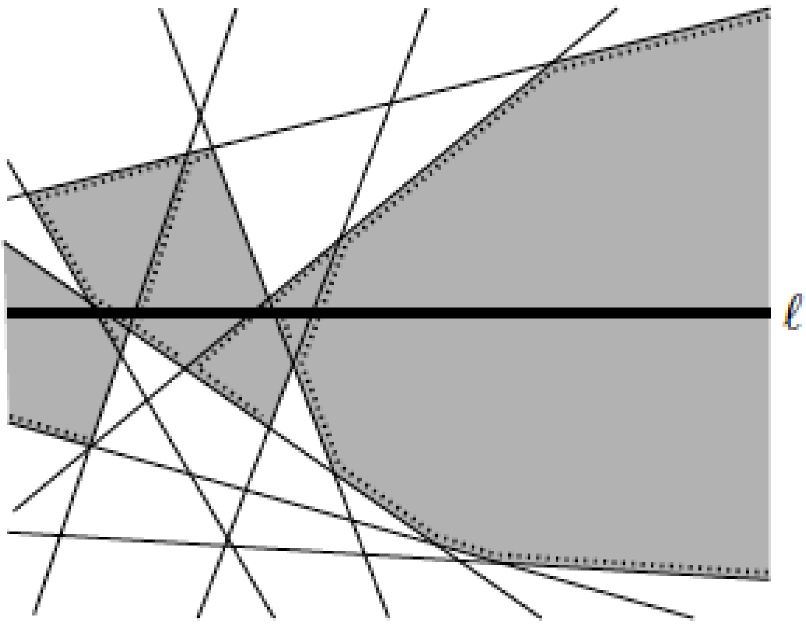
Υποθέτουμε ότι η διάταξη είναι **απλή**

Απόδειξη

- Υποθέτουμε ότι η ℓ είναι **ορiζόντια**.
- Σε κάθε περιοχή της **ζώνης** της ℓ, οι **ακμές** είναι:

  είτε **ακμες-στα-αριστερά**

  είτε **ακμές-στα-δεξιά**



Αρκεί να δείξουμε ότι

το **πλήθος** των **ακμών-στα-αριστερά** σε μια διάταξη ***k*** ευθειών είναι το πολύ **3*k***.

Απόδειξη του Θεωρήματος Ζώνης

Πλήθος ακμών-στα-αριστερά ≤ 3*k*

απόδειξη με **επαγωγή** στο πλήθος ***k*** των ευθειών

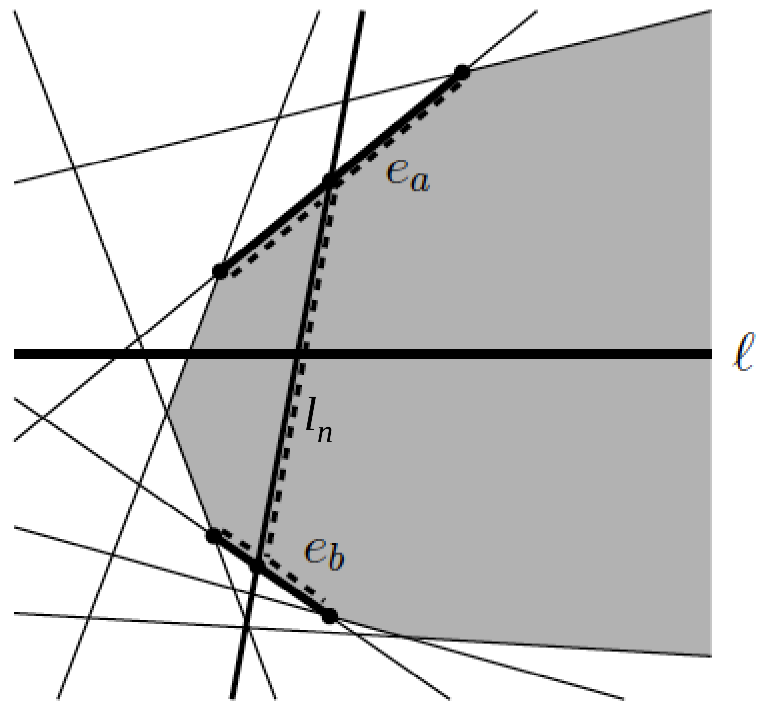
- **Βάση**: ***k*=1** ⇒ 1 ακμή-στα-αριστερά **≤ 3** ✓
- **Επαγ. Υπόθεση**: έστω ότι η πρόταση ισχύει για ***k*-1** ευθείες
- **Επαγωγικό Βήμα**: θα δείξουμε ότι ισχύει για ***k*** ευθείες.
  - **διάγραψε** μια ευθεία
  - χρησιμοποίησε την **Επαγωγική Υπόθεση** στη διάταξη των **υπόλοιπων *k*-1 ευθειών**
  - υπολόγισε **φράγμα** στο **πλήθος των ακμών-στα-αριστερά**

Απόδειξη του Θεωρήματος Ζώνης

Πλήθος ακμών-στα-αριστερά ≤ 3*k*

Επαγωγικό Βήμα

- **διάγραψε** την ευθεία l_n που έχει το **δεξιότερο** σημείο τομής με ℓ
- Επαγ. Υπόθεση ⇒ η προκύπτουσα διάταξη έχει **το πολύ 3 (*k*-1)** ακμές-στα-αριστερα
- η **προσθήκη** της l_n **αυξάνει** το πλήθος των ακμών-στα-αριστερά κατά **το πολύ 3**
- **Συνολικά: ≤ 3 (*k*-1) + 3 ≤ 3*k*** ✓



άνω φράγμα **5*k*** για προσθήκη ευθείας ℓ

Διάταξη Υπερεπιπέδων στον $\boldsymbol{R^d}$

Θεώρημα

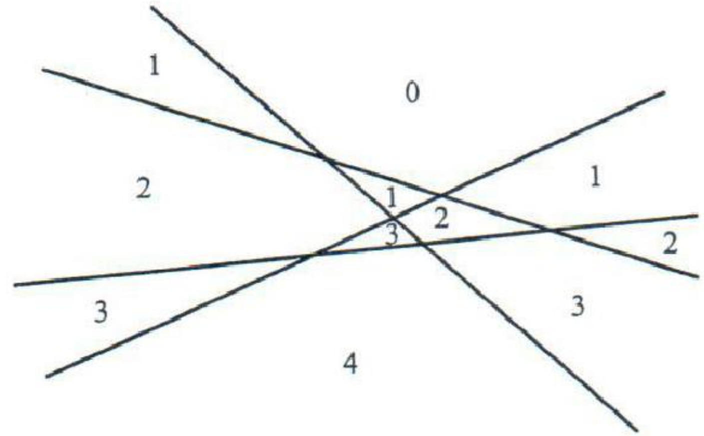
Σε μια διάταξη ***n*** **υπερεπιπέδων** στον $\boldsymbol{R^d}$,

- το **πλήθος** κορυφών, ακμών, εδρών κλπ της διάταξης είναι $\boldsymbol{O(n^d)}$,
- η **ζώνη** ενός υπερεπιπέδου έχει $\boldsymbol{O(n^{d-1})}$ συνολικό **μέγεθος**,
- μια τέτοια διάταξη μπορεί να **κατασκευαστεί** σε $\boldsymbol{O(n^d)}$ **χρόνο και χώρο**.

Επίπεδα Διάταξης

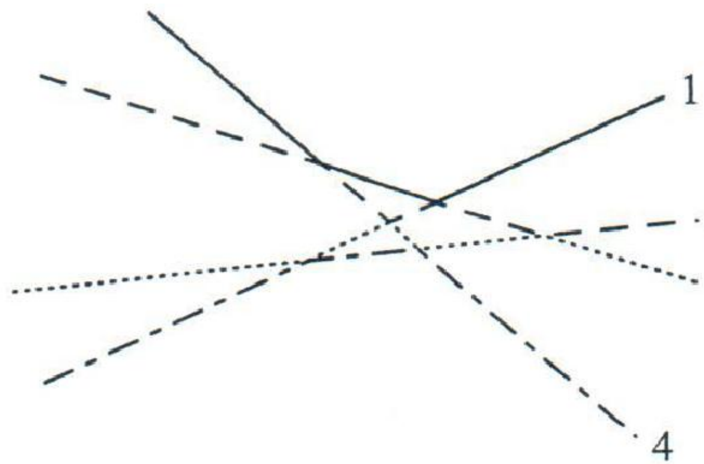
Ας θεωρήσουμε μια **διάταξη *A*** ευθειών στο επίπεδο.

Κάθε (ανοιχτή) **περιοχή** της ***A*** μπορεί να χαρακτηρισθεί από το πλήθος των **ευθειών γραμμών** που είναι **ψηλότερα**.



Κάθε (ανοιχτή) **ακμή** της ***A*** μπορεί να χαρακτηρισθεί ομοίως.

Επίπεδο (***level***) ***k*** μιας διάταξης
σύνολο **ακμών** με
***k*-1 ευθείες ψηλότερα**



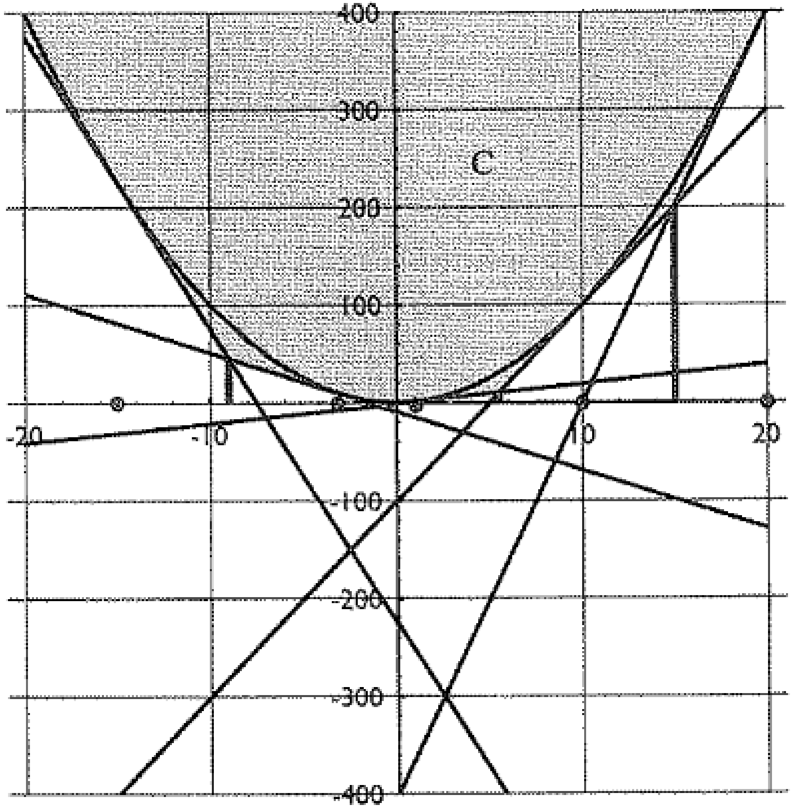
Διατάξεις & Διαγράμματα Voronoi

Ας θεωρήσουμε **Διαγράμματα Voronoi** σημείων ∈ ***R*** (i.e., ***d = 1***).

Ποιο είναι το **διάγραμμα Voronoi 1ης τάξης**; **2ης τάξης**;

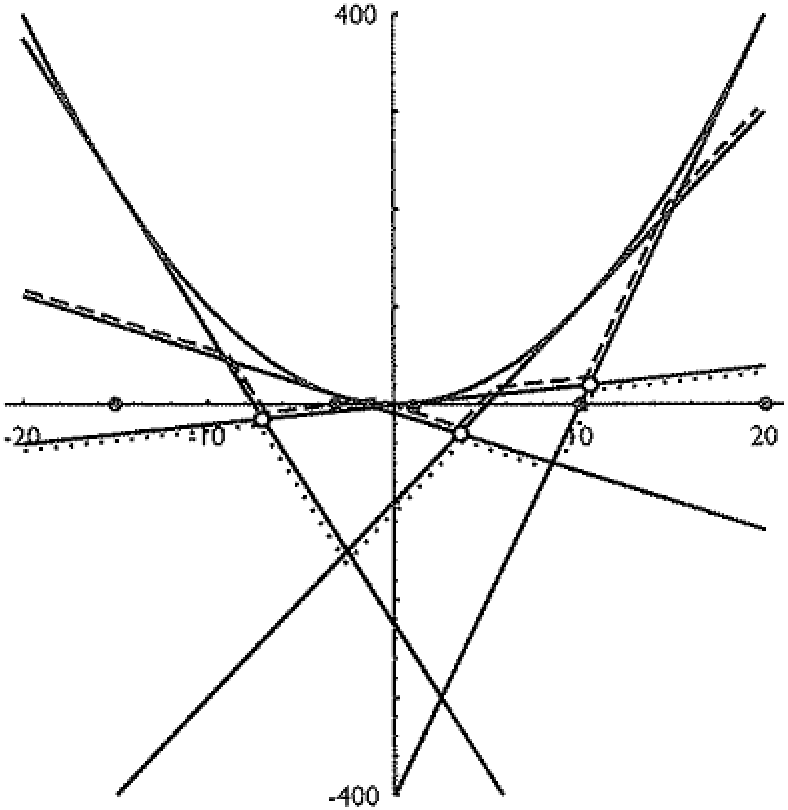
Προβάλλουμε τα σημεία στην **παραβολή *C***: $y = x^2$ και θεωρούμε τις **εφαπτόμενες** στην ***C*** στις **προβολές**.

Οι **προβολές** στο ***R*** των **σημείων τομής** των **εφαπτομένων** δίνουν το **διάγραμμα Voronoi 1ης τάξης** των σημείων ∈ ***R***.



Διατάξεις & Διαγράμματα Voronoi

Οι **προβολές** στο ***R***
των **σημείων τομής**
των **επιπέδων *k*** και ***k*+1**
της διάταξης των εφαπτομένων
δίνουν
το **διάγραμμα Voronoi *k* τάξης**
των σημείων ∈ ***R***.



Αυτά τα αποτελέσματα **επεκτείνονται** και σε χώρους **μεγαλύτερης διάστασης**!