6. Γεωμετρική Αναζήτηση

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε αλγορίθμους για προβλήματα αναζήτησης στο επίπεδο. Ο τομέας αυτός είναι αρκετά εκτενής, αλλά εμείς θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στο πρόβλημα του εντοπισμού σημείου ως προς κάποιο πολύγωνο, στον προσδιορισμό ακρότατων σημείων πολυγώνου και στο πολύ σημαντικό πρόβλημα του εντοπισμού σημείου σε μια διαμέριση του επιπέδου ή μιας απλής πολυγωνικής περιοχής του.

Χωρίς προεπεξεργασία, καθένα από τα παραπάνω προβλήματα απαιτεί για την επίλυσή του χρόνο γραμμικό στο μέγεθος των αντικειμένων που εμπλέκονται στο πρόβλημα (πολύγωνο, διαμέριση του επιπέδου). Εμείς θα ασχοληθούμε με τις εκδοχές των παραπάνω προβλημάτων όπου επιτρέπεται προεπεξεργασία ώστε το πρόβλημα αναζήτησης να επιλύεται ταχύτατα. Για παράδειγμα, για το πρόβλημα εντοπισμού σημείου ως προς ένα πολύγωνο, θεωρούμε ότι θα αντιμετωπίσουμε πολλές ερωτήσεις εντοπισμού για το *ίδιο* πολύγωνο και έτσι το προεπεξεργαζόμαστε κατάλληλα ώστε να απαντήσουμε αυτές τις ερωτήσεις αποτελεσματικά (δηλαδή, σε λογαριθμικό χρόνο για κάθε ερώτηση).

6.1 Εντοπισμός Σημείου ως προς Πολύγωνο

6.1.1 Εντοπισμός Σημείου ως προς Κυρτό Πολύγωνο

Για δοθέν κυρτό πολύγωνο P και σημείο p, το πρόβλημα του να ελέγξουμε εάν το p ανήκει στο P μπορεί να επιλυθεί σε γραμμικό χρόνο με διάσχιση του συνόρου του P κατά την ανθωρολογιακή φορά και έλεγχο εάν το p είναι προς τα αριστερά της τρέχουσας ακμής. Εάν για κάποια ακμή e το p βρίσκεται δεξιά της e τότε το p βρίσκεται στο εξωτερικό του P· σε αντίθετη περίπτωση, το p βρίσκεται στο εσωτερικό του P.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι όλες οι ερωτήσεις εντοπισμού σημείου αφορούν το ίδιο πολύγωνο P. Τότε μπορούμε να προεπεξεργαστούμε το P, ώστε να απαντήσουμε κάθε τέτοια ερώτηση αποτελεσματικά. Συγκεκριμένα, κατά την προεπεξεργασία:

1. Προσδιορίζουμε τις κορυφές του P που έχουν τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη x-συντεταγμένη, έστω v_{min} και v_{max} αντίστοιχα.

2. Χωρίζουμε το σύνορο του P σε δύο πολυγωνικές αλυσίδες με άκρα τα v_{min} και v_{max}: η μία αλυσίδα, η "επάνω αλυσίδα," σχηματίζει το επάνω σύνορο του πολυγώνου ενώ η άλλη, η "κάτω αλυσίδα," το κάτω. Οι αλυσίδες αυτές είναι x-μονότονες, οπότε οι x-συντεταγμένες των κορυφών τους (από αριστερά προς τα δεξιά) είναι σε αύξουσα σειρά.
3. Για εύκολο και ταχύ εντοπισμό, καταχωρούμε καθεμία από αυτές τις αλυσίδες σε έναν πίνακα.

Η προεπεξεργασία προφανώς απαιτεί χρόνο γραμμικό στο πλήθος κορυφών του πολυγώνου P.

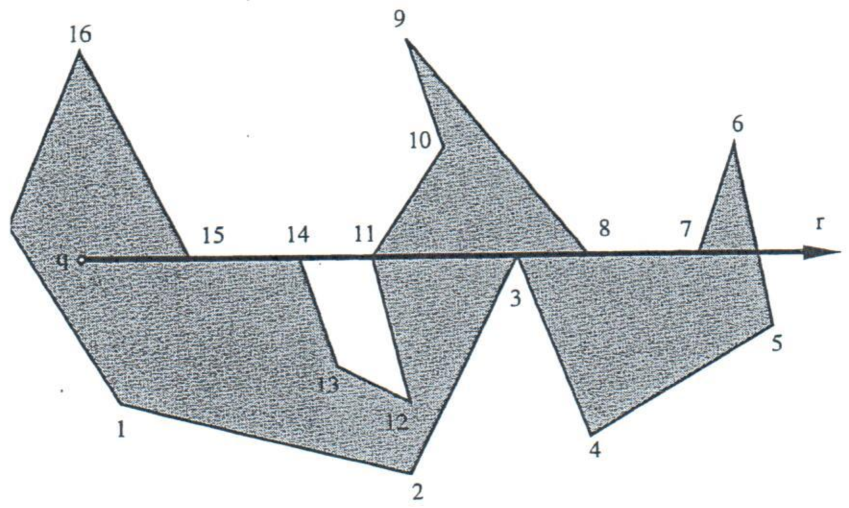
Εάν τώρα ζητηθεί να προσδιορίσουμε εάν δοθέν σημείο $p = (p_x, p_y)$ ανήκει στο πολύγωνο P, εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

1. Ελέγχουμε εάν η x-συντεταγμένη p_x του p είναι μικρότερη από την x-συντεταγμένη της αριστερότερης κορυφής v_{min}. Εάν ναι, τότε το p βρίσκεται στο εξωτερικό του P οπότε και η διαδικασία σταματά.
2. Ελέγχουμε εάν η x-συντεταγμένη p_x του p είναι μεγαλύτερη από την x-συντεταγμένη της δεξιότερης κορυφής v_{max}. Εάν ναι, τότε και πάλι το p βρίσκεται στο εξωτερικό του P οπότε και σταματάμε.
3. Με εκτέλεση δυαδικής αναζήτησης στον πίνακα της επάνω αλυσίδας προσδιορίζουμε την ακμή, έστω e_+, της αλυσίδας που τέμνεται από την κατακόρυφη ευθεία $x = p_x$.
4. Εκτελούμε τη διαδικασία του προηγουμένου βήματος στον πίνακα της κάτω αλυσίδας και προσδιορίζουμε την αντίστοιχη ακμή e_-.
5. Τέλος, εάν το p βρίσκεται επάνω από την e_+ ή κάτω από την e_- τότε το p βρίσκεται στο εξωτερικό του P, ενώ σε αντίθετη περίπτωση ανήκει στο πολύγωνο P.

Η ορθότητα της παραπάνω διαδικασίας είναι προφανής. Τα βήματα 1, 2 και 5 απαιτούν σταθερό χρόνο, ενώ τα 3 και 4 απαιτούν λογαριθμικό χρόνο λόγω της δυαδικής αναζήτησης. Συνεπώς, μια ερώτηση εντοπισμού ενός σημείου ως προς ένα (προεπεξεργασμένο) κυρτό πολύγωνο με n κορυφές απαιτεί $O(\log n)$ χρόνο.

6.1.2 Εντοπισμός Σημείου ως προς μη Κυρτό Πολύγωνο

Και σε αυτήν την περίπτωση, το πρόβλημα εντοπισμού ενός σημείου q (χωρίς προεπεξεργασία του μη κυρτού πολυγώνου) μπορεί να εκτελεστεί σε χρόνο γραμμικό στο πλήθος κορυφών του πολυγώνου. Όταν όμως μας επιτραπεί να προεπεξεργαστούμε το



Σχήμα 6.1 Η ημιευθεία r και το πολύγωνο P.

πολύγωνο, τότε μπορούμε να επιτύχουμε λογαριθμικού χρόνου απαντήσεις σε ερωτήσεις εντοπισμού ως προς το πολύγωνο.

Χωρίς προεπεξεργασία του πολυγώνου. Ας θεωρήσουμε μια οριζόντια ημιευθεία r με κορυφή το σημείο q και κατεύθυνση προς τα δεξιά (οι διαπιστώσεις που ακολουθούν ισχύουν για ημιευθεία με οποιαδήποτε κατεύθυνση· η απαίτηση η ημιευθεία να είναι οριζόντια απλά απλοποιεί τον αλγόριθμο). Το σημείο q ανήκει στο πολύγωνο P εάν και μόνο εάν η r διασχίζει το σύνορο ϑP του πολυγώνου περιττό πλήθος φορών. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η r διασχίζει το σύνορο του πολυγώνου 3 φορές και ας φανταστούμε ότι κινούμαστε κατά μήκος της r από το σημείο στο άπειρο και δεξιά προς τα αριστερά έως το σημείο q. Μετά το πρώτο σημείο τομής με το ϑP βρισκόμαστε στο εσωτερικό του πολυγώνου, μετά το δεύτερο σημείο τομής βγαίνουμε έξω από το πολύγωνο, ενώ μετά το τρίτο και τελευταίο σημείο τομής επιστρέφουμε και πάλι στο εσωτερικό του πολυγώνου. Συνεπώς, το σημείο q ανήκει στο πολύγωνο P.

Παρά το γεγονός ότι η βασική ιδέα είναι εξαιρετικά απλή, η υλοποίησή της χρειάζεται προσοχή λόγω των ειδικών περιπτώσεων που ενδέχεται να εμφανισθούν στο πώς η ημιευθεία r τέμνει το σύνορο του πολυγώνου: η ημιευθεία μπορεί να περνά από μια κορυφή ή να είναι συνευθειακή με μια ακμή (Σχήμα 6.1). Υπάρχει επίσης η πιθανότητα το σημείο q να ανήκει στο σύνορο του πολυγώνου, οπότε θα θέλαμε ο αλγόριθμος να απαντήσει ότι αυτό ανήκει στο πολύγωνο. Σημειώστε ότι ακόμη και η παραδοχή ότι καμία τριάδα κορυφών του πολυγώνου δεν είναι συνευθειακές δεν είναι αρκετή για να αποκλείσει τις παραπάνω ειδικές περιπτώσεις.

```
k ← 0              /* πλήθος σημείων τομής */
for ( κάθε ακμή e = v_i v_{i+1} ) do
    /*  έλεγχος εάν η ακμή e "ορίζει σημείο τομής" με την ημιευθεία r   */
    if ( ((v_i.y > q.y + EPSILON) and (v_{i+1}.y ≤ q.y + EPSILON))
      or ((v_i.y ≤ q.y + EPSILON) and (v_{i+1}.y > q.y + EPSILON)) )
    then  x ← τετμημένη του σημείου τομής της e με την ημιευθεία r
          if ( x ≥ q.x − EPSILON )
          then  k ← k + 1
if ( k%2 = 1 )
then  το σημείο q ανήκει στο πολύγωνο P
else  το σημείο q δεν ανήκει στο πολύγωνο P
```

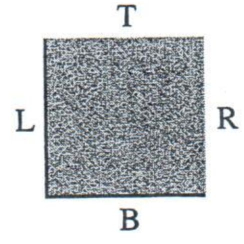
Αλγόριθμος 6.1 Αλγόριθμος για τον έλεγχο εάν σημείο q ανήκει σε πολύγωνο P.

Ένας τρόπος να αποφύγουμε τις περισσότερες από αυτές τις δυσκολίες είναι να θεωρήσουμε ότι μια ακμή e τέμνεται από την ημιευθεία r εάν αφενός έχει κοινό σημείο με την r και αφετέρου το ένα άκρο της e βρίσκεται ψηλότερα από την r (προφανώς, το άλλο είτε ανήκει στην r είτε βρίσκεται χαμηλότερα από αυτήν). Η σύμβαση αυτή συνεπάγεται ότι η ακμή (10, 11) στο Σχήμα 6.1 θεωρείται ότι τέμνεται από την r, ενώ η ακμή (11, 12) θεωρείται ότι δεν τέμνεται. Έτσι η πολυγωνική γραμμή (10, 11, 12) θεωρείται ότι συνεισφέρει μόνο ένα σημείο τομής, όπως θα θέλαμε. Η κορυφή 3 δεν αυξάνει το πλήθος των σημείων τομής καθώς ούτε η ακμή (2, 3) ούτε η (3, 4) θεωρείται ότι τέμνονται από την r. Ακμές συνευθειακές με την r, όπως οι (14, 15) και (7, 8) επίσης θεωρείται ότι δεν τέμνονται από την r. Η παραπάνω ιδέα οδηγεί σε έναν πολύ απλό αλγόριθμο για να καθορίσουμε εάν ένα σημείο q ανήκει σε ένα πολύγωνο P ή όχι (Αλγόριθμος 6.1). Ο αλγόριθμος επεξεργάζεται κάθε ακμή $e = vu$ του πολυγώνου με τη σειρά: Ελέγχει εάν η e έχει το ένα άκρο της ψηλότερα από την r και το άλλο επάνω στην r ή χαμηλότερα από αυτήν. Εάν ναι, τότε υπολογίζει την τετμημένη του σημείου τομής της ακμής με την ευθεία $y = q.y$ επιλύοντας ως προς x την εξίσωση

$$(x - v.x)\,(u.y - v.y) \;=\; (u.x - v.x)\;(q.y - v.y).$$

Η ακμή θεωρείται ότι τέμνει την r εφόσον το σημείο τομής συμπίπτει με το q ή βρίσκεται δεξιότερά του. Εάν ο αλγόριθμος εφαρμοστεί στο πολύγωνο του Σχήματος 6.1, βρίσκει πέντε σημεία τομής τα οποία προέρχονται από τις ακμές $(5, 6)$, $(6, 7)$, $(8, 9)$, $(10, 11)$ και $(15, 16)$, και σωστά συμπεραίνει ότι το σημείο q ανήκει στο πολύγωνο P.

Υπάρχει ένα πρόβλημα όμως στον Αλγόριθμο 6.1: αν και επιστρέφει τη σωστή απάντηση για κάθε σημείο στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του πολυγώνου, δεν χειρίζεται με ομοιόμορφο τρόπο τα σημεία στο σύνορο του πολυγώνου. Η συμπεριφορά του αλγορίθμου γίνεται περισσότερο σαφής εάν θεωρήσουμε ότι το πολύγωνο P είναι το τετράγωνο του Σχήματος 6.2. Εάν το σημείο q ανήκει στην ακμή L, τότε μόνο η ακμή R θεωρείται ότι τέμνεται από την αντίστοιχη ημιευθεία r, και άρα $q \in P$. Αντίθετα, εάν το q ανήκει στην ακμή R, καμία ακμή δεν θεωρείται ότι τέμνεται από την αντίστοιχη ημιευθεία, και άρα $q \notin P$. Εάν το q ανήκει στην B, τότε η R συνεισφέρει ένα σημείο τομής, και $q \in P$. Εάν το q ανήκει στην T, δεν υπάρχουν σημεία τομής, και $q \notin P$. Συμπερασματικά, τα σημεία των ακμών L και B θεωρείται ότι ανήκουν στο πολύγωνο, ενώ τα σημεία των R και T ότι δεν ανήκουν. Αν και αυτή η ανομοιόμορφη συμπεριφορά φαίνεται μάλλον μη ικανοποιητική, ωστόσο προγραμματιστές εφαρμογών γραφικών την προτιμούν καθώς έτσι σε μια διαμέριση μιας περιοχής του επιπέδου σε πολύγωνα κάθε σημείο θα ανήκει σε ακριβώς ένα πολύγωνο. Σημειώνεται ότι δεν είναι δύσκολο να τροποποιήσουμε τον αλγόριθμο ώστε να επιστρέφει ότι κάθε σημείο του συνόρου του πολυγώνου ανήκει στο πολύγωνο.



Σχήμα 6.2

Με προεπεξεργασία του πολυγώνου. Ο αλγόριθμος εντοπισμού σημείου ως προς ένα (προεπεξεργασμένο) μη κυρτό πολύγωνο βασίζεται σε μεθόδους εντοπισμού σημείου σε μια διαμέριση του επιπέδου σε μονότονες περιοχές ή σε μια διαμέριση μιας απλής πολυγωνικής περιοχής σε τρίγωνα· οι μέθοδοι αυτές απαιτούν χρόνο λογαριθμικό στο πλήθος κορυφών της διαμέρισης (Παράγραφος 6.3).

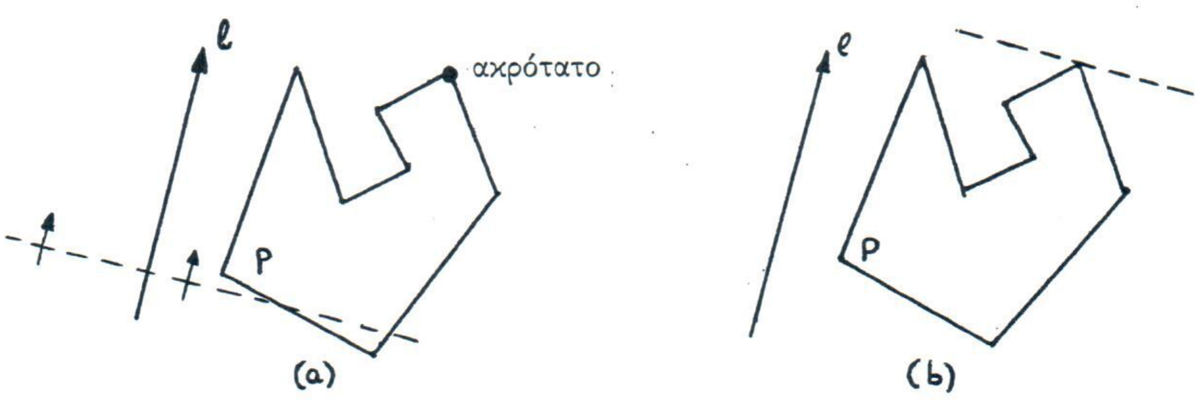
Συγκεκριμένα, εάν μεν θέλουμε να αναγάγουμε το πρόβλημα στο πρόβλημα εντοπισμού σημείου σε μια διαμέριση του επιπέδου σε μονότονες περιοχές, χωρίζουμε το πολύγωνο και τον χώρο γύρω από αυτό σε μονότονα τμήματα (δες Κεφάλαιο 1). Το κάθε τμήμα χαρακτηρίζεται ως μέσα ή έξω από το πολύγωνο, οπότε για να προσδιορίσουμε εάν το σημείο q ανήκει στο πολύγωνο αρκεί να βρούμε σε ποιο μονότονο τμήμα βρίσκεται και να δούμε εάν αυτό το τμήμα ανήκει στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του πολυγώνου. Για ένα απλό πολύγωνο με n κορυφές, η παραπάνω προεπεξεργασία ολοκληρώνεται σε $O(n \log n)$ χρόνο, ενώ η απάντηση μιας ερώτησης εντοπισμού σημείου απαιτεί μόνο $O(\log n)$ χρόνο (σχετικός αλγόριθμος περιγράφεται στην Παράγραφο 6.3.1). Εναλλακτικά, μπορούμε να αναγάγουμε το πρόβλημα στο πρόβλημα εντοπισμού σημείου σε μια διαμέριση μιας απλής πολυγωνικής περιοχής σε τρίγωνα: χωρίζουμε το δοθέν απλό πολύγωνο σε τρίγωνα (δες Κεφάλαιο 1). Σε αυτήν την περίπτωση, η προεπεξεργασία εκτελείται σε $O(n)$ χρόνο, ενώ η απάντηση μίας ερώτησης εντοπισμού σημείου απαιτεί $O(\log n)$ χρόνο (σχετικός αλγόριθμος περιγράφεται στην Παράγραφο 6.3.2).

6.2 Προσδιορισμός ακρότατου σημείου πολυγώνου

Ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα για εφαρμογές γραμμικού προγραμματισμού αφορά στον προσδιορισμό του ακρότατου σημείου ενός πολυγώνου ως προς κάποια δοθείσα κατεύθυνση. Ένα σημείο ενός πολυγώνου P είναι **ακρότατο** ως προς μια κατεύθυνση ℓ εάν είναι το τελευταίο σημείο του P το οποίο συναντά μια ευθεία κάθετη στην ℓ που σαρώνει το επίπεδο κινούμενη κατά την φορά της ℓ (Σχήμα 6.3(a)). Παρατηρούμε ότι:

- τα ακρότατα ενός πολυγώνου είναι κορυφές του πολυγώνου και μάλιστα οι κορυφές του κυρτού του περιβλήματος.
- το ακρότατο ενός πολυγώνου P ως προς κατεύθυνση ℓ είναι το ένα από τα δύο σημεία επαφής στο P μιας γραμμής κάθετης στην ℓ (Σχήμα 6.3(b)).

Αποδεικνύεται ότι με κατάλληλη προεπεξεργασία και χρήση δυαδικής αναζήτησης μπορούμε να απαντήσουμε ερωτήσεις προσδιορισμού του ακρότατου σημείου ως προς δοθείσα κατεύθυνση σε χρόνο λογαριθμικό στο πλήθος των κορυφών του πολυγώνου. Μάλιστα, με βάση την παρατήρηση ότι οι κορυφές του κυρτού περιβλήματος ενός πολυγώνου συνεισφέρουν ακρότατα, μπορούμε να περιορίσουμε το πρόβλημά μας σε κυρτά πολύγωνα: για μη κυρτά πολύγωνα, υπολογίζουμε και εργαζόμαστε στο κυρτό τους περίβλημα (σημειώνεται ότι ο υπολογισμός του κυρτού περιβλήματος απλού πολυγώνου



Σχήμα 6.3 Ακρότατο πολυγώνου ως προς την κατεύθυνση ℓ.

εκτελείται σε γραμμικό χρόνο).

Η προεπεξεργασία και σ' αυτήν την περίπτωση είναι ανάλογη με την περίπτωση του εντοπισμού σημείου ως προς δοθέν πολύγωνο. Προσδιορίζουμε τις κορυφές με ελάχιστη και μέγιστη x-συντεταγμένη και χωρίζουμε το σύνορο του πολυγώνου στην επάνω και την κάτω αλυσίδα. Μόνο που τώρα η αποθήκευση της επάνω αλυσίδας σε πίνακα συνίσταται στην αποθήκευση των κλίσεων των ακμών της αλυσίδας κατά τη διάσχισή της από τα δεξιά προς τα αριστερά· για την κάτω αλυσίδα αποθηκεύουμε τις κλίσεις των ακμών από τα αριστερά προς τα δεξιά. Η βασική παρατήρηση είναι ότι οι κλίσεις των ακμών της επάνω (αντίστοιχα, κάτω) αλυσίδας από το δεξιότερο (αντίστοιχα, αριστερότερο) προς το αριστερότερο (δεξιότερο) άκρο της βρίσκονται σε αύξουσα σειρά, οπότε μπορούμε να εκτελέσουμε κατάλληλη δυαδική αναζήτηση. Προφανώς, η προεπεξεργασία απαιτεί χρόνο γραμμικό στο πλήθος των κορυφών του πολυγώνου.

Εάν τώρα δοθεί κατεύθυνση ℓ και ζητηθεί το αντίστοιχο ακρότατο, τότε εάν η ℓ είναι οριζόντια και με φορά προς τα δεξιά, επιστρέφουμε τη δεξιότερη κορυφή του πολυγώνου, ενώ εάν είναι οριζόντια και με φορά προς τα αριστερά επιστρέφουμε την αριστερότερη κορυφή. Εάν τέλος δεν είναι οριζόντια, τότε υπολογίζουμε την κλίση της ευθείας που είναι κάθετη στην ℓ και εκτελούμε δυαδική αναζήτηση αυτής της τιμής στον πίνακα που παριστά την επάνω (κάτω, αντίστοιχα) αλυσίδα εάν η ℓ έχει φορά προς τα επάνω (κάτω, αντίστοιχα). Η δυαδική αναζήτηση γενικά θα μας επιστρέψει δύο διαδοχικές ακμές της επάνω ή της κάτω αλυσίδας με κλίσεις μικρότερη και μεγαλύτερη της τιμής που αναζητούσαμε. Τότε η κοινή κορυφή των δύο αυτών ακμών είναι το ακρότατο που αναζητούμε, καθώς η αναζήτηση που εκτελέσαμε εξασφαλίζει ότι αυτό είναι το σημείο επαφής στο πολύγωνο μιας ευθείας που είναι κάθετη στην ℓ. Η παραπάνω περιγραφή συνεπάγεται ότι μια ερώτηση προσδιορισμού ακρότατου σημείου σε προεπεξεργασμένο πολύγωνο μπορεί να απαντηθεί σε χρόνο λογαριθμικό στο πλήθος των κορυφών του πολυγώνου.

6.3 Εντοπισμός σημείου σε διαμέριση του επιπέδου

Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα γεωμετρικής αναζήτησης αφορά στον εντοπισμό σημείου σε μια διαμέριση του επιπέδου σε περιοχές *(planar point location)*. Αυτό το πρόβλημα το συναντήσαμε όταν ασχοληθήκαμε με τον προσδιορισμό του κοντινότερου γείτονα από ένα σύνολο σημείων: εκεί θέλαμε να βρούμε την περιοχή Voronoi στην οποία ανήκει το σημείο τον κοντινότερο γείτονα του οποίου αναζητούμε.

Μια άλλη εφαρμογή του εντοπισμού σημείου στο επίπεδο αποτελεί ο προσδιορισμός του εάν ένα σημείο βρίσκεται μέσα σε δοθέν κυρτό πολύεδρο. Ας δούμε πώς μπορούμε να απαντήσουμε αποτελεσματικά τέτοιες ερωτήσεις μετά από κατάλληλη προεπεξεργασία του πολυέδρου.

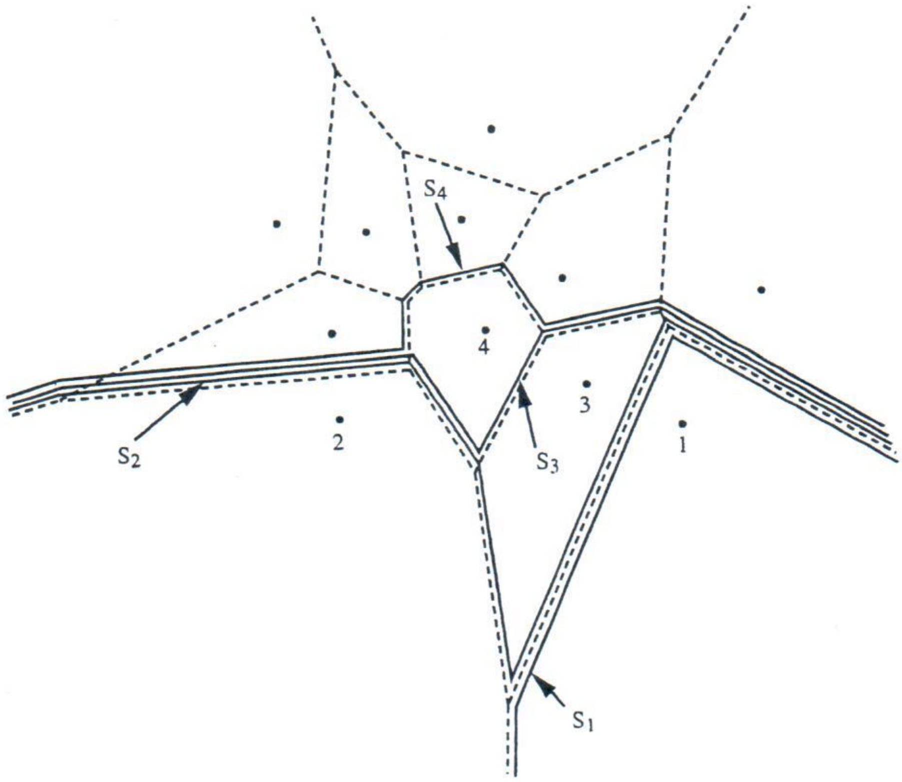
Εντοπισμός σημείου σε κυρτό πολύεδρο. Ας θεωρήσουμε ένα κυρτό πολύεδρο P. Έστω F^+ το σύνολο των εδρών του επάνω τμήματος του συνόρου του P, δηλαδή, έδρες για τις οποίες το κάθετο διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό του πολυέδρου έχει θετική τιμή z-συνιστώσας. Αυτές είναι οι έδρες που είναι ορατές από το $z = +\infty$. Αντίστοιχα, έστω F^- το σύνολο των εδρών για τις οποίες το κάθετο διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό του πολυέδρου έχει αρνητική z-συνιστώσα. Προβάλλουμε το σύνολο F^+ σε ένα επίπεδο Π^+ κάθετο στον άξονα των z. Η επιλογή του F^+ και του Π^+ εξασφαλίζει ότι κάθε σημείο κάποιας έδρας του F^+ προβάλλεται σε διαφορετικό σημείο στο Π^+ και άρα προκύπτει μια διαμέριση, έστω S^+, του επιπέδου Π^+ σε περιοχές. Αντίστοιχα, προβάλλουμε to F^- σε ένα επίπεδο Π^- επίσης κάθετο στον άξονα των z και παίρνουμε μια αντίστοιχη διαμέριση S^-. Τώρα, δοθέντος ενός σημείου q, το προβάλλουμε στα Π^+ και Π^- και το αναζητούμε στις S^+ και S^-. Εάν, κατά τον εντοπισμό της προβολής του q στην S^+, διαπιστώσουμε ότι αυτή δεν ανήκει στην προβολή καμίας από τις έδρες του F^+ (οπότε και η προβολή του q στο Π^- δεν θα ανήκει στην προβολή καμίας από τις έδρες του F^-), τότε το σημείο δεν βρίσκεται μέσα στο πολύεδρο. Εάν αντίθετα οι προβολές του σημείου εντοπίζονται στις προβολές δύο εδρών f^+ και f^- των F^+ και F^- αντίστοιχα, τότε το σημείο q ανήκει στο εσωτερικό του πολυέδρου εάν και μόνο εάν το q είναι κάτω από την f^+ και επάνω από την f^-. Εάν το q ανήκει είτε στην f^+ είτε στην f^- τότε το q ανήκει στο σύνορο του P. Τέλος, εάν το q είναι είτε επάνω από την f^+ είτε κάτω από την f^-, τότε το q είναι στο εξωτερικό του πολυέδρου.

6.3.1 Εντοπισμός σημείου σε διαμέριση του επιπέδου σε μονότονες περιοχές

Μια από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους εντοπισμού σημείου στο επίπεδο βασίζεται στη διαμέριση του επιπέδου *σε μονότονα τμήματα*. Πολλές διαμερίσεις του επιπέδου που συναντώνται στην υπολογιστική γεωμετρία συχνά περιλαμβάνουν μονότονα τμήματα: διαμερίσεις σε τρίγωνα, διαμερίσεις σε κυρτά τμήματα (όπως για παράδειγμα το διάγραμμα Voronoi, το διάγραμμα Voronoi k-τάξης, και οι διατάξεις ευθειών). Επιπλέον, οι διαμερίσεις που περιλαμβάνουν μη μονότονες περιοχές μπορούν να μετατραπούν σε διαμερίσεις σε μονότονες περιοχές, αρκεί οι μη μονότονες περιοχές να χωριστούν σε μονότονες υποπεριοχές (έχουμε δει έναν σχετικό αλγόριθμο στο Κεφάλαιο 1). Η χρησιμότητα τέτοιων διαμερίσεων αναγνωρίστηκε πρώτα από τους Lee και Preparata (1977) και από τότε έχει αποτελέσει αντικείμενο σημαντικών ερευνητικών προσπαθειών.

Ας δούμε κάποιες βασικές ιδέες για το πρόβλημα του εντοπισμού σημείου σε διαμέριση του επιπέδου σε μονότονες περιοχές. Ορίζουμε μια **διαχωριστική γραμμή** *(separator)* σε μια διαμέριση σε μονότονες περιοχές ως μια x-μονότονη συνεχή πολυγωνική γραμμή που αποτελείται από ακμές της διαμέρισης (Σχήμα 6.4). Μια τέτοια γραμμή είναι μια μονότονη αλυσίδα που χωρίζει το επίπεδο σε δύο τμήματα, το ένα επάνω από τη γραμμή και το άλλο κάτω.

Η βασική ιδέα είναι να βρούμε ένα σύνολο από διαχωριστικές γραμμές που ορίζουν ανάμεσά τους τις (μονότονες) περιοχές της διαμέρισης. Τότε ο εντοπισμός του σημείου γίνεται με μια διπλή δυαδική αναζήτηση: μία δυαδική αναζήτηση κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση στον ταξινομημένο πίνακα των διαχωριστικών γραμμών για να προσδιοριστεί το ζεύγος των διαχωριστικών γραμμών που περικλείουν την περιοχή της διαμέρισης στην οποία βρίσκεται το σημείο, όπου ο έλεγχος εάν το σημείο βρίσκεται ψηλότερα ή χαμηλότερα από μια διαχωριστική γραμμή απαιτεί δυαδική αναζήτηση κατά την οριζόντια κατεύθυνση.



Σχήμα 6.4 Διαχωριστικές Γραμμές.

Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 6.4. Η διαμέριση του επιπέδου είναι ένα διάγραμμα Voronoi και είναι συνεπώς μονότονη. Στο Σχήμα έχουν σημειωθεί τέσσερις διαχωριστικές γραμμές. Η S_1 είναι η χαμηλότερη και βρίσκεται ψηλότερα μόνο από την περιοχή Voronoi του κόμβου 1. Η S_2 είναι η αμέσως επόμενη· βρίσκεται ψηλότερα από τις περιοχές Voronoi των κόμβων 1 και 2. Παρατηρήστε ότι η S_2 είναι ψηλότερα από την S_1 σε όλο το μήκος της και οι δύο αυτές διαχωριστικές γραμμές περικλείουν ανάμεσά τους την περιοχή Voronoi του κόμβου 2. Όμοια, η S_3 είναι ψηλότερα από την S_2 και οι S_2 και S_3 περικλείουν ανάμεσά τους την περιοχή Voronoi του κόμβου 3. Αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί καταλήγοντας σε ένα σύνολο από διαχωριστικές γραμμές $S_1, S_2, \ldots, S_m$ οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ταξινομημένες κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση και ανά δύο διαδοχικές περικλείουν ακριβώς μία περιοχή της διαμέρισης του επιπέδου.

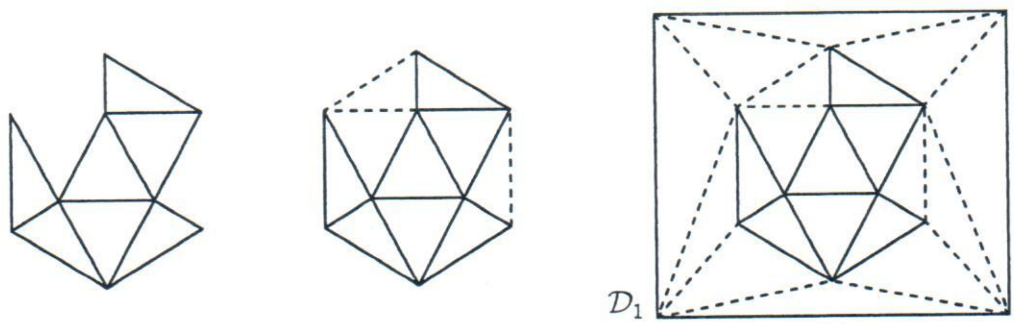
Ας θεωρήσουμε το εξής πρόβλημα: για δοθέν σημείο q, θέλουμε να προσδιορίσουμε εάν το q βρίσκεται επάνω ή κάτω από κάποια συγκεκριμένη διαχωριστική γραμμή S_i. Επειδή η S_i είναι x-μονότονη, το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με την εκτέλεση μιας δυαδικής αναζήτησης (κατά την οριζόντια κατεύθυνση) με βάση την x-συντεταγμένη του q σε σχέση με τις x-συντεταγμένες των κορυφών της S_i. Όταν βρεθεί η ακμή e της S_i οι κορυφές της οποίας έχουν μικρότερη και μεγαλύτερη x-συντεταγμένη από την x-συντεταγμένη του q, τότε αρκεί να ελέγξουμε εάν το q είναι επάνω ή κάτω από την e. Αφού η S_i έχει $O(n)$ ακμές, η ερώτηση "Είναι το q επάνω ή κάτω από την S_i;" μπορεί να απαντηθεί σε $O(\log n)$ χρόνο.

Αυτή η διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολλές φορές για να εκτελέσουμε μια δυαδική αναζήτηση ανάμεσα στις διαχωριστικές γραμμές. Συγκεκριμένα, πρώτα ρωτάμε εάν το q βρίσκεται ψηλότερα ή χαμηλότερα από την $S_{m/2}$. Εάν είναι χαμηλότερα, επαναλαμβάνουμε την ερώτηση για την $S_{m/4}$. Εάν είναι ψηλότερα, ελέγχουμε την $S_{3m/4}$ κ.ο.κ. Αυτή η δυαδική αναζήτηση θα απαιτήσει $O(\log m)$ βήματα καθένα από τα οποία απαιτεί $O(\log n)$ χρόνο. Καθώς $m = O(n)$, ο συνολικός χρόνος είναι $O(\log^2 n)$.

Αν και ο αλγόριθμος αυτός είναι πολύ απλός, δεν είναι βέλτιστος ούτε από άποψη πολυπλοκότητας χρόνου ούτε από άποψη πολυπλοκότητας χώρου (η απαίτηση σε χώρο είναι $O(n^2)$ λόγω της μεγάλης επανάληψης ακμών ανάμεσα στις διάφορες διαχωριστικές γραμμές). Ωστόσο, η χρήση τοπολογικής ταξινόμησης *(topological sorting)* και της μεθόδου *fractional cascading* επέτρεψαν την περιγραφή μιας βελτιωμένης έκδοσης του αλγορίθμου η οποία είναι βέλτιστη: έχει $O(\log n)$ πολυπλοκότητα χρόνου και $O(n)$ πολυπλοκότητα χώρου.

6.3.2 Εντοπισμός σημείου σε διαμέριση $\mathcal{T}$ μιας απλής πολυγωνικής περιοχής σε τρίγωνα

Για να απλοποιήσουμε τη διαδικασία, θα αναγάγουμε το πρόβλημα στο πρόβλημα εντοπισμού σημείου σε μια διαμέριση $\mathcal{D}_1$ του εσωτερικού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε τρίγωνα. Για να το επιτύχουμε αυτό, επεκτείνουμε τη δοθείσα διαμέριση $\mathcal{T}$ προσθέτοντας τρίγωνα σε δύο φάσεις: Η πρώτη φάση εκτελείται εάν η πολυγωνική περιοχή (η διαμέριση της οποίας μας έχει δοθεί) δεν είναι κυρτή. Τότε, υπολογίζουμε το κυρτό περίβλημα των κορυφών της διαμέρισης και χωρίζουμε σε τρίγωνα τις περιοχές που περικλείονται από το σύνορο του κυρτού περιβλήματος και το σύνορο της δοθείσας πολυγωνικής περιοχής (Σχήμα 6.5(b)). Κατά τη δεύτερη φάση, βρίσκουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο R το οποίο περικλείει το κυρτό περίβλημα και χωρίζουμε σε τρίγωνα την περιοχή μεταξύ του συνόρου του κυρτού περιβλήματος και του συνόρου του R. Τόσο ο υπολογισμός των κορυφών του ορθογωνίου R όσο και ο χωρισμός σε τρίγωνα γίνεται εύκολα με την εύρεση της αριστερότερης, της δεξιότερης, της ψηλότερης και της χαμηλότερης από τις κορυφές της δοθείσας διαμέρισης. Οι συντεταγμένες των κορυφών αυτών προσδιορίζουν το μικρότερο ορθογώνιο (με πλευρές παράλληλες στους άξονες) που περιγράφεται στο κυρτό περίβλημα της δοθείσας διαμέρισης, οπότε αρκεί να επιλέξουμε ως ορθογώνιο R ένα ορθογώνιο λίγο μεγαλύτερο. Ο χωρισμός σε τρίγωνα της περιοχής μεταξύ των συνόρων του ορθογωνίου R και του κυρτού περιβλήματος γίνεται εύκολα επίσης: θεωρώντας ότι κινούμαστε κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού κατά μήκος του συνόρου του κυρτού περιβλήματος, συνδέουμε την επάνω αριστερά κορυφή του R με τις κορυφές του κυρτού περιβλήματος από την αριστερώτερη έως και την ψηλότερη, την επάνω δεξιά κορυφή του R με τις κορυφές από την ψηλότερη έως και την δεξιότερη, την κάτω δεξιά κορυφή του R με τις κορυφές από την δεξιότερη



(a) (b) (c)

Σχήμα 6.5

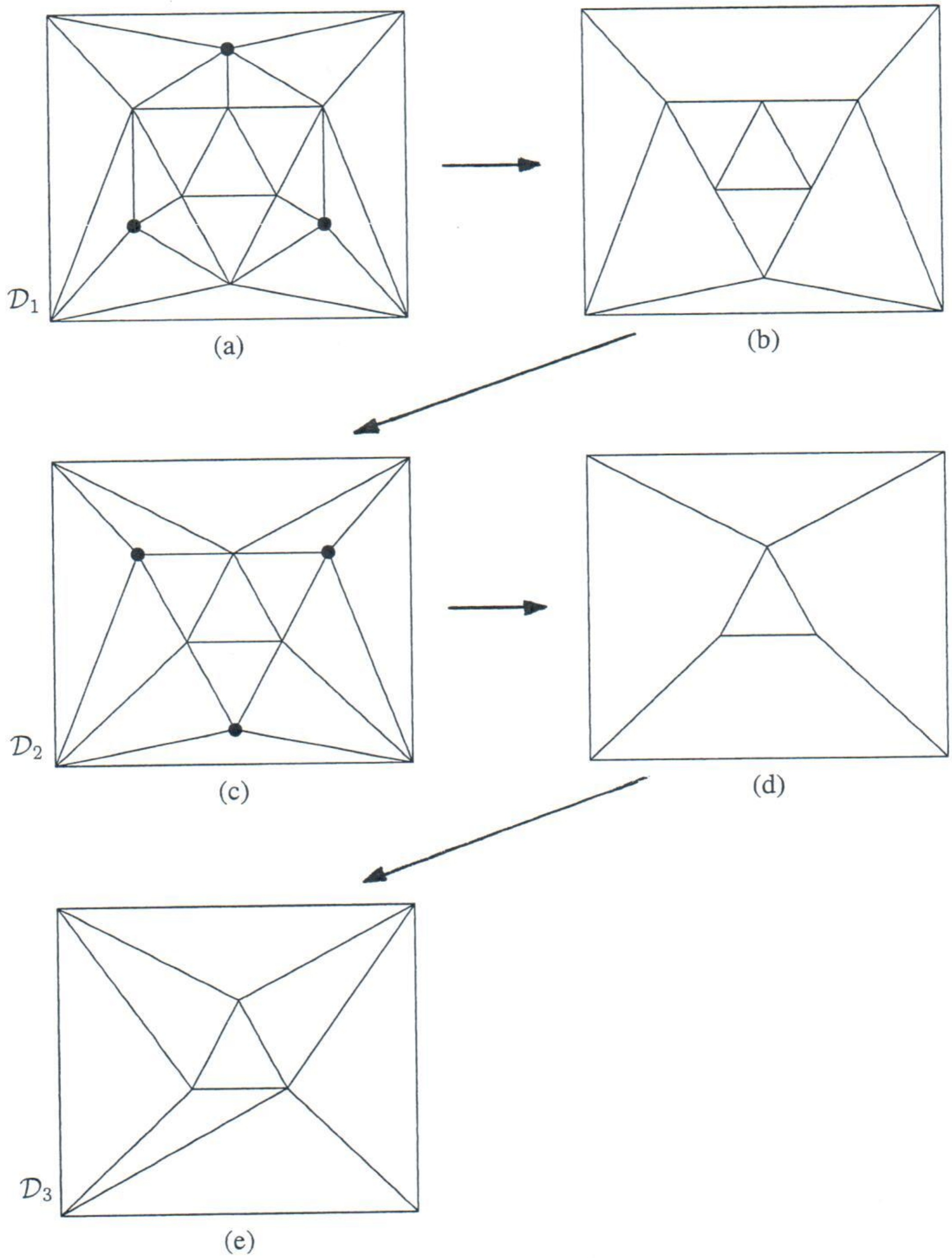
έως και την χαμηλότερη και την κάτω αριστερά κορυφή του R με τις κορυφές από την χαμηλότερη έως και την αριστερώτερη (Σχήμα 6.5(c)).

Δεδομένου ότι τόσο το κυρτό περίβλημα ενός απλού πολυγώνου, όσο και μια διαμέριση ενός απλού πολυγώνου σε τρίγωνα, καθώς και τα ακρότατα ενός πολυγώνου υπολογίζονται σε χρόνο γραμμικό στο πλήθος κορυφών του πολυγώνου, η παραπάνω προεπεξεργασία ολοκληρώνεται σε χρόνο γραμμικό στο μέγεθος της δοθείσας διαμέρισης. Σημειώνεται ότι τα τρίγωνα που προσθέτουμε στη δοθείσα διαμέριση $\mathcal{T}$ ώστε να πάρουμε τη διαμέριση $\mathcal{D}_1$ του ορθογωνίου R σημειώνονται κατάλληλα ώστε να γνωρίζουμε ότι δεν ανήκουν στην $\mathcal{T}$.

Στόχος μας είναι να προεπεξεργαστούμε περαιτέρω τη διαμέριση $\mathcal{D}_1$ του ορθογωνίου R ώστε να μπορούμε να προσδιορίσουμε γρήγορα (δηλαδή, σε χρόνο λογαριθμικό στο μέγεθος n της διαμέρισης) σε ποιο από τα τρίγωνα της διαμέρισης βρίσκεται δοθέν σημείο q. Η βασική ιδέα, η οποία προτάθηκε από τον Kirkpatrick το 1983, είναι να σχηματίσουμε μια ακολουθία $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, ..., $\mathcal{D}_k$ από όλο και απλούστερες διαμερίσεις του ορθογωνίου R. Η ακολουθία αποτελείται από $k = O(\log n)$ διαμερίσεις, ενώ η τελευταία (και απλούστερη) διαμέριση $\mathcal{D}_k$ έχει τρεις το πολύ κορυφές στο εσωτερικό του R και άρα ένα οποιοδήποτε σημείο μπορεί να εντοπιστεί ως προς την $\mathcal{D}_k$ σε σταθερό χρόνο. Όπως θα δούμε, η κατασκευή μιας τέτοιας ακολουθίας διαμερίσεων μπορεί να γίνει σε $O(n)$ χρόνο και απαιτεί για την αποθήκευσή της $O(n)$ χώρο, ενώ ερωτήσεις εντοπισμού σημείου ως προς την $\mathcal{D}_1$ απαντώνται σε $O(\log n)$ χρόνο.

Ανεξάρτητα Σύνολα. Η κατασκευή του Kirkpatrick βασίζεται στην έννοια του "ανεξάρτητου συνόλου" που συναντάμε στη θεωρία γραφημάτων. Ένα υποσύνολο I του συνόλου κορυφών ενός γραφήματος G ονομάζεται **ανεξάρτητο σύνολο** *(independent set)* εάν οποιεσδήποτε δύο κορυφές του I δεν είναι γειτονικές στο G. Στα Σχήματα 6.6(a) και (c), έχουμε σημειώσει με έντονους κύκλους τα στοιχεία ενός ανεξάρτητου συνόλου για καθένα από τα αντίστοιχα γραφήματα. Καθοριστικής σημασίας για την κατασκευή του Kirkpatrick είναι η ύπαρξη ανεξαρτήτων συνόλων τα οποία (i) έχουν "μεγάλο" πληθάριθμο και (ii) περιέχουν στοιχεία που έχουν "μικρό" βαθμό στο γράφημα G.

Σε γενικές γραμμές, για να κατασκευάσουμε την ακολουθία των διαμερίσεων $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, ..., $\mathcal{D}_k$ εργαζόμαστε ως εξής: Βρίσκουμε ένα ανεξάρτητο σύνολο από τις κορυφές που βρίσκονται στο εσωτερικό του ορθογωνίου R στην $\mathcal{D}_1$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.6(a). Αφαιρούμε από το γράφημα αυτές τις κορυφές καθώς και τις προσκείμενες σε αυτές ακμές (Σχήμα 6.6(b)). Επειδή αυτές οι κορυφές αποτελούν ένα ανεξάρτητο



Σχήμα **6.6**

σύνολο, η αφαίρεση κάθε τέτοιας κορυφής συνεπάγεται την εμφάνιση μιας νέας περιοχής (χωρίου) στο γράφημα. Στη συνέχεια, οι περιοχές αυτές χωρίζονται σε τρίγωνα (Σχήμα 6.6(c)) και η διαδικασία επαναλαμβάνεται στη διαμέριση που προκύπτει έως ότου απομείνουν το πολύ τρεις κορυφές στο εσωτερικό του ορθογωνίου R.

Για να επιτύχουμε μια κατάλληλη ακολουθία διαμερίσεων, θα πρέπει τα ανεξάρτητα σύνολα που θα επιλέγουμε σε κάθε επανάληψη να έχουν κάποιες κατάλληλες ιδιότητες. Συγκεκριμένα, για να έχουμε $O(\log n)$ διαμερίσεις από την αρχική διαμέριση έως μια διαμέριση σταθερού μεγέθους, θα πρέπει σε κάθε επανάληψη να διαγράφουμε τουλάχιστον κάποιο σταθερό κλάσμα του συνολικού πλήθους κορυφών της τρέχουσας διαμέρισης. Πράγματι, ας θεωρήσουμε ότι, εάν μας δοθεί μια διαμέριση σε τρίγωνα με m κορυφές στο εσωτερικό του ορθογωνίου R, μπορούμε να βρούμε ένα ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον cm στοιχεία για κάποια θετική σταθερά $c < 1$. Τότε, μετά από κάθε βήμα αφαίρεσης των κορυφών που ανήκουν στο ανεξάρτητο σύνολο, το πλήθος των κορυφών της διαμέρισης στο εσωτερικό του ορθογωνίου R είναι το πολύ $(1-c)$ φορές το αντίστοιχο πλήθος στην προηγούμενη διαμέριση. Συνεπώς, μετά από k επαναλήψεις, θα έχουν απομείνει το πολύ $m\,(1-c)^k$ κορυφές στο εσωτερικό του R. Το πλήθος αυτό γίνεται ίσο με 2 όταν

$$\begin{aligned} m\,(1-c)^k = 2 \iff& \log m + k\log(1-c) = 1 \\ \iff& k = \frac{\log m}{-\log(1-c)} - \frac{1}{-\log(1-c)}. \end{aligned}$$

Καθώς $1 - c < 1$, έχουμε ότι $-\log(1-c) > 0$, οπότε το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας ισούται με μια θετική σταθερά επί $\log m$ μείον μια άλλη σταθερά: δηλαδή, είναι $O(\log m)$.

Η πιο απλή μέθοδος υπολογισμού ενός ανεξάρτητου συνόλου βασίζεται στην επαναληπτική εφαρμογή της ακόλουθης διαδικασίας: βρίσκουμε την κορυφή ελαχίστου βαθμού μεταξύ των κορυφών που δεν είναι γειτονικές σε καμία από τις κορυφές στο τρέχον ανεξάρτητο σύνολο και την εισάγουμε στο ανεξάρτητο σύνολο (αρχικά, το ανεξάρτητο σύνολο είναι κενό). Η ιδέα είναι ότι η κορυφή ελαχίστου βαθμού θα αποκλείσει το ελάχιστο δυνατό πλήθος κορυφών από το ανεξάρτητο σύνολο. Αν και η μέθοδος αυτή δεν υπολογίζει απαραίτητα το μέγιστο δυνατό ανεξάρτητο σύνολο, είναι επαρκής για τον σκοπό μας. Μάλιστα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια λιγότερο αυστηρή εκδοχή της, τον Αλγόριθμο 6.2 (το πεδίο `mark` χρησιμεύει για τον προσδιορισμό των κορυφών που είναι υποψήφιες για να εισαχθούν στο ανεξάρτητο σύνολο: τιμή 0 αντιστοιχεί σε υποψήφιες κορυφές, ενώ τιμή 1 σε μη υποψήφιες). Αναθέτοντας την τιμή 1

Είσοδος: μια διαμέριση ενός ορθογωνίου R σε τρίγωνα

Έξοδος: ένα ανεξάρτητο σύνολο I του συνόλου κορυφών στο εσωτερικό του R

```
for (κάθε κορυφή v της διαμέρισης) do
    ανάθεσε την τιμή 0 στο πεδίο mark της v
ανάθεσε την τιμή 1 στο πεδίο mark των 4 κορυφών του συνόρου του ορθογωνίου R
I ← ∅
for (κάθε κορυφή v της διαμέρισης) do
    if (το πεδίο mark της v έχει την τιμή 0 and η v έχει βαθμό ≤ 8)
    then ανάθεσε την τιμή 1 στο πεδίο mark όλων των γειτόνων της v
         I ← I ∪ {v}
    ανάθεσε την τιμή 1 στο πεδίο mark της v
```

Αλγόριθμος 6.2 Αλγόριθμος υπολογισμού ανεξάρτητου συνόλου.

στο πεδίο mark όλων των γειτόνων κάθε κορυφής την οποία εισάγουμε στο σύνολο I, εξασφαλίζουμε ότι ο Αλγόριθμος 6.2 υπολογίζει πραγματικά ένα ανεξάρτητο σύνολο. Είναι προφανές ότι ο αλγόριθμος απαιτεί $O(n)$ χρόνο για ένα επίπεδο γράφημα με n κορυφές. Αυτό που δεν είναι προφανές είναι ότι υπολογίζει ένα ανεξάρτητο σύνολο με "μεγάλο" πληθάριθμο· αυτό αποδεικνύεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6.3.1
Έστω ότι δίδεται μια διαμέριση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου R η οποία έχει m κορυφές στο εσωτερικό του R. Ο Αλγόριθμος 6.2 υπολογίζει ένα ανεξάρτητο σύνολο από τις κορυφές στο εσωτερικό του R το οποίο έχει πληθάριθμο τουλάχιστον $m/18$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στον τύπο του Euler, $V - E + F = 2$, ο οποίος συνεπάγεται ότι το πλήθος ακμών E ενός επίπεδου γραφήματος είναι το πολύ $3V - 6$. Εφαρμόζοντας αυτή τη σχέση στη δοθείσα διαμέριση, η οποία έχει συνολικά $m + 4$ κορυφές, βρίσκουμε ότι το πλήθος ακμών της είναι το πολύ $3(m + 4) - 6 = 3m + 6$. Επειδή κάθε ακμή πρόσκειται σε δύο κορυφές, το άθροισμα S των βαθμών όλων των κορυφών ισούται με το διπλάσιο του πλήθους ακμών, δηλαδή, $S \leq 6m + 12$. Αυτό το άνω φράγμα στο S συνεπάγεται ότι θα πρέπει να υπάρχουν πάρα πολλές κορυφές με μικρό βαθμό. Πράγματι, αποδεικνύουμε ότι τουλάχιστον οι μισές από τις m κορυφές στο εσωτερικό του ορθογωνίου R έχουν βαθμό το πολύ ίσο με 8. Έστω ότι ℓ από τις m κορυφές έχουν βαθμό το πολύ 8. Τότε οι υπόλοιπες $m - \ell$ κορυφές έχουν βαθμό τουλάχιστον 9, ενώ τόσο οι ℓ όσο και οι 4 κορυφές του ορθογωνίου έχουν βαθμό τουλάχιστον 3. Δηλαδή, έχουμε:

$$\begin{aligned} 6m + 12 \ \geq \ S \ \geq \ 9(m-\ell) + 3\ell + 3\cdot 4 = 9m - 6\ell + 12 \\ \Longrightarrow \qquad\qquad 6\ell \ \geq \ 3m \end{aligned}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\ell \geq m/2$.

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι τουλάχιστον οι μισές από τις m κορυφές που βρίσκονται στο εσωτερικό του ορθογωνίου R έχουν βαθμό το πολύ ίσο με 8 και άρα είναι υποψήφιες για το ανεξάρτητο σύνολο του Αλγορίθμου 6.2. Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι το ανεξάρτητο σύνολο έχει πληθάριθμο $\geq m/18$. Η εισαγωγή μιας κορυφής v στο ανεξάρτητο σύνολο αποκλείει μόνο τους γείτονες της v από το ανεξάρτητο σύνολο. Όμως, η v είναι γειτονική σε 8 το πολύ κορυφές και άρα η εισαγωγή της στο ανεξάρτητο σύνολο συνεπάγεται τη μείωση του πλήθους των υποψήφιων που απομένουν για το ανεξάρτητο σύνολο κατά το πολύ 9. Δεδομένου ότι υπάρχουν αρχικά $\geq m/2$ υποψήφιες κορυφές για το ανεξάρτητο σύνολο, το τελικό ανεξάρτητο σύνολο έχει πληθάριθμο τουλάχιστον ίσο με $m/18$. ∎

Κατασκευή της ακολουθίας διαμερίσεων. Η διαδικασία κατασκευής της ακολουθίας διαμερίσεων περιγράφεται στον Αλγόριθμο 6.3. Τα κύρια βήματα της διαδι-

Είσοδος: μια διαμέριση $\mathcal{D}_1$ ενός ορθογωνίου R σε τρίγωνα
Έξοδος: μια ακολουθία διαμερίσεων $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, …, $\mathcal{D}_k$ του R σε τρίγωνα,
όπου $k = O(\log n)$

```
i ← 1
while (το πλήθος κορυφών της διαμέρισης D_i στο εσωτερικό του R ≥ 4) do
    υπολόγισε ένα ανεξάρτητο σύνολο I της D_i με εφαρμογή του Αλγορίθμου 6.2
    D_{i+1} ← D_i
    for (κάθε κορυφή v ∈ I) do
        διάγραψε την κορυφή v από τη διαμέριση D_{i+1}
        χώρισε σε τρίγωνα την περιοχή που προκύπτει
        σύνδεσε κάθε νέο τρίγωνο με την κορυφή v της D_i
    for (κάθε τριγωνο t της D_{i+1}) do
        if (το τριγωνο t είναι επίσης τρίγωνο της D_i)
        then σύνδεσε το τρίγωνο t με το αντίστοιχο τρίγωνο στην D_i
    i ← i + 1
```

Αλγόριθμος 6.3 Ο αλγόριθμος κατασκευής της ακολουθίας διαμερίσεων.

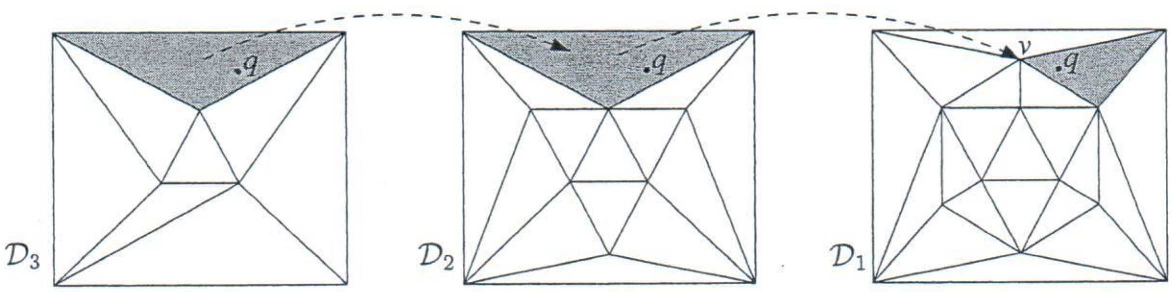
κασίας κατασκευής μιας διαμέρισης από την προηγούμενή της είναι ο προσδιορισμός ενός ανεξάρτητου συνόλου κορυφών της προηγούμενης διαμέρισης, η αφαίρεσή τους, ο χωρισμός σε τρίγωνα των πολυγωνικών περιοχών που προκύπτουν λόγω της αφαίρεσης κορυφών, και η σύνδεση κάθε τριγώνου της νέας διαμέρισης με μία κορυφή ή ένα τρίγωνο της προηγούμενης διαμέρισης. Αξίζει να σημειωθεί ότι καθώς κάθε κορυφή που αφαιρείται έχει βαθμό το πολύ ίσο με 8, ο χωρισμός σε τρίγωνα της περιοχής που προκύπτει λόγω της αφαίρεσης της κορυφής μπορεί να εκτελεσθεί σε σταθερό χρόνο με οποιονδήποτε αλγόριθμο χωρισμού ενός απλού πολυγώνου σε τρίγωνα.

Έχουμε ήδη αποδείξει γιατί η ακολουθία διαμερίσεων που παράγει ο Αλγόριθμος 6.3 περιλαμβάνει $O(\log n)$ διαμερίσεις. Σε πρώτη ματιά, είναι πιθανό να μας δημιουργηθεί η εντύπωση ότι ο συνολικός χρόνος και χώρος που απαιτούνται για όλες αυτές τις διαμερίσεις είναι $\Theta(n \log n)$. Στην πραγματικότητα, ο συνολικός χρόνος και χώρος είναι $O(n)$ εξαιτίας της σταθερής κλασματικής μείωσης των κορυφών μεταξύ διαδοχικών διαμερίσεων της ακολουθίας. Συγκεκριμένα, θεωρώντας $c = 1/18$, κάθε διαμέριση έχει στο εσωτερικό του ορθογωνίου R το πολύ τα $17/18$ των αντίστοιχων κορυφών της προηγούμενης διαμέρισης, πράγμα που σημαίνει ότι το συνολικό μέγεθος όλων των διαμερίσεων της ακολουθίας είναι

$$\begin{aligned}(n+4) + (\frac{17}{18}n+4) + \ldots &= 4\,O(\log n) + n\Big[1 + \frac{17}{18} + \Big(\frac{17}{18}\Big)^2 + \ldots\Big] \\ &\leq O(\log n) + n\,\frac{1}{1-17/18} = O(\log n) + 18n.\end{aligned}$$

Συνεπώς, ο συνολικός χώρος για την καταχώριση της ακολουθίας των διαμερίσεων είναι $O(n)$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνεται ότι ο χρόνος που απαιτείται για την κατασκευή της ακολουθίας είναι επίσης $O(n)$.

Ο αλγόριθμος εντοπισμού σημείου. Μια ακολουθία διαμερίσεων $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_k$ με τις ιδιότητες που περιγράψαμε στις προηγούμενες παραγράφους μάς επιτρέπει να απαντήσουμε μια ερώτηση εντοπισμού ενός σημείου q ως προς τη δοθείσα διαμέριση $\mathcal{T}$ ως εξής: Ελέγχουμε εάν το σημείο q βρίσκεται εκτός του ορθογωνίου R. Εάν ναι, τότε το q βρίσκεται έξω από την πολυγωνική περιοχή η διαμέριση της οποίας μας έχει δοθεί. Εάν όχι, τότε προσδιορίζουμε το τρίγωνο της $\mathcal{D}_k$ στο οποίο ανήκει το q. Το τρίγωνο αυτό συνδέεται είτε με ένα αντίστοιχο τρίγωνο στη διαμέριση $\mathcal{D}_{k-1}$ είτε με κάποια κορυφή, έστω v, της $\mathcal{D}_{k-1}$ την οποία αφαιρέσαμε μεταβαίνοντας από την $\mathcal{D}_{k-1}$ στην $\mathcal{D}_k$. Στη δεύτερη περίπτωση, βρίσκουμε ποιο από τα τρίγωνα που είναι γειτονικά στην v στην $\mathcal{D}_{k-1}$ περιέχει το σημείο q. Και στις δύο περιπτώσεις, έχουμε προσδιορίσει το τρίγωνο της διαμέρισης $\mathcal{D}_{k-1}$ στο οποίο ανήκει το q. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη



Σχήμα 6.7

διαδικασία για καθεμία από τις διαμερίσεις της ακολουθίας $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, ..., $\mathcal{D}_k$ από την $\mathcal{D}_k$ προς την $\mathcal{D}_1$, προσδιορίζουμε τελικά το τρίγωνο της διαμέρισης $\mathcal{D}_1$ στο οποίο ανήκει το σημείο q. Εάν αυτό είναι ένα από τα τρίγωνα της δοθείσας διαμέρισης $\mathcal{T}$, τότε επιστρέφουμε τη σχετική πληροφορία, αλλιώς επιστρέφουμε το μήνυμα ότι το σημείο q δεν ανήκει σε κανένα από τα τρίγωνα της $\mathcal{T}$.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.7. Το σημείο q που αναζητείται εντοπίζεται ως προς τη διαμέριση $\mathcal{D}_3$. Επειδή το τρίγωνο στο οποίο ανήκει το q συμμετέχει επίσης στη διαμέριση $\mathcal{D}_2$, απλά μεταβαίνουμε στο αντίστοιχο τρίγωνο της $\mathcal{D}_2$. Το τρίγωνο αυτό είναι ένα από τα τρίγωνα στα οποία χωρίστηκε η πολυγωνική περιοχή που προέκυψε λόγω της αφαίρεσης της κορυφής v από την $\mathcal{D}_1$. Συνεπώς, ελέγχουμε τα 5 τρίγωνα που είναι γειτονικά στην v στη διαμέριση $\mathcal{D}_1$ και βρίσκουμε ποιο από αυτά περιέχει το q. Καθώς φθάσαμε στην $\mathcal{D}_1$, ελέγχουμε εάν το τρίγωνο ανήκει στη δοθείσα διαμέριση $\mathcal{T}$. Στην προκειμένη περίπτωση, το τρίγωνο δεν ανήκει (δες Σχήμα 6.5), οπότε αποφαινόμαστε ότι το σημείο που αναζητούμε βρίσκεται εκτός της δοθείσας πολυγωνικής περιοχής.

Προφανώς, ο έλεγχος για το εάν το σημείο q που αναζητούμε βρίσκεται εντός ή εκτός του ορθογωνίου R γίνεται σε σταθερό χρόνο. Επίσης, ο προσδιορισμός του τριγώνου της διαμέρισης $\mathcal{D}_k$ στο οποίο ανήκει το q (εφόσον βρίσκεται εντός του R) γίνεται σε σταθερό χρόνο, καθώς το πλήθος κορυφών της $\mathcal{D}_k$ είναι το πολύ 7 και άρα το πλήθος τριγώνων είναι το πολύ 8. Αλλά και ο προσδιορισμός του τριγώνου της διαμέρισης $\mathcal{D}_{i-1}$ στο οποίο ανήκει το q δοθέντος του αντίστοιχου τριγώνου της $\mathcal{D}_i$ $(i = k, \ldots, 2)$ γίνεται επίσης σε σταθερό χρόνο: λάβετε υπόψιν σας ότι κάθε κορυφή που αφαιρείται έχει βαθμό το πολύ 8 και άρα είναι γειτονική σε 8 το πολύ τρίγωνα. Συνεπώς, ο αλγόριθμός μας δαπανά σταθερό χρόνο για κάθε διαμέριση της ακολουθίας $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, ..., $\mathcal{D}_k$ που έχουμε κατασκευάσει. Καθώς $k = O(\log n)$, η διαδικασία απάντησης στην ερώτηση εντοπισμού του σημείου q ολοκληρώνεται σε $O(\log n)$ χρόνο.