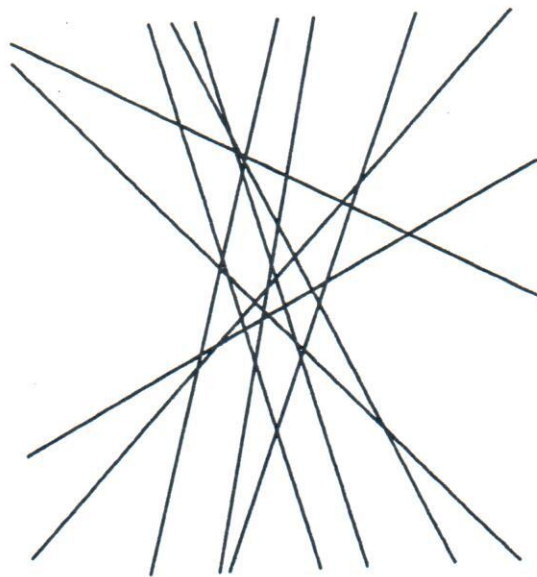


5. Διατάξεις Ευθειών Γραμμών

Η τρίτη σημαντική δομή στην υπολογιστική γεωμετρία μετά το κυρτό περίβλημα και το διάγραμμα Voronoi είναι οι διατάξεις ευθειών (και επιπέδων). Μια τέτοια διάταξη ευθειών απεικονίζεται στο Σχήμα 5.1. Πρόκειται για ένα σύνολο από ευθείες τοποθετημένες στο επίπεδο: οι ευθείες αυτές ορίζουν σημεία τομής που λέγονται κορυφές (*vertices*), ευθύγραμμα τμήματα ανάμεσα στα σημεία τομής που λέγονται ακμές (*edges*) και κυρτές περιοχές (*cells, faces*). Είναι χρήσιμο να θεωρούμε τις περιοχές ως ανοικτά σύνολα (δηλ., δεν περιέχουν τις ακμές του συνόρου τους) και τις ακμές ως ανοικτά ευθύγραμμα τμήματα (που δεν περιέχουν τις προσκείμενες κορυφές), οπότε οι κορυφές, οι ακμές και οι περιοχές ορίζουν μια διαμέριση ολόκληρου του επιπέδου που είναι γνωστή ως *διάταξη ευθειών* (*arrangement*).

Οι διατάξεις ευθειών μοιάζουν πολύ αφηρημένες για να έχουν εφαρμογές. Ωστόσο, είναι χρήσιμες σε μια ποικιλία προβλημάτων, όπως την αναγνώριση και αφαίρεση κρυμμένων επιφανειών (*hidden surface removal*), την εύρεση κενών κυρτών πολυγώνων, και τον υπολογισμό κοινών διχοτόμων δύο συνόλων σημείων όπως θα δούμε αναλυτικά αργότερα.



Σχήμα 5.1 Μια διάταξη ευθειών.

5.1 Στοιχεία Συνδυαστικής για Διατάξεις Ευθειών

Μια διάταξη ευθειών λέγεται απλή (*simple*) εαν κάθε ζεύγος ευθειών τέμνεται σε ακριβώς ένα σημείο διαφορετικό από όλα τα άλλα σημεία τομής. Διατάξεις ευθειών που δεν είναι απλές είναι κατά κάποιο τρόπο “εκφυλισμένες” και συχνά αλγόριθμοι και θεωρήματα είναι απλούστερα για απλές διατάξεις.

Είναι πολύ ενδιαφέρον ότι όλες οι απλές διατάξεις ευθειών έχουν το ίδιο πλήθος κορυφών, ακμών και περιοχών. Συγκεκριμένα:

Λήμμα 5.1.1

Σε μια απλή διάταξη ευθειών, το πλήθος κορυφών, ακμών και περιοχών είναι $V = \binom{n}{2}$, $E = n^2$ και $F = \binom{n}{2} + n + 1$ αντίστοιχα, ενώ τα αντίστοιχα πλήθη για μή απλές διατάξεις δεν υπερβαίνουν τις παραπάνω τιμές.

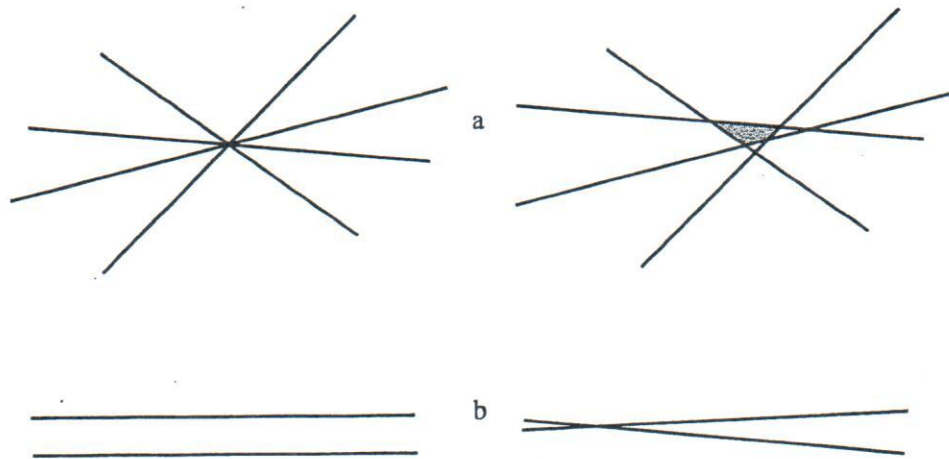
Απόδειξη. Το ότι το πλήθος των κορυφών ισούται με $\binom{n}{2}$ προκύπτει από το γεγονός ότι σε μια απλή διάταξη ευθειών κάθε ζεύγος ευθειών ορίζει μια διαφορετική κορυφή. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται επίσης ότι κάθε ευθεία τέμνεται σε $n - 1$ σημεία τα οποία ορίζουν πάνω σε αυτήν n ακμές. Συνεπώς, το πλήθος ακμών είναι n^2 .

Το πλήθος F περιοχών μπορεί να προκύψει από τον τύπο του Euler, αφού όμως μετασχηματίσουμε τη διάταξη ευθειών σε ένα επίπεδο γράφημα εισάγοντας μία νέα κορυφή για το σημείο στο άπειρο στο οποίο καταλήγουν όλες οι ευθείες. Το γράφημα αυτό έχει $V + 1$ κορυφές, E ακμές και F περιοχές, και ο τύπος του Euler συνεπάγεται

$$(V + 1) - E + F = 2 \implies F = 1 + E - V = 1 + n^2 - \binom{n}{2}$$

που δίνει την έκφραση για το F στην εκφώνηση του λήμματος. Το πλήθος περιοχών μπορεί επίσης να υπολογιστεί με μια απλή επαγωγική απόδειξη. Για το επαγωγικό βήμα, θεωρούμε μια διάταξη $n - 1$ ευθειών με $\binom{n-1}{2} + (n - 1) + 1$ περιοχές. Η εισαγωγή μιας νέας ευθείας L στη διάταξη προκαλεί τον χωρισμό κάθε περιοχής που τέμνεται από την L σε δύο νέες περιοχές. Δηλαδή, η διάταξη των n ευθειών (συμπεριλαμβανομένης και της L) έχει τόσες περιοχές όσες η διάταξη των $n - 1$ ευθειών συν το πλήθος των περιοχών που τέμνονται από την L . Δεδομένου ότι κάθε περιοχή που τέμνεται από την L ορίζει ακμή στην L και καθώς το πλήθος ακμών επάνω στην L από τις $n - 1$ άλλες ευθείες είναι n , συμπεραίνομε ότι το πλήθος περιοχών στη διάταξη των n ευθειών είναι

$$\binom{n-1}{2} + (n-1) + 1 + n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{2(n-1)}{2} + n + 1 = \binom{n}{2} + n + 1.$$



Σχήμα 5.2

Τέλος, δείχνουμε (όχι πολύ αυστηρά) ότι οι απλές διατάξεις ευθειών αποτελούν τη χειρότερη περίπτωση όσον αφορά στις τιμές των V , E και F . Έστω ότι $k > 2$ ευθείες συναντώνται στην ίδια κορυφή. Εάν μετακινήσουμε λίγο τις ευθείες ώστε η διάταξη να είναι απλή, οι ποσότητες V , E και F αυξάνουν (Σχήμα 5.2(a)). Εάν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε αντίστοιχη μετακίνηση αυξάνει το V κατά 1, το E κατά 2 και το F κατά 1 (Σχήμα 5.2(b)). Δηλαδή, κάνοντας απλή μια μη απλή διάταξη ευθειών έχει ως συνέπεια την αύξηση των V , E και F . (Αυτό που δεν δείξαμε —αν και αποδεικνύεται ότι μπορεί να επιτευχθεί— είναι ότι μπορούμε να μετατρέψουμε μια μη απλή διάταξη σε απλή “διορθώνοντας” όλες τις εκφυλισμένες περιπτώσεις ταυτόχρονα.) ■

Η σημαντική συνεισφορά αυτού του λήμματος στη σχεδίαση αλγορίθμων είναι ότι συνεπάγεται ότι οι διατάξεις ευθειών στο επίπεδο είναι τετραγωνικές σε μέγεθος στη χειρότερη περίπτωση: τα πλήθη V , E και F είναι $O(n^2)$. Ωστόσο, η καθοριστική ιδιότητα των διατάξεων ευθειών που επιτρέπει την αποτελεσματική κατασκευή τους είναι ότι το συνολικό μέγεθος των περιοχών που διαπερνά οποιαδήποτε ευθεία της διάταξης δεν είναι “πολύ” μεγάλο. Η ιδιότητα αυτή θα γίνει σαφής στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

5.1.1. Το Θεώρημα Ζώνης

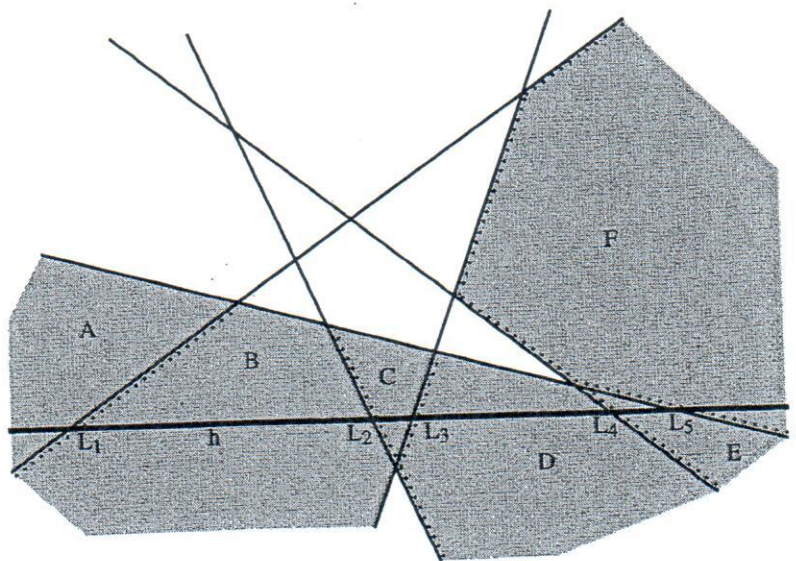
Έστω μια διάταξη ευθειών \mathcal{A} που περιλαμβάνει n ευθείες και L μία επιπλέον ευθεία. Η ζώνη (zone) $Z(L)$ της L στη διάταξη \mathcal{A} είναι το σύνολο των περιοχών που τέμνονται από την L . Για παράδειγμα, στο Σχήμα 5.3, $Z(h) = \{A, B, C, D, E, F\}$. Το Θεώρημα

Ζώνης μάς παρέχει ένα άνω φράγμα στο πλήθος των ακμών όλων αυτών των περιοχών. Συγκεκριμένα, λέει ότι το συνολικό πλήθος ακμών όλων των περιοχών της ζώνης μιας ευθείας L είναι $O(n)$, πράγμα που θα εκμεταλλευτούμε στην ανάλυση του αυξητικού αλγορίθμου κατασκευής μιας διάταξης ευθειών (Παράγραφος 5.2). Το Θεώρημα αποδείχθηκε για πρώτη φορά από τους Chazelle, Guibas και Lee (1985) και Edelsbrunner, O'Rourke και Seidel (1986) και από τότε έχουν προταθεί πολλές διαφορετικές αποδείξεις.

Θεώρημα 5.1.1 (Zone Theorem)

Το συνολικό πλήθος ακμών όλων των περιοχών που τέμνονται από μια ευθεία σε μια διάταξη n ευθειών είναι $O(n)$. (Πιο συγκεκριμένα, το πλήθος αυτό ισούται με $6n$ το πολύ.)

Απόδειξη. Για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι η διάταξη ευθειών με τη νέα ευθεία h είναι απλή και ότι η h είναι οριζόντια. Λόγω των υποθέσεων αυτών, μπορούμε να διακρίνουμε τις ακμές των περιοχών της ζώνης της h σε αριστερές και δεξιές: τα σημεία μιας αριστερής ακμής μιας περιοχής C έχουν τα εσωτερικά σημεία της C προς τα δεξιά τους, δηλαδή, σχηματίζουν το αριστερό τμήμα του συνόρου της C . Ο ορισμός των δεξιών ακμών είναι αντίστοιχος. Σημειώστε ότι, επειδή υποθέσαμε ότι η διάταξη ευθειών με την h είναι απλή, καμία ευθεία εκτός της h δεν είναι οριζόντια και άρα κάθε ακμή θα είναι είτε αριστερή είτε δεξιά. Στο Σχήμα 5.3, οι αριστερές ακμές έχουν σημειωθεί με στικτές γραμμές.

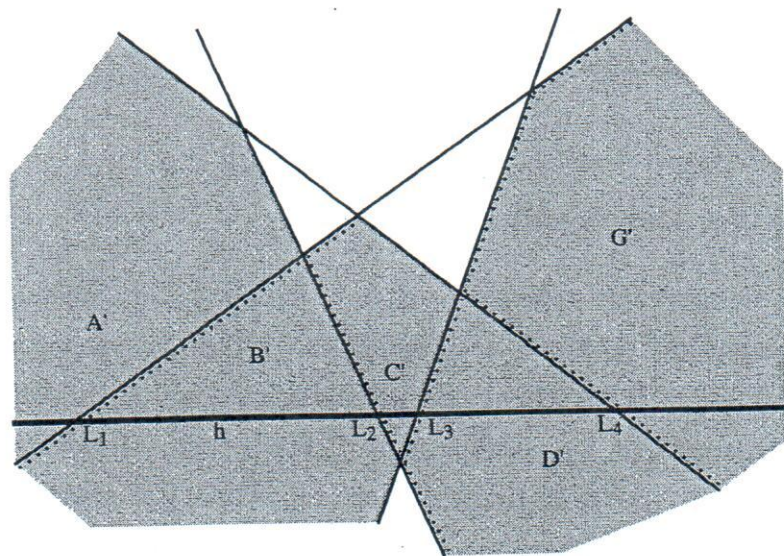


Σχήμα 5.3 Η ζώνη $Z(h)$ της ευθείας h .

Καθώς οι αριστερές και δεξιές ακμές είναι συμμετρικές, αρκεί να αποδείξουμε ότι το πλήθος αριστερών ακμών l_n στη ζώνη της h είναι το πολύ $3n$. (Στο Σχήμα 5.3, υπάρχουν 9 αριστερές ακμές ενώ το n ισούται με 5.)

Η απόδειξη είναι επαγωγική. Η βάση της επαγωγής για $n = 0$ είναι προφανής: δεν έχουμε καμία ευθεία και καμία αριστερή ακμή. Έστω λοιπόν ότι $l_{n-1} \leq 3n - 3$. Έστω \mathcal{A} μια διάταξη n ευθειών που πληροί τις υποθέσεις στην αρχή της απόδειξης. Το σχέδιο δράσης περιλαμβάνει αφαίρεση μίας ευθείας από τη διάταξη \mathcal{A} , εφαρμογή της επαγωγικής υπόθεσης, εισαγωγή της ευθείας που αφαιρέσαμε και μελέτη των αποτελεσμάτων της εισαγωγής αυτής στο l_n . Η ευθεία που επιλέγουμε να αφαιρέσουμε είναι αυτή που ορίζει το δεξιότερο σημείο τομής με την h : η L_5 στο Σχήμα 5.3. Ας συμβολίσουμε αυτή τη γραμμή με r . Αφαιρούμε την r από τη διάταξη \mathcal{A} , οπότε παίρνουμε μια διάταξη \mathcal{A}' που περιλαμβάνει $n - 1$ ευθείες. Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση, και αρκεί πλέον να δείξουμε ότι η επανεισαγωγή της r αυξάνει το l_{n-1} κατά το πολύ 3. Το υπόλοιπο μέρος της απόδειξης βεβαιώνει ακριβώς αυτό, δείχνοντας ότι η r εισάγει μία νέα αριστερή ακμή και κόβει το πολύ δύο ακμές της \mathcal{A}' σε δύο τμήματα την καθεμία.

Το Σχήμα 5.4 δείχνει τη διάταξη \mathcal{A}' που αντιστοιχεί στη διάταξη \mathcal{A} του Σχήματος 5.3. Η εισαγωγή της $r = L_5$ οδηγεί στον χωρισμό της περιοχής G' της \mathcal{A}' στις περιοχές E και F της \mathcal{A} και το “ψαλίδισμα” των περιοχών A' , B' , C' και D' ώστε να σχηματιστούν οι A , B , C και D . Το τελικό αποτέλεσμα είναι αρκετά περίπλοκο, αλ-



Σχήμα 5.4 Η διάταξη ευθειών $\mathcal{A}' = \mathcal{A} - \{r\}$.

λά τα πράγματα απλουστεύονται αφ' ενός επειδή ενδιαφερόμαστε για ένα άνω φράγμα στην αύξηση του πλήθους των αριστερών ακμών και αφ' ετέρου επειδή οι αλλαγές στις αριστερές ακμές δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλες ακριβώς λόγω της επιλογής της ευθείας r που αφαιρέσαμε.

Επειδή η r επιλέχθηκε ως η ευθεία που ορίζει το δεξιότερο σημείο τομής με την h στη διάταξη \mathcal{A} , θα περιέχει μία αριστερή ακμή της δεξιότερης περιοχής της ζώνης $Z(h)$ της h στην \mathcal{A} . Η καθοριστική παρατήρηση είναι ότι η r δεν περιέχει καμία άλλη αριστερή ακμή της $Z(h)$ στην \mathcal{A} (σημειώστε ότι περιέχει αρκετές δεξιές ακμές της $Z(h)$ –Σχήμα 5.3). Πράγματι, μια ευθεία, έστω a , περιέχει περισσότερες από μία αριστερές ακμές μόνον εάν τέμνεται από μια άλλη ευθεία που τέμνει την h σε σημείο που βρίσκεται δεξιότερα από το σημείο τομής της a με την h (πχ, οι L_3 και L_4 στη διάταξη \mathcal{A}). Αυτό βέβαια δεν μπορεί να ισχύει για την r που ορίζει το δεξιότερο σημείο τομής με την h .

Τέλος, δείχνουμε ότι το πλήθος αριστερών ακμών της \mathcal{A}' τις οποίες η r χωρίζει σε δύο νέες αριστερές ακμές είναι το πολύ δύο. Για παράδειγμα, η αριστερή ακμή του G' στο Σχήμα 5.4 που ανήκει στην L_4 χωρίζεται από την $r = L_5$ σε μία αριστερή ακμή για την περιοχή E και μία για την F (Σχήμα 5.3). Αυτός ο χωρισμός μιας ακμής σε δύο νέες μπορεί να συμβεί μόνο στη δεξιότερη περιοχή της \mathcal{A}' που τέμνει η h , αφού η r “ψαλιδίζει” τις αριστερές ακμές των υπολοίπων περιοχών της ζώνης της h . Αφού αυτή η περιοχή είναι κυρτή, η r μπορεί να τμήσει το σύνορό της σε δύο το πολύ σημεία, χωρίζοντας το πολύ δύο παλιές αριστερές ακμές σε δύο νέες ακμές την καθεμία. Συνοψίζοντας λοιπόν, η r προσθέτει μία νέα αριστερή ακμή και χωρίζει το πολύ δύο παλιές αριστερές ακμές σε συνολικά τέσσερις νέες αριστερές ακμές αυξάνοντας έτσι το πλήθος l_{n-1} αριστερών ακμών κατά το πολύ 3. Δηλαδή, $l_n = l_{n-1} + 3 \leq 3n$. ■

5.2 Αυξητικός (Incremental) Αλγόριθμος

Πριν παρουσιάσουμε την περιγραφή του αλγορίθμου, ας ασχοληθούμε με τη μορφή της εισόδου και εξόδου. Η είσοδος περιλαμβάνει απλά τις αναπαραστάσεις των ευθειών: για παράδειγμα, η κλίση και η τομή με τον άξονα των x για καθεμία ευθεία αρκεί. Η έξοδος περιλαμβάνει την περιγραφή της διάταξης που προκύπτει. Καθώς η διάταξη είναι ένα επίπεδο γράφημα, μπορεί να αναπαρασταθεί με οποιαδήποτε από τις τρεις δομές αποθήκευσης επιπέδων γραφημάτων που είδαμε στο Κεφάλαιο 3, ίσως με κάποιες μικρές αλλαγές ώστε να μπορούν να καταχωρηθούν ακμές που εκτείνονται στο άπειρο (η quad-edge δομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί όπως ακριβώς έχει).

/* κατασκευή διάταξης ευθειών L_1, L_2, \dots, L_n */

Κατασκεύασε την \mathcal{A}_1 , μια δομή που αποθηκεύει τη διάταξη της ευθείας L_1

for ($i = 2, \dots, n$) do

/* εισαγωγή της ευθείας L_i στην \mathcal{A}_{i-1} */

Βρες ένα σημείο τομής x της L_i με κάποια ευθεία στην \mathcal{A}_{i-1}

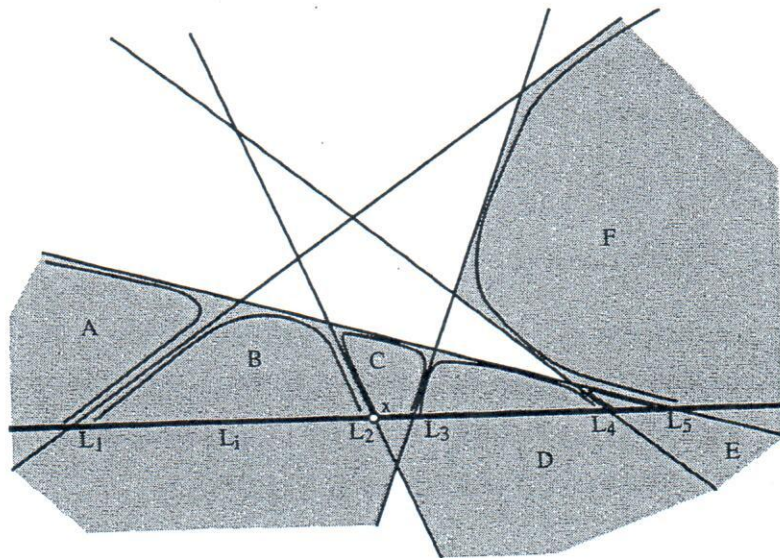
Μετακινήσου από το x προς τα δεξιά κατά μήκος του συνόρου των περιοχών στη ζώνη της L_i

Μετακινήσου από το x προς τα αριστερά κατά μήκος του συνόρου των περιοχών στη ζώνη της L_i

Ενημέρωσε την \mathcal{A}_{i-1} ώστε να δώσει την \mathcal{A}_i

Αλγόριθμος 5.1 Ο αυξητικός αλγόριθμος για την κατασκευή μιας διάταξης ευθειών.

Ο αυξητικός αλγόριθμος για την κατασκευή μιας διάταξης ευθειών είναι εξαιρετικά απλός (Αλγόριθμος 5.1). Σε κάθε βήμα, έχουμε ήδη κατασκευάσει τη διάταξη \mathcal{A}_{i-1} για τις $i - 1$ πρώτες ευθείες. Ο στόχος μας είναι να βρούμε όλα τα σημεία τομής της i -οστής ευθείας L_i με την \mathcal{A}_{i-1} . Ξεκινάμε βρίσκοντας ένα σημείο τομής x της L_i με μια οποιαδήποτε ευθεία της \mathcal{A}_{i-1} : αυτό απαιτεί σταθερό χρόνο. Κατόπιν, με σημείο εκκίνησης το x , αρχίζουμε να κινούμαστε στη ζώνη της L_i ανακαλύπτοντας τα υπόλοιπα σημεία τομής με τη σειρά που εμφανίζονται κατά μήκος της L_i . Πιο συγκεκριμένα, ακολουθούμε ακμές των περιοχών της ζώνης κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού



Σχήμα 5.5 Εισαγωγή μιας ευθείας L_i σε μια διάταξη ευθειών.

μέχρι να συναντήσουμε ακμή η οποία τέμνει την L_i όποτε και σημειώνουμε το επόμενο σημείο τομής. Από εκεί μεταβαίνουμε στην επόμενη περιοχή της ζώνης και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία (Σχήμα 5.5). Η διάσχιση αυτή σταματά όταν συναντήσουμε ακμή της \mathcal{A}_{i-1} που εκτείνεται στο άπειρο στα δεξιά και δεν τέμνει την L_i . Μ' αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε όλα τα σημεία τομής στο τμήμα της L_i δεξιότερα από το x . Με παρόμοιο τρόπο, βρίσκουμε και τα σημεία τομής στα αριστερά του x . Κάθε βήμα στη διάσχιση που περιγράψαμε γίνεται ανάμεσα σε γειτονικές ακμές ή γειτονικές περιοχές και άρα απαιτεί σταθερό χρόνο. Ο συνολικός χρόνος λοιπόν εξαρτάται από το μέγεθος της ζώνης που σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.1 είναι $O(i)$. Είτε μετά τον υπολογισμό των σημείων τομής είτε καλύτερα κατά τη διάρκεια της διάσχισης της ζώνης της L_i , τροποποιούμε τη δομή δεδομένων για την \mathcal{A}_{i-1} ώστε να λάβουμε την αντίστοιχη δομή για την \mathcal{A}_i . Αυτή η τροποποίηση επίσης μπορεί να επιτευχθεί σε $O(i)$ χρόνο. Είναι φανερό λοιπόν ότι ολόκληρη η κατασκευή απαιτεί $O(n^2)$ χρόνο (Chazelle et al (1985), Edelsbrunner et al (1986)):

Λήμμα 5.2.1

Μια διάταξη n ευθειών στο επίπεδο μπορεί να κατασκευαστεί σε $\Theta(n^2)$ χρόνο και χώρο.

Απόδειξη. Ο αλγόριθμος απαιτεί $O(n^2)$ και όπως είδαμε στο Λήμμα 5.1.1 η διάταξη μπορεί να έχει $\Omega(n^2)$ μέγεθος επίσης, δηλαδή, αυτό είναι το βέλτιστο ασυμπτωτικό φράγμα. Η αποθήκευση της διάταξης απαιτεί τετραγωνικό χώρο στη χειρότερη περίπτωση. ■

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο παραπάνω αλγόριθμος επιστρέφει τα σημεία τομής με τη σειρά που συναντώνται κατά μήκος της L_i χωρίς να απαιτείται ταξινόμηση: απλά εκμεταλλευόμαστε την πληροφορία που εμπεριέχεται στη δομή της διάταξης.

5.3 Τρεις και παραπάνω Διαστάσεις

Μια από τις πιο εντυπωσιακές ιδιότητες των διατάξεων ευθειών είναι ότι σχεδόν όλες οι προτάσεις που ισχύουν για διατάξεις ευθειών στο επίπεδο επεκτείνονται σχετικά απλά στις τρεις και παραπάνω διαστάσεις. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά την επέκταση των Λημμάτων 5.1.1, 5.1.2 και 5.2.1 στον χώρο d διαστάσεων.

Λήμμα 5.3.1

- Το συνολικό πλήθος κορυφών, ακμών, εδρών κλπ μιας διάταξης n υπερεπιπέδων στις d διαστάσεις είναι $O(n^d)$.

- Η ζώνη οποιουδήποτε υπερεπιπέδου στις d διαστάσεις έχει συνολική πολυπλοκότητα $O(n^{d-1})$.
- Μια διάταξη n υπερεπιπέδων στις d διαστάσεις μπορεί να κατασκευαστεί σε $O(n^d)$ χρόνο και χώρο.

Ειδικότερα, η διάταξη επιπέδων στις τρεις διαστάσεις έχει πολυπλοκότητα $O(n^3)$ και μπορεί να κατασκευαστεί σε $O(n^3)$ χρόνο.

5.4 Μετασχηματισμός Δυϊκότητας (Duality)

Αν και φαίνεται παράδοξο, οι διατάξεις ευθειών είναι εξαιρετικά χρήσιμες για πολλά προβλήματα που αφορούν σημεία στο επίπεδο. Η εξήγηση βρίσκεται σε μια πολύ σημαντική έννοια, αυτήν της *δυϊκότητας* (*duality*). Η βασική ιδέα είναι ότι αφού μια ευθεία προσδιορίζεται από δύο αριθμούς τότε αυτή μπορεί να συσχετιστεί με το σημείο που έχει αυτούς τους δύο αριθμούς ως συντεταγμένες. Για παράδειγμα, η ευθεία $y = mx + b$ μπορεί να συσχετισθεί με το σημείο (m, b) . Από την άλλη πλευρά, ένα σημείο στο επίπεδο μπορεί να εκληφθεί ότι καθορίζει μία ευθεία όταν οι συντεταγμένες του αντιστοιχούνται στην κλίση και την τεταγμένη του σημείου τομής με τον άξονα των y αντίστοιχα. Αυτές οι δύο απεικονίσεις μαζί καθορίζουν μια δυϊκή σχέση ανάμεσα σε σημεία και ευθείες: κάθε ευθεία αντιστοιχίζεται σε ένα μοναδικό σημείο και κάθε σημείο αντιστοιχίζεται σε μία μοναδική ευθεία.

Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί μετασχηματισμοί δυϊκότητας σημείων-ευθειών ανάλογα με τον τρόπο αναπαράστασης μιας ευθείας. Κάθε μετασχηματισμός έχει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ανάλογα με την εφαρμογή που μας ενδιαφέρει. Ήδη αναφερθήκαμε στον μετασχηματισμό $L : y = mx + b \iff p : (m, b)$. Ο μετασχηματισμός $L : ax + by = 1 \iff p : (a, b)$ ορίζει τη λεγόμενη *πολική δυϊκότητα* (*polar duality*). Αλλά ο μετασχηματισμός που κυρίως θα χρησιμοποιήσουμε σ' αυτό το κεφάλαιο είναι

$$\mathcal{D} : L : y = 2ax - b \iff p : (a, b).$$

Χρησιμοποιούμε το σύμβολο \mathcal{D} για αυτόν τον μετασχηματισμό: $\mathcal{D}(L) = p$ και $\mathcal{D}(p) = L$. Αν και ο μετασχηματισμός αυτός φαίνεται μάλλον ως ασυνήθιστη επιλογή, είναι συχνά ο πιο χρήσιμος στην υπολογιστική γεωμετρία, κυρίως λόγω της στενής του σχέσης με το παραβολοειδές.

Με τον μετασχηματισμό αυτόν, μπορούμε να μετατρέψουμε οποιοδήποτε σύνολο σημείων σε μια διάταξη ευθειών και το αντίστροφο. Ένας λόγος που κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο είναι επειδή οι σχέσεις ανάμεσα σε σημεία αναδεικνύονται πιο ξεκάθαρα στη δυϊκή διάταξη ευθειών. Αποδεικνύουμε παρακάτω κάποιες από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού.

Λήμμα 5.4.1

$\mathcal{D}(\mathcal{D}(x)) = x$, όπου x είναι είτε σημείο είτε ευθεία.

Απόδειξη. Προφανές, καθώς ο μετασχηματισμός είναι συμμετρικός. ■

Λήμμα 5.4.2

Ο μετασχηματισμός \mathcal{D} είναι μια αντιστοίχιση ένα προς ένα ανάμεσα σε όλες τις μη κατακόρυφες ευθείες και όλα τα σημεία στο επίπεδο.

Απόδειξη. Οι κατακόρυφες ευθείες είναι οι μόνες ευθείες που δεν μπορούν να παρασταθούν στη μορφή $y = 2ax - b$. ■

Οι ειδικές περιπτώσεις που περιλαμβάνουν κατακόρυφες ευθείες μπορούν να αντιμετωπιστούν με απειροελάχιστη στροφή όλων των ευθειών ώστε να μην είναι κατακόρυφες.

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα του μετασχηματισμού δυϊκότητας είναι ότι διατηρεί τις σχέσεις γειτονικότητας:

Λήμμα 5.4.3

Το σημείο p ανήκει στην ευθεία L αν και μόνο αν το σημείο $\mathcal{D}(L)$ ανήκει στην ευθεία $\mathcal{D}(p)$.

Απόδειξη. Έστω L η ευθεία $y = 2ax - b$ και $p = (c, d)$. Τότε, το p ανήκει στην L αν και μόνο αν $d = 2ac - b$. Από την άλλη πλευρά, το σημείο $\mathcal{D}(L)$ είναι (a, b) , ενώ η ευθεία $\mathcal{D}(p)$ είναι η $y = 2cx - d$. Το $\mathcal{D}(L)$ ανήκει στην $\mathcal{D}(p)$ αν και μόνο αν $b = 2ca - d$ που είναι μια διαφορετική γραφή της προηγούμενης ισότητας που βρήκαμε. ■

Το γεγονός ότι δύο σημεία ορίζουν μια ευθεία μετασχηματίζεται στο ότι δύο ευθείες ορίζουν ένα σημείο τομής:

Λήμμα 5.4.4

Οι ευθείες L_1 και L_2 τέμνονται στο σημείο p αν και μόνο αν η ευθεία $\mathcal{D}(p)$ περνά από τα σημεία $\mathcal{D}(L_1)$ και $\mathcal{D}(L_2)$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 5.4.3 δύο φορές: το p ανήκει στις L_1 και L_2 αν και μόνο αν τα σημεία $\mathcal{D}(L_1)$ και $\mathcal{D}(L_2)$ ανήκουν στην ευθεία $\mathcal{D}(p)$. ■

Όταν δεν θεωρούμε κατακόρυφες ευθείες τότε οι σχέσεις “επάνω” και “κάτω” ανάμεσα σε σημεία και ευθείες είναι καλά ορισμένες. Ο μετασχηματισμός δυϊκότητας μπορεί να ερμηνευθεί ότι αντιστρέφει την κατακόρυφη σειρά σημείων και ευθειών ως εξής:

Λήμμα 5.4.5

Εάν το σημείο p βρίσκεται ψηλότερα από την ευθεία L , τότε η ευθεία $\mathcal{D}(p)$ βρίσκεται χαμηλότερα από το σημείο $\mathcal{D}(L)$. Συμμετρικά, εάν το σημείο p βρίσκεται κάτω από την ευθεία L , τότε η ευθεία $\mathcal{D}(p)$ βρίσκεται ψηλότερα από το σημείο $\mathcal{D}(L)$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο το πρώτο τμήμα του λήμματος. Έστω ότι η L είναι η ευθεία $y = 2ax - b$ και το p είναι (c, d) . Το p βρίσκεται ψηλότερα από την ευθεία L αν και μόνο αν $d > 2ac - b$. Αντίστοιχα, το σημείο $\mathcal{D}(L)$ είναι (a, b) και η ευθεία $\mathcal{D}(p)$ είναι η $y = 2cx - d$. Τότε η ευθεία $\mathcal{D}(p)$ βρίσκεται χαμηλότερα από το σημείο $\mathcal{D}(L)$ αν και μόνο αν $2ca - d < b$ που και πάλι είναι μια διαφορετική γραφή της ισότητας $d > 2ac - b$ που βρήκαμε προηγουμένως. ■

Μεθοδολογία εφαρμογής του μετασχηματισμού δυϊκότητας. Όταν μας δίδεται ένα σύνολο σημείων S και ζητείται η δυϊκή του εικόνα, είναι σημαντικό να “ερμηνεύσουμε” το S είτε ως ένωση ευθειών είτε ως ένωση σημείων έτσι ώστε να βρούμε τις αντίστοιχες δυϊκές εικόνες. Συγκεκριμένα,

- ▷ εάν το σύνολο S μπορεί να εκφραστεί ως ένωση ευθειών, υπολογίζουμε τις δυϊκές εικόνες αυτών των ευθειών και η δυϊκή εικόνα του S είναι η ένωση των δυϊκών εικόνων (=σημείων) αυτών των ευθειών,
- ▷ αλλιώς, υπολογίζουμε τις δυϊκές εικόνες των σημείων που ανήκουν στο S και η δυϊκή εικόνα του S είναι η ένωση των δυϊκών εικόνων (=ευθειών) αυτών των σημείων.

Με εφαρμογή της παραπάνω μεθοδολογίας μπορούμε να δείξουμε ότι:

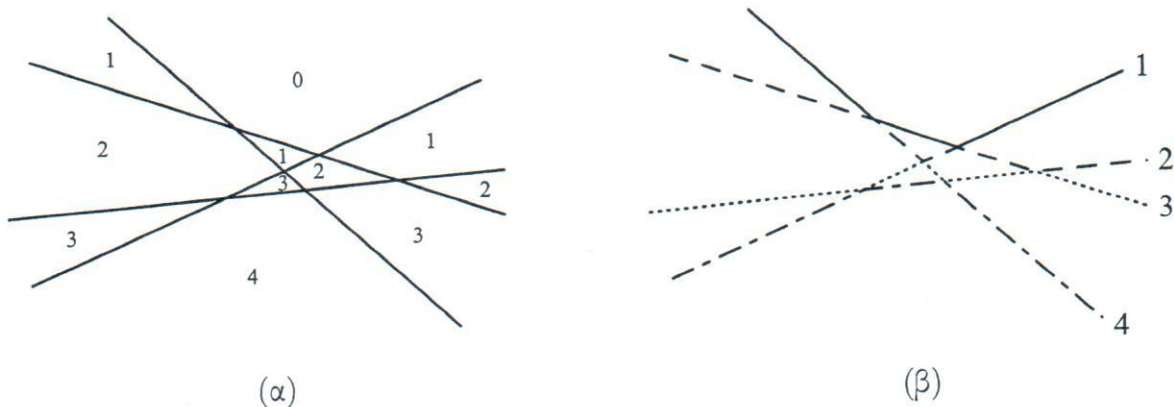
- (α) η δυϊκή εικόνα του τμήματος του επιπέδου μεταξύ των δύο παραλλήλων ευθειών $y = 2x$ και $y = 2x - 2$ είναι το (κατακόρυφο) ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(1, 0)$ και $(1, 2)$ (τα σημεία είναι οι δυϊκές εικόνες των ευθειών $y = 2x$ και $y = 2x - 2$).
- (β) η δυϊκή εικόνα του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $(1, 1)$ και $(2, 3)$ είναι όλα τα σημεία του επιπέδου που ανήκουν στο ζεύγος των κατακορυφών γωνιών

που σαρώνονται από την ευθεία $y = 2x - 1$ (η δυϊκή εικόνα του σημείου $(1, 1)$) κατά την περιστροφή της με φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού γύρω από το σημείο $(1, 1)$ (η δυϊκή εικόνα του φορέα του ευθυγράμμου τμήματος) μέχρι να συμπέσει με την ευθεία $y = 4x - 3$ (η δυϊκή εικόνα του σημείου $(2, 3)$).

5.5 Στάθμες

Ας δούμε πώς ο μετασχηματισμός δυϊκότητας μάς επιτρέπει να επιλύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα: “Δίδεται σύνολο σημείων S στο επίπεδο και ζητείται να γίνει κατάλληλη προεπεξεργασία του ώστε όταν δοθεί ευθεία ℓ στο επίπεδο να μπορούμε να απαντήσουμε αποτελεσματικά πόσα από τα σημεία του S βρίσκονται χαμηλότερα από την ℓ .”

Εαν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό δυϊκότητας, το σύνολο S μετασχηματίζεται σε μια διάταξη ευθειών \mathcal{A}_S , η ευθεία ℓ σε ένα σημείο p_ℓ , ενώ το ζητούμενο πλήθος ισούται με το πλήθος ευθειών στην \mathcal{A}_S που βρίσκονται ψηλότερα από το p_ℓ . Παρατηρούμε όμως ότι κάθε σημείο μιας περιοχής της διάταξης \mathcal{A}_S βρίσκεται χαμηλότερα από το ίδιο ακριβώς πλήθος ευθειών. Δηλαδή, κάθε περιοχή χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό που υποδηλώνει το πλήθος των ευθειών που βρίσκονται ψηλότερα από τα σημεία της περιοχής (Σχήμα 5.6(a)). Αντίστοιχα, οι ακμές της διάταξης \mathcal{A}_S μπορούν να χαρακτηριστούν από το πλήθος των ευθειών που βρίσκονται ψηλότερα από αυτές. Οι ακμές που χαρακτηρίζονται από το ίδιο πλήθος ευθειών σχηματίζουν “πριονωτές” x -μονότονες πολυγωνικές αλυσίδες που λέγονται **στάθμες** (*levels*). Το Σχήμα 5.6(b) σημειώνει τις στάθμες της διάταξης ευθειών του Σχήματος 5.6(a). Με υπολογισμό των σταθμών μιας διάταξης (κατά τη διάρκεια προεπεξεργασίας που απαιτεί $O(n^2)$ χρόνο),



Σχήμα 5.6

και χρήση μεθόδων εντοπισμού σημείου σε μια διαμέριση του επιπέδου σε μονότονες περιοχές (Κεφάλαιο 6) μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα που περιγράψαμε στην αρχή αυτής της παραγράφου σε $O(\log n)$ χρόνο για κάθε ευθεία ℓ που μας ζητείται.

Στη συνέχεια δίνουμε άλλες δύο περιπτώσεις εφαρμογής των σταθμών μιας διάταξης ευθειών γραμμών.

5.5.1 Κοινές Διχοτόμοι Συνόλων Σημείων (Τομές Ham Sandwich)

Η διχοτόμος ενός συνόλου σημείων ορίζεται ως η ευθεία γραμμή που έχει το πολύ τα μισά σημεία σε καθεμία από τις δύο πλευρές της. Για λόγους απλότητας, θα περιοριστούμε σε σύνολα σημείων σε γενική θέση (δηλ., δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία). Επίσης, θεωρούμε σύνολα σημείων με περιττό πληθάριθμο, ώστε η διχοτόμος να περνά από (τουλάχιστον) ένα από αυτά τα σημεία.

Ας θεωρήσουμε πρώτα διχοτόμους ενός συνόλου A που περιέχει n σημεία. Λόγω της υπόθεσης γενικής θέσης, το A δεν έχει αποκλειστικά μόνον κατακόρυφες διχοτόμους, έτσι λοιπόν θα τις αγνοήσουμε. Μετασχηματίζουμε τα σημεία του A χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό \mathcal{D} της Παραγράφου 5.4, σχηματίζοντας μια διάταξη \mathcal{A} από n ευθείες. Θα δείξουμε ότι όλες οι διχοτόμοι του συνόλου A μετασχηματίζονται στη μέση στάθμη (*median level*) $M_{\mathcal{A}}$ της διάταξης \mathcal{A} . Η μέση στάθμη σχηματίζεται από τις ακμές εκείνες της \mathcal{A} (και τις προσκείμενες κορυφές) τα σημεία των οποίων έχουν ακριβώς $(n - 1)/2$ ευθείες κατακόρυφα από πάνω τους (και άλλες τόσες από κάτω). Πράγματι, σύμφωνα με το Λήμμα 5.4.5, ένα σημείο p της \mathcal{A} μετασχηματίζεται σε μια ευθεία $\mathcal{D}(p)$ η οποία βρίσκεται ψηλότερα από τόσα σημεία όσες είναι και οι ευθείες που βρίσκονται ψηλότερα από το p . Οπότε, εάν το p ανήκει στη μέση στάθμη, θα υπάρχουν $(n - 1)/2$ ευθείες ψηλότερα και $(n - 1)/2$ ευθείες χαμηλότερα από αυτό (σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης στάθμης), και συνεπώς η $\mathcal{D}(p)$ έχει $(n - 1)/2$ σημεία του A από πάνω και $(n - 1)/2$ σημεία από κάτω, δηλαδή, διχοτομεί το A .

Λήμμα 5.5.1

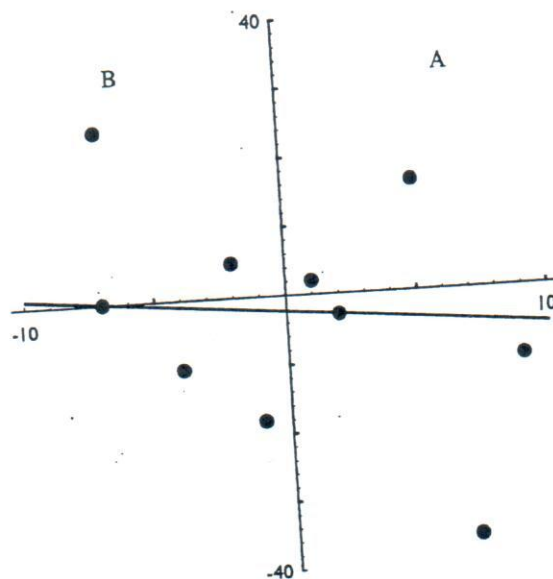
Οι διχοτόμοι ενός συνόλου σημείων μετασχηματίζονται με βάση τον μετασχηματισμό δυϊκότητας στα σημεία της μέσης στάθμης της δυϊκής διάταξης ευθειών.

Με βάση αυτό το λήμμα, μια κοινή διχοτόμος (τομή ham sandwich) δύο συνόλων A και B μετασχηματίζεται σε ένα σημείο που ανήκει και στις δύο μέσες στάθμες $M_{\mathcal{A}}$ και $M_{\mathcal{B}}$ των δυϊκών διατάξεων ευθειών \mathcal{A} και \mathcal{B} . Συνεπώς, οι κοινές διχοτόμοι καθορίζονται από τα σημεία τομής των μέσων σταθμών των δύο συνόλων.

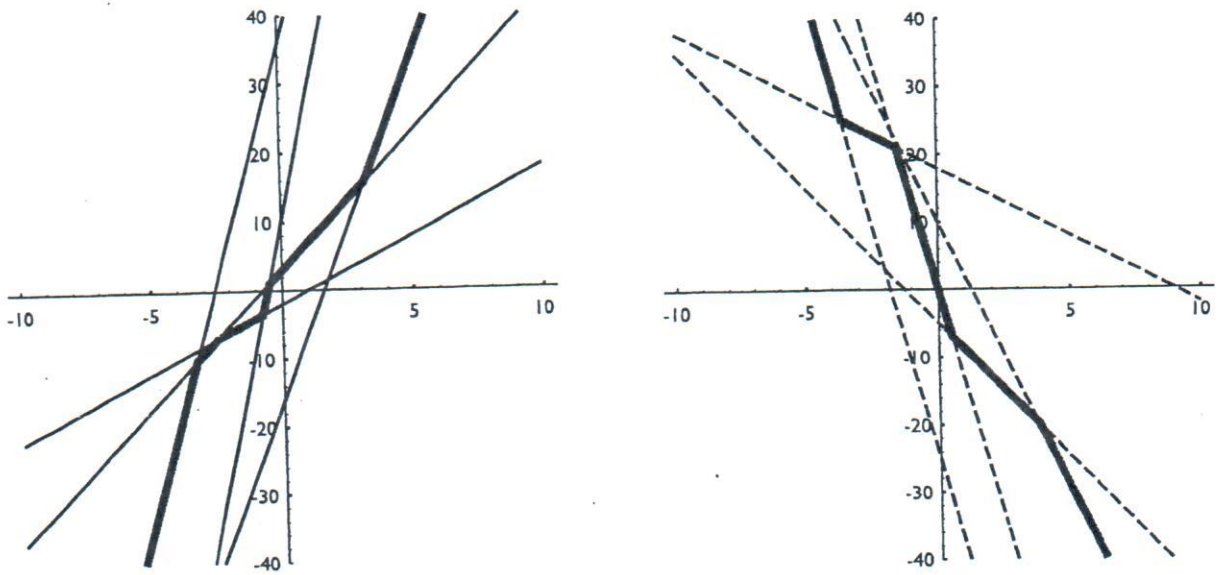
Αυτές οι δύο στάθμες μπορούν να τεμνονται με αρκετά πολύπλοκο τρόπο, αλλά η κατάσταση είναι απλούστερη εάν τα δύο σύνολα είναι διαχωρίσιμα, δηλαδή, βρίσκονται από τη μία και την άλλη πλευρά μιας ευθείας. Έστω A' και B' δύο σύνολα που διαχωρίζονται από μια ευθεία. Τότε, με κατάλληλη μετατόπιση και περιστροφή, τα A' και B' μπορούν να μετασχηματιστούν σε σύνολα A και B που διαχωρίζονται από τον άξονα των y (με το A στα αριστερά και το B στα δεξιά). Δες για παράδειγμα το Σχήμα 5.7. Τώρα εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό δυϊκότητας και στα δυό σύνολα. Οι ευθείες στη διάταξη A έχουν όλες θετικές κλίσεις (Σχήμα 5.8(a)), ενώ οι ευθείες στη διάταξη B έχουν όλες αρνητικές κλίσεις (Σχήμα 5.8(b)).

Επειδή η μέση στάθμη M_A απαρτίζεται από τμήματα με θετικές κλίσεις, είναι γνησίως αύξουσα. Όμοια, η M_B είναι γνησίως φθίνουσα. Τέμνονται συνεπώς σε ένα μοναδικό σημείο: η κοινή διχοτόμος είναι μοναδική. Το Σχήμα 5.9 δείχνει ότι για τα σύνολα του Σχήματος 5.7 το σημείο τομής είναι το $(-\frac{1}{6}, 2\frac{1}{3})$ και πράγματι η ευθεία γραμμή $y = 2(-\frac{1}{6})x - \frac{7}{3}$ είναι η κοινή διχοτόμος των δύο συνόλων. Αποδεικνύεται ότι το σημείο τομής μπορεί να βρεθεί σε $O(|A| + |B|)$ χρόνο χωρίς να απαιτείται η κατασκευή ολόκληρων των διατάξεων A και B . Ο αλγόριθμος που το πετυχαίνει αυτό περιγράφηκε από τον Edelsbrunner (1987) και είναι αρκετά πολύπλοκος.

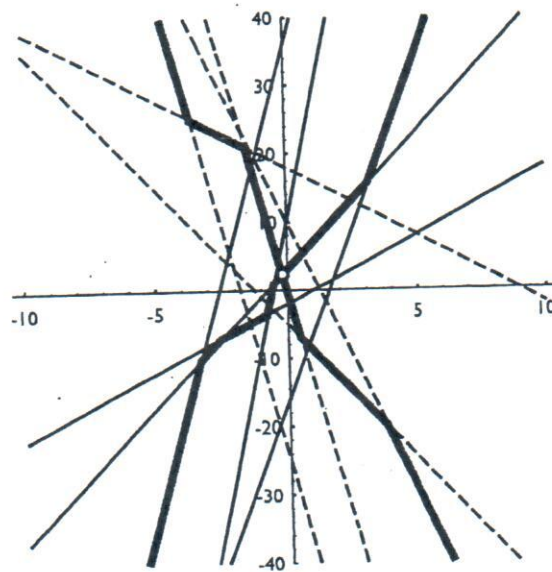
Τέλος, σημειώνουμε ότι η ύπαρξη κοινής διχοτόμου δύο συνόλων σημείων στο επίπεδο γενικεύεται σε οποιαδήποτε διάσταση. Συγκεκριμένα:



Σχήμα 5.7 Δύο διαχωρίσιμα σύνολα σημείων.



Σχήμα 5.8 Οι δυϊκές διατάξεις ευθειών.



Σχήμα 5.9 Το σημείο τομής ορίζει την κοινή διχοτόμο.

Θεώρημα 5.5.1

Για οποιαδήποτε d ξένα μεταξύ τους σύνολα P_1, P_2, \dots, P_d σημείων στις d διαστάσεις, υπάρχει ένα υπερεπίπεδο το οποίο διχοτομεί ταυτόχρονα καθένα από τα σύνολα P_i .

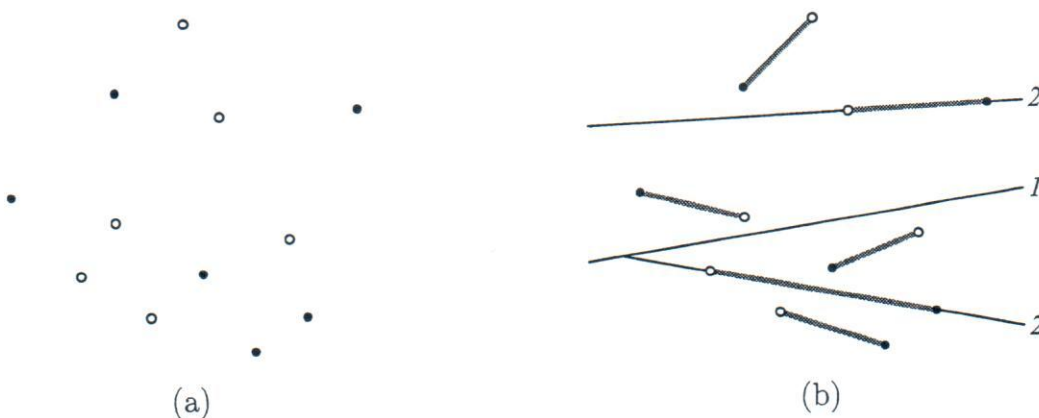
5.5.2 Ταίριασμα Κόκκινων και Μπλε Σημείων

Δοθέντων n κόκκινων και n μπλε σημείων στο επίπεδο, ενδιαφερόμαστε να τα ταιριάξουμε σε n ζεύγη τέτοια ώστε κάθε ζεύγος αποτελείται από ένα κόκκινο και ένα μπλε

σημείο και τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τα ζεύγη δεν τέμνονται. Αυτά τα σημεία θα μπορούσαν να προκύψουν από σημεία ενός αντικειμένου που μετακινήθηκε από μια αρχική (κόκκινη) θέση σε μια άλλη (μπλε) θέση, οπότε το ταίριασμα δίνει τις μετακινήσεις των σημείων του αντικειμένου.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να επιλυθεί με εφαρμογή της μεθόδου “διαίρει και βασίλευε” όπου ο χωρισμός σε δύο υποπροβλήματα γίνεται με βάση κοινές διχοτόμους των συνόλων των κόκκινων και των μπλε σημείων. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τα 6 κόκκινα (λευκοί κύκλοι) και τα 6 μπλε (μαύροι κύκλοι) σημεία του Σχήματος 5.10(a). Πρώτα, βρίσκουμε μια κοινή διχοτόμο των συνόλων των κόκκινων και των μπλε σημείων (ευθεία 1 στο Σχήμα 5.10(b)) η οποία τα χωρίζει σε 2 υποσύνολα με 3 κόκκινα και 3 μπλε σημεία το καθένα. Καθένα από τα δύο αυτά σύνολα διαμερίζεται σε 1 κόκκινο σημείο, 1 μπλε, και 1 κόκκινο και 1 μπλε στην κοινή διχοτόμο (ευθείες με επιγραφή 2): σε περίπτωση που έχουμε περιττό πλήθος κόκκινων και περιττό πλήθος μπλε σημείων, προτιμούμε η κοινή διχοτόμος να περνά από ένα κόκκινο και ένα μπλε σημείο ώστε να υπάρχει συμμετρία. Στο παράδειγμά μας, έχουμε πλέον φθάσει σε σύνολα με 1 σημείο από το κάθε χρώμα: τα δύο αυτά σημεία ορίζουν ένα ζεύγος της λύσης του προβλήματος. Ζεύγος επίσης ορίζουν τα δύο σημεία επάνω σε κάποια κοινή διχοτόμο συνόλων με περιττό πληθάρημο. Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τα ζεύγη της λύσης δεν τέμνονται (Σχήμα 5.10(b)).

Η πολυπλοκότητα χρόνου του αλγορίθμου για n κόκκινα και n μπλε σημεία είναι $O(n \log n)$: γραμμικός χρόνος για την εύρεση των διχοτόμων σε $O(\log n)$ επίπεδα κλήσεων της μεθόδου “διαίρει και βασίλευε”. Πρόκειται για βέλτιστο αλγόριθμο, καθώς ένα $\Omega(n \log n)$ κάτω φράγμα μπορεί να αποδειχθεί με αναγωγή από το πρόβλημα της ταξινόμησης.



Σχήμα 5.10

5.6 Σχέση Διατάξεων και Διαγραμμάτων Voronoi

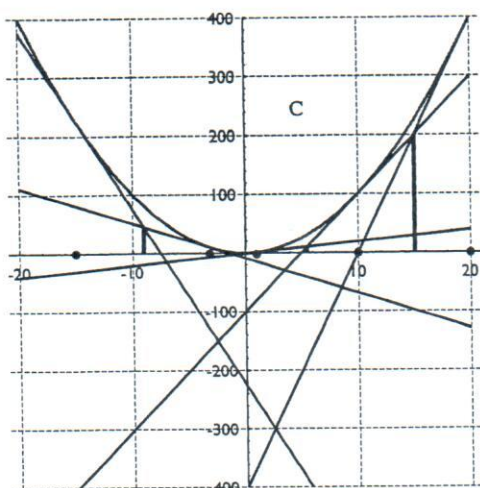
Σε αυτήν την παράγραφο, θα εξετάσουμε τη στενή σχέση ανάμεσα στις διατάξεις και στα διαγράμματα Voronoi για την οποία είχαμε κάνει μια πρώτη αναφορά στην Παράγραφο 4.9. Θα εξετάσουμε με λεπτομέρεια την περίπτωση των μονοδιάστατων διαγραμμάτων Voronoi, από την οποία θα εξάγουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τη διδιάστατη περίπτωση με χρήση γενίκευσης.

5.6.1. Η Μονοδιάστατη Περίπτωση

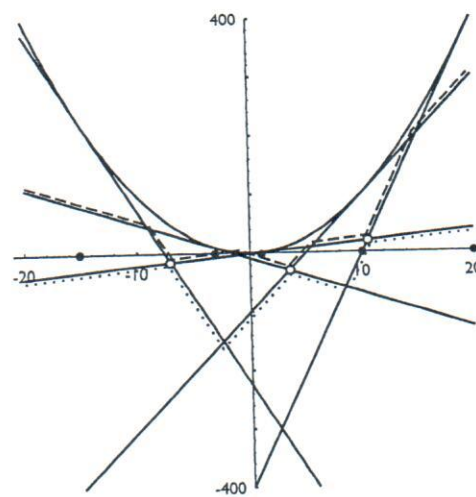
Έστω $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ένα σύνολο κόμβων στον άξονα των x (για ευκολία, ας υποθέσουμε ότι οι κόμβοι x_i είναι ταξινομημένοι, δηλ., $x_i < x_{i+1}$) και ας θεωρήσουμε τις εφαπτόμενες στην παραβολή $z = x^2$ στις προβολές των κόμβων σε αυτήν, δηλ., στα σημεία (x_i, x_i^2) ·δες Παράγραφο 4.9. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι $T_i : z = 2x_i x - x_i^2$ (παρατηρήστε ότι αυτή η ευθεία είναι ακριβώς η δυϊκή εικόνα του σημείου (x_i, x_i^2) με βάση τον μετασχηματισμό D που ορίσαμε στην Παράγραφο 5.4).

Είδαμε στην Παράγραφο 4.9 ότι για κάθε ζευγος διαδοχικών κόμβων x_i και x_{i+1} , το σημείο τομής των αντίστοιχων εφαπτομένων T_i και T_{i+1} έχει x -συντεταγμένη ίση με $\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ · δηλ., οι προβολές των σημείων τομής (στον άξονα των x) σχηματίζουν το μονοδιάστατο διάγραμμα Voronoi του συνόλου P .

Όμως, ας θεωρήσουμε ολόκληρη την διάταξη των n εφαπτομένων T_i στην παραβολή. Το Σχήμα 5.11 παρουσιάζει τη διάταξη για το σύνολο $P = \{-15, -3, 1, 10, 20\}$. Παρατηρήστε ότι η παραβολή περιέχεται εντελώς στην περιοχή C της διάταξης και ότι οι προβολές των κορυφών ακριβώς της C σχηματίζουν το διάγραμμα Voronoi του P : οι κορυφές Voronoi είναι στα σημεία $\{-9, -1, 5\frac{1}{2}, 15\}$ (Σχήμα 5.11). Η παραπάνω παρατήρηση μπορεί να διατυπωθεί και με έναν διαφορετικό τρόπο: για οποιοδήποτε σημείο $x = b$, ας θεωρήσουμε ότι κινούμαστε από το σημείο (b, b^2) της παραβολής για $x = b$ κατακόρυφα προς τα κάτω· εάν η πρώτη εφαπτομένη που θα συναντήσουμε είναι η εφαπτομένη που αντιστοιχεί στον κόμβο x_k , τότε το σημείο $x = b$ ανήκει στην περιοχή Voronoi του κόμβου x_k . Αυτό οφείλεται στο ότι η κάθετη απόσταση d στο σημείο $x = b$ από την παραβολή έως μια εφαπτομένη T_i (με εξίσωση $z = 2x_i x - x_i^2$) που αντιστοιχεί στον κόμβο x_i ισούται με το τετράγωνο της απόστασης του b από τον x_i στον άξονα των x · αυτό αποδεικνύεται πολύ εύκολα: $d = b^2 - (2x_i b - x_i^2) = (b - x_i)^2$. Δηλαδή, εάν καθώς κινούμαστε κατακόρυφα προς τα κάτω, συναντήσουμε πρώτα την εφαπτομένη T_i και κατόπιν την T_j , τότε το b είναι πιο κοντά στον κόμβο x_i από ότι στον x_j .



Σχήμα 5.11



Σχήμα 5.12

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 5.6.1

Η σειρά με την οποία συναντάμε τις εφαπτόμενες T_i καθώς κινούμαστε κατακόρυφα προς τα κάτω για $x = b$ ταυτίζεται με τη σειρά των αντίστοιχων κόμβων x_i με βάση την απόστασή τους από το σημείο $x = b$ από τον πιο κοντινό προς τον πιο μακρινό.

Ας έλθουμε τώρα στα διαγράμματα Voronoi k -τάξης. Το διάγραμμα Voronoi 2ης τάξης ορίζεται ως η διαμέριση του χώρου σε περιοχές που χαρακτηρίζονται από 2 κοντινότερους κόμβους (ανεξάρτητα από το ποιος από τους 2 είναι ο κοντινότερος). Αυτό το διάγραμμα σχετίζεται με τις ακμές της διάταξης των εφαπτομένων T_i οι οποίες έχουν ακριβώς μία εφαπτομένη κατακόρυφα πιο επάνω (τότε τα σημεία αυτών των ακμών θα ανήκουν σε μια εφαπτομένη και θα έχουν μια άλλη εφαπτομένη κατακόρυφα πιο ψηλά)· οι ακμές αυτές σχηματίζουν τη 2η στάθμη της διάταξης των T_i (στο Σχήμα 5.12, η 2η στάθμη σημειώνεται με διακεκομμένη γραμμή). Οι προβολές των κορυφών της 2ης στάθμης διαμερίζουν τον άξονα των x σε περιοχές (διαστήματα) που έχουν τον ίδιο κοντινότερο και τον ίδιο δεύτερο κοντινότερο κόμβο. Καθώς στο διάγραμμα Voronoi 2ης τάξης δεν ενδιαφέρει ποιος από τους 2 κόμβους σε κάθε περιοχή είναι ο κοντινότερος, το διάγραμμα Voronoi 2ης τάξης δεν είναι η προβολή των κορυφών της 2ης στάθμης, αλλά των κοινών σημείων της 2ης και της 3ης στάθμης (στο Σχήμα 5.12, η 3η στάθμη σημειώνεται με στικτή γραμμή, ενώ τα κοινά σημεία της 2ης και της 3ης στάθμης σημειώνονται με λευκούς κύκλους). Έστω a η προβολή μιας κορυφής στην τομή της 2ης και της 3ης στάθμης και έστω ότι οι 3 πρώτες εφαπτόμενες που συναντάμε από επάνω προς τα κάτω κατά μήκος μιας κατακόρυφης γραμμής για $x = a - \epsilon$ (δηλ., ελάχιστα αριστερότερα από το $x = a$) είναι κατά σειρά οι T_j, T_k , και T_ℓ , που αντιστοιχούν στους

κόμβους x_j , x_k , και x_ℓ . Η ακμή επί της T_k ανήκει στη 2η στάθμη της διάταξης των T_i ενώ η ακμή επί της T_ℓ ανήκει στην 3η. Τότε, για $x = a + \epsilon$ (δηλ., ελάχιστα δεξιότερα από το $x = a$), η σειρά των 3 πρώτων εφαπτομένων είναι T_j , T_ℓ , και T_k . Συνεπώς, για $x = a$, σημειώνεται αλλαγή στους 2 κοντινότερους κόμβους από $\{x_j, x_k\}$ σε $\{x_j, x_\ell\}$. Αυτό δείχνει ότι οι κοινές κορυφές της 2ης και της 3ης στάθμης προβάλλονται στα άκρα των περιοχών (διαστημάτων) του διαγράμματος Voronoi 2ης τάξης. Παρατηρήστε ότι στις υπόλοιπες κορυφές της 2ης στάθμης (δηλ., αυτές που δεν ανήκουν στην 3η στάθμη) σημειώνεται εναλλαγή μεταξύ του κοντινότερου και του δεύτερου κοντινότερου κόμβου, χωρίς να αλλάζει το σύνολο των 2 κοντινότερων κόμβων.

Οι παρατηρήσεις αυτές επεκτείνονται για διαγράμματα Voronoi οποιασδήποτε τάξης:

Θεώρημα 5.6.1 (Edelsbrunner, 1987)

Τα κοινά σημεία της k -οστής και της $(k + 1)$ -οστής στάθμης στη διάταξη των εφαπτομένων T_i στην παραβολή προβάλλονται στο διάγραμμα Voronoi k -τάξης.

Το θεώρημα ισχύει και για $k = 1$: τα κοινά σημεία της 1ης και της 2ης στάθμης (τα οποία είναι ακριβώς οι κορυφές της 1ης στάθμης) προβάλλονται στο συνηθισμένο διάγραμμα Voronoi (το διάγραμμα Voronoi 1ης τάξης).

5.6.2. Η Διδιάστατη Περίπτωση

Όπως θα πρέπει να αναμένεται, όλα όσα ισχύουν στη μονοδιάστατη περίπτωση γενικεύονται στις 2 διαστάσεις. Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο κόμβων στο επίπεδο· κατασκευάζουμε τη διάταξη των επιπέδων που εφάπτονται στο παραβολοειδές στις προβολές των κόμβων σε αυτό (Παράγραφος 4.9). Η k -οστή στάθμη της διάταξης είναι ένα “σεντόνι” από έδρες που εκτείνεται στο άπειρο προς όλες τις κατευθύνσεις. Το διάγραμμα Voronoi είναι η προβολή της 1ης στάθμης (η οποία περικλείει εντελώς το παραβολοειδές) στο επίπεδο. Γενικά, το διάγραμμα Voronoi k -τάξης είναι η προβολή των κοινών σημείων της k -οστής και της $(k + 1)$ -οστής στάθμης, που αποτελείται από ακμές και κορυφές. Συνεπώς, η διάταξη των εφαπτόμενων επιπέδων καταχωρεί όλα τα διαγράμματα Voronoi k -τάξης, για κάθε k . Αυτό συνεπάγεται ότι το συνολικό μέγεθος όλων αυτών των διαγραμμάτων είναι $O(n^3)$ δεδομένου ότι το μέγεθος της διάταξης n επιπέδων στον τριδιάστατο χώρο είναι $O(n^3)$ σύμφωνα με το Λήμμα 5.3.1, και ότι κάθε έδρα της διάταξης ανήκει σε ακριβώς μία στάθμη. Επιπλέον, τα διαγράμματα Voronoi k -τάξης, για κάθε $k = 1, 2, \dots, n - 1$, μπορούν να κατασκευαστούν σε $O(n^3)$ χρόνο μέσω της διάταξης των εφαπτόμενων επιπέδων.