

4. Διάγραμμα Voronoi

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε το διάγραμμα Voronoi, μια γεωμετρική δομή εξίσου σημαντική όσο και το κυρτό περίβλημα. Πολύ γενικά, ένα διάγραμμα Voronoi αποθηκεύει σχεδόν οτιδήποτε θα θέλαμε να μάθουμε αναφορικά με σχέσεις εγγύτητας μεταξύ των στοιχείων ενός δοθέντος συνόλου σημείων (ή αντικειμένων πιο γενικά): ποιο σημείο είναι πιο κοντά σε ποιο, ποιο είναι μακρύτερα, κλπ. Η έννοια του διαγράμματος Voronoi πρωτοεμφανίστηκε εδώ και περισσότερα από εκατό χρόνια: μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Dirichlet (1850) και αργότερα από τον Voronoi (1908).

4.1 Γενικά - Εφαρμογές

Το διάγραμμα Voronoi βρίσκει πλήθος εφαρμογών σε αρκετούς διαφορετικούς τομείς. Ενδεικτικά, αναφέρουμε:

1. Εντοπισμός κοντινότερου σημείου

Έστω ότι μια εταιρεία διαθέτει αποθήκες σε διάφορες πόλεις ώστε να εξυπηρετεί τη ζήτηση των προϊόντων της σε όλη την επικράτεια. Κάθε φορά που υπάρχει ζήτηση ενός προϊόντος σε κάποιο σημείο, για λόγους μείωσης του κόστους μεταφοράς, ειδοποιείται η αποθήκη που είναι πιο κοντά σ' αυτό το σημείο για να προμηθεύσει το προϊόν. Η περιοχή "δικαιοδοσίας" κάθε αποθήκης, δηλ., όλα τα σημεία που είναι πιο κοντά σ' αυτήν την αποθήκη, είναι ακριβώς η περιοχή Voronoi της αποθήκης.

2. Έλεγχος ταιριάσματος

Μια τεχνική που χρησιμοποιείται συχνά στον τομέα της αναγνώρισης προτύπων βασίζεται στην απεικόνιση ενός αντικειμένου ως ένα σημείο με συντεταγμένες τις τιμές κάποιων χαρακτηριστικών του. Για παράδειγμα, ένα παξιμάδι, έστω τύπου A, που έχει εσωτερική και εξωτερική διάμετρο 2 και 3cm αντίστοιχα, παρίσταται σαν το σημείο (2,3), ενώ ένα άλλο τύπου B με εσωτερική και εξωτερική διάμετρο 3 και 4cm παρίσταται σαν το (3,4). Τότε, εάν μας δοθεί ένα παξιμάδι για το οποίο έχουμε προσεγγιστικές τιμές για την εσωτερική και εξωτερική διάμετρό του, μπορούμε να βρούμε τι τύπου είναι απεικονίζοντάς το στο αντίστοιχο διδιάστατο σημείο και

βρίσκοντας μεταξύ των εικόνων των διαθέσιμων τύπων παξιμαδιών, την εικόνα που είναι πιο κοντά στο σημείο αυτό.

3. Εγκατάσταση νέου υποκαταστήματος

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εγκαταστήσουμε ένα νέο super market σε μια περιοχή όπου υπάρχουν ήδη αρκετά super markets. Θεωρώντας ομοιόμορφη πληθυσμιακή κατανομή στην περιοχή, αναμένουμε ότι το νέο κατάστημα θα μεγιστοποιήσει τις πωλήσεις του εάν εγκατασταθεί όσο πιο μακριά γίνεται από τα υπάρχοντα super markets, δηλαδή, στο κέντρο του μεγαλύτερου κύκλου που δεν περιέχει κανένα από τα υπάρχοντα super markets στο εσωτερικό του. Θα δούμε ότι αυτό το σημείο είναι μια κορυφή του διαγράμματος Voronoi.

4. Προγραμματισμός διαδρομής ρομπότ

Κατά τον προγραμματισμό της διαδρομής ενός ρομπότ φροντίζουμε ώστε αυτό να μην συγκρουστεί με κανένα από τα εμπόδια στον περιβάλλοντα χώρο. Η πιο ασφαλής στρατηγική είναι το ρομπότ να κινείται όσο το δυνατόν μακρύτερα από τα εμπόδια. Μια τέτοια διαδρομή ακολουθεί ακμές του διαγράμματος Voronoi.

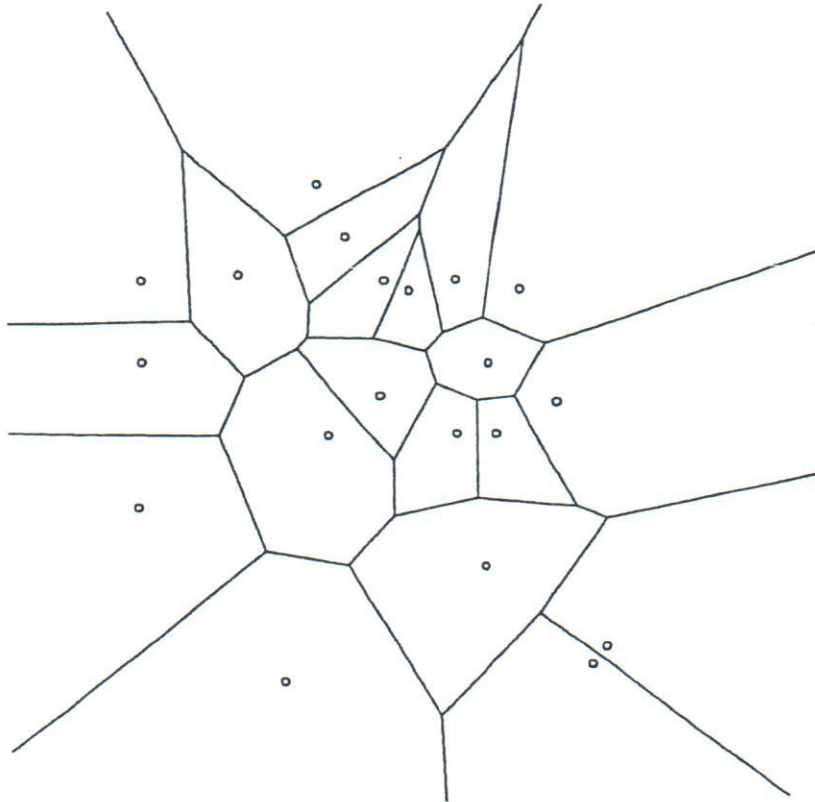
5. Κρυσταλλογραφία

Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο από σημειακούς κρυστάλλους που αρχίζουν να μεγαλώνουν με τον ίδιο, σταθερό ρυθμό. Η κρυστάλλωση εξαπλώνεται σε κύκλους γύρω από καθένα από τους αρχικούς σημειακούς κρυστάλλους. Οι κύκλοι που αντιστοιχούν σε γειτονικούς κρυστάλλους συγκρούονται σε σημεία που ισαπέχουν από δύο ή παραπάνω από τους αρχικούς κρυστάλλους, δηλαδή, κατά μήκος ακμών του διαγράμματος Voronoi των αρχικών σημειακών κρυστάλλων. Έτσι, η τελική μορφή του κρυστάλλου συμπίπτει με το διάγραμμα Voronoi, όπου κάθε αρχικός κρύσταλλος έχει εξαπλωθεί στην αντίστοιχη περιοχή Voronoi.

4.2 Διάγραμμα Voronoi

Έστω $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ένα σύνολο από σημεία στο επίπεδο. Αυτά τα σημεία λέγονται *κόμβοι* (*sites*). Σε κάθε έναν από τους κόμβους αναθέτουμε όλα τα σημεία του επιπέδου που είναι πιο κοντά σ' αυτόν παρά σε οποιονδήποτε άλλο κόμβο (με βάση την Ευκλείδεια απόσταση). Όλα αυτά τα σημεία σχηματίζουν την *περιοχή Voronoi* (*Voronoi region*) του κόμβου. Ο μαθηματικός ορισμός της περιοχής Voronoi $V(p_i)$ του κόμβου p_i είναι:

$$V(p_i) = \{x \mid \forall j \neq i, d(x, p_i) \leq d(x, p_j)\}$$



Σχήμα 4.1 Διάγραμμα Voronoi για $n = 20$ κόμβους.

όπου με $d(a, b)$ συμβολίζουμε την (Ευκλείδεια) απόσταση των σημείων a και b . Σημειώνεται ότι κάθε περιοχή Voronoi είναι ένα κλειστό σύνολο, δηλ., έχει σύνορο· το σύνορό της αποτελείται από σημεία τα οποία δεν έχουν έναν κοντινότερο κόμβο (ή κοντινότερο γείτονα (*nearest neighbor*)) αλλά ισαπέχουν από δύο ή περισσότερους κοντινότερους κόμβους. Τα σημεία αυτά για όλες τις περιοχές Voronoi σχηματίζουν το διάγραμμα Voronoi του συνόλου των κόμβων.

Το διάγραμμα Voronoi για δύο κόμβους συμπίπτει με την μεσοκάθετο ℓ του ευθυγράμμου τμήματος που τα συνδέει. Η ℓ είναι μια **ακμή Voronoi**, ενώ οι περιοχές Voronoi για τους δύο κόμβους είναι τα (κλειστά) ημιεπίπεδα που ορίζει η ℓ . Για τρεις κόμβους, το διάγραμμα Voronoi αποτελείται από τρεις ημιευθείες (μεσοκάθετοι των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων) που ξεκινούν από το ίδιο σημείο, το κέντρο του κύκλου που περνά από τα τρία σημεία. Το σημείο αυτό είναι μια **κορυφή Voronoi**. Το διάγραμμα Voronoi ενός συνόλου 20 κόμβων φαίνεται στο Σχήμα 4.1.

4.3 Delaunay Διαίρεση σε Τρίγωνα

Έστω ότι μας δίνεται ένα σύνολο κόμβων P και έστω $V(P)$ το αντίστοιχο διάγραμμα Voronoi. Υποθέτουμε ότι καμία τετράδα σημείων δεν ορίζει ομοκυκλικά σημεία, οπότε κάθε κορυφή Voronoi έχει βαθμό ακριβώς 3. Κατασκευάζουμε το δυϊκό γράφημα G του $V(P)$: οι κορυφές του G αντιστοιχούν στις περιοχές του $V(P)$ (δηλ., στους κόμβους του P), και δύο κορυφές του G συνδέονται με ακμή εάν οι αντίστοιχες περιοχές Voronoi έχουν κάποια κοινή ακμή. Παρατηρούμε ότι το G είναι ένα επίπεδο γράφημα: μπορούμε να τοποθετήσουμε κάθε κορυφή του G επάνω στον αντίστοιχο κόμβο p_i του P , οπότε οι προσκείμενες ακμές παρουσιάζουν την ίδια γωνιακή ταξινόμηση όπως οι ακμές της περιοχής Voronoi $V(p_i)$. Επιπλέον όλες οι περιοχές του G είναι τρίγωνα καθώς αντιστοιχούν στις κορυφές Voronoi οι οποίες έχουν βαθμό τρία.

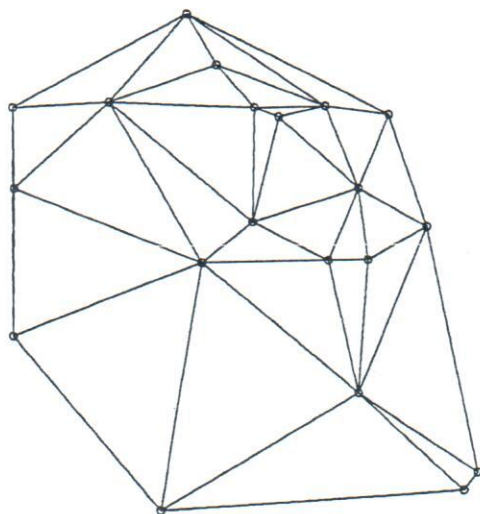
Το 1934, ο Delaunay απέδειξε ότι όταν το γράφημα G σχεδιαστεί με ευθείες ακμές παράγει μια διαίρεση του κυρτού περιβλήματος του συνόλου P σε τρίγωνα που είναι γνωστή ως **Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα** (*Delaunay triangulation*). Το Σχήμα 4.2 απεικονίζει την Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα που αντιστοιχεί στο διάγραμμα Voronoi του Σχήματος 4.1, ενώ το Σχήμα 4.3 την επικάλυψή τους. Αξίζει να σημειωθεί ότι η Delaunay ακμή που συνδέει δύο κόμβους δεν τέμνει απαραίτητα την αντίστοιχη ακμή Voronoi, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3.

Επειδή το διάγραμμα Voronoi και η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα είναι δυϊκές δομές, περιέχουν την ίδια πληροφορία αλλά την αναπαριστούν με διαφορετική μορφή.

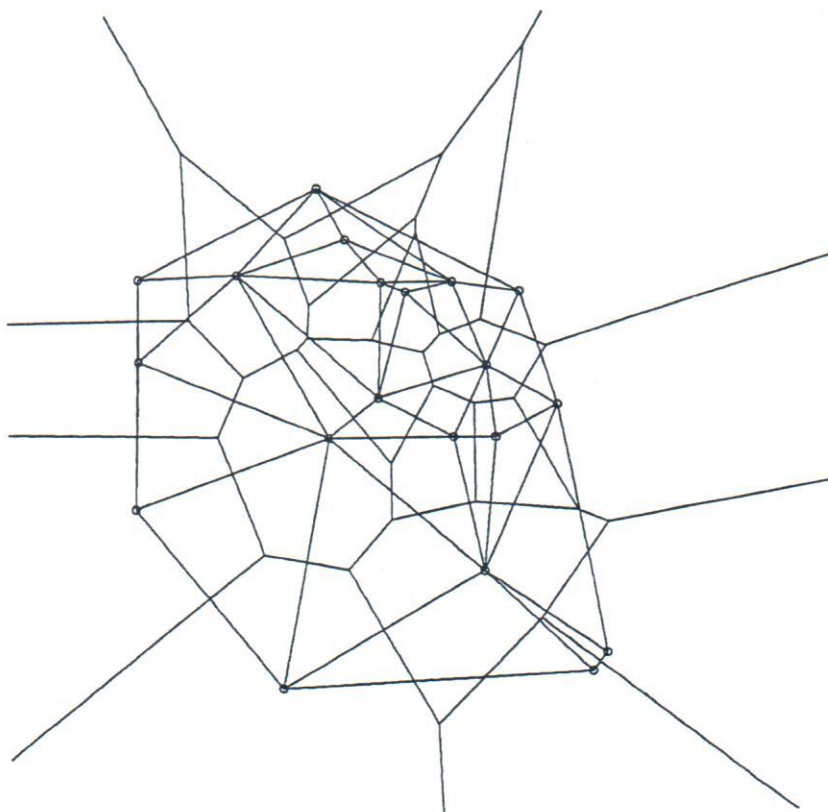
4.4 Ιδιότητες

Το διάγραμμα Voronoi χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

- V1. Το μέγεθος του διαγράμματος Voronoi $V(P)$ (δηλ., το συνολικό πλήθος κορυφών, ακμών και περιοχών) είναι $O(|P|)$.
- V2. Κάθε περιοχή Voronoi $V(p_i)$ είναι κυρτή.
- V3. Η περιοχή $V(p_i)$ είναι ανοικτή εάν και μόνο εάν ο κόμβος p_i ανήκει στο σύνορο του κυρτού περιβλήματος του συνόλου P των κόμβων.
- V4. Εάν v είναι μια κορυφή Voronoi στο σημείο που συναντώνται οι περιοχές $V(p_i)$, $V(p_j)$ και $V(p_k)$ τότε η v είναι το κέντρο του κύκλου $C(v)$ που περνά από τους κόμβους p_i , p_j και p_k .
- V5. Ο κύκλος $C(v)$ δεν περιέχει κόμβους στο εσωτερικό του.



Σχήμα 4.2 Η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα για τους κόμβους του Σχήματος 4.1.



Σχήμα 4.3 Διάγραμμα Voronoi και Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα.

Η ιδιότητα V4 είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι η κοινή ακμή δύο περιοχών Voronoi $V(p)$ και $V(p')$ βρίσκεται επάνω στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος pp' , ενώ η ιδιότητα V5 προκύπτει από το γεγονός ότι η κορυφή v έχει κοντινότερους κόμβους τους p_i , p_j , και p_k .

Με τη σειρά της, η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

- D1. Η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα $D(P)$ είναι το δυϊκό γράφημα (με ευθείες ακμές) του διαγράμματος Voronoi. (Εξ ορισμού.)
- D2. Η $D(P)$ είναι διαίρεση σε τρίγωνα εάν δεν υπάρχουν τέσσερις ή περισσότεροι ομοκυκλικοί κόμβοι.
- D3. Το μέγεθος της $D(P)$ (δηλ., το συνολικό πλήθος κορυφών, ακμών και περιοχών) είναι $O(|P|)$.
- D4. Οι ακραίες ακμές της $D(P)$ σχηματίζουν το κυρτό περίβλημα του P .
- D5. Το εσωτερικό κάθε (τριγωνικής) περιοχής της $D(P)$ δεν περιέχει κόμβους. (Σύγκρινε με V5.)
- D6. Εάν υπάρχει κύκλος που περνά από τους κόμβους p_i και p_j και δεν περιέχει κόμβους στο εσωτερικό του, τότε το ευθύγραμμο τμήμα $p_i p_j$ είναι ακμή της $D(P)$. Επίσης, ισχύει και το αντίστροφο: Για κάθε ακμή Delaunay υπάρχει κύκλος που περνά από τις κορυφές που πρόσκεινται στην ακμή και δεν περιέχει κόμβους στο εσωτερικό του.
- D7. Εάν p_j είναι ο κοντινότερος κόμβος στον p_i , τότε το ευθύγραμμο τμήμα $p_i p_j$ είναι ακμή της $D(P)$.
- D8. Μεταξύ των διαιρέσεων σε τρίγωνα που μπορούμε να ορίσουμε με κορυφές ένα δοσμένο σύνολο σημείων, η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα είναι αυτή που μεγιστοποιεί την μικρότερη από τις γωνίες όλων των τριγώνων.

Η ιδιότητα D6 προκύπτει από το γεγονός ότι το κέντρο ενός κενού κύκλου που περνά από τους κόμβους p_i και p_j έχει ως κοντινότερους κόμβους τους p_i και p_j , δηλ., οι περιοχές Voronoi $V(p_i)$ και $V(p_j)$ είναι γειτονικές ή ισοδύναμα το $p_i p_j$ είναι ακμή της $D(P)$. Η ιδιότητα D7 είναι άμεση συνέπεια της ιδιότητας D6 δεδομένου ότι ο κύκλος με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $p_i p_j$ περιέχεται εξ ολοκλήρου στον κύκλο με κέντρο p_i και ακτίνα ίση με την απόσταση των p_i και p_j . Τέλος, εξ αιτίας της ιδιότητας D8, η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στην

κατασκευή πλεγμάτων, καθώς σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι επιθυμητά τρίγωνα τα οποία είναι μακριά και λεπτά (τέτοια τρίγωνα έχουν μικρές γωνίες).

Θα αποδείξουμε την ιδιότητα D3, η οποία συνεπάγεται την ισχύ της ιδιότητας V1 λόγω δυϊκότητας των $V(P)$ και $D(P)$. Σημειώνεται ότι καθώς το διάγραμμα Voronoi αποτελείται από $|P|$ περιοχές καθεμία από τις οποίες μπορεί να έχει $\Omega(|P|)$ ακμές, θα μπορούσε το μέγεθος του $V(P)$ να είναι τετραγωνικό στο πλήθος των κόμβων του P . Ωστόσο, όπως δείχνουμε αμέσως παρακάτω, το μέγεθος της $D(P)$ και συνεπώς και του $V(P)$ είναι $O(|P|)$. Η απόδειξη βασίζεται στον τύπο του Euler ο οποίος συνεπάγεται ότι κάθε επίπεδο γράφημα με n κορυφές έχει το πολύ $3n - 6$ ακμές και $2n - 4$ περιοχές, δηλ., το συνολικό πλήθος κορυφών, ακμών και περιοχών της $D(P)$ είναι $O(|P|)$. Το άνω φράγμα $3|P| - 6$ στο πλήθος των ακμών συνεπάγεται ότι κατά μέσο όρο κάθε κορυφή στη Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα πρόσκειται σε το πολύ έξι ακμές.

4.4 Αλγόριθμοι

Οι πολλές εφαρμογές του διαγράμματος Voronoi οδήγησαν σε μια ποικιλία από αλγόριθμους για τον υπολογισμό του. Θα εξετάσουμε στη συνέχεια τέσσερις αλγόριθμους, οι δύο από τους οποίους επιτυγχάνουν τον υπολογισμό του διαγράμματος Voronoi σε $O(n \log n)$ χρόνο. Δεδομένου ότι το διάγραμμα Voronoi έχει γραμμικό μέγεθος, είναι εύλογο να αναρωτιέται κανείς εάν μπορούμε να επιτύχουμε κάτι καλύτερο; Αποδεικνύεται ότι αυτό δεν είναι δυνατόν. Λόγω της ιδιότητας D4, μπορούμε από την Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα ενός συνόλου σημείων να υπολογίσουμε το κυρτό περίβλημα τους σε γραμμικό χρόνο. Δηλαδή, ένας αλγόριθμος που θα μπορούσε να υπολογίσει το διάγραμμα Voronoi (και συνεπώς και τη Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα) σε $o(n \log n)$ χρόνο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του κυρτού περιβλήματος σε $o(n \log n)$ χρόνο. Άτοπο.

4.4.1. Τομή Ημιεπιπέδων

Η περιοχή Voronoi $V(p_i)$ ενός κόμβου p_i μπορεί να κατασκευαστεί ξεχωριστά ως η τομή $n - 1$ ημιεπιπέδων: για κάθε κόμβο $p_j \neq p_i$, θεωρούμε το ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος $p_i p_j$ και περιέχει το p_i : η τομή αυτών των ημιεπιπέδων ταυτίζεται με το σύνολο των σημείων του επιπέδου που είναι πιο κοντά στον p_i παρά σε οποιονδήποτε άλλο κόμβο και άρα συμπίπτει με την

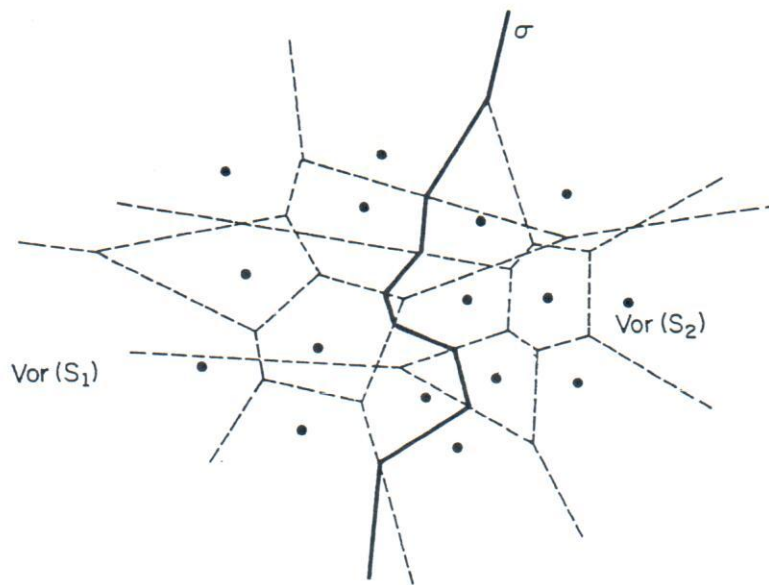
περιοχή Voronoi $V(p_i)$. Η τομή μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n \log n)$ χρόνο με έναν αλγόριθμο βασισμένο στην τεχνική διαίρει και βασίλευε. Η κατασκευή ολόκληρου του διαγράμματος Voronoi απαιτεί την κατασκευή n περιοχών και άρα $O(n^2 \log n)$ χρόνο.

4.4.2. Αυξητικός (Incremental) Αλγόριθμος

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κατασκευάσει το διάγραμμα Voronoi k κόμβων και θέλουμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα που προκύπτει μετά την προσθήκη ενός ακόμη κόμβου p . Η βασική ιδέα είναι η εξής: Βρίσκουμε την περιοχή Voronoi, έστω $V(p_i)$, του υπάρχοντος διαγράμματος στην οποία βρίσκεται ο p . Τότε το νέο διάγραμμα Voronoi περιλαμβάνει το τμήμα της μεσοκαθέτου των p και p_i που περιέχεται μέσα στην $V(p_i)$: θα είναι η κοινή ακμή των περιοχών $V'(p)$ και $V'(p_i)$ στο νέο διάγραμμα. Τα άκρα του τμήματος αυτού βρίσκονται στο σύνορο της $V(p_i)$. Έστω v το ένα από αυτά τα άκρα, το οποίο για παράδειγμα ανήκει στην κοινή ακμή των περιοχών $V(p_i)$ και $V(p_j)$. Το v ισαπέχει λοιπόν από τα p , p_i και p_j και άρα είναι κορυφή του νέου διαγράμματος Voronoi. Επίσης, το τμήμα της μεσοκαθέτου των p και p_j που περιέχεται μέσα στην $V(p_j)$ ανήκει στο νέο διάγραμμα. Με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε την επόμενη κορυφή Voronoi του νέου διαγράμματος, από εκεί άλλη μια ακμή κ.ο.κ. σχηματίζοντας τελικά ολόκληρη την περιοχή Voronoi του κόμβου p . Ο αλγόριθμος δαπανά $O(n)$ χρόνο για την εισαγωγή κάθε νέου κόμβου, και έχει συνεπώς $O(n^2)$ συνολική πολυπλοκότητα χρόνου. Παρά την τετραγωνική του πολυπλοκότητα, ο αλγόριθμος αυτός είναι η δημοφιλέστερη μέθοδος υπολογισμού του διαγράμματος Voronoi.

4.4.3. Αλγόριθμος Διαίρει και Βασίλευε

Το διάγραμμα Voronoi μπορεί να κατασκευαστεί με έναν σχετικά πολύπλοκο αλγόριθμο διαίρει και βασίλευε που περιγράφηκε από τους Shamos και Hoey (1975) και έχει $O(n \log n)$ πολυπλοκότητα χρόνου. Το σύνολο των κόμβων διαμερίζεται σε δύο υποσύνολα S_1 και S_2 , όπου το S_1 περιέχει τους $n/2$ αριστερότερους κόμβους και το S_2 τους υπόλοιπους, και τα αντίστοιχα διαγράμματα Voronoi $V(S_1)$ και $V(S_2)$ κατασκευάζονται αναδρομικά. Η δυσκολία εντοπίζεται στη συγχώνευση των επιμέρους λύσεων που απαιτεί συρραφή των δύο διαγραμμάτων Voronoi $V(S_1)$ και $V(S_2)$. Η συρραφή γίνεται κατά μήκος μιας συνεχούς y -μονότονης πολυγωνικής γραμμής η οποία αποτελείται από τμήματα μεσοκαθέτων ζευγών κόμβων με έναν κόμβο από το σύνολο S_1 και έναν κόμβο από το S_2 (Σχήμα 4.4). Η εύρεση αυτής της διαχωριστικής γραμμής και η συνέ-



Σχήμα 4.4 Συγχώνευση διαγραμμάτων Voronoi.

νωση των κομματιών των επιμέρους διαγραμμάτων Voronoi σε ένα διάγραμμα μπορεί να εκτελεστεί σε $O(n)$ χρόνο, ώστε ο συνολικός αλγόριθμος να έχει την επιθυμητή $O(n \log n)$ πολυπλοκότητα χρόνου.

4.4.4. Ο Αλγόριθμος του Fortune

Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του '80, οι περισσότερες εφαρμογές του διαγράμματος Voronoi χρησιμοποιούσαν τον $O(n^2)$ αυξητικό αλγόριθμο: η χειρότερη επίδοση θεωρούνταν ανεκτή έναντι της δυσκολίας κωδικοποίησης του πολύπλοκου αλγορίθμου διαίρει και βασίλευε. Το 1985, ο Fortune περιέγραψε έναν έξυπνο αλγόριθμο σάρωσης που είναι εύκολος να κωδικοποιηθεί και έχει $O(n \log n)$ πολυπλοκότητα χρόνου στη χειρότερη περίπτωση.

Η γενική στρατηγική σε αλγόριθμους σάρωσης είναι η σάρωση του επιπέδου με μια ευθεία γραμμή που κινείται παράλληλα στον εαυτό της, π.χ., μια οριζόντια γραμμή που κινείται από επάνω προς τα κάτω. Κατά τη διάρκεια της σάρωσης, αποθηκεύουμε πληροφορία σχετικά με τη δομή που υπολογίζουμε, και μάλιστα συνήθως πληροφορία σχετική με την τομή της γραμμής σάρωσης με τη δομή. Κατά τη μετακίνηση της γραμμής σάρωσης, η πληροφορία δεν αλλάζει εκτός όταν η γραμμή βρεθεί σε ορισμένες ειδικές θέσεις, τα "γεγονότα επεξεργασίας" (*event points*).

Ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε αυτή τη γενική στρατηγική στο πρόβλημα του υπολογισμού του διαγράμματος Voronoi ενός συνόλου κόμβων $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

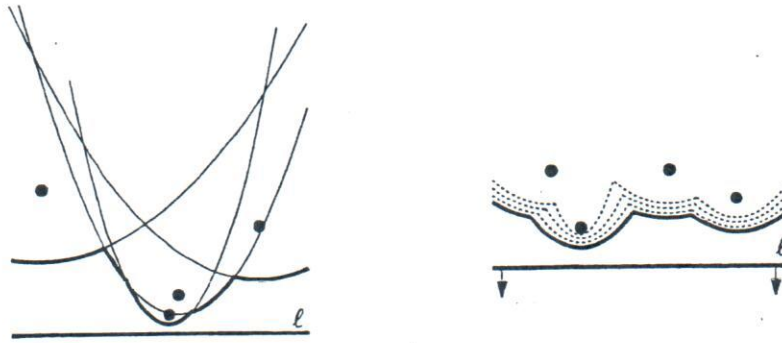
στο επίπεδο, θεωρώντας μια οριζόντια γραμμή σάρωσης ℓ η οποία μετακινείται από επάνω προς τα κάτω. Τι πληροφορία σχετική με τη γραμμή σάρωσης και το διάγραμμα Voronoi χρειάζεται να διατηρούμε; Προφανώς, δεν μπορούμε να διατηρούμε την τομή του διαγράμματος Voronoi με τη γραμμή σάρωσης, καθώς το τμήμα του διαγράμματος Voronoi που βρίσκεται ψηλότερα από την ℓ εξαρτάται τόσο από τους κόμβους που βρίσκονται ψηλότερα από την ℓ όσο και από κόμβους που βρίσκονται χαμηλότερα από αυτήν: ενδεικτικά, παρατηρήστε ότι το διάγραμμα Voronoi έχει ακμές ακόμη και στο τμήμα του επιπέδου ψηλότερα από τον ψηλότερο κόμβο. Είμαστε αναγκασμένοι λοιπόν να εφαρμόσουμε τη μέθοδο σάρωσης λίγο διαφορετικά: οποιαδήποτε στιγμή, θα διατηρούμε πληροφορία μόνο για το τμήμα του διαγράμματος Voronoi το οποίο δεν θα τροποποιηθεί λόγω κόμβων που βρίσκονται χαμηλότερα από την ℓ . Προφανώς, αυτό το τμήμα θα είναι ένα τμήμα του διαγράμματος Voronoi των κόμβων ψηλότερα από την ℓ .

Ας συμβολίσουμε το κλειστό ημιεπίπεδο ψηλότερα από την ℓ με ℓ^+ . Ποιο είναι το τμήμα του διαγράμματος Voronoi ψηλότερα από την ℓ που δεν πρόκειται να τροποποιηθεί πλέον; Με άλλα λόγια, για ποια σημεία $q \in \ell^+$ γνωρίζουμε πλέον με σιγουριά ποιος είναι ο κοντινότερός τους κόμβος; Η απόσταση του q από οποιονδήποτε κόμβο χαμηλότερα από την ℓ είναι προφανώς μεγαλύτερη από την απόσταση του q από την ℓ . Συνεπώς, ο κόμβος που είναι πιο κοντά στο q δεν μπορεί να βρίσκεται χαμηλότερα από την ℓ εάν υπάρχει κόμβος $p_i \in \ell^+$ που απέχει από το q το πολύ όσο απέχει το q από την ℓ . Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που είναι πιο κοντά σε έναν κόμβο $p_i \in \ell^+$ παρά στην ℓ περικλείεται από την παραβολή που ορίζεται από τον p_i και την ℓ , οπότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που είναι πιο κοντά σε κάποιον κόμβο ψηλότερα από την ℓ παρά στην ℓ είναι το σύνολο των σημείων που βρίσκονται ψηλότερα από κάποια από τις παραβολές για τους κόμβους στο ℓ^+ . Το σύνολο αυτών των σημείων περικλείεται (από κάτω) από μια σειρά από τόξα παραβολής (Σχήμα 4.5), την οποία ονομάζουμε **μέτωπο κύματος**.

Παρατήρηση

Το μέτωπο κύματος είναι μια x -μονότονη γραμμή, δηλ., κάθε κατακόρυφη γραμμή το τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι μια παραβολή μπορεί να συνεισφέρει περισσότερα από ένα τόξα στο μέτωπο κύματος. Ωστόσο, όπως θα δούμε σε λίγο, το συνολικό πλήθος τόξων στο μέτωπο κύματος είναι $O(n)$. Επίσης, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι τα σημεία επαφής των τόξων στο μέτωπο κύματος ανήκουν σε ακμές του διαγράμματος

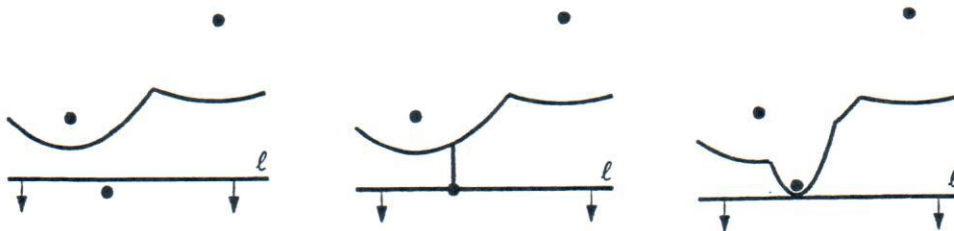


Σχήμα 4.5 Το μέτωπο κύματος.

Voronoi. Για την ακρίβεια, τα σημεία επαφής διατρέχουν ακριβώς το διάγραμμα Voronoi καθώς η γραμμή σάρωσης l κινείται από επάνω προς τα κάτω.

Έτσι, κατά τη σάρωση του επιπέδου, ο αλγόριθμος του Fortune φροντίζει να διατηρεί πληροφορία για το μέτωπο κύματος αντί για την τομή του διαγράμματος Voronoi με τη γραμμή σάρωσης l . Ωστόσο, δεν αποθηκεύουμε την ακριβή έκφραση των παραβολών που αποτελούν το μέτωπο κύματος και των σημείων επαφής τους καθώς αυτά αλλάζουν κατά τη μετακίνηση της l . Θα δούμε τις λεπτομέρειες του τρόπου αποθήκευσης αφού μελετήσουμε το πώς αλλάζει η γενική μορφή του μετώπου κύματος, δηλ., πότε ένα νέο τόξο παραβολής εμφανίζεται στο μέτωπο κύματος και πότε ένα τόξο συρρικνώνεται σε ένα σημείο και εξαφανίζεται.

Ας θεωρήσουμε πρώτα το ενδεχόμενο ένα νέο τόξο παραβολής να εμφανιστεί στο μέτωπο κύματος. Μια περίπτωση είναι όταν η γραμμή σάρωσης l συναντήσει έναν νέο κόμβο. Η παραβολή που ορίζεται από αυτόν τον κόμβο είναι αρχικά εκφυλισμένη με μηδενικό πλάτος: ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τον κόμβο με το μέτωπο κύματος. Καθώς η l συνεχίζει να μετακινείται προς τα κάτω, η νέα παραβολή γίνεται όλο και πλατύτερη και το τμήμα της χαμηλότερα από τις άλλες παραβολές αποτελεί τόξο στο μέτωπο κύματος. Το Σχήμα 4.6 παρουσιάζει σχηματικά αυτή τη



Σχήμα 4.6 Εμφάνιση νέου τόξου παραβολής στο μέτωπο κύματος.

διαδικασία. Ονομάζουμε τη θέση στην οποία η γραμμή σάρωσης συναντά έναν νέο κόμβο γεγονός επεξεργασίας κόμβου (*site event*).

Αλλά τι συνεπάγεται στον υπολογισμό του διαγράμματος Voronoi ένα γεγονός επεξεργασίας κόμβου; Καθώς το γεγονός επεξεργασίας κόμβου συνεπάγεται την εμφάνιση ενός νέου τόξου παραβολής και με δεδομένο ότι τα σημεία επαφής των τόξων παραβολής στο μέτωπο κύματος διατρέχουν ακμές του διαγράμματος Voronoi, συμπεραίνουμε ότι θα εμφανιστούν δύο νέα σημεία επαφής και θα αρχίσουν να διατρέχουν νέες ακμές Voronoi. Για την ακρίβεια, τα δύο αυτά σημεία επαφής αρχικά συμπίπτουν και κατόπιν αρχίζουν να απομακρύνονται το ένα από το άλλο διατρέχοντας την ίδια ακμή προς αντίθετες κατευθύνσεις. Αρχικά, η ακμή αυτή δεν συνδέεται με το υπόλοιπο διάγραμμα Voronoi που έχουμε υπολογίσει, αργότερα όμως, καθώς μεγαλώνει, θα “συναντηθεί” με κάποια άλλη ακμή και θα συνδεθεί στο διάγραμμα.

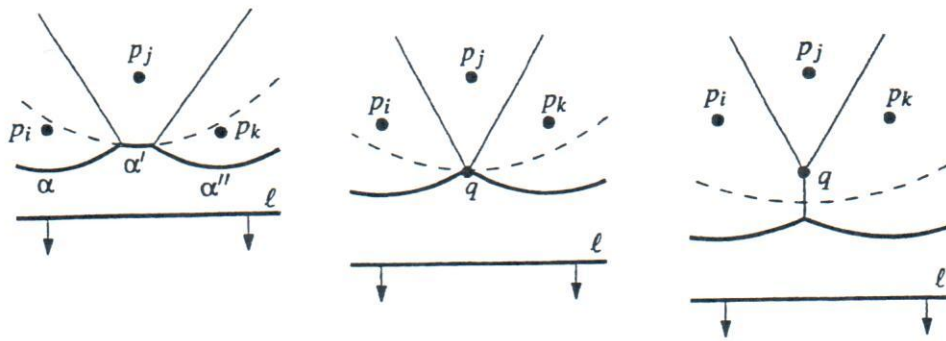
Συνοψίζοντας, σε ένα γεγονός επεξεργασίας κόμβου (δηλ., όταν η γραμμή σάρωσης συναντά έναν νέο κόμβο), ένα νέο τόξο παραβολής εμφανίζεται στο μέτωπο κύματος και μια νέα ακμή αρχίζει να διαγράφεται στο διάγραμμα Voronoi. Είναι δυνατόν ένα νέο τόξο να εμφανιστεί στο μέτωπο κύματος με κάποιον άλλο τρόπο; Αποδεικνύεται πως όχι, καθώς η μόνη άλλη περίπτωση θα ήταν εάν μια παραβολή που βρίσκεται πίσω από το μέτωπο κύματος το διαπερνούσε συνεισφέροντας ένα νέο τόξο, κάτι που όμως δεν είναι δυνατόν:

Λήμμα 4.4.1

Ένα νέο τόξο παραβολής εμφανίζεται στο μέτωπο κύματος μόνον σε ένα γεγονός επεξεργασίας κόμβου.

Άμεση συνέπεια του Λήμματος είναι ότι το μέτωπο κύματος αποτελείται από το πολύ $2n - 1$ τόξα παραβολής: κάθε κόμβος που συναντάται οδηγεί στην εισαγωγή ενός νέου τόξου στο μέτωπο και τον χωρισμό το πολύ ενός από τα τόξα του μετώπου σε δύο κομμάτια, ενώ δεν υπάρχει περίπτωση εμφάνισης νέου τόξου με οποιονδήποτε άλλο τρόπο.

Η δεύτερη περίπτωση κατά την οποία παρουσιάζονται αλλαγές στο μέτωπο κύματος κατά τη σάρωση είναι όταν ένα τόξο του μετώπου συρρικνώνεται σε ένα σημείο και εξαφανίζεται (Σχήμα 4.7). Έστω α' το τόξο που εξαφανίζεται, και έστω α και α'' τα δύο τόξα που είναι γειτονικά στο α' πριν αυτό εξαφανιστεί. Αποδεικνύεται ότι τα τόξα α και α'' δεν μπορεί να είναι τμήματα της ίδιας παραβολής. Συνεπώς, τα τρία τόξα α , α' και α'' ορίζονται από τρεις διαφορετικούς κόμβους p_i , p_j και p_k . Τη στιγμή



Σχήμα 4.7 Εξαφάνιση τόξου παραβολής από το μέτωπο κύματος.

που εξαφανίζεται τό α' , οι αντίστοιχες παραβολές περνούν από το ίδιο σημείο q . Το σημείο q ισαπέχει από την γραμμή σάρωσης ℓ και τους τρεις κόμβους, δηλ., είναι το κέντρο του κύκλου που περνά από τους κόμβους p_i , p_j και p_k και εφάπτεται στην ℓ στο χαμηλότερο σημείο του. Ο κύκλος αυτός δεν περιέχει κανέναν κόμβο στο εσωτερικό του: η απόσταση ενός τέτοιου κόμβου από το q θα ήταν μικρότερη από την απόσταση του q από την ℓ , πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι το q ανήκει στο μέτωπο κύματος. Δηλαδή, το σημείο q είναι μια κορυφή Voronoi. Αυτό δεν θα πρέπει να μας εκπλήσσει, δεδομένου ότι παρατηρήσαμε νωρίτερα ότι τα σημεία επαφής του μετώπου κύματος διατρέχουν τις ακμές του διαγράμματος Voronoi. Έτσι, όταν ένα τόξο εξαφανίζεται από το μέτωπο κύματος και δύο σημεία επαφής του μετώπου συναντώνται, δύο ακμές του διαγράμματος Voronoi συναντώνται επίσης. Ονομάζουμε την περίπτωση όπου η γραμμή σάρωσης εφάπτεται στο χαμηλότερο σημείο ενός κύκλου που περνά από τρεις κόμβους **γεγονός επεξεργασίας κύκλου (circle event)**. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε:

Λήμμα 4.4.2

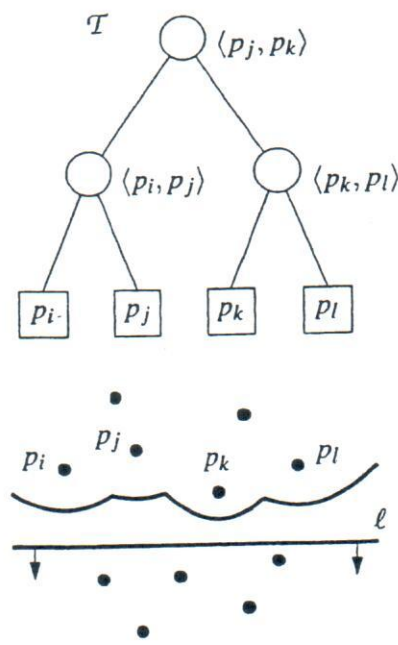
Ένα τόξο παραβολής εξαφανίζεται από το μέτωπο κύματος μόνον σε ένα γεγονός επεξεργασίας κύκλου.

Τώρα πλέον γνωρίζουμε πώς αλλάζει το μέτωπο κύματος κατά τη σάρωση του επιπέδου και σε τι αντιστοιχούν οι αλλαγές αυτές στον υπολογισμό του διαγράμματος Voronoi. Αυτό που απομένει είναι να προσδιορίσουμε τις κατάλληλες δομές δεδομένων για την καταχώριση της πληροφορίας που χρειαζόμαστε για τη σάρωση και τον υπολογισμό του διαγράμματος. Προφανώς, χρειαζόμαστε μια δομή για την καταχώριση του διαγράμματος Voronoi. Επίσης, χρειαζόμαστε τις δύο δομές που απαιτούνται σε κάθε αλγόριθμο σάρωσης: μια “ουρά γεγονότων” (*event queue*) για την καταχώριση των

γεγονότων επεξεργασίας (τα σημεία στάσης της γραμμής σάρωσης), και μια δομή για την αποθήκευση πληροφορίας σχετικής με την τρέχουσα θέση της γραμμής σάρωσης. Όπως εξηγήσαμε νωρίτερα, η δεύτερη δομή στην περίπτωση μας αποθηκεύει το μέτωπο κύματος. Οι δομές αυτές υλοποιούνται ως εξής:

- Αποθηκεύουμε το διάγραμμα Voronoi που κατασκευάζουμε με κάποιον από τους γνωστούς τρόπους αποθήκευσης επιπέδων γραφημάτων (winged edge, διπλά συνδεδεμένη λίστα ακμών, quad edge). Το μόνο σημείο που χρειάζεται προσοχή είναι ότι το διάγραμμα Voronoi περιέχει ακμές που μπορεί να εκτείνονται στο άπειρο από τη μία ή και τις δύο πλευρές. Κατά τη σάρωση, αυτό δεν δημιουργεί πρόβλημα. Εάν όμως θέλουμε τελικά να έχουμε μια συνεπή παράσταση όλου του διαγράμματος Voronoi, χρειάζεται να προσθέσουμε ένα αρκετά μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γύρω από το διάγραμμά μας.

- Το μέτωπο κύματος παρίσταται με ένα ισοζυγισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης T . Τα φύλλα του αντιστοιχούν στα τόξα του μετώπου –που είναι x -μονότονο– κατά σειρά από αριστερά προς τα δεξιά: το αριστερότερο φύλλο αντιστοιχεί στο αριστερότερο τόξο, το επόμενο φύλλο αντιστοιχεί στο δεύτερο τόξο από αριστερά κ.ο.κ. Κάθε φύλλο αποθηκεύει τον κόμβο που ορίζει το τόξο στο οποίο αντιστοιχεί. Οι εσωτερικοί κόμβοι του δέντρου αποθηκεύουν τα σημεία επαφής των τόξων: ένα



Σχήμα 4.8

σημείο επαφής παρίσταται από το διατεταγμένο ζεύγος $\langle p_i, p_j \rangle$, όπου p_i και p_j είναι οι κόμβοι που ορίζουν τα τόξα παραβολής αριστερά και δεξιά από το σημείο επαφής αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας αυτήν την αναπαράσταση για το μέτωπο κύματος, μπορούμε να βρούμε σε $O(\log n)$ χρόνο το τόξο του μετώπου που βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από έναν νέο κόμβο: σε έναν εσωτερικό κόμβο του δέντρου απλά συγκρίνουμε τη x -συντεταγμένη του νέου κόμβου με τη x -συντεταγμένη του σημείου επαφής η οποία μπορεί να υπολογιστεί σε σταθερό χρόνο από τις συντεταγ-

μένες των αντίστοιχων κόμβων και τη θέση της γραμμής σάρωσης. (Σημειώνεται ότι δεν αποθηκεύουμε αναλυτικά τις παραβολές.)

Στο δέντρο T αποθηκεύουμε επίσης δείκτες στις άλλες δύο δομές δεδομένων. Κάθε φύλλο του T που αντιστοιχεί σε ένα τόξο α αποθηκεύει έναν δείκτη σε έναν κόμβο της ουράς γεγονότων και συγκεκριμένα στο γεγονός επεξεργασίας κύκλου στο οποίο θα εξαφανιστεί το α . Αυτός ο δείκτης είναι nil εάν δεν υπάρχει τέτοιο γεγονός επεξεργασίας κύκλου ή ίσως εάν δεν το έχουμε ήδη βρει. Τέλος, κάθε εσωτερικός κόμβος του δέντρου έχει έναν δείκτη στην εγγραφή τής (μη ολοκληρωμένης ακμή) ακμής του διαγράμματος Voronoi την οποία διατρέχει το αντίστοιχο σημείο επαφής.

- Η ουρά γεγονότων υλοποιείται με μια ουρά προτεραιοτήτων (σωρός), όπου η προτεραιότητα ενός γεγονότος ισούται με την y -συντεταγμένη του. Ο σωρός αποθηκεύει τα μελλοντικά γεγονότα που είναι ήδη γνωστά. Για ένα γεγονός επεξεργασίας κόμβου, αποθηκεύουμε τον κόμβο. Για ένα γεγονός επεξεργασίας κύκλου, αποθηκεύουμε το χαμηλότερο σημείο του κύκλου. Στη δεύτερη περίπτωση, απο-

/* ο αλγόριθμος του Fortune για το διάγραμμα Voronoi */

1. $T \leftarrow$ κενό δέντρο για την καταχώριση του μετώπου κύματος
 $D \leftarrow$ κενή δομή για την καταχώριση του διαγράμματος Voronoi
 $Q \leftarrow$ όλα τα γεγονότα επεξεργασίας κόμβου
2. while (η Q δεν είναι κενή) do
3. αφαίρεσε από την Q το γεγονός q με τη μεγαλύτερη y -συντεταγμένη
4. if (το q είναι γεγονός επεξεργασίας κόμβου)
5. then $p_i \leftarrow$ αντίστοιχος κόμβος
 HandleSiteEvent(p_i)
6. else $p_j \leftarrow$ χαμηλότερο σημείο αντίστοιχου κύκλου
 HandleCircleEvent(p_j)
7. Ενημέρωσε την παράσταση του διαγράμματος Voronoi συμπεριλαμβάνοντας ένα ορθογώνιο που περικλείει όλες τις κορυφές Voronoi (οι εσωτερικοί κόμβοι του δέντρου T στην τελική του μορφή αντιστοιχούν στις ακμές Voronoi που εκτείνονται στο άπειρο) και σύνδεσε κατάλληλα τις εγγραφές για τις περιοχές Voronoi.

Αλγόριθμος 4.4.1 Ο αλγόριθμος του Fortune για το διάγραμμα Voronoi.

HandleSiteEvent(p_i)

1. if το δέντρο T του μετώπου κύματος είναι κενό
then εισάγαγε στο T το τόξο παραβολής που αντιστοιχεί στον κόμβο p_i
return
2. Διάσχισε το δέντρο T και βρες το τόξο παραβολής α κατακόρυφα επάνω από τον κόμβο p_i . Εάν αυτό το φύλλο έχει έναν δείκτη σε κάποιο γεγονός επεξεργασίας κύκλου, διάγραψε αυτό το γεγονός επεξεργασίας κύκλου από την Q .
3. Αντικατάστησε το φύλλο που αντιστοιχεί στο τόξο α με ένα δέντρο με τρία φύλλα, από τα οποία το πρώτο και το τρίτο αντιστοιχούν στον κόμβο που έχει συνεισφέρει το α , και το δεύτερο στον κόμβο p_i , και ισοζύγισε το T , εάν χρειάζεται.
4. Κατασκεύασε εγγραφές για τη νέα ακμή που σχηματίζεται από τα σημεία επαφής του τόξου παραβολής που αντιστοιχεί στον p_i με το τόξο α .
5. Έλεγξε τις δύο τριάδες κόμβων που αντιστοιχούν σε διαδοχικά τόξα παραβολής στο μέτωπο κύματος στις οποίες το τόξο του p_i είναι είτε πρώτο είτε τρίτο εάν συνεισφέρουν γεγονότα επεξεργασίας κύκλου και εάν ναι, εισάγαγέ τα στην Q .

Αλγόριθμος 4.4.1(a) Η διαδικασία χειρισμού γεγονότων επεξεργασίας κόμβου.

HandleCircleEvent(p_j)

1. Βρες και διάγραψε (ενδεχομένως ισοζυγίζοντας) από το δέντρο T το τόξο παραβολής γ που εξαφανίζεται από το μέτωπο κύματος. Εάν τα φύλλα του T αμέσως αριστερότερα και αμέσως δεξιότερα από το γ δείχνουν προς κάποιο γεγονός επεξεργασίας κύκλου, διάγραψε αυτά τα γεγονότα από την Q .
2. Κατασκεύασε εγγραφή για το κέντρο του κύκλου που είναι κορυφή Voronoi και σύνδεσέ την κατάλληλα στην παράσταση του διαγράμματος Voronoi.
3. Έλεγξε τις δύο νέες τριάδες κόμβων που αντιστοιχούν σε διαδοχικά τόξα παραβολής στο μέτωπο κύματος στις οποίες το τόξο αμέσως αριστερότερα και το τόξο αμέσως δεξιότερα από το γ αποτελούν το μεσαίο τόξο της τριάδας εάν συνεισφέρουν γεγονότα επεξεργασίας κύκλου και εάν ναι, εισάγαγέ τα στην Q .

Αλγόριθμος 4.4.1(b) Η διαδικασία χειρισμού γεγονότων επεξεργασίας κύκλου.

θηκεύουμε επίσης έναν δείκτη στο φύλλο του δέντρου T που αντιστοιχεί στο τόξο παραβολής του μετώπου κύματος που θα εξαφανιστεί τότε.

Όλα τα γεγονότα επεξεργασίας κόμβου είναι γνωστά εξαρχής, σε αντίθεση με τα γεγονότα επεξεργασίας κύκλου. Ωστόσο, ο αλγόριθμος προσδιορίζει τα γεγονότα επεξεργασίας κύκλου κατά τη σάρωση, ελέγχοντας κάθε τριάδα τόξων παραβολής που θα είναι κάποια στιγμή διαδοχικά στο μέτωπο κύματος: τρία τέτοια τόξα ορίζουν γεγονός επεξεργασίας κύκλου μόνον εφόσον (α) τα τρία τόξα αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικούς κόμβους και (β) το χαμηλότερο σημείο του κύκλου που περνά από αυτούς τους τρεις κόμβους είναι χαμηλότερα από την τρέχουσα θέση της γραμμής σάρωσης. Η γενική μορφή του αλγορίθμου περιγράφεται στον Αλγόριθμο 4.4.1. Παρατηρήστε ότι αφού όλα τα γεγονότα έχουν υποστεί επεξεργασία και η ουρά γεγονότων Q έχει αδειάσει, το μέτωπο κύματος δεν έχει εξαφανιστεί: τα σημεία επαφής των τόξων παραβολής που το απαρτίζουν αντιστοιχούν στις ακμές Voronoi που εκτείνονται στο άπειρο. Χάρης στις δομές δεδομένων που χρησιμοποιούμε, η επεξεργασία κάθε γεγονότος απαιτεί $O(\log n)$ χρόνο. Καθώς έχουμε n γεγονότα επεξεργασίας κόμβου και $O(n)$ γεγονότα επεξεργασίας κύκλου (ένα για καθεμία κορυφή Voronoi) ο αλγόριθμος έχει πολυπλοκότητα χρόνου $O(n \log n)$. Η πολυπλοκότητα χώρου είναι $O(n)$.

4.5. Εφαρμογές

4.5.1. Κοντινότεροι Γείτονες

Μια από τις πιο συνηθισμένες εφαρμογές του διαγράμματος Voronoi αφορά στον προσδιορισμό κοντινότερων γειτόνων. Εάν απλά ενδιαφερόμαστε να βρούμε ποιο από τα σημεία ενός συνόλου S είναι πιο κοντά σε κάποιο σημείο p που μας ενδιαφέρει, τότε απλά ελέγχουμε όλα τα σημεία του S και επιστρέφουμε τη σωστή απάντηση σε γραμμικό χρόνο.

Σε πολλές περιπτώσεις, όμως, ενδιαφερόμαστε να υποβάλλουμε πολλές ερωτήσεις όπως η παραπάνω για το ίδιο σύνολο S . Σ' αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να υπολογίσουμε σε $O(n \log n)$ χρόνο το διάγραμμα Voronoi του συνόλου S οπότε το πρόβλημα προσδιορισμού του κοντινότερου γείτονα ενός σημείου p ανάγεται στην εύρεση της περιοχής Voronoi στην οποία εντοπίζεται το σημείο p . Δεδομένου ότι ο εντοπισμός σημείου σε μια διαμέριση του επιπέδου σε περιοχές μπορεί να γίνει σε $O(\log n)$ χρόνο (δες Κεφάλαιο 6), συμπεραίνουμε ότι εάν αρχικά δαπανήσουμε $O(n \log n)$ χρόνο για να

επεξεργαστούμε το δοσμένο σύνολο S έχουμε τη δυνατότητα να απαντάμε ερωτήσεις για προσδιορισμό του κοντινότερου γείτονα σε λογαριθμικό χρόνο.

4.5.2. Μέγιστος Κενός Κύκλος

Στην Παράγραφο 4.1 αναφερθήκαμε στο πρόβλημα του υπολογισμού του μέγιστου κενού κύκλου ανάμεσα σε ένα σύνολο S από σημεία: το κέντρο ενός τέτοιου κύκλου είναι ένα καλό σημείο για την εγκατάσταση ενός νέου καταστήματος, ή την εγκατάσταση ενός χημικού εργοστασίου που θέλουμε να είναι όσο το δυνατόν μακρύτερα από ένα σύνολο πόλεων.

Πιο αυστηρά το πρόβλημα ορίζεται ως εξής: “δίδεται ένα σύνολο σημείων S στο επίπεδο και ζητείται ο μεγαλύτερος κύκλος με κέντρο στο σύνορο ή στο εσωτερικό του κυρτού περιβλήματος του S ο οποίος δεν περιέχει κανένα σημείο του S στο εσωτερικό του.” Προφανώς, υπάρχουν άπειροι σε πλήθος πιθανοί κύκλοι. Ωστόσο, με λίγο πειραματισμό, θα καταφέρουμε να περιορίσουμε αυτό το άπειρο σύνολο σε ένα μικρό πλήθος τελικών υποψήφιων κύκλων (αυτό συνήθως προσπαθούμε να κάνουμε στην Υπολογιστική Γεωμετρία).

Συγκεκριμένα, ξεκινώντας από κενούς κύκλους και “φουσκώνοντάς” τους (ώστε να μεγιστοποιήσουμε την ακτίνα τους), διαπιστώνουμε ότι:

1. Εάν το κέντρο p του μεγαλύτερου κενού κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό του κυρτού περιβλήματος του δοσμένου συνόλου σημείων S , τότε το p συμπίπτει με μια κορυφή του διαγράμματος Voronoi του S .
2. Εάν το κέντρο p του μεγαλύτερου κενού κύκλου βρίσκεται στο σύνορο του κυρτού περιβλήματος του δοσμένου συνόλου σημείων S , τότε το p ανήκει σε μια ακμή του διαγράμματος Voronoi του S .

Οι παραπάνω παρατηρήσεις οδηγούν σε έναν απλό αλγόριθμο για τον μέγιστο κενό κύκλο (Αλγόριθμος 4.5.1) που προτάθηκε από τον Toussaint (1983). Σημειώστε ότι επειδή οι κορυφές Voronoi ενδέχεται να βρίσκονται έξω από το κυρτό περίβλημα, θα πρέπει να κάνουμε τον αντίστοιχο έλεγχο. Μια απλοϊκή υλοποίηση του αλγορίθμου θα απαιτούσε $O(n^2)$ χρόνο. Ωστόσο, τόσο ο έλεγχος για το εάν ένα σημείο ανήκει σε ένα κυρτό πολύγωνο όσο και για το εάν μια ευθεία, ημιευθεία ή ευθύγραμμο τμήμα τέμνει ένα κυρτό πολύγωνο και ο υπολογισμός του σημείου τομής μπορεί να γίνει σε $O(\log n)$ χρόνο, οδηγώντας σε $O(n \log n)$ συνολική πολυπλοκότητα χρόνου.

```

/* αλγόριθμος για τον μέγιστο κενό κύκλο */
Υπολόγισε το διάγραμμα Voronoi  $V(S)$  του δοσμένου συνόλου σημείων  $S$ 
Υπολόγισε το κυρτό περίβλημα  $H(S)$  του δοσμένου συνόλου σημείων  $S$ 
for (κάθε κορυφή  $v$  του  $V(S)$ ) do
  if (η  $v$  ανήκει στο  $H(S)$ )
  then ακτίνα  $\leftarrow$  απόσταση της  $v$  από κόμβο που αντιστοιχεί σε περιοχή
      Voronoi γειτονική στην  $v$ 
      ενημέρωσε μέγιστη ακτίνα (εάν χρειάζεται)
for (κάθε ακμή  $e$  του  $V(S)$ ) do
  if (η  $e$  τέμνει το σύνορο του  $H(S)$ )
  then ακτίνα  $\leftarrow$  απόσταση του σημείου τομής από κόμβο που αντιστοιχεί
      σε περιοχή Voronoi γειτονική στην  $e$ 
      ενημέρωσε μέγιστη ακτίνα (εάν χρειάζεται)

```

Αλγόριθμος 4.5.1 Μέγιστος κενός κύκλος.

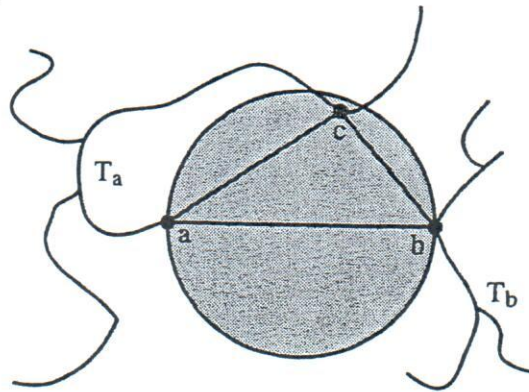
4.5.3. Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο

Ένα ελάχιστο συνδετικό δέντρο (*minimum spanning tree*) ενός συνόλου σημείων S είναι ένα δέντρο ελαχίστου μήκους που συνδέει όλα τα σημεία του S . Αποδεικνύεται ότι η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα του S έχει την ακόλουθη ιδιότητα.

Λήμμα 4.5.1

Το ελάχιστο συνδετικό δέντρο $MST(S)$ ενός συνόλου σημείων S είναι υποσύνολο της Delaunay διαίρεσης σε τρίγωνα $D(S)$ του S . Δηλαδή, εάν το ευθύγραμμο τμήμα ab είναι ακμή του $MST(S)$, τότε το ab είναι ακμή της Delaunay διαίρεσης σε τρίγωνα $D(S)$.

Απόδειξη Έστω ότι $ab \in MST(S)$ και $ab \notin D(S)$. Αφού για κάθε ακμή e της Delaunay διαίρεσης σε τρίγωνα υπάρχει κάποιος κενός κύκλος που περνά από τα άκρα της e (Ιδιότητα D6), κάθε κύκλος που περνά από τα a και b (και βέβαια και ο κύκλος με διάμετρο ab) περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του S στο εσωτερικό του. Έστω c ένα τέτοιο σημείο (Σχήμα 4.9). Τότε $|ac| < |ab|$ και $|bc| < |ab|$. Η αφαίρεση της ακμής ab από το $MST(S)$ το χωρίζει σε δύο τμήματα, ένα που περιέχει το a και ένα δεύτερο που περιέχει το b . Έστω T_a και T_b τα δύο αυτά τμήματα αντίστοιχα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το c ανήκει στο T_a . Αλλά τότε εάν προσθέσουμε την ακμή bc στα T_a και T_b βρίσκουμε ένα νέο συνδετικό δέντρο με μήκος ακμών μικρότερο



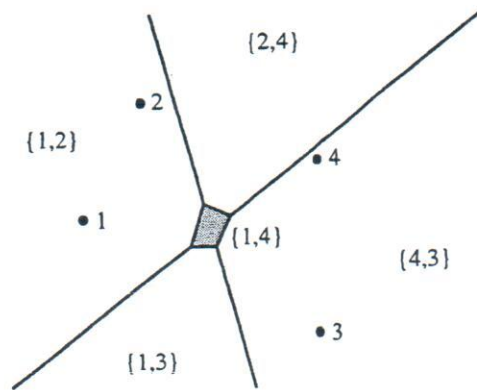
Σχήμα 4.9

από αυτό του $MST(S)$. Άτοπο. ■

Το παραπάνω λήμμα μάς επιτρέπει να βελτιώσουμε την πολυπλοκότητα χρόνου του γνωστού αλγορίθμου του Kruskal για τον υπολογισμό ενός ελάχιστου συνδετικού δέντρου. Αντί να ασχοληθούμε με όλες τις πιθανές ακμές ανάμεσα σε ζεύγη σημείων του S , υπολογίζουμε την Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα $D(S)$ του S και ασχολούμαστε μόνο με τις $O(n)$ ακμές της $D(S)$. Η πολυπλοκότητα χρόνου του τελικού αλγορίθμου είναι $O(n \log n)$, έναντι $O(n^2 \log n)$ του αρχικού αλγορίθμου του Kruskal.

4.6. Διαγράμματα Voronoi k -τάξης

Η έννοια του διαγράμματος Voronoi γενικεύεται οδηγώντας στα λεγόμενα **διαγράμματα Voronoi k -τάξης** (*kth-order Voronoi diagrams*). Ας θεωρήσουμε το **διάγραμμα Voronoi 2ης τάξης** στις δύο διαστάσεις. Όπως και το διάγραμμα Voronoi με το οποίο ασχοληθήκαμε στις προηγούμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου (το οποίο ήταν διάγραμμα Voronoi 1ης τάξης), το διάγραμμα Voronoi 2ης τάξης στις δύο διαστάσεις οδηγεί σε διαμέριση του επιπέδου σε περιοχές. Μόνο που τώρα κάθε περιοχή αποτελείται από όλα τα σημεία που είναι πιο κοντά σε δύο συγκεκριμένους κόμβους από ότι σε οποιονδήποτε άλλο κόμβο. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν ενδιαφέρει ποιος από τους δύο αυτούς είναι πιο κοντά στο σημείο. Με άλλα λόγια, ανεξάρτητα από το εάν ένα σημείο a του επιπέδου έχει κοντινότερο κόμβο τον p_i και δεύτερο κοντινότερο τον p_j ενώ ένα σημείο b έχει κοντινότερο κόμβο τον p_j και δεύτερο κοντινότερο τον p_i , τα σημεία a και b ανήκουν στην ίδια περιοχή Voronoi του διαγράμματος Voronoi 2ης τάξης. Ένα διάγραμμα Voronoi 2ης τάξης για 4 κόμβους φαίνεται στο Σχήμα 4.10.



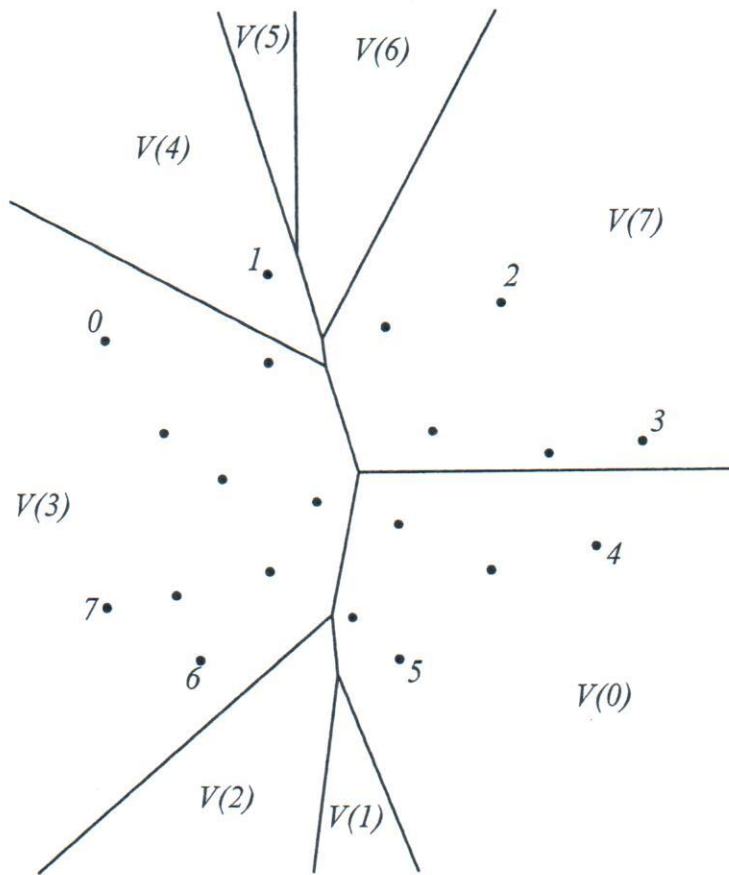
Σχήμα 4.10 Διάγραμμα Voronoi 2ης τάξης.

Ο ορισμός των διαγραμμάτων Voronoi k -τάξης στις δύο διαστάσεις, για οποιοδήποτε k , είναι αντίστοιχος: είναι η διαμέριση του επιπέδου σε περιοχές καθεμία από τις οποίες αποτελείται από όλα τα σημεία που είναι πιο κοντά σε k συγκεκριμένους κόμβους από ότι σε οποιονδήποτε άλλο κόμβο. Ένα τέτοιο διάγραμμα Voronoi μπορεί να κατασκευαστεί από το διάγραμμα Voronoi της αμέσως χαμηλότερης τάξης για το ίδιο σύνολο κόμβων. Συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε το διάγραμμα Voronoi k -τάξης $V_k(S)$ ενός συνόλου κόμβων S του επιπέδου. Προφανώς, κάθε περιοχή του $V_k(S)$ αντιστοιχεί σε k κόμβους του S οι οποίοι είναι οι κόμβοι που είναι πιο κοντά στα σημεία της περιοχής από ότι οι υπόλοιποι κόμβοι. ας θεωρήσουμε μια περιοχή Π του $V_k(S)$ και έστω T το αντίστοιχο σύνολο κόμβων. Τότε, το τμήμα του διαγράμματος Voronoi $(k+1)$ -τάξης που βρίσκεται στο εσωτερικό της περιοχής Π συμπίπτει με το αντίστοιχο τμήμα του διαγράμματος Voronoi 1ης τάξης για το σύνολο $S - T$: κάθε επιμέρους τμήμα της Π αντιστοιχίζεται στους κόμβους του συνόλου T και τον αντίστοιχο κόμβο του διαγράμματος Voronoi 1ης τάξης για το σύνολο $S - T$. Συνεπώς, το διάγραμμα Voronoi $(k+1)$ -τάξης μπορεί να κατασκευαστεί με υπολογισμό και συνένωση των τμημάτων του για κάθε περιοχή του διαγράμματος Voronoi k -τάξης. Αυτός ο τρόπος κατασκευής προϋποθέτει ότι έχουμε διαθέσιμο το διάγραμμα Voronoi k -τάξης. Αυτό με τη σειρά του μπορεί να κατασκευαστεί με παρόμοιο τρόπο από το διάγραμμα Voronoi $(k-1)$ -τάξης, το τελευταίο από το διάγραμμα Voronoi $(k-2)$ -τάξης, κ.ο.κ.

Λήμμα 4.6.1

Το διάγραμμα Voronoi k -τάξης ενός συνόλου σημείων S του επιπέδου μπορεί να κατασκευαστεί σε $O(k^2 n \log n)$ χρόνο, όπου n είναι ο πληθθάριθμος του συνόλου S .

Ιδιαίτερης σημασίας είναι το διάγραμμα Voronoi $(n-1)$ -τάξης ενός συνόλου n κόμβων το οποίο αναφέρεται και ως *farthest neighbor Voronoi diagram*. Κάθε περιοχή



Σχήμα 4.11 Διάγραμμα Voronoi $(n - 1)$ -τάξης.

του διαγράμματος αυτού είναι κυρτή και αντιστοιχεί σε έναν κόμβο ο οποίος είναι ο πιο απομακρυσμένος κόμβος από τα σημεία της περιοχής. Το διάγραμμα αποτελείται από περιοχές μόνο για τους κόμβους που ανήκουν στο κυρτό περίβλημα του συνόλου των κόμβων. Το Σχήμα 4.11 δείχνει το διάγραμμα Voronoi $(n - 1)$ -τάξης για ένα σύνολο $n = 20$ κόμβων: οι κόμβοι που ανήκουν στο κυρτό περίβλημα χαρακτηρίζονται από έναν ακέραιο αριθμό ο οποίος χρησιμοποιείται επίσης στη δήλωση της αντίστοιχης περιοχής Voronoi.

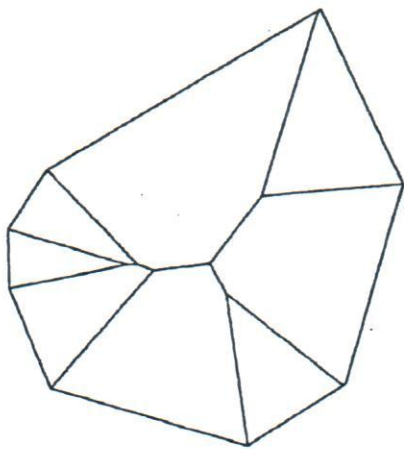
Το διάγραμμα Voronoi $(n - 1)$ -τάξης μπορεί να κατασκευαστεί με τον τρόπο που αναφέραμε προηγουμένως, αλλά αυτό συνεπάγεται πολυπλοκότητα χρόνου $O(n^3 \log n)$ —πιο αυστηρή ανάλυση συνεπάγεται πολυπλοκότητα χρόνου $O(n^3)$. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η μέθοδος διαίρει και βασίλευε μπορεί να εφαρμοστεί για την απευθείας κατασκευή του διαγράμματος επιτυγχάνοντας πολυπλοκότητα χρόνου $O(n \log n)$ που είναι και η βέλτιστη δυνατή. Ο αλγόριθμος είναι ανάλογος του αλγορίθμου διαίρει και βασίλευε για τον υπολογισμό του διαγράμματος Voronoi 1ης τάξης, αλλά παρουσιάζει διαφορές στον τρόπο συρραφής των επιμέρους διαγραμμάτων.

4.7. Μέσος Άξονας Πολυγώνου

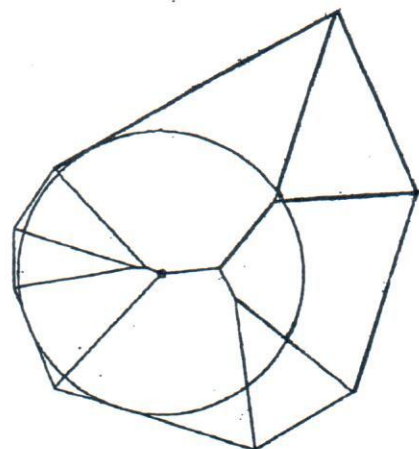
Ο μέσος άξονας (*medial axis*) ενός πολυγώνου P ορίζεται ως το σύνολο των σημείων του P που ισαπέχουν από περισσότερα από ένα σημεία του συνόρου του P (σημειώνεται ότι ο ορισμός μπορεί να γενικευθεί για οποιοδήποτε σύνολο σημείων και όχι μόνο για τα σημεία ενός πολυγώνου).

Στο Σχήμα 4.12 φαίνεται ένα κυρτό οκτάγωνο και ο μέσος άξονάς του. Με βάση αυτό το παράδειγμα θα μπορούσε κάποιος να υποθέσει ότι ο μέσος άξονας ενός κυρτού πολυγώνου είναι ένα δέντρο τα φύλλα του οποίου είναι οι κορυφές του πολυγώνου. Αυτό πράγματι ισχύει, και ισχύει μάλιστα και για μη κυρτά πολύγωνα. Κάθε σημείο του μέσου άξονα είναι το κέντρο ενός κύκλου που εφάπτεται στο σύνορο του πολυγώνου σε τουλάχιστον δύο σημεία. Και όπως ακριβώς οι κορυφές Voronoi είναι κέντρα κύκλων που διέρχονται από τρεις κόμβους, οι κορυφές του μέσου άξονα είναι κέντρα κύκλων που εφάπτονται στο σύνορο σε τρία διαφορετικά σημεία (Σχήμα 4.13).

Η έννοια του μέσου άξονα εισήχθη από τον Blum (1967) για τη μελέτη βιολογικών σχημάτων. Ο Blum παρατήρησε ότι ο μέσος άξονας είναι ένα είδος σκελετού στο “μέσο” του σχήματος. Αυτό είναι περισσότερο εμφανές σε μη κυρτά ή καμπυλόγραμμα σχήματα που ήταν και ο κύριος τομέας ενδιαφέροντος του Blum. Καθώς ένα σχήμα μπορεί να χαρακτηριστεί σε κάποιο βαθμό από τη δομή του μέσου άξονά του, ο μέσος άξονας αποτέλεσε το αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνητών ειδικά στους τομείς της αναγνώρισης προτύπων και της μηχανικής όρασης. Για παράδειγμα, ο Bookstein χρησιμοποιεί τον μέσο άξονα για να χαρακτηρίσει τις διαφορές μεταξύ φυσιολογικών και παραμορφωμένων οστών της κάτω σιαγώνος.



Σχήμα 4.12



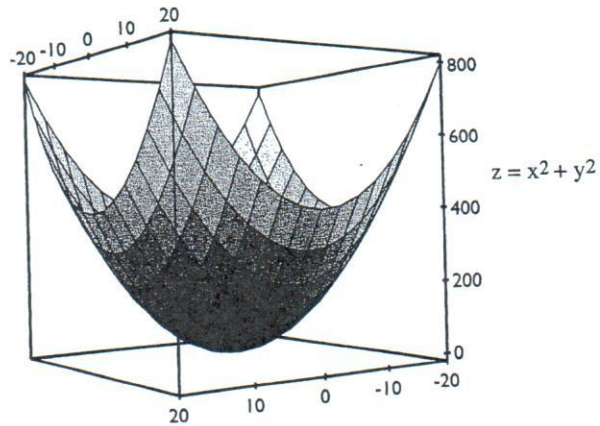
Σχήμα 4.13

Ο μέσος άξονας ενός πολυγώνου με n κορυφές μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n \log n)$ χρόνο (Lee, 1982), ενώ υπάρχουν και πιο εύκολοι στην υλοποίησή τους αλγόριθμοι που όμως έχουν μεγαλύτερη πολυπλοκότητα χρόνου (Yao και Rokne, 1991). εάν το πολύγωνο είναι κυρτό τότε ο μέσος άξονάς του μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n)$ χρόνο (Aggarwal, Guibas, Saxe και Shor, 1989).

4.8. Σχέση με Κυρτό Περίβλημα

Το 1986, οι Edelsbrunner και Seidel ανακάλυψαν μια πολύ ενδιαφέρουσα σχέση ανάμεσα στη Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα στις d διαστάσεις και στο κυρτό περίβλημα στις $d + 1$ διαστάσεις. Αν και η σχέση αυτή ισχύει για οποιοδήποτε d , θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση $d = 2$.

Έστω $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο- xy και έστω x_i, y_i οι συντεταγμένες του σημείου p_i . Θεωρούμε το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ (Σχήμα 4.14) και προβάλλουμε τα σημεία του P επάνω σε αυτό. Δηλαδή, κάθε σημείο (x_i, y_i) απεικονίζεται στο τριδιάστατο σημείο $(x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2)$. Υπολογίζουμε το κυρτό περίβλημα των τριδιά-



Σχήμα 4.14

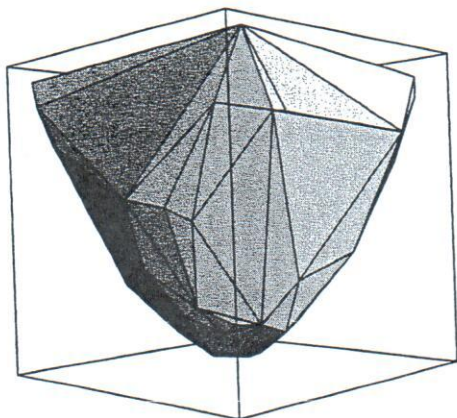
στατων σημείων (Σχήμα 4.15) και αγνοούμε το “επάνω” τμήμα του συνόρου του περιβλήματος. Τέλος, προβάλλουμε το υπόλοιπο τμήμα του συνόρου στο επίπεδο- xy . Αποδεικνύεται ότι η προβολή είναι ακριβώς η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα του P (Σχήμα 4.16).

Ας αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό αυστηρά. Η εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στο παραβολοειδές στο σημείο (a, b) είναι

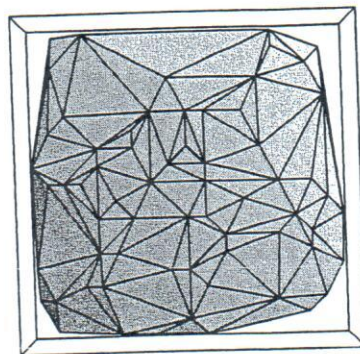
$$z = 2ax + 2by - (a^2 + b^2).$$

Εάν μετακινήσουμε το επίπεδο κατά r^2 προς τα επάνω, αυτό θα έχει εξίσωση

$$z = 2ax + 2by - (a^2 + b^2) + r^2$$



Σχήμα 4.15



Σχήμα 4.16

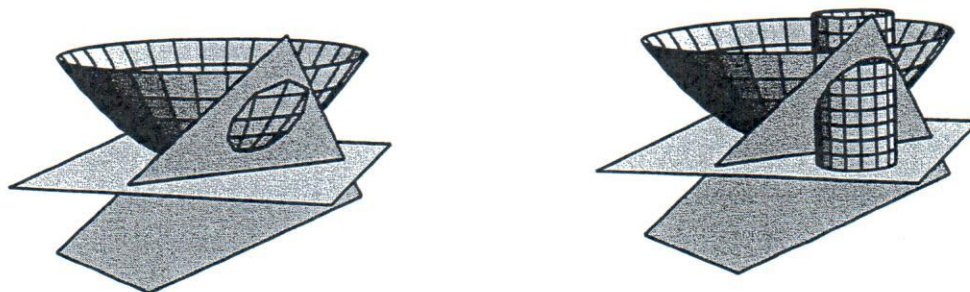
και θα τμήσει το παραβολοειδές στα σημεία (x, y) τέτοια ώστε

$$z = x^2 + y^2 = 2ax + 2by - (a^2 + b^2) + r^2 \implies (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Τα σημεία τομής σχηματίζουν μια έλλειψη, η προβολή της οποίας στο επίπεδο- xy είναι ένας κύκλος (Σχήμα 4.17).

Ας αντιστρέψουμε τώρα την προσέγγιση για να οδηγηθούμε στην Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα. Ας θεωρήσουμε το επίπεδο Π που περνά από τρία σημεία p_i, p_j και p_k του παραβολοειδούς τα οποία είναι οι κορυφές μιας έδρας f του κάτω τμήματος του συνόρου του κυρτού περιβλήματος. Το επίπεδο αυτό τέμνει το παραβολοειδές και άρα μπορεί να εκληφθεί σαν την μετατόπιση κατά r^2 προς τα επάνω ενός παράλληλου επιπέδου Π' που εφάπτεται στο παραβολοειδές.

Αφού η f είναι μια έδρα του κάτω τμήματος του κυρτού περιβλήματος, όλα τα άλλα σημεία βρίσκονται πάνω από το Π . Αφού βρίσκονται πάνω από το Π , βρίσκονται περισσότερο από r^2 ψηλότερα από το Π' . Συνεπώς τα σημεία αυτά προβάλλονται στο



Σχήμα 4.17

εξωτερικό του κύκλου ακτίνας r στο επίπεδο- xy . Δηλαδή, ο κύκλος αυτός δεν περιέχει κανένα σημείο του P στο εσωτερικό του και άρα η προβολή της f στο επίπεδο- xy σχηματίζει ένα τρίγωνο Delaunay. Και αυτό ισχύει για κάθε έδρα του κάτω τμήματος του συνόρου του κυρτού περιβλήματος.

Λήμμα 4.8.1

Η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα ενός συνόλου σημείων P στις δύο διαστάσεις είναι ακριβώς η προβολή στο επίπεδο- xy του κάτω τμήματος του συνόρου του κυρτού περιβλήματος $H(P')$ όπου $P' = \{(x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2) \mid (x_i, y_i) \in P\}$. (Τα σημεία του P' είναι οι παραβολές των σημείων του P στο παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.)

Δεδομένου ότι το κυρτό περίβλημα στις τρεις διαστάσεις μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n \log n)$ χρόνο, το Λήμμα 4.8.1 συνεπάγεται άλλον έναν $O(n \log n)$ αλγόριθμο για τη Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα (και άρα και το διάγραμμα Voronoi) στις δύο διαστάσεις.

Η σχέση που περιγράψαμε παραπάνω ανάμεσα στη Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα και το διάγραμμα Voronoi στις δύο διαστάσεις και στο κυρτό περίβλημα στις τρεις διαστάσεις γενικεύεται και για χώρους οποιασδήποτε διάστασης. Έτσι, το διάγραμμα Voronoi στις τρεις διαστάσεις (που βρίσκει σημαντικές εφαρμογές, για παράδειγμα, στην κρυσταλλογραφία) μπορεί να κατασκευαστεί από ένα κυρτό περίβλημα στις τέσσερις διαστάσεις, κλπ.

4.9. Σχέση με Τομές (Υπερ-)Επιπέδων

Στην προηγούμενη παράγραφο, είδαμε ότι η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα ενός συνόλου σημείων μπορεί να υπολογιστεί από το κυρτό περίβλημα των προβολών των σημείων στο παραβολοειδές. Με χρήση του παραβολοειδούς, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε και το διάγραμμα Voronoi (κατευθείαν και όχι διαμέσου της Delaunay διαίρεσης σε τρίγωνα). Αν και τα αποτελέσματα της χρήσης του παραβολοειδούς θα φανούν σε όλη τους την έκταση στην Παράγραφο 5.6, δίνουμε παρακάτω μια πρώτη “γεύση.”

Ας ξεκινήσουμε, για λόγους απλότητας, με το διάγραμμα Voronoi (1ης τάξης) στον μονοδιάστατο χώρο (= τον άξονα των x)· σε αυτήν την περίπτωση, το παραβολοειδές είναι η παραβολή $z = x^2$. Έστω $x = a$ και $x = b$ δύο σημεία· θεωρούμε τις εφαπτόμενες στην παραβολή στις προβολές των σημείων σε αυτήν, δηλ., στα σημεία (a, a^2) και (b, b^2) . Οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι αντίστοιχα:

$$z = 2ax - a^2 \quad \text{και} \quad z = 2bx - b^2.$$

Για να δούμε που τέμνονται, συν-επιλύουμε τις δύο εξισώσεις και έχουμε:

$$2ax - a^2 = 2bx - b^2 \iff x(2a - 2b) = a^2 - b^2 \iff x = \frac{a + b}{2}.$$

Δηλαδή, το σημείο τομής των εφαπτομένων προβάλλεται στον άξονα των x στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα a και b αλλά, αυτό είναι το μονοδιάστατο διάγραμμα Voronoi των δύο σημείων. Με παρόμοιο τρόπο, εάν έχουμε ένα σύνολο σημείων S στον άξονα των x , θεωρούμε τις εφαπτόμενες στις προβολές των σημείων του S στην παραβολή $z = x^2$. οι προβολές (στον άξονα των x) των σημείων τομής των ζευγών εφαπτομένων που αντιστοιχούν σε σημεία του S που είναι διαδοχικά κατά μήκος του άξονα των x ορίζουν το διάγραμμα Voronoi του συνόλου S .

Στις δύο διαστάσεις, ας θεωρήσουμε δύο σημεία (a, c) και (b, d) , και το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$. Τα εφαπτόμενα επίπεδα στις προβολές των δύο σημείων στο παραβολοειδές έχουν εξισώσεις

$$z = 2ax + 2cy - (a^2 + c^2) \quad \text{και} \quad z = 2bx + 2dy - (b^2 + d^2).$$

Εάν συν-επιλύσουμε τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} 2ax + 2cy - (a^2 + c^2) &= 2bx + 2dy - (b^2 + d^2) \\ \implies x(2a - 2b) + y(2c - 2d) &= (a^2 - b^2) + (c^2 - d^2). \end{aligned}$$

Αυτή η εξίσωση είναι ακριβώς η εξίσωση της μεσοκαθέτου στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (a, c) και (b, d) . Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα σύνολο κόμβων στο επίπεδο- xy και ότι έχουμε φέρει τα εφαπτόμενα επίπεδα στις προβολές αυτών των κόμβων στο παραβολοειδές. Εάν θεωρήσουμε ότι το παραβολοειδές είναι διαφανές ενώ τα εφαπτόμενα επίπεδα είναι αδιαφανή, και ότι βλέπουμε τα επίπεδα από το σημείο με $z = +\infty$, τότε τα επίπεδα θα είναι ορατά μέχρι την πρώτη τομή τους με κάποιο άλλο επίπεδο· οι πρώτες αυτές τομές προβάλλονται (στο επίπεδο- xy) στις μεσοκαθέτους ευθυγράμμων τμημάτων με άκρα τους κόμβους που όρισαν τα εφαπτόμενα επίπεδα. Δηλαδή, οι προβολές αυτών των τομών σχηματίζουν ακριβώς το διάγραμμα Voronoi των δοθέντων κόμβων.

Όπως και με τα αποτελέσματα της Παραγράφου 4.8, τα αποτελέσματα και αυτής της παραγράφου γενικεύονται για οποιαδήποτε διάσταση.