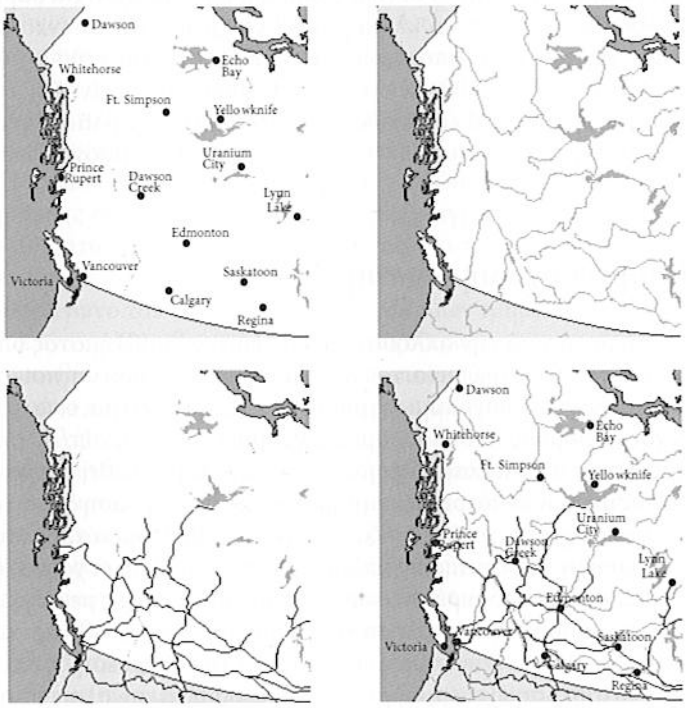
2 Τομή ευθύγραμμων τμημάτων

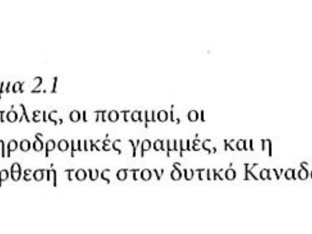
Υπέρθεση θεματικών χαρτών

Οι χάρτες αποτελούν μια ανεκτίμητη πηγή πληροφοριών για κάποιον που επισκέπτεται μια άγνωστη χώρα. Υποδεικνύουν πού βρίσκονται τα τουριστικά αξιοθέατα, ποιους δρόμους και ποια τρένα πρέπει να ακολουθήσει κανείς για να φτάσει σε αυτά, απεικονίζουν ποτάμια και λίμνες, κ.ο.κ. Δυστυχώς, μπορούν



Σχήμα 2.1
Οι πόλεις, οι ποταμοί, οι σιδηροδρομικές γραμμές, και η υπέρθεσή τους στον δυτικό Καναδά

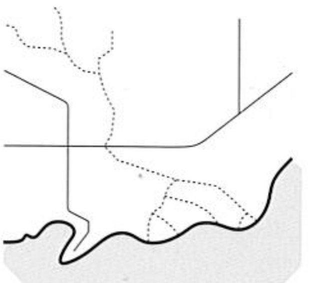
επίσης να αποτελέσουν σοβαρή αιτία εκνευρισμού, καθώς συχνά είναι δύσκολο να βρεθούν οι κατάλληλες πληροφορίες: ακόμη και όταν ξέρει κανείς πού περίπου βρίσκεται μια μικρή πόλη, ο εντοπισμός της στον χάρτη δεν είναι πάντα εύκολος. Προκειμένου να διευκολύνουν την ανάγνωση των χαρτών, τα γεωγραφικά συστήματα πληροφοριών τους διαιρούν σε διάφορα *στρώματα*. Κάθε στρώμα είναι ένας θεματικός χάρτης, δηλαδή περιέχει πληροφορίες ενός μόνο τύπου. Με άλλα λόγια, υπάρχει ένα στρώμα που περιέχει το οδικό δίκτυο, ένα στρώμα που περιέχει τις πόλεις, ένα στρώμα που περιέχει τους ποταμούς, κ.ο.κ. Το θεματικό αντικείμενο ενός στρώματος μπορεί να είναι και πιο αφηρημένο. Για παράδειγμα, μπορεί να υπάρχει ένα στρώμα για την πληθυσμιακή πυκνότητα, για το μέσο ύψος βροχόπτωσης, για τον βιότοπο της γκρίζας αρκούδας, ή για τη βλάστηση. Τα είδη των γεωμετρικών πληροφοριών που περιλαμβάνουν τα διάφορα στρώματα μπορεί να ποικίλουν σημαντικά μεταξύ τους: το στρώμα για ένα οδικό δίκτυο μπορεί να έχει καταχωρημένους τους δρόμους ως συλ-



λογές ευθύγραμμων τμημάτων (ή καμπυλών, ενδεχομένως), το στρώμα για τις πόλεις μπορεί να περιέχει σημεία που επιγράφονται με τα ονόματα των πόλεων, και το στρώμα για τη βλάστηση μπορεί να περιλαμβάνει μια υποδιαίρεση του χάρτη σε περιοχές που επιγράφονται με τα αντίστοιχα είδη βλάστησης.

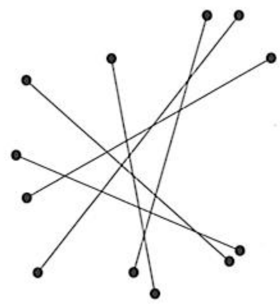
Ο χρήστης ενός γεωγραφικού συστήματος πληροφοριών μπορεί να επιλέξει για προβολή έναν από τους θεματικούς χάρτες. Για παράδειγμα, για να βρούμε μια μικρή κωμόπολη θα διαλέξουμε το στρώμα που περιέχει τις πόλεις, ώστε να μην αποσπαστεί η προσοχή μας από πληροφορίες όπως τα ονόματα ποταμών και λιμνών. Αφού εντοπίσουμε την κωμόπολη, πιθανόν να θέλουμε να μάθουμε πώς μπορούμε να μεταβούμε εκεί. Για τον σκοπό αυτό, τα γεωγραφικά συστήματα πληροφοριών επιτρέπουν στον χρήστη να προβάλλει μια *υπέρθεση* διαφόρων χαρτών –βλ. Σχήμα 2.1. Χρησιμοποιώντας λοιπόν μια υπέρθεση του οδικού χάρτη και του χάρτη των πόλεων, μπορούμε να βρούμε πώς να πάμε στην κωμόπολη. Όταν δύο ή περισσότερα στρώματα θεματικών χαρτών προβάλλονται μαζί, οι τομές στην υπέρθεση αποτελούν θέσεις ιδιαίτερου ενδιαφέροντος. Για παράδειγμα, όταν βλέπουμε την υπέρθεση του στρώματος για τους δρόμους και του στρώματος για τους ποταμούς, θα ήταν χρήσιμο αν οι τομές επισημαίνονταν με ευκρίνεια. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι δύο χάρτες είναι κατά βάση δίκτυα, και οι τομές τους είναι σημεία. Σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να μας ενδιαφέρουν οι τομές ολόκληρων περιοχών. Για παράδειγμα, οι γεωγράφοι που μελετούν το κλίμα μπορεί να χρειάζεται να εντοπίσουν τις περιοχές που καλύπτονται από πευκοδάσος και δέχονται ετήσιο ύψος βροχόπτωσης από 1000 έως 1500 χιλιοστά. Οι περιοχές αυτές είναι οι τομές των περιοχών που επιγράφονται «πευκοδάσος» στον χάρτη της βλάστησης και των περιοχών που επιγράφονται «1000–1500» στον χάρτη της βροχόπτωσης.

2.1 Τομή ευθύγραμμων τμημάτων



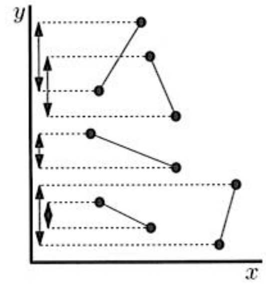
Θα μελετήσουμε αρχικά την απλούστερη μορφή του προβλήματος υπέρθεσης χαρτών, όπου τα δύο στρώματα του χάρτη αποτελούν δίκτυα που αναπαρίστανται ως συλλογές ευθύγραμμων τμημάτων. Για παράδειγμα, είναι στρώματα που περιέχουν δρόμους, σιδηροδρομικές γραμμές, ή ποταμούς σε μικρή κλίμακα. Σημειωτέον ότι μια καμπύλη μπορεί να αναπαρασταθεί προσεγγιστικά με ένα πλήθος μικρών ευθύγραμμων τμημάτων. Σε πρώτη φάση δεν θα ασχοληθούμε με τις περιοχές τις οποίες ορίζουν αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα. Αργότερα θα εξετάσουμε και την πιο περίπλοκη περίπτωση όπου οι χάρτες δεν είναι απλώς δίκτυα, αλλά υποδιαιρέσεις του επιπέδου σε περιοχές με συγκεκριμένη σημασία. Για να λύσουμε το πρόβλημα της υπέρθεσης δικτύων, θα πρέπει πρώτα να το διατυπώσουμε σε γεωμετρικό πλαίσιο. Για την υπέρθεση δύο δικτύων η γεωμετρική κατάσταση έχει ως εξής: για δύο δεδομένα σύνολα ευθύγραμμων τμημάτων, να υπολογιστούν όλα τα σημεία τομής μεταξύ τμημάτων που ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα. Αυτή η περιγραφή δεν είναι ακόμη αρκετά ακριβής, καθώς δεν έχουμε ορίσει πότε δύο τμήματα τέμνονται. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση που κάποιο άκρο του ενός τμήματος κείται επάνω στο άλλο τμήμα, θεωρούμε ότι τα τμήματα τέμνονται ή όχι; Με άλλα λόγια, θα πρέπει να διευκρινίσουμε αν τα τμήματα που δίνονται είναι ανοιχτά ή κλειστά. Για να αποφασίσουμε τι από τα δύο ισχύει, θα πρέπει να επιστρέψουμε στην εφαρμογή, στο πρόβλημα της υπέρθεσης δικτύων. Δεδομένου ότι οι δρόμοι σε ένα οδικό δίκτυο και οι ποταμοί σε ένα χάρτη ποταμών αναπαρίστανται με αλυσίδες ευθύγραμμων τμημάτων, όταν διασταυρώνεται ένας δρόμος με έναν ποταμό αυτό σημαίνει ότι το εσωτερικό μιας αλυσίδας τέμνει το εσωτερικό μιας άλλης αλυσίδας. Αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι τέμνεται το εσωτερικό ενός τμήματος με το εσωτερικό ενός άλλου τμήματος: το σημείο τομής μπορεί να τύχει να συμπίπτει με ένα άκρο κάποιου από τα τμήματα μιας αλυσίδας. Μάλιστα, η περίπτωση αυτή δεν είναι σπάνια, διότι οι ελικοειδείς ποταμοί αναπαρίσταται από πολλά μικρά ευθύγραμμα τμήματα, και κατά την ψηφιοποίηση του χάρτη οι συντεταγμένες των άκρων αυτών των τμημάτων πιθανόν να έχουν στρογγυλευτεί. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι θα πρέπει να θεωρήσουμε τα τμήματα κλειστά, ώστε σε περίπτωση που ένα άκρο τμήματος κείται επάνω σε ένα άλλο τμήμα αυτό να λογίζεται σαν τομή.

Για να απλοποιήσουμε κάπως την περιγραφή, θα εντάξουμε τα τμήματα και των δύο συνόλων σε ένα μόνο σύνολο, και θα υπολογίσουμε όλα τα σημεία τομής μεταξύ τμημάτων αυτού του συνόλου. Με αυτόν τον τρόπο θα προσδιορίσουμε σίγουρα όλα τα σημεία τομής που μας ενδιαφέρουν. Βεβαίως, ενδέχεται να βρούμε και σημεία τομής μεταξύ τμημάτων από το ίδιο αρχικό σύνολο. Στην πραγματικότητα, αυτό είναι σίγουρο ότι θα συμβεί, αφού στην εφαρμογή μας τα τμήματα κάθε συνόλου σχηματίζουν αλυσίδες, και η σύμπτωση των άκρων δύο τμημάτων λογίζεται σαν τομή. Αυτά τα επιπλέον σημεία τομής μπορούμε να τα αφαιρέσουμε αργότερα, ελέγχοντας απλώς για καθένα από αυτά αν τα αντίστοιχα δύο τμήματα ανήκουν στο ίδιο αρχικό σύνολο. Επομένως, η διατύπωσή μας για το πρόβλημα έχει ως εξής: για ένα δεδομένο σύνολο S με n κλειστά ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο, να προσδιοριστούν όλα των σημεία τομής μεταξύ τμημάτων του S.

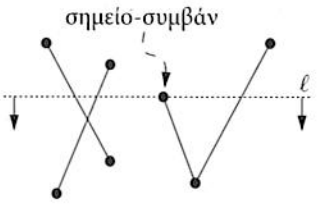


Το πρόβλημα δεν φαίνεται ιδιαίτερα δύσκολο: μπορούμε απλώς για κάθε ζεύγος τμημάτων να υπολογίσουμε αν αυτά τέμνονται, και εφόσον τέμνονται να αναφέρουμε το σημείο τομής τους. Προφανώς, αυτός ο εξαντλητικός αλγόριθμος απαιτεί χρόνο $O(n^2)$. Υπό μία έννοια, είναι βέλτιστος: αν κάθε τμήμα του συνόλου τέμνεται με κάθε άλλο τμήμα, τότε οποιοσδήποτε αλγόριθμος θα χρειαστεί χρόνο $\Omega(n^2)$, αφού θα πρέπει να αναφέρει όλα αυτά τα σημεία τομής. Παρόμοιο παράδειγμα μπορούμε να δώσουμε και για την περίπτωση της υπέρθεσης δύο δικτύων. Ωστόσο, στις πραγματικές εφαρμογές τα περισσότερα τμήματα είτε δεν τέμνουν κανένα άλλο τμήμα είτε τέμνουν ελάχιστα από αυτά, οπότε το συνολικό πλήθος των σημείων τομής είναι πολύ μικρότερο από το τετράγωνο του πλήθους των ευθύγραμμων τμημάτων. Θα ήταν χρήσιμο να έχουμε έναν αλγόριθμο που να είναι ταχύτερος σε τέτοιες περιπτώσεις. Με άλλα λόγια, θέλουμε έναν αλγόριθμο του οποίου ο χρόνος εκτέλεσης να εξαρτάται όχι μόνο από το πλήθος των ευθύγραμμων τμημάτων στην είσοδο, αλλά και από το πλήθος των σημείων τομής. Ένας αλγόριθμος αυτού του είδους λέγεται *εξοδοεξαρτώμενος*: ο χρόνος εκτέλεσής του εξαρτάται όχι μόνο από το μέγεθος της εισόδου αλλά και από το μέγεθος της εξόδου. Θα μπορούσαμε επίσης να αποκαλέσουμε έναν τέτοιον αλγόριθμο *τομοεξαρτώμενο*, αφού το μέγεθος της εξόδου καθορίζεται από το πλήθος των σημείων τομής.

Πώς μπορούμε να αποφύγουμε να ελέγξουμε όλα τα ζεύγη τμημάτων; Εδώ θα πρέπει να εκμεταλλευτούμε τη γεωμετρία του προβλήματος: δύο τμήματα ενδέχεται να τέμνονται μόνο εφόσον βρίσκονται κοντά το ένα στο άλλο. Παρακάτω θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την παρατήρηση για να σχεδιάσουμε έναν εξοδοεξαρτώμενο αλγόριθμο για το πρόβλημα της τομής ευθύγραμμων τμημάτων.



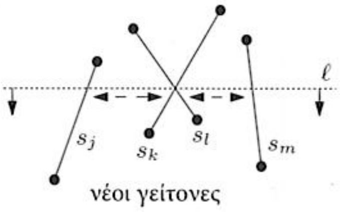
Έστω $S := \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ το σύνολο των τμημάτων για τα οποία θέλουμε να υπολογίσουμε όλα τα σημεία τομής. Ο στόχος μας είναι να αποφύγουμε να ελέγξουμε ζεύγη τμημάτων τα οποία βρίσκονται μακριά το ένα από το άλλο. Αλλά πώς μπορούμε να το πετύχουμε αυτό; Κατ' αρχάς, ας προσπαθήσουμε να αποκλείσουμε μια εύκολη περίπτωση. Ορίζουμε ως «διάστημα y» ενός τμήματος την κάθετη προβολή του στον άξονα y. Όταν τα διαστήματα y δύο τμημάτων δεν επικαλύπτονται –οπότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα τμήματα βρίσκονται μακριά το ένα από το άλλο στην κατακόρυφη διεύθυνση– τότε τα τμήματα αποκλείεται να τέμνονται. Επομένως, αρκεί να ελέγξουμε ζεύγη τμημάτων των οποίων τα διαστήματα y επικαλύπτονται, δηλαδή ζεύγη που μπορούν να τμηθούν από την ίδια οριζόντια ευθεία. Για να βρούμε αυτά τα ζεύγη, φανταζόμαστε μια ευθεία ℓ που ολισθαίνει προς τα κάτω σαρώνοντας το επίπεδο, έχοντας ξεκινήσει από μια θέση επάνω από όλα τα τμήματα. Καθώς αυτή η φανταστική ευθεία ολισθαίνει προς τα κάτω, τηρούμε καταγεγραμμένα όλα τα τμήματα που την τέμνουν –οι σχετικές λεπτομέρειες θα εξηγηθούν παρακάτω– ώστε να εντοπίσουμε τα ζεύγη που χρειαζόμαστε.



Ένας αλγόριθμος αυτού του τύπου λέγεται *αλγόριθμος σάρωσης επιπέδου* και η ευθεία ℓ λέγεται *σαρωτική ευθεία*. Η *κατάσταση* της σαρωτικής ευθείας είναι το σύνολο των τμημάτων που τέμνουν την ευθεία αυτή. Προφανώς, καθώς η ευθεία κινείται προς τα κάτω, η κατάστασή της μεταβάλλεται. Η μεταβολή αυτή, όμως, δεν είναι συνεχής· η ενημέρωση της κατάστασης είναι απαραίτητη μόνο σε κάποια ιδιαίτερα σημεία: στα λεγόμενα *σημεία-συμβάντα* του αλγορίθμου της σάρωσης επιπέδου. Στον συγκεκριμένο αλγόριθμο, τα σημεία-συμβάντα είναι τα άκρα των τμημάτων.

Οι μόνες στιγμές που ο αλγόριθμος δρα είναι οι στιγμές που η σαρωτική ευθεία φτάνει σε κάποιο σημείο-συμβάν, οπότε ενημερώνεται η κατάστασή της και εκτελούνται κάποιοι έλεγχοι τομής. Συγκεκριμένα, αν το σημείο-συμβάν είναι το άνω άκρο κάποιου τμήματος, τότε ένα νέο τμήμα έχει μόλις αρχίσει να τέμνει τη σαρωτική ευθεία και θα πρέπει να προστεθεί στην κατάσταση. Εκτός από την προσθήκη αυτή, ο αλγόριθμος ελέγχει και αν το συγκεκριμένο τμήμα τέμνεται με οποιοδήποτε από τα τμήματα που ήδη τέμνουν τη σαρωτική ευθεία. Αν το σημείο-συμβάν είναι ένα κάτω άκρο, τότε κάποιο τμήμα έχει μόλις πάψει να τέμνει τη σαρωτική ευθεία, και θα πρέπει να αφαιρεθεί από την κατάσταση. Με τον τρόπο αυτό, ελέγχουμε μόνο ζεύγη τμημάτων που μπορούν να τμηθούν από την ίδια οριζόντια ευθεία. Δυστυχώς, αυτό δεν είναι αρκετό: εξακολουθούν να υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες, παρ' ότι το πλήθος των σημείων τομής είναι μικρό, το πλήθος των ζευγών που ελέγχουμε παραμένει τετραγωνικό. Ένα απλό παράδειγμα είναι κάποιο συνόλο κατακόρυφων τμημάτων τα οποία τέμνουν όλα τον άξονα x. Άρα ο αλγόριθμος δεν είναι εξοδοεξαρτώμενος. Το πρόβλημα έγκειται στο ότι δύο τμήματα που τέμνουν τη σαρωτική ευθεία ενδέχεται να είναι απομακρυσμένα μεταξύ τους στην οριζόντια διεύθυνση.

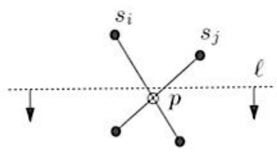
Προκειμένου να συνυπολογίσουμε την εγγύτητα στην οριζόντια διεύθυνση, ας διατάξουμε τα τμήματα από τα αριστερά προς τα δεξιά καθώς αυτά τέμνουν τη σαρωτική ευθεία. Θα ελέγχουμε μόνο τμήματα που γειτνιάζουν μεταξύ τους σε αυτή την οριζόντια διάταξη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε νέο τμήμα ελέγχεται μόνο έναντι δύο τμημάτων: εκείνου που βρίσκεται ακριβώς στα αριστερά και εκείνου που βρίσκεται ακριβώς στα δεξιά από το άνω άκρο του. Αργότερα, όταν η σαρωτική ευθεία ολισθήσει σε κάποια χαμηλότερη θέση, ένα τμήμα μπορεί να καταστεί γειτονικό με άλλα τμήματα, οπότε θα ελεγχθεί έναντι αυτών. Αυτή η νέα μας τακτική θα αντικατοπτρίζεται στην κατάσταση της σαρωτικής ευθείας: τώρα πλέον πρόκειται για τη *διατεταγμένη* ακολουθία των τμημάτων που τέμνουν την ευθεία. Η νέα κατάσταση μεταβάλλεται όχι μόνο στα άκρα των τμημάτων αλλά και στα σημεία τομής, όπου και αλλάζει η διάταξη των τεμνόμενων τμημάτων, οπότε τα δύο τμήματα που αλλάζουν θέσεις θα πρέπει να ελεγχθούν έναντι των νέων τους γειτόνων. Αυτό είναι ένα νέο είδος σημείου-συμβάντος.



Προτού επιχειρήσουμε να μετασχηματίσουμε αυτές τις ιδέες σε δραστικό αλγόριθμο, θα πρέπει να βεβαιωθούμε ότι η προσέγγισή μας είναι ορθή. Ναι μεν ελαττώσαμε το πλήθος των ελεγχόμενων ζευγών, αλλά είναι βέβαιο ότι θα εντοπίσουμε όλα τα σημεία τομής; Με άλλα λόγια, αν δύο τμήματα s_i και s_j τέμνονται, υπάρχει πάντα κάποια θέση της σαρωτικής ευθείας ℓ στην οποία τα s_i και s_j είναι γειτονικά κατά μήκος της ℓ; Ας αγνοήσουμε σε πρώτη φάση κάποιες «δύστροπες» περιπτώσεις: ας υποθέσουμε ότι κανένα τμήμα δεν είναι οριζόντιο, ότι δύο οποιαδήποτε τμήματα τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο – δηλαδή δεν επικαλύπτονται– και ότι δεν υπάρχει καμία τριάδα τμημάτων τα οποία να διέρχονται από το ίδιο σημείο. Παρ' ότι, όπως θα δούμε αργότερα, οι περιπτώσεις αυτές μπορούν να αντιμετωπιστούν εύκολα, προς το παρόν είναι καλύτερα να τις αγνοήσουμε. Επιπλέον, οι τομές στις οποίες το άκρο ενός τμήματος κείται πάνω σε ένα άλλο τμήμα μπορούν να εντοπιστούν εύκολα όταν η σαρωτική ευθεία φτάνει στο συγκεκριμένο άκρο. Άρα το μόνο ερώτημα είναι αν ο αλγόριθμος εντοπίζει κάθε περίπτωση τομής ανάμεσα στο εσωτερικό ενός τμήματος και το εσωτερικό ενός άλλου.

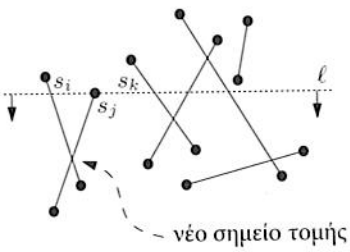
Λήμμα 2.1 *Έστω ότι δύο μη οριζόντια τμήματα s_i και s_j τέμνονται σε ένα μοναδικό εσωτερικό τους σημείο p, και ότι από το σημείο αυτό δεν διέρχεται κανένα άλλο τμήμα. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει σημείο-συμβάν πάνω από το p στο οποίο τα s_i και s_j καθίστανται γειτονικά και ελέγχονται ως προς την τομή.*

Απόδειξη. Έστω ℓ μια οριζόντια ευθεία ελάχιστα πάνω από το p. Αν η ℓ βρίσκεται αρκετά κοντά στο p, τότε τα s_i και s_j θα πρέπει να είναι γειτονικά κατά μήκος της ℓ. (Για την ακρίβεια, θα πρέπει να επιλέξουμε την ℓ έτσι ώστε να μην υπάρχει κανένα σημείο-συμβάν επί της ℓ ή ανάμεσα στην ℓ και την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το p.) Με άλλα λόγια, υπάρχει θέση της σαρωτικής ευθείας στην οποία τα s_i και s_j είναι γειτονικά. Από την άλλη πλευρά, κατά την εκκίνηση του αλγορίθμου τα s_i και s_j δεν είναι γειτονικά, διότι η σαρωτική ευθεία ξεκινάει πάνω από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα, και επομένως η κατάστασή της είναι αρχικά κενή. Συνεπώς, θα πρέπει να υπάρχει σημείο-συμβάν q στο οποίο τα s_i και s_j καθίστανται γειτονικά και ελέγχονται ως προς την τομή. ◻

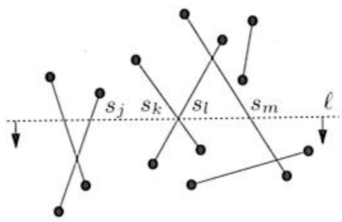


Επομένως η τακτική μας είναι σωστή, τουλάχιστον αν αγνοήσουμε τις δύστροπες περιπτώσεις που προαναφέραμε. Μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην ανάπτυξη του αλγορίθμου της σάρωσης επιπέδου. Ας ανακεφαλαιώσουμε συνοπτικά την όλη μεθοδολογία. Φανταζόμαστε μια οριζόντια σαρωτική ευθεία ℓ η οποία μετακινείται στο επίπεδο από πάνω προς τα κάτω. Η ευθεία σταματάει σε ορισμένα σημεία-συμβάντα· στην περίπτωσή μας, πρόκειται για τα άκρα των τμημάτων, τα οποία είναι γνωστά εκ των προτέρων, και για τα σημεία τομής, τα οποία υπολογίζονται στην πορεία. Καθώς η σαρωτική ευθεία κινείται, τηρούμε τη διατεταγμένη ακολουθία των τμημάτων που τέμνονται από αυτήν. Όταν η ευθεία σταματάει σε κάποιο σημείο-συμβάν, η ακολουθία των τμημάτων μεταβάλλεται και, ανάλογα με το είδος του σημείου-συμβάντος, θα πρέπει να εκτελέσουμε κάποιες ενέργειες ώστε να ενημερώσουμε την κατάσταση της σαρωτικής ευθείας και να εντοπίσουμε τα όποια σημεία τομής.

Όταν το σημείο-συμβάν είναι το άνω άκρο ενός τμήματος, η σαρωτική ευθεία τέμνεται από ένα νέο τμήμα. Το τμήμα αυτό θα πρέπει να ελεγχθεί ως προς την τομή έναντι των δύο γειτονικών του τμημάτων κατά μήκος της σαρωτικής ευθείας. Δεδομένου ότι έχουμε ήδη εντοπίσει κάθε σημείο τομής πάνω από τη σαρωτική ευθεία, τα μόνα σημεία τομής που μας ενδιαφέρουν είναι όσα βρίσκονται κάτω από την ευθεία. Για παράδειγμα, αν τα τμήματα s_i και s_k γειτνιάζουν πάνω στη σαρωτική ευθεία και εμφανιστεί ανάμεσά τους το άνω άκρο ενός νέου τμήματος s_j, τότε θα πρέπει να ελέγξουμε ως προς την τομή το s_j με τα s_i και s_k. Αν βρούμε σημείο τομής κάτω από τη σαρωτική ευθεία, τότε έχουμε εντοπίσει ένα νέο σημείο-συμβάν. Αφού επεξεργαστούμε αυτό το άνω άκρο, συνεχίζουμε με το επόμενο σημείο-συμβάν.

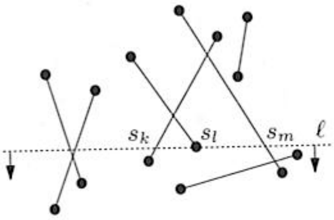


Όταν το σημείο-συμβάν είναι ένα σημείο τομής, τα δύο τμήματα που τέμνονται αλλάζουν σειρά. Το καθένα από αυτά αποκτά (το πολύ) ένα νέο γειτονικό τμήμα έναντι του οποίου ελέγχεται ως προς την τομή. Όπως και πριν, τα μόνα σημεία τομής που εξακολουθούν να μας ενδιαφέρουν είναι αυτά που βρίσκονται κάτω από τη σαρωτική ευθεία. Έστω ότι τέσσερα τμήματα s_j, s_k, s_l, και s_m εμφανίζονται με αυτήν τη σειρά πάνω στη σαρωτική ευθεία τη στιγμή που αυτή φτάνει στο σημείο τομής των s_k και s_l. Εκείνη τη στιγμή τα s_k και s_l αλλάζουν θέσεις, οπότε θα πρέπει να ελέγξουμε εάν τέμνονται κάτω από τη σαρωτική ευθεία τα τμήματα s_l και s_j, καθώς και τα τμήματα s_k και s_m. Φυσικά, τα τυχόν νέα σημεία τομής που θα εντοπίσουμε είναι επίσης σημεία-συμβάντα



για τον αλγόριθμο. Σημειώστε, ωστόσο, ότι ενδέχεται αυτά τα συμβάντα να έχουν ήδη εντοπιστεί νωρίτερα, στην περίπτωση που κάποια δύο τμήματα που καθίστανται γειτονικά έχουν υπάρξει γειτονικά και στο παρελθόν.

Όταν το σημείο-συμβάν είναι το κάτω άκρο κάποιου τμήματος, οι δύο γείτονες αυτού του τμήματος έρχονται πλέον σε γειτνίαση και θα πρέπει να ελεγχθούν ως προς την τομή. Αν τέμνονται κάτω από τη σαρωτική ευθεία, τότε το σημείο τομής τους αποτελεί σημείο-συμβάν. (Όπως και πριν, το σημείο αυτό ενδέχεται να έχει ήδη εντοπιστεί.) Έστω ότι τρία τμήματα s_k, s_l, και s_m εμφανίζονται με αυτή την σειρά πάνω στη σαρωτική ευθεία όταν αυτή συναντά το κάτω άκρο του s_l. Τότε τα s_k και s_m καθίστανται γειτονικά και ελέγχονται ως προς την τομή.



Αφού σαρώσουμε όλο το επίπεδο –ακριβέστερα, αφού επεξεργαστούμε και το τελευταίο σημείο-συμβάν– έχουμε πλέον υπολογίσει όλα τα σημεία τομής. Αυτό μας το εγγυάται η εξής αναλλοίωτη συνθήκη, που ισχύει ανά πάσα στιγμή κατά τη σάρωση του επιπέδου: όλα τα σημεία τομής πάνω από τη σαρωτική ευθεία έχουν υπολογιστεί σωστά.

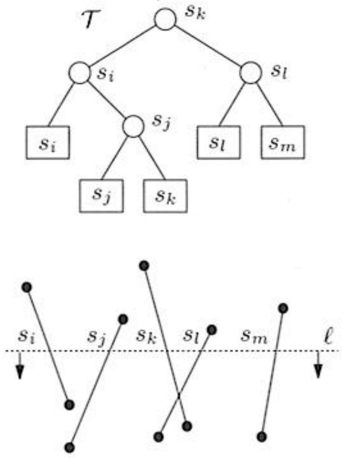
Μετά από αυτήν τη σκιαγράφηση του αλγορίθμου, θα πρέπει πλέον να περάσουμε στη λεπτομερή περιγραφή του. Θα πρέπει επίσης να εξετάσουμε και τις εκφυλισμένες περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν, όπως το να υπάρχουν τρία ή περισσότερα τμήματα που να διέρχονται από το ίδιο σημείο. Κατ' αρχάς θα πρέπει να προδιαγράψουμε πώς ακριβώς περιμένουμε να ενεργεί ο αλγόριθμος σε αυτές τις περιπτώσεις. Θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε να αναφέρει απλώς κάθε σημείο τομής μία φορά, αλλά είναι μάλλον προτιμότερο να αναφέρει για κάθε σημείο τομής έναν κατάλογο των τμημάτων που διέρχονται από αυτό ή απολήγουν σε αυτό. Μια άλλη ειδική περίπτωση για την οποία θα πρέπει να προδιαγράψουμε την απαιτούμενη συμπεριφορά πιο προσεκτικά είναι η περίπτωση δύο μερικώς επικαλυπτόμενων τμημάτων. Ωστόσο, για λόγους απλότητας θα αγνοήσουμε αυτήν την περίπτωση στο υπόλοιπο της ενότητας.

Ας εξετάσουμε κατ' αρχάς τις δομές δεδομένων που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος.

Πρώτα από όλα, χρειαζόμαστε μια δομή δεδομένων που λέγεται *ουρά συμβάντων*, για την αποθήκευση των συμβάντων. Τη δομή αυτή θα τη συμβολίζουμε με $\mathcal{Q}$. Χρειαζόμαστε επίσης μια πράξη που θα αφαιρεί από την $\mathcal{Q}$ το επόμενο συμβάν που θα λάβει χώρα και θα το παραδίδει για επεξεργασία. Το συμβάν αυτό είναι το υψηλότερο σημείο-συμβάν κάτω από τη σαρωτική ευθεία. Αν δύο σημεία-συμβάντα έχουν την ίδια τεταγμένη, τότε θα επιστρέφεται αυτό με τη μικρότερη τετμημένη. Με άλλα λόγια, τα σημεία-συμβάντα που βρίσκονται στην ίδια οριζόντια ευθεία τα επεξεργαζόμαστε από αριστερά προς τα δεξιά. Αυτό σημαίνει ότι το αριστερό άκρο ενός οριζόντιου τμήματος θα πρέπει να αντιμετωπίζεται ως άνω άκρο του, και το δεξιό άκρο ως κάτω άκρο. Ένας άλλος τρόπος να αντιλαμβάνεται κανείς αυτή τη σύμβαση είναι ο εξής: αντί για μια οριζόντια σαρωτική ευθεία, φανταστείτε μια ευθεία που κλίνει ελάχιστα προς τα πάνω και δεξιά. Μια τέτοια ευθεία συναντάει το αριστερό άκρο ενός οριζόντιου τμήματος ελάχιστα προτού συναντήσει το δεξιό. Η ουρά συμβάντων θα πρέπει να επιτρέπει εισαγωγές, αφού κατά την πορεία του αλγορίθμου θα προσδιορίζονται νέα συμβάντα. Σημειωτέον ότι δύο σημεία-συμβάντα είναι δυνατόν να συμπίπτουν. Για παράδειγμα, ενδέχεται δύο διαφορετικά τμήματα να έχουν το ίδιο άνω άκρο. Τέτοια συμπίπτοντα σημεία-συμβάντα είναι καλύτερα να αντιμετωπίζονται ως ένα μοναδικό σημείο-συμβάν. Επομένως, η πράξη της εισαγωγής θα πρέπει να έχει τη δυνατότητα να ελέγχει αν ένα συμβάν περιλαμβάνεται ήδη στην $\mathcal{Q}$.

Η υλοποίηση της ουράς συμβάντων γίνεται ως εξής. Ορίζουμε επί των σημείων-συμβάντων μια διάταξη $\prec$ που αναπαριστά τη σειρά με την οποία θα τα επεξεργαστούμε. Έτσι, για δύο σημεία-συμβάντα p και q έχουμε ότι $p \prec q$ εάν και μόνο εάν ισχύει ότι $p_y > q_y$ ή ότι $p_y = q_y$ και $p_x < q_x$. Τα σημεία-συμβάντα αποθηκεύονται σε ένα ισοσταθμισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης, διατεταγμένο σύμφωνα με την $\prec$. Μαζί με κάθε σημείο-συμβάν p θα αποθηκεύουμε στην $\mathcal{Q}$ και τα τμήματα που εκκινούν από το p, δηλαδή αυτά που έχουν το p ως άνω άκρο. Αυτή η πληροφορία θα χρειαστεί στην επεξεργασία του συμβάντος. Και οι δύο πράξεις –προσαγωγή του επόμενου συμβάντος και εισαγωγή συμβάντος– μπορούν να εκτελεστούν σε χρόνο $O(\log m)$, όπου m το πλήθος των συμβάντων στην $\mathcal{Q}$. (Η υλοποίηση της ουράς συμβάντων δεν μπορεί να γίνει με σωρό, διότι θα πρέπει να μπορούμε να ελέγχουμε αν ένα δεδομένο συμβάν περιλαμβάνεται ήδη στην $\mathcal{Q}$.)

Δεύτερον, θα πρέπει να τηρούμε την κατάσταση της σαρωτικής ευθείας, δηλαδή τη διατεταγμένη ακολουθία των τμημάτων που τέμνουν την ευθεία. Η καταστασιακή δομή, την οποία θα συμβολίζουμε με $\mathcal{T}$, χρησιμοποιείται για να προσπελάζουμε τους γείτονες ενός δεδομένου τμήματος s ώστε να ελέγχουμε αν τέμνονται με το s. Η δομή αυτή θα πρέπει να είναι δυναμική: καθώς τα διάφορα τμήματα αρχίζουν ή παύουν να τέμνουν τη σαρωτική ευθεία, θα πρέπει να εισάγονται στη δομή ή να διαγράφονται από αυτήν. Δεδομένου ότι υπάρχει μια καλά ορισμένη διάταξη για τα τμήματα που περιέχονται στην καταστασιακή δομή, μπορούμε να την υλοποιήσουμε ως ισοσταθμισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης. Αυτό ίσως φανεί παράξενο σε όσους είναι εξοικειωμένοι μόνο με δυαδικά δέντρα αναζήτησης που περιέχουν αριθμούς. Τα δυαδικά δέντρα αναζήτησης, όμως, μπορούν να περιέχουν οποιοδήποτε σύνολο στοιχείων, αρκεί να υπάρχει για αυτά μια καθορισμένη διάταξη.



Πιο συγκεκριμένα, τα τμήματα που τέμνουν τη σαρωτική ευθεία αποθηκεύονται διατεταγμένα στα φύλλα ενός ισοσταθμισμένου δυαδικού δέντρου αναζήτησης $\mathcal{T}$. Η διάταξη των τμημάτων από αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος της σαρωτικής ευθείας αντιστοιχεί στη διάταξη των φύλλων από αριστερά προς τα δεξιά στο $\mathcal{T}$. Θα πρέπει επίσης να καταχωρίσουμε και στους εσωτερικούς κόμβους κάποιες πληροφορίες, που να καθοδηγούν την κατωφερή διερεύνηση του δέντρου προς τα φύλλα. Σε κάθε εσωτερικό κόμβο καταχωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που είναι αποθηκευμένο στο ακραίο δεξιό φύλλο του αριστερού υποδέντρου του κόμβου. (Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να καταχωρίσουμε τα τμήματα μόνο στους εσωτερικούς κόμβους, ώστε να εξοικονομήσουμε αποθηκευτικό χώρο. Είναι όμως εννοιολογικά απλούστερο να σκεφτόμαστε τα τμήματα στους εσωτερικούς κόμβους ως τιμές που καθοδηγούν τη διερεύνηση του δέντρου, παρά ως δεδομένα. Επιπλέον, αποθηκεύοντας τα τμήματα στα φύλλα απλοποιούμε την περιγραφή κάποιων αλγορίθμων.) Έστω ότι αναζητούμε στο $\mathcal{T}$ το τμήμα που βρίσκεται ακριβώς στα αριστερά κάποιου σημείου p που κείται πάνω στη σαρωτική ευθεία. Σε κάθε εσωτερικό κόμβο ν ελέγχουμε αν το p κείται αριστερά ή δεξιά του τμήματος που είναι αποθηκευμένο στον ν. Ανάλογα με το αποτέλεσμα του ελέγχου, ακολουθούμε το αριστερό ή το δεξιό υπόδεντρο του ν, για να καταλήξουμε τελικά σε κάποιο φύλλο. Το τμήμα που αναζητούμε είναι αποθηκευμένο είτε σε αυτό το φύλλο είτε σε εκείνο που βρίσκεται αμέσως στα αριστερά του. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε και το τμήμα που βρίσκεται ακριβώς στα δεξιά του p, ή τα τμήματα που περιέχουν το p. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι κάθε πράξη ενημέρωσης και αναζήτησης γείτονα μπορεί να εκτελεστεί σε χρόνο $O(\log n)$.

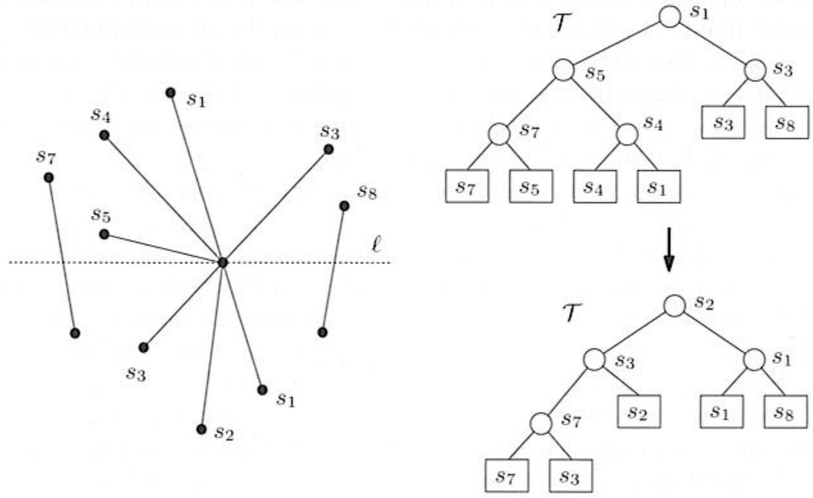
Η ουρά συμβάντων $\mathcal{Q}$ και η καταστασιακή δομή $\mathcal{T}$ είναι οι μόνες δομές δεδομένων που χρειαζόμαστε. Ο συνολικός αλγόριθμος μπορεί τώρα να περιγραφεί ως εξής.

Αλγόριθμος ΕΥΡΕΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΜΗΣ(S)
Είσοδος. Ένα σύνολο S ευθύγραμμων τμημάτων στο επίπεδο.
Έξοδος. Το σύνολο των σημείων τομής μεταξύ των τμημάτων του S και, για κάθε σημείο τομής, τα τμήματα που το περιέχουν.

1. Δημιουργούμε μια κενή ουρά συμβάντων $\mathcal{Q}$. Στη συνέχεια εισάγουμε σε αυτήν τα άκρα όλων των τμημάτων. Κάθε φορά που εισάγουμε ένα άνω άκρο, θα πρέπει να αποθηκεύεται μαζί του και το αντίστοιχο ευθύγραμμο

τμήμα.
Δημιουργούμε μια κενή καταστασιακή δομή $\mathcal{T}$.
ενόσω η $\mathcal{Q}$ δεν είναι κενή
    Εντοπίζουμε το επόμενο σημείο-συμβάν p στην $\mathcal{Q}$ και το διαγράφουμε.
    ΧΕΙΡΙΣΜΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ-ΣΥΜΒΑΝΤΟΣ(p)

Έχουμε ήδη δει πώς επεξεργαζόμαστε τα συμβάντα: στα άκρα τμημάτων θα πρέπει να εισαγάγουμε ή να διαγράψουμε τμήματα από την καταστασιακή δομή $\mathcal{T}$, και στα σημεία τομής θα πρέπει να αλλάξουμε τη διάταξη δύο τμημάτων. Και στις δύο περιπτώσεις θα πρέπει επίσης να εκτελέσουμε ελέγχους τομής ανάμεσα σε όσα τμήματα καθίστανται γειτονικά μετά από το συμβάν. Σε εκφυλισμένες περιπτώσεις –όπου στο σημείο-συμβάν υπεισέρχονται περισσότερα από δύο τμήματα– οι λεπτομέρειες είναι κάπως πιο περίπλοκες. Η ακόλουθη διαδικασία περιγράφει τον σωστό τρόπο χειρισμού των σημείων-συμβάντων (βλ. και Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2
Ένα σημείο-συμβάν και οι μεταβολές στην καταστασιακή δομή

ΧΕΙΡΙΣΜΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ-ΣΥΜΒΑΝΤΟΣ(p)
Έστω $U(p)$ το σύνολο των τμημάτων των οποίων το άνω άκρο είναι το p· τα τμήματα αυτά είναι αποθηκευμένα μαζί με το σημείο-συμβάν p. (Εξ ορισμού, το άνω άκρο ενός οριζόντιου τμήματος είναι το αριστερό.)
Βρίσκουμε ανάμεσα στα τμήματα που είναι αποθηκευμένα στην $\mathcal{T}$ εκείνα που περιέχουν το p· αυτά είναι γειτονικά στην $\mathcal{T}$. Έστω $L(p)$ το υποσύνολο όσων από αυτά έχουν το p ως κάτω άκρο, και $C(p)$ το υποσύνολο όσων έχουν το p στο εσωτερικό τους.
εάν το $L(p) \cup U(p) \cup C(p)$ περιέχει περισσότερα από ένα τμήματα
    τότε Αναφέρουμε το p ως σημείο τομής, καθώς και τα $L(p)$, $U(p)$, και $C(p)$.
Διαγράφουμε από την $\mathcal{T}$ τα τμήματα του $L(p) \cup C(p)$.
Εισάγουμε στην $\mathcal{T}$ τα τμήματα του $U(p) \cup C(p)$. Η διάταξη των τμημάτων στην $\mathcal{T}$ θα πρέπει να αντιστοιχεί στη σειρά με την οποία τέμνονται από μια σαρωτική ευθεία ακριβώς κάτω από το p. Αν υπάρχει οριζόντιο τμήμα, αυτό τίθεται τελευταίο μεταξύ των τμημάτων που περιέχουν το p.
($*$ Με τη διαγραφή και την επανεισαγωγή των τμημάτων του $C(p)$ αντιστρέφεται η διάταξή τους. $*$)
εάν $U(p) \cup C(p) = \emptyset$
    τότε Έστω s_l και s_r ο αριστερός και ο δεξιός γείτονας του p στην $\mathcal{T}$.
        ΕΥΡΕΣΗ ΝΕΟΥ ΣΥΜΒΑΝΤΟΣ(s_l, s_r, p)
    αλλιώς Έστω s' το ακραίο αριστερό τμήμα του $U(p) \cup C(p)$ στην $\mathcal{T}$.
        Έστω s_l ο αριστερός γείτονας του s' στην $\mathcal{T}$.

13. ΕΥΡΕΣΗ ΝΕΟΥ ΣΥΜΒΑΝΤΟΣ(s_l, s', p)
14. Έστω s'' το ακραίο δεξιό τμήμα του $U(p) \cup C(p)$ στην $\mathcal{T}$.
15. Έστω s_r ο δεξιός γείτονας του s'' στην $\mathcal{T}$.
16. ΕΥΡΕΣΗ ΝΕΟΥ ΣΥΜΒΑΝΤΟΣ(s'', s_r, p)

Σημειωτέον ότι στις γραμμές 8–16 υποθέτουμε ότι τα s_l και s_r υπάρχουν. Αν δεν υπάρχουν, τότε προφανώς τα αντίστοιχα βήματα δεν θα πρέπει να εκτελεστούν.

Οι διαδικασίες για την εύρεση των νέων σημείων τομής είναι εύκολες: απλώς ελέγχουμε αν δύο τμήματα τέμνονται ή όχι. Το μόνο ζήτημα που θα πρέπει να προσέξουμε είναι όταν εντοπίζουμε ένα σημείο τομής να ελέγχουμε αν το έχουμε ήδη επεξεργαστεί νωρίτερα. Αν δεν υπάρχουν οριζόντια τμήματα, τότε εφόσον το σημείο βρίσκεται κάτω από τη σαρωτική ευθεία δεν το έχουμε επεξεργαστεί ακόμη. Πώς θα πρέπει όμως να αντιμετωπίζουμε τα οριζόντια τμήματα; Θυμηθείτε τη σύμβασή μας: τα συμβάντα με τη ίδια τεταγμένη διεκπεραιώνονται από τα αριστερά προς τα δεξιά. Αυτό σημαίνει ότι εξακολουθούν να μας ενδιαφέρουν σημεία τομής που βρίσκονται στα δεξιά του τρέχοντος σημείου-συμβάντος. Επομένως, η διαδικασία ΕΥΡΕΣΗ ΝΕΟΥ ΣΥΜΒΑΝΤΟΣ ορίζεται ως εξής.

ΕΥΡΕΣΗ ΝΕΟΥ ΣΥΜΒΑΝΤΟΣ(s_l, s_r, p)
1. **εάν** τα s_l και s_r τέμνονται κάτω από τη σαρωτική ευθεία, ή επάνω σε αυτήν και στα δεξιά του τρέχοντος σημείου-συμβάντος p, και το σημείο τομής δεν υπάρχει ήδη ως συμβάν στην $\mathcal{Q}$
2. **τότε** Εισάγουμε το σημείο τομής ως συμβάν στην $\mathcal{Q}$.

Τι γίνεται με την ορθότητα του αλγορίθμου μας; Είναι προφανές ότι η διαδικασία ΕΥΡΕΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΜΗΣ αναφέρει μόνο πραγματικά σημεία τομής. Όμως, τα εντοπίζει άραγε όλα; Σύμφωνα με το ακόλουθο λήμμα, η απάντηση είναι καταφατική.

Λήμμα 2.2 *Ο αλγόριθμος* ΕΥΡΕΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΜΗΣ *υπολογίζει σωστά όλα τα σημεία τομής και τα τμήματα στα οποία ανήκουν.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι η προτεραιότητα ενός συμβάντος καθορίζεται από την τεταγμένη του, και ότι όταν δύο συμβάντα έχουν την ίδια τεταγμένη τη μεγαλύτερη προτεραιότητα την έχει αυτό με την μικρότερη τετμημένη. Θα αποδείξουμε το λήμμα με επαγωγή ως προς την προτεραιότητα των σημείων-συμβάντων.

Έστω p ένα σημείο τομής, και ας υποθέσουμε ότι όλα τα σημεία τομής q με μεγαλύτερη προτεραιότητα έχουν ήδη υπολογιστεί σωστά. Θα αποδείξουμε ότι το p και τα τμήματα που το περιέχουν υπολογίζονται σωστά. Έστω $U(p)$ το σύνολο των τμημάτων που έχουν το p ως άνω άκρο (ή ως αριστερό άκρο, για τα οριζόντια τμήματα), $L(p)$ το σύνολο των τμημάτων που έχουν το p ως κάτω άκρο (ή ως δεξιό άκρο, για τα οριζόντια τμήματα), και $C(p)$ το σύνολο των τμημάτων που έχουν το p στο εσωτερικό τους.

Κατ' αρχάς, ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου το p αποτελεί άκρο ενός ή περισσότερων τμημάτων. Εάν συμβαίνει αυτό, τότε το p αποθηκεύεται στην ουρά συμβάντων $\mathcal{Q}$ κατά την εκκίνηση του αλγορίθμου. Τα τμήματα του $U(p)$ αποθηκεύονται μαζί με το p, και επομένως θα εντοπιστούν. Τα τμήματα των $L(p)$ και $C(p)$ αποθηκεύονται στην $\mathcal{T}$ κατά την επεξεργασία του p, και επομένως θα εντοπιστούν στην γραμμή 2 της διαδικασίας ΧΕΙΡΙΣΜΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ-ΣΥΜΒΑΝΤΟΣ. Συνεπώς, αν το p αποτελεί άκρο ενός ή περισσότερων τμημάτων, τόσο το ίδιο όσο και όλα τα τμήματα που σχετίζονται με αυτό εντοπίζονται σωστά.

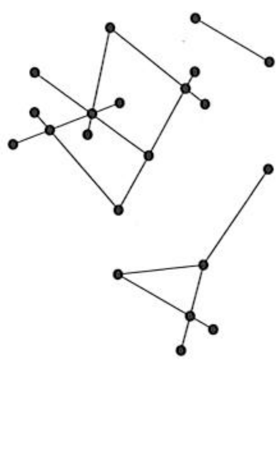
Έστω τώρα ότι το p δεν αποτελεί άκρο τμήματος. Αρκεί να δείξουμε ότι το p θα εισαχθεί κάποια στιγμή στην $\mathcal{Q}$. Σημειωτέον ότι όλα τα τμήματα που σχετίζονται με το p το περιέχουν στο εσωτερικό τους. Διατάσσουμε αυτά τα τμήματα με βάση τη γωνία τους γύρω από το p, και εξετάζουμε δύο γειτονικά τμήματα s_i και s_j. Όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 2.1, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει σημείο-συμβάν q με προτεραιότητα μεγαλύτερη του p τέτοιο ώστε τα s_i και s_j να καθίστανται γειτονικά μετά την επεξεργασία του q. Στο Λήμμα 2.1 υποθέσαμε χάριν απλότητας ότι τα s_i και s_j δεν είναι οριζόντια, αλλά η απόδειξη μπορεί να τροποποιηθεί εύκολα ώστε να ισχύει και για οριζόντια τμήματα. Από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι το σημείο-συμβάν q έχει αντιμετωπιστεί σωστά, πράγμα που σημαίνει ότι το p εντοπίζεται και αποθηκεύεται στην $\mathcal{Q}$. □

Ο αλγόριθμός μας είναι λοιπόν ορθός. Έχουμε όμως πετύχει και τον άλλο στόχο μας, δηλαδή να είναι εξοδοεξαρτώμενος; Η απάντηση είναι καταφατική: ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $O\big((n+k)\log n\big)$, όπου k το μέγεθος της εξόδου. Στο ακόλουθο λήμμα διατυπώνεται ένα ακόμη ισχυρότερο συμπέρασμα: ο χρόνος εκτέλεσης είναι $O\big((n+I)\log n\big)$, όπου I το πλήθος των σημείων τομής. Το συμπέρασμα αυτό είναι ισχυρότερο, διότι η έξοδος μπορεί να περιλαμβάνει πολλά ευθύγραμμα τμήματα για ένα σημείο τομής, στην περίπτωση που πολλά τμήματα τέμνονται σε ένα κοινό σημείο.

Λήμμα 2.3 *Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου* Εύρεση Σημείων Τομής *για κάθε σύνολο S με n ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο είναι $O(n\log n + I\log n)$, όπου I το πλήθος των σημείων τομής των τμημάτων του S.*

Απόδειξη. Αρχικά, ο αλγόριθμος κατασκευάζει την ουρά συμβάντων από τα άκρα των τμημάτων. Δεδομένου ότι η ουρά συμβάντων υλοποιείται ως ισοσταθμισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης, αυτό απαιτεί χρόνο $O(n\log n)$. Η δημιουργία της καταστασιακής δομής απαιτεί σταθερό χρόνο. Κατόπιν αρχίζει η σάρωση του επιπέδου και η επεξεργασία των συμβάντων. Για την επεξεργασία ενός συμβάντος, εκτελούνται στην ουρά συμβάντων $\mathcal{Q}$ τρεις πράξεις: διαγράφεται το ίδιο το συμβάν από την $\mathcal{Q}$ στη γραμμή 4 της διαδικασίας Εύρεση Σημείων Τομής, και είναι δυνατόν να γίνουν μία ή δύο κλήσεις της διαδικασίας Εύρεση Νέου Συμβάντος, που πιθανόν να προκαλέσουν την εισαγωγή το πολύ δύο νέων συμβάντων στην $\mathcal{Q}$. Κάθε διαγραφή και εισαγωγή στην $\mathcal{Q}$ απαιτεί χρόνο $O(\log n)$. Εκτελούνται επίσης ορισμένες πράξεις –εισαγωγές, διαγραφές, και εντοπισμός γειτόνων– στην καταστασιακή δομή $\mathcal{T}$· καθεμία από αυτές απαιτεί χρόνο $O(\log n)$. Το πλήθος των πράξεων είναι γραμμικό ως προς το πλήθος $m(p) := \pi\lambda\eta\theta(L(p)\cup U(p)\cup C(p))$ των τμημάτων που υπεισέρχονται στο συμβάν. Αν συμβολίσουμε με m το άθροισμα των $m(p)$ για όλα τα σημεία-συμβάντα p, τότε ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $O(m\log n)$.

Είναι προφανές ότι $m = O(n+k)$, όπου k το μέγεθος της εξόδου: σε κάθε περίπτωση όπου $m(p) > 1$, αναφέρουμε όλα τα τμήματα που υπεισέρχονται στο συμβάν, και τα μόνα συμβάντα στα οποία υπεισέρχεται μόνο ένα τμήμα είναι τα άκρα των τμημάτων. Εκείνο που θέλουμε να αποδείξουμε, όμως, είναι ότι $m = O(n+I)$, όπου I το πλήθος των σημείων τομής. Για τον σκοπό αυτό, θα θεωρήσουμε το σύνολο των τμημάτων ως ένα διδιάστατο γράφημα «εναποτυπωμένο» στο επίπεδο. (Αν δεν είστε εξοικειωμένοι με την ορολογία των διδιάστατων γραφημάτων, διαβάστε τις αρχικές παραγράφους της Ενότητας 2.2 πριν προχωρήσετε παρακάτω.) Οι κόμβοι του γραφήματος είναι τα άκρα και τα σημεία τομής των τμημάτων, ενώ οι ακμές του είναι τα μέρη των ευθύγραμμων τμημάτων ανάμεσα στους κόμβους. Στο γράφημα αυτό, κάθε σημείο-συμβάν p είναι ένας από τους κόμβους, και το πλήθος $m(p)$ φράσσεται από τον βαθμό του κόμβου αυτού. Συνεπώς, το άθροισμα m φράσσεται από το άθροισμα των βαθμών όλων των κόμβων του γραφήματος. Δεδομένου ότι κάθε ακμή του γραφήματος συνεισφέρει μία μονάδα στον βαθμό ακριβώς δύο κόμβων (των άκρων της), συμπεραίνουμε ότι το m είναι μικρότερο ή ίσο του $2n_e$, όπου n_e το πλήθος των ακμών του γραφήματος. Ας προσδιορίσουμε τώρα ένα φράγμα της ποσότητας n_e συναρτήσει των n και I. Εξ ορισμού, το πλήθος n_v των κόμβων είναι το πολύ $2n+I$. Όπως είναι γνωστό, στα διδιάστατα



γραφήματα ισχύει ότι $n_e = O(n_v)$, οπότε ο ισχυρισμός μας έχει αποδειχθεί. Χάριν πληρότητας, όμως, ας παραθέσουμε όλο το αποδεικτικό σκεπτικό. Κάθε έδρα του διδιάστατου γραφήματος οριοθετείται από τρεις τουλάχιστον ακμές –υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τρία τουλάχιστον ευθύγραμμα τμήματα– και κάθε ακμή μπορεί να οριοθετεί το πολύ δύο διαφορετικές έδρες. Άρα το πλήθος n_f των εδρών είναι το πολύ $2n_e/3$. Χρησιμοποιούμε στη συνέχεια τον *τύπο του Euler*, σύμφωνα με τον οποίο σε κάθε διδιάστατο γράφημα με n_v κόμβους, n_e ακμές, και n_f έδρες ισχύει η σχέση:

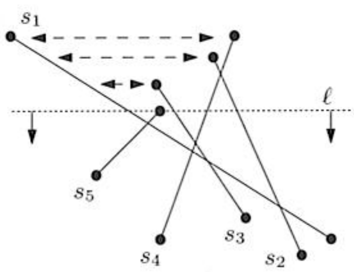
$$n_v - n_e + n_f \geqslant 2.$$

Η ισότητα ισχύει εάν και μόνο εάν το γράφημα είναι συνεκτικό. Αντικαθιστώντας σε αυτόν τον τύπο τα φράγματα των n_v και n_f, έχουμε ότι

$$2 \leqslant (2n + I) - n_e + \frac{2n_e}{3} = (2n + I) - n_e/3.$$

Άρα $n_e \leqslant 6n + 3I - 6$, και $m \leqslant 12n + 6I - 12$, απ' όπου έπεται το φράγμα για τον χρόνο εκτέλεσης. ⊡

Απομένει να αναλύσουμε και την άλλη πλευρά της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου, τον αποθηκευτικό χώρο που απαιτεί. Το δέντρο $\mathcal{T}$ περιέχει κάθε τμήμα το πολύ μία φορά, και άρα απαιτεί χώρο $O(n)$. Το μέγεθος της ουράς $\mathcal{Q}$, όμως, ενδέχεται να είναι μεγαλύτερο. Το κάθε σημείο τομής εισάγεται στην $\mathcal{Q}$ αμέσως μετά τον εντοπισμό του και διαγράφεται όταν τελειώσει η επεξεργασία του. Όποτε μεσολαβεί μεγάλο χρονικό διάστημα μέχρι την επεξεργασία των σημείων τομής, το μέγεθος της $\mathcal{Q}$ μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο. Φυσικά, είναι πάντοτε $O(n+I)$, αλλά θα ήταν προτιμότερο ο αποθηκευτικός χώρος εργασίας να ειναι πάντοτε γραμμικός.



Υπάρχει ένας σχετικά απλός τρόπος για να το πετύχουμε αυτό: να αποθηκεύουμε μόνο σημεία τομής τμημάτων που είναι την τρέχουσα στιγμή γειτονικά επάνω στη σαρωτική ευθεία. Ο αλγόριθμος που παραθέσαμε παραπάνω αποθηκεύει επίσης σημεία τομής τμημάτων που υπήρξαν στο παρελθόν οριζοντίως γειτονικά, αλλά δεν είναι πλέον. Αποθηκεύοντας μόνο σημεία τομής μεταξύ γειτονικών τμημάτων, το πλήθος των σημείων-συμβάντων στην $\mathcal{Q}$ δεν γίνεται ποτέ υπεργραμμικό. Η τροποποίηση που πρέπει να γίνει στον αλγόριθμο είναι ότι το σημείο τομής δυο τμημάτων θα πρέπει να διαγράφεται όταν αυτά πάψουν να είναι γειτονικά. Τα τμήματα αυτά θα γίνουν σίγουρα και πάλι γειτονικά πριν η σαρωτική ευθεία συναντήσει το σημείο τομής τους, και συνεπώς η τροποποίηση δεν εμποδίζει την σωστή αναφορά αυτού του σημείου. Ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου παραμένει $O(n \log n + I \log n)$. Καταλήγουμε λοιπόν στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.4 *Έστω S ένα σύνολο n ευθύγραμμων τμημάτων στο επίπεδο. Όλα τα σημεία τομής στο S καθώς και τα τμήματα στα οποία ανήκει το καθένα από αυτά μπορούν να υπολογιστούν σε χρόνο $O(n \log n + I \log n)$ και χώρο $O(n)$, όπου I το πλήθος των σημείων τομής.*

2.2 Ο διπλοσυνδεδεμένος κατάλογος ακμών

Έχουμε επιλύσει την ευκολότερη εκδοχή του προβλήματος της υπέρθεσης χαρτών, όπου οι δύο χάρτες είναι δίκτυα που αναπαρίστανται ως συλλογές ευθύγραμμων τμημάτων. Εν γένει, οι χάρτες έχουν πιο περίπλοκη δομή: αποτελούν υποδιαιρέσεις του επιπέδου σε ενεπίγραφες περιοχές. Για παράδειγμα, ένας θεματικός χάρτης των δασών του Καναδά θα ήταν μια υποδιαίρεση της χώρας σε περιοχές με επιγραφές του τύπου «πεύκο», «φυλλοβόλα», «σημύδα», και «ανάμεικτα».