

### 3. Το πρόβλημα του Κυρτού Περιβλήματος στις Τρεις Διαστάσεις

#### 3.1 Πολύεδρα

Ένα πολύεδρο είναι η φυσική γενίκευση ενός διδιάστατου πολυγώνου στις τρεις διαστάσεις: είναι μια περιοχή του χώρου που περικλείεται από ένα πεπερασμένο πλήθος από επίπεδες πολυγωνικές έδρες, οι οποίες ανά δύο είτε δεν έχουν κοινά σημεία, είτε συναντώνται σε κοινές κορυφές ή ακμές. Πιο συγκεκριμένα, το σύνορο ενός πολυέδρου αποτελείται από τρεις τύπους αντικειμένων: κορυφές (σημεία, διάσταση 0), ακμές (ευθύγραμμα τμήματα, διάσταση 1) και έδρες (πολύγωνα, διάσταση 2).

Γενικά είναι δύσκολο να ορίσουμε απλά αλλά αυστηρά την έννοια του πολυέδρου. Σε γενικές γραμμές απαιτούμε να ισχύουν οι εξής συνθήκες:

1. Οι έδρες τέμνονται “όπως πρέπει.”

Για κάθε ζεύγος εδρών  $f_1, f_2$  απαιτούμε:

(α) είτε  $f_1 \cap f_2 = \emptyset$ ,

(β) είτε η τομή των  $f_1$  και  $f_2$  είναι μία μοναδική κοινή κορυφή,

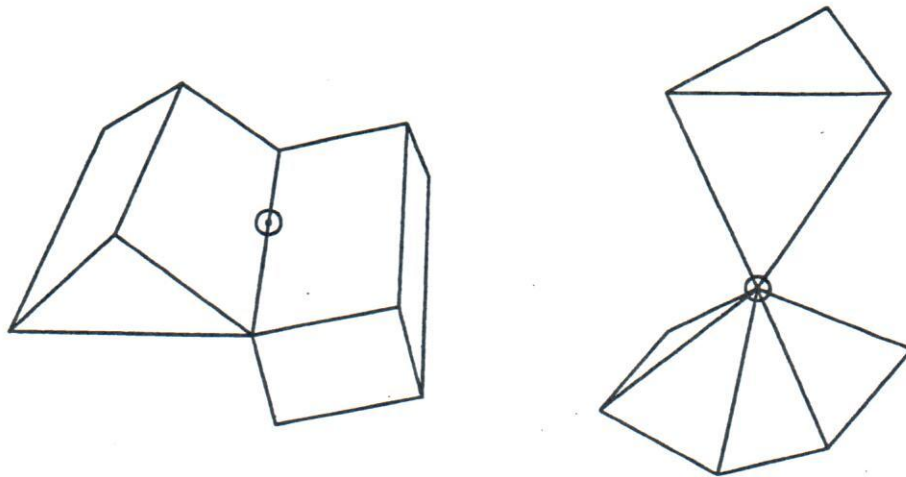
(γ) είτε η τομή των  $f_1$  και  $f_2$  αποτελείται από δύο κοινές κορυφές και την ακμή που τις συνδέει.

2. Η τοπολογία στη γειτονιά κάθε σημείου του πολυέδρου είναι “όπως πρέπει.”

Η συνθήκη αυτή έχει ως στόχο την αποφυγή περιπτώσεων όπως αυτές του σχήματος 3.1. Για να το επιτύχουμε αυτό, απαιτούμε η γειτονιά κάθε σημείου στην επιφάνεια του πολυέδρου να είναι “ομοιομορφική” (*homeomorphic*)<sup>1</sup> με έναν δίσκο. Αποτέλεσμα αυτής της απαίτησης είναι ότι κάθε ακμή πρόσκειται σε δύο ακριβώς έδρες.

---

<sup>1</sup> Ένας ομοιομορφισμός (*homeomorphism*) ανάμεσα σε δύο περιοχές επιτρέπει “τέντωμα” και “στρέψη” αλλά όχι σχίσσιμο.



Σχήμα 3.1 Δύο στερεά που δεν είναι πολύεδρα.

3. Η τοπολογία ολόκληρου του τριδιάστατου αντικειμένου είναι “όπως πρέπει.”

Απαιτούμε το σύνορο του πολυέδρου να είναι κλειστό, συνεκτικό και να μην εκτείνεται στο άπειρο. Αφού θέλουμε το σύνορο να είναι συνεκτικό, τότε για κάθε ζευγάρι σημείων στην επιφάνεια του πολυέδρου υπάρχει διαδρομή στην επιφάνεια του πολυέδρου που τα συνδέει. Δηλαδή, η παραπάνω συνθήκη απαγορεύει πολύεδρα που έχουν “αιωρούμενες” εσωτερικές κοιλότητες. Ωστόσο (και πολύ σωστά) δεν απαγορεύει “διαμπερείς τρύπες” που διαπερνούν το πολύεδρο αλλά δεν αποσυνδέουν το σύνορό του. Τέτοια πολύεδρα, όπως για παράδειγμα ο τόρος, είναι αποδεκτά. Το πλήθος των διαμπερών τρυπών ονομάζεται **genus** του πολυέδρου. Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε κυρίως με πολύεδρα που έχουν genus ίσο με 0: αυτά είναι τοπολογικά ισοδύναμα με μια τριδιάστατη σφαίρα (αν και δεν είναι απαραίτητο να είναι κυρτά).

Τα κυρτά πολύεδρα λέγονται συχνά polytopes, ή 3-polytopes εάν πρέπει να δοθεί έμφαση στη διάσταση. Ένα πολύεδρο είναι κυρτό εάν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο οποιαδήποτε σημεία του πολυέδρου ανήκει στο πολύεδρο. Όπως τα κυρτά πολύγωνα χαρακτηρίζονται από κυρτές γωνίες, έτσι και τα κυρτά πολύεδρα χαρακτηρίζονται από:

1. Οι εσωτερικές διεδρες γωνίες είναι κυρτές, δηλαδή, για κάθε ακμή, η εσωτερική γωνία που σχηματίζεται από τα επίπεδα των δύο προσκείμενων εδρών είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με  $180^\circ$ .
2. Για κάθε κορυφή, το άθροισμα των γωνιών όλων των προσκείμενων εδρών στη συγκεκριμένη κορυφή είναι το πολύ ίσο με  $360^\circ$ .

Οι δύο αυτές συνθήκες είναι ισοδύναμες και εξασφαλίζουν την κυρτότητα του πολυέδρου, αν και οι σχετικές αποδείξεις δεν είναι προφανείς.

### 3.1.1. Κανονικά Πολύεδρα

Ένα κανονικό (*regular*) πολύγωνο είναι ένα πολύγωνο με όλες τις πλευρές του ίσες μεταξύ τους και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους: για παράδειγμα, το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο, το κανονικό πεντάγωνο, κλπ, είναι κανονικά πολύγωνα. Προφανώς, υπάρχουν άπειρα σε πλήθος κανονικά πολύγωνα, ένα για κάθε  $n \geq 3$ .

Η περισσότερο αυστηρή απαίτηση κανονικότητας που μπορεί να επιβάλει κάποιος για ένα πολύεδρο είναι όλες του οι έδρες να είναι το ίδιο κανονικό πολύγωνο και το πλήθος των εδρών που πρόσκεινται σε κάθε κορυφή να είναι το ίδιο. Οι παραπάνω συνθήκες συνεπάγονται και ίσες διέδρες γωνίες, όποτε δεν χρειάζεται να συμπεριλάβουμε αυτήν την απαίτηση επίσης. Σε αντίθεση με τα κανονικά πολύγωνα, υπάρχουν μόνο πέντε διαφορετικά κανονικά πολύεδρα. Αυτά είναι γνωστά και σαν Πλατωνικά Στερεά (*Platonic solids*) γιατί αναφέρονται στο έργο “Τίμαιος” του Πλάτωνα.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι υπάρχουν ακριβώς πέντε κανονικά πολύεδρα. Η απόδειξη είναι αρκετά απλή. Έστω  $p$  το πλήθος των κορυφών ανά έδρα (δηλαδή, η κάθε έδρα είναι ένα κανονικό  $p$ -γώνο). Το άθροισμα των γωνιών ενός  $p$ -γώνου είναι  $(p-2)180^\circ$ , και συνεπώς κάθε γωνία του κανονικού  $p$ -γώνου είναι  $(p-2)180^\circ/p$ . Έστω  $d$  το πλήθος των εδρών που πρόσκεινται σε κάθε κορυφή. Ο καθοριστικός περιορισμός είναι ότι, για να είναι το πολύεδρο κυρτό, το άθροισμα των γωνιών των εδρών που πρόσκεινται σε κάθε κορυφή πρέπει να είναι μικρότερο από  $360^\circ$ . Παρατηρήστε ότι αν το άθροισμα είναι ακριβώς  $360^\circ$ , τότε η επιφάνεια του πολυέδρου στη γειτονιά της κορυφής είναι επίπεδη. Έχουμε συνεπώς  $d$  γωνίες, καθεμία από τις οποίες είναι ίση με  $(p-2)180^\circ/p$ , ενώ το άθροισμά τους είναι λιγότερο από  $360^\circ$ . Άρα:

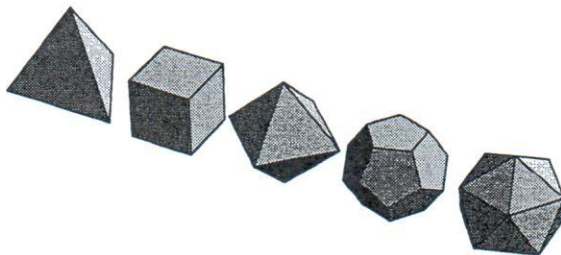
$$\begin{aligned}d(p-2)/p 180^\circ < 360^\circ &\iff dp - 2d < 2p \\ &\iff dp - 2d - 2p + 4 < 4 \\ &\iff (p-2)(d-2) < 4.\end{aligned}$$

Τόσο το  $p$  όσο και το  $d$  είναι προφανώς ακέραιοι. Επειδή ένα πολύγωνο πρέπει να έχει τουλάχιστον τρεις πλευρές,  $p \geq 3$ . Είναι ίσως λιγότερο προφανές ότι  $d \geq 3$ : τουλάχιστον τρεις έδρες πρέπει να συναντώνται σε μια κορυφή. Αυτοί οι περιορισμοί είναι αρκετοί για να περιορίσουν τις δυνατές λύσεις στις πέντε επιλογές του Πίνακα 3.1. Για παράδειγμα, για  $p = 4$  και  $d = 4$  έχουμε  $(p-2)(d-2) = 4$  που παραβιάζει την ανισότητα: εάν συγκολλούσαμε τέσσερα τετράγωνα γύρω από μια κορυφή, τότε τα τετράγωνα αυτά θα ήταν συνεπίεδα και άρα δεν θα είχαμε ένα πολύεδρο.

$p$	$d$	$(p-2)(d-2)$	Όνομα	Περιγραφή
3	3	1	τετράεδρο	3 τρίγωνα σε κάθε κορυφή
4	3	2	κύβος	3 τετράγωνα σε κάθε κορυφή
3	4	2	οκτάεδρο	4 τρίγωνα σε κάθε κορυφή
5	3	3	δωδεκάεδρο	3 πεντάγωνα σε κάθε κορυφή
3	5	3	εικοσάεδρο	5 τρίγωνα σε κάθε κορυφή

Πίνακας 3.1 Τιμές των  $p$  και  $d$ .

Δεν είναι άμεσα φανερό ποια είναι τα στερεά που αντιστοιχούν στις συγκεκριμένες τιμές των  $p$  και  $d$ : τα  $p$  και  $d$  παρέχουν τοπική πληροφορία από την οποία πρέπει να συναχθεί η πληροφορία για ολόκληρο το στερεό. Είναι ωστόσο εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι τα πέντε κανονικά πολύεδρα (Σχήμα 3.2) αντιστοιχούν στα πέντε ζεύγη τιμών  $(p, d)$ . Το πλήθος κορυφών  $V$ , ακμών  $E$  και εδρών  $F$  παρατίθενται στον Πίνακα 3.2.



Σχήμα 3.2 Τα πέντε κανονικά πολύεδρα.

Όνομα	$(p, d)$	$V$	$E$	$F$
Τετράεδρο	(3,3)	4	6	4
Κύβος	(4,3)	8	12	6
Οκτάεδρο	(3,4)	6	12	8
Δωδεκάεδρο	(3,5)	20	30	12
Εικοσάεδρο	(5,3)	12	30	20

Πίνακας 3.2 Πλήθος κορυφών, ακμών και εδρών των πέντε κανονικών πολυέδρων.

### 3.1.2. Ο Τύπος του Euler

Το 1758, ο Leonard Euler παρατήρησε μια εντυπωσιακή σχέση που συνδέει το πλήθος κορυφών, ακμών και εδρών ενός πολυέδρου με genus 0: το άθροισμα του πλήθους κορυφών και εδρών ισούται με το πλήθος των ακμών συν δύο. Και αυτό ισχύει για κάθε πολυέδρο (με genus 0). Για παράδειγμα, ο κύβος έχει 8 κορυφές, 12 ακμές και 6 έδρες, και  $8 + 6 = 12 + 2$ . Εάν συμβολίσουμε με  $V$ ,  $E$  και  $F$  αντίστοιχα το πλήθος κορυφών, ακμών και εδρών ενός πολυέδρου, ο τύπος του Euler (Euler's formula) είναι

$$V - E + F = 2.$$

Κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι η παρατήρηση της ισχύος του τύπου αυτού δεν αποτελεί ένα τόσο σημαντικό επίτευγμα. Θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν όμως ότι ο Euler χρειάστηκε πρώτα να “επινοήσει” τις έννοιες της κορυφής και ακμής για να περιγράψει μαθηματικά την παρατήρησή του. Χρειάστηκε να περάσουν πολλά χρόνια μέχρι να δοθεί κάποια αυστηρή απόδειξη, αν και με τις σημερινές μεθόδους μια απόδειξη δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη.

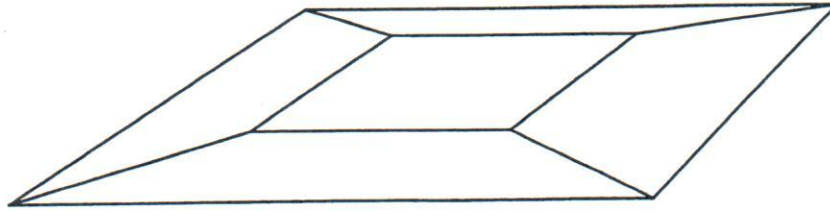
### 3.1.3. Απόδειξη του Τύπου του Euler

Η απόδειξη αποτελείται από τρία μέρη:

1. μετασχηματίζουμε την επιφάνεια του πολυέδρου σε επίπεδο γράφημα
2. αποδεικνύουμε το θεώρημα για δέντρα
3. αποδεικνύουμε το θεώρημα με επαγωγή.

Πρώτα-πρώτα, “απλώνουμε” την επιφάνεια του πολυέδρου  $P$  στο επίπεδο (πιθανώς με σημαντική παραμόρφωση) χρησιμοποιώντας την ακόλουθη διαδικασία. Φανταστείτε ότι η επιφάνεια είναι κατασκευασμένη από ελαστικό υλικό. Επιλέγουμε μια έδρα  $f$  του  $P$  και την αφαιρούμε αφήνοντας μια τρύπα στην επιφάνεια. Τώρα τεντώνουμε το χείλος αυτής της τρύπας μέχρις ότου γίνει μεγαλύτερη από ολόκληρο το  $P$ . Τότε ίσως μπορεί να φανταστεί κάποιος πως η επιφάνεια του  $P$  μπορεί να γίνει επίπεδη και να τοποθετηθεί πάνω στο επίπεδο. Το Σχήμα 3.3 δείχνει πως η επιφάνεια ενός κύβου μπορεί να απλωθεί στο επίπεδο.

Το δεύτερο βήμα είναι να αποδείξουμε τον τύπο του Euler για την ειδική περίπτωση που το γράφημα  $G$  είναι δέντρο. (Φυσικά, ένα πολυέδρο δεν θα οδηγήσει ποτέ σε ένα δέντρο, αλλά η απόδειξη αυτή είναι χρήσιμη για το τελευταίο βήμα της απόδειξης.) Έστω λοιπόν ότι το  $G$  είναι δέντρο με  $V$  κορυφές και  $E$  ακμές. Είναι γνωστό ότι σε



Σχήμα 3.3 Το “άπλωμα” της επιφάνειας ενός κύβου στο επίπεδο.

δέντρα με  $V$  κορυφές και  $E$  ακμές ισχύει  $V = E + 1$ . Επιπλέον το δέντρο ορίζει μία μόνον περιοχή, δηλαδή,  $F = 1$ . Τότε ο τύπος του Euler προκύπτει αμέσως:

$$V - E + F = (E + 1) - E + 1 = 2.$$

Το τρίτο και τελευταίο βήμα της απόδειξης βασίζεται σε επαγωγή στο πλήθος ακμών του γραφήματος. Έστω ότι ο τύπος του Euler ισχύει για όλα τα γραφήματα με το πολύ  $E - 1$  ακμές, και έστω  $G$  ένα γράφημα με  $V$  κορυφές,  $E$  ακμές και  $F$  περιοχές. Εάν το γράφημα είναι δέντρο, ο τύπος ισχύει εξ αιτίας του προηγούμενου βήματος. Εάν τώρα το  $G$  έχει έναν κύκλο, θεωρούμε μια ακμή  $e$  αυτού του κύκλου. Το γράφημα  $G' = G - e$  παραμένει συνεκτικό και έχει  $V$  κορυφές,  $E - 1$  ακμές και  $F - 1$  περιοχές: η αφαίρεση της  $e$  ενώνει δύο περιοχές σε μία. Τότε με βάση την επαγωγική υπόθεση,

$$V - (E - 1) + (F - 1) = 2 \iff V - E + F = 2,$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

### 3.1.4. Γραμμικότητα

Θα δείξουμε τώρα ότι ο τύπος του Euler συνεπάγεται ότι το πλήθος κορυφών, το πλήθος ακμών και το πλήθος εδρών ενός πολυέδρου συνδέονται γραμμικά: εάν  $V = n$ , τότε  $E = O(n)$  και  $F = O(n)$ . Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε το  $n$  κάπως πιο ελεύθερα στην ανάλυση πολυπλοκότητας αλγορίθμων που εκτελούνται σε πολύεδρα.

Για λόγους απλοποίησης της απόδειξης, θεωρούμε ότι κάθε έδρα του πολυέδρου έχει χωριστεί σε τρίγωνα: αυτό αυξάνει τα  $E$  και  $F$ , αλλά όχι το  $V = n$  ως προς το οποίο θέλουμε να εκφράσουμε τα άνω φράγματα των  $E$  και  $F$ . Εάν αθροίσουμε όλες τις ακμές έδρα προς έδρα, το τελικό άθροισμα που υπολογίζουμε είναι  $3F$ , αφού κάθε έδρα έχει τρεις ακμές. Το άθροισμα όμως αυτό ισούται με το διπλάσιο του πλήθους των ακμών, αφού κάθε ακμή ανήκει σε δύο έδρες. Δηλαδή,  $3F = 2E$ . Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στον τύπο του Euler, βρίσκουμε

$$V - E + 2E/3 = 2 \iff V - 2 = E/3 \iff E = 3V - 6 = O(n).$$

Αντίστοιχα,

$$F = 2E/3 = 2V - 4 = O(n).$$

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο ακόλουθο θεώρημα:

### Θεώρημα 3.1.1

Για ένα πολύεδρο με  $V = n$  κορυφές,  $E$  ακμές,  $F$  έδρες και genus 0,  $V - E + F = 2$  και τόσο το  $E$  όσο και το  $F$  είναι  $O(n)$ .

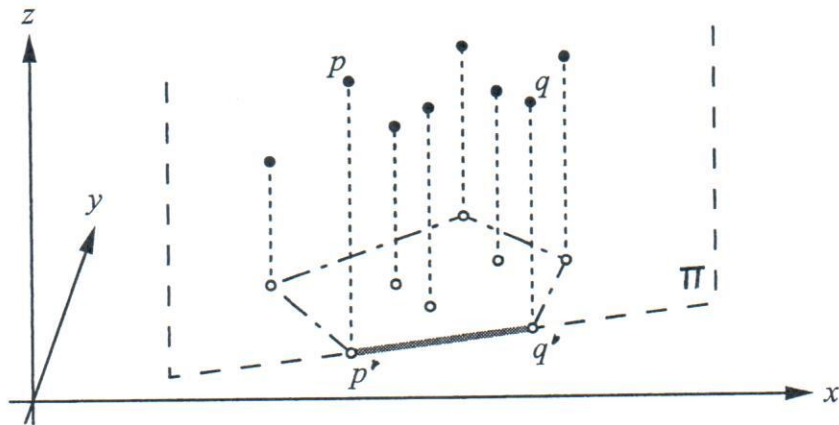
## 3.2 Αλγόριθμοι για το Κυρτό Περιβλήμα

Οι αλγόριθμοι για τον υπολογισμό του κυρτού περιβλήματος στις τρεις διαστάσεις είναι πολύ περισσότερο πολύπλοκοι από τους διδιάστατους αλγορίθμους. Παρουσιάζουμε παρακάτω τον αλγόριθμο περιτυλίγματος, τον αλγόριθμο “διαίρει και βασίλευε” και τον αυξητικό αλγόριθμο στις τρεις διαστάσεις.

### 3.2.1. Ο Αλγόριθμος Περιτυλίγματος (Gift Wrapping)

Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 2, ο αλγόριθμος Περιτυλίγματος επινοήθηκε για κυρτά περιβλήματα σε οποιαδήποτε διάσταση (Chand και Karur, 1970). Η τριδιάστατη έκδοση είναι μια άμεση γενίκευση του διδιάστατου αλγορίθμου. Σε κάθε βήμα, επεκτείνουμε ένα ήδη υπάρχον συνεκτικό κομμάτι  $H$  του περιβλήματος. Επιλέγουμε μια ακμή  $e$  του  $H$  η οποία πρόσκειται σε μία μόνο έδρα  $F$  στο  $H$ . Στρέφουμε το επίπεδο  $\Pi$  της  $F$  γύρω από την  $e$  με κατεύθυνση προς το σύνολο σημείων μέχρις ότου έρθει σε επαφή με το πρώτο σημείο  $p$  του συνόλου. Τότε, το τρίγωνο που ορίζεται από το  $p$  και την  $e$  είναι μια νέα τριγωνική έδρα του κυρτού περιβλήματος και η διαδικασία περιτύλιξης συνεχίζεται. Όπως και στις δύο διαστάσεις, το  $p$  χαρακτηρίζεται από την μικρότερη γωνία στροφής του  $\Pi$ .

Μια προσεκτική υλοποίηση μπορεί να πετύχει  $O(n^2)$  πολυπλοκότητα χρόνου:  $O(n)$  χρόνο για κάθε έδρα του περιβλήματος, και, όπως είδαμε στο Θεώρημα 3.1.1, το πλήθος των εδρών είναι  $O(n)$ . Όπως αναφέρθηκε και στις δύο διαστάσεις, ο αλγόριθμος περιτυλίγματος έχει το πλεονέκτημα ότι είναι output-size sensitive, δηλαδή, έχει πολυπλοκότητα χρόνου  $O(nh)$  για ένα περίβλημα με  $h$  έδρες.



Σχήμα 3.4

### Εκκίνηση του αλγορίθμου περιτυλίγματος

Ο διδιάστατος αλγόριθμος περιτυλίγματος ξεκινά περιτυλίγοντας το σύνολο των σημείων με μια οριζόντια ημιευθεία γύρω από το σημείο με τη μικρότερη  $y$ -συντεταγμένη. Αντίστοιχα, στις τρεις διαστάσεις χρειάζεται να βρούμε μία ακμή του κυρτού περιβλήματος γύρω από την οποία θα στρέψουμε κάποιο κατάλληλο επίπεδο. Οι ακμές του τριδιάστατου κυρτού περιβλήματος προσδιορίζονται χάρις στην εξής ιδιότητα που είναι εύκολο να επαληθευθεί: ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία  $a$  και  $b$  είναι μια ακμή του κυρτού περιβλήματος αν και μόνο αν υπάρχει ένα επίπεδο που περνά από τα  $a$  και  $b$  και αφήνει όλα τα άλλα σημεία από τη μία μόνο πλευρά του.

Με βάση αυτήν την ιδιότητα, μια ακμή εκκίνησης του τριδιάστατου αλγορίθμου περιτυλίγματος προσδιορίζεται ως ακολούθως. Προβάλλουμε το δοσμένο σύνολο σημείων  $S$  σε κάποιο επίπεδο, για ευκολία, το επίπεδο- $xy$ . Τότε κάθε (τριδιάστατο) σημείο  $p$  του  $S$  προβάλλεται σε ένα διδιάστατο σημείο. Με εκτέλεση ενός μόνου βήματος του διδιάστατου αλγορίθμου περιτυλίγματος προσδιορίζουμε μία ακμή του (διδιάστατου) κυρτού περιβλήματος των προβολών των σημείων του  $S$ . Εάν η ακμή αυτή ορίζεται από τις προβολές  $p'$  και  $q'$  των σημείων  $p$  και  $q$  του  $S$ , τότε η  $pq$  είναι μία ακμή του κυρτού περιβλήματος του  $S$  (Σχήμα 3.4). Ας δούμε γιατί. Η ακμή  $p'q'$  είναι ακραία για το σύνολο των προβολών των σημείων και άρα όλα τα σημεία στο επίπεδο- $xy$  βρίσκονται από τη μία μεριά της μόνον. Εάν λοιπόν θεωρήσουμε το επίπεδο  $\Pi$  που περνά από τα  $p'$  και  $q'$  και είναι παράλληλο με τη διεύθυνση προβολής (δηλαδή, είναι παράλληλο στον άξονα των  $z$ ), τότε παρατηρούμε ότι το  $\Pi$  περνά από τα  $p$  και  $q$  και αφήνει όλα τα σημεία του  $S$  από τη μία πλευρά του. Δηλαδή, σύμφωνα με την ιδιότητα που παραθέσαμε παραπάνω, η ακμή  $pq$  είναι ακμή του κυρτού περιβλήματος του  $S$ .



Η διαδικασία εύρεσης της ακμής εκκίνησης απαιτεί συνολικά  $O(n)$  χρόνο:  $O(n)$  χρόνο για τον υπολογισμό των προβολών και  $O(n)$  χρόνο για την εκτέλεση του πρώτου βήματος του διδιάστατου αλγορίθμου περιτυλίγματος. Έχοντας βρει την ακμή  $pq$ , ο τριδιάστατος αλγόριθμος περιτυλίγματος μπορεί πλέον να ξεκινήσει στρέφοντας το κάθετο επίπεδο  $\Pi$  γύρω από την  $pq$  ωστόσο αυτό έλθει σε επαφή με κάποιο σημείο του  $S$  προσδιορίζοντας έτσι την πρώτη έδρα του κυρτού περιβλήματος.

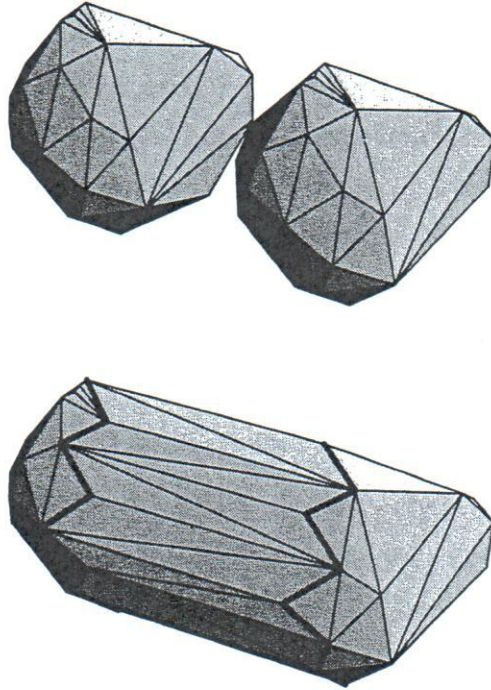
### 3.2.2. Ο Αλγόριθμος “Διαίρει και Βασίλευε”

Προφανώς το κάτω φράγμα για το πρόβλημα του κυρτού περιβλήματος στις τρεις διαστάσεις δεν μπορεί να είναι ασυμπτωτικά μικρότερο από το αντίστοιχο κάτω φράγμα στις δύο διαστάσεις:  $\Omega(n \log n)$ . Και όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο αλγόριθμος “διαίρει και βασίλευε” των Preparata και Hong (1977) επεκτείνεται στις τρεις διαστάσεις όπου και επιτυγχάνει τη βέλτιστη  $O(n \log n)$  πολυπλοκότητα χρόνου. Ο αλγόριθμος αυτός είναι πολύ σημαντικός, αλλά μάλλον δύσκολος να υλοποιηθεί και έτσι δεν χρησιμοποιείται στην πράξη στο βαθμό που χρησιμοποιούνται άλλοι αλγόριθμοι, όπως για παράδειγμα ο αυξητικός αλγόριθμος (Παράγραφος 3.2.3).

Η μέθοδος είναι ίδια όπως στις δύο διαστάσεις: ταξινομούμε τα σημεία ως προς τη  $x$ -συντεταγμένη τους, τα χωρίζουμε σε δύο σύνολα, κατασκευάζουμε αναδρομικά τα κυρτά περιβλήματα των δύο συνόλων τα οποία και συγχωνεύουμε κατόπιν σε ένα συνολικό κυρτό περίβλημα. Η συγχώνευση πρέπει να εκτελεστεί σε  $O(n)$  χρόνο ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή  $O(n \log n)$  συνολική πολυπλοκότητα χρόνου. Όλη η δουλειά του αλγορίθμου εντοπίζεται στη φάση της συγχώνευσης και έτσι επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας σ’ αυτήν.

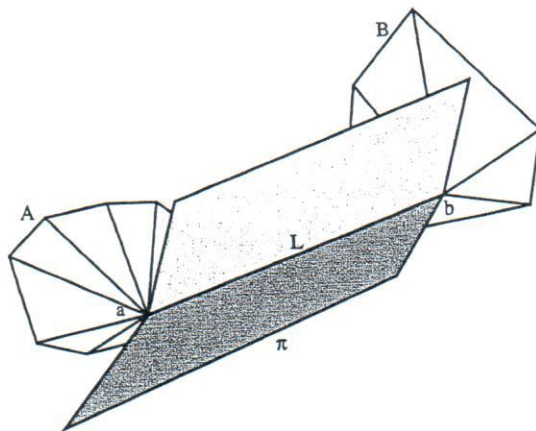
Έστω  $A$  και  $B$  τα δύο κυρτά πολύεδρα που επιθυμούμε να συγχωνεύσουμε σε ένα συνολικό κυρτό πολύεδρο. Το κυρτό περίβλημα της ένωσης  $A \cup B$  θα προσθέσει έναν “κύλινδρο” από έδρες. Αυτός ο κύλινδρος συγκολλάται σε καθένα από τα πολύεδρα κατά μήκος μιας κλειστής πολυγωνικής γραμμής την οποία ονομάζουμε *ορίζοντα*. Δες Σχήμα 3.5. Το πλήθος των εδρών του κυλίνδρου είναι γραμμικό στο συνολικό πλήθος κορυφών των δύο πολυέδρων: κάθε έδρα πρόσκειται σε τουλάχιστον μία ακμή του  $A$  ή  $B$  και καθώς μια ακμή πρόσκειται σε ακριβώς δύο έδρες, το συνολικό πλήθος αυτών των εδρών δεν ξεπερνά το διπλάσιο του συνολικού πλήθους ακμών. Συνεπώς, είναι εφικτό να εκτελέσουμε τη συγχώνευση των πολυέδρων σε γραμμικό χρόνο, με την προϋπόθεση ότι κάθε έδρα μπορεί να προστεθεί σε σταθερό χρόνο (κατά μέσο όρο).

Έστω  $\Pi$  ένα επίπεδο που εφάπτεται στο κάτω μέρος των  $A$  και  $B$  στις κορυφές  $a$



Σχήμα 3.5 Συγχώνευση δύο κυρτών πολυέδρων.

του  $A$  και  $b$  του  $B$ . Για λόγους απλότητας, υποθέτουμε ότι τα  $a$  και  $b$  είναι τα μόνα σημεία επαφής. Τότε, το  $\Pi$  περνά από την ευθεία  $L$  που ορίζεται από τα  $a$  και  $b$ . Τώρα, ας “τσακίσουμε” το επίπεδο κατά μήκος της  $L$  και ας το περιστρέψουμε γύρω από την  $L$  έως ότου έλθει σε επαφή με το ένα από τα δύο πολύεδρα (Σχήμα 3.6). Η καθοριστική παρατήρηση είναι ότι εάν το  $\Pi$  ακουμπήσει πρώτα το πολύεδρο  $A$  στην κορυφή του  $c$ , τότε το ευθύγραμμο τμήμα  $ac$  είναι ακμή του  $A$ . Με άλλα λόγια, το πρώτο σημείο  $c$  που ακουμπά το  $\Pi$  είναι μια κορυφή γειτονική στο  $a$  ή στο  $b$ . Αυτό περιορίζει τις



Σχήμα 3.6 Το επίπεδο  $\Pi$  περιστρέφεται γύρω από την  $L$ .

κορυφές που χρειάζεται να ελεγχθούν ώστε να προσδιοριστεί το επόμενο σημείο επαφής. Παραθέτουμε την παραπάνω παρατήρηση ως Λήμμα χωρίς να το αποδεικνύουμε.

### Λήμμα 3.2.1

Το πρώτο σημείο  $c$  με το οποίο έρχεται σε επαφή το επίπεδο  $\Pi$  (όταν περιστραφεί γύρω από τη γραμμή  $ab$  με τον τρόπο που περιγράφεται παραπάνω) είναι μια κορυφή γειτονική στο  $a$  ή στο  $b$ .

Μόλις το  $\Pi$  έλθει σε επαφή με το  $c$ , έχουμε αμέσως βρει μια τριγωνική έδρα του κυλίνδρου που συνδέει τα δύο πολύεδρα: το τρίγωνο  $(a, b, c)$ . Η διαδικασία επαναλαμβάνεται αυτή τη φορά γύρω από τη γραμμή που ορίζεται από τα  $c$  και  $b$  (εάν  $c \in A$ ). Αυτή η διαδικασία περιτυλίγματος σταματά όταν ο κύλινδρος κλείσει. Έτσι, αυτό που πρέπει να δειχθεί είναι ότι το σημείο  $c$  μπορεί να βρεθεί σε σταθερό χρόνο κατά μέσο όρο, ώστε το κόστος της συγχώνευσης να είναι γραμμικό στο πλήθος εδρών του κυλίνδρου.

Ας εξετάσουμε πρώτα την επίδοση μιας εξαντλητικής αναζήτησης των κορυφών που είναι γειτονικές στα  $a$  και  $b$ . Ορίζουμε τη γωνία μιας υποψήφιας κορυφής  $c$  ως τη γωνία που πρέπει να στραφεί το επίπεδο  $\Pi$  γύρω από την ευθεία  $\overline{ab}$  από την αρχική του θέση μέχρι να έρθει σε επαφή με το  $c$ . Έστω  $\hat{\alpha}$  η κορυφή με τη μικρότερη γωνία ανάμεσα στις γειτονικές κορυφές του  $a$ :  $\hat{\alpha}$  είναι ο “ $A$ -νικητής”. Αντίστοιχα για το πολύεδρο  $B$  έχουμε τον “ $B$ -νικητή”  $\hat{\beta}$ . Ο τελικός νικητής  $c$  είναι είτε ο  $\hat{\alpha}$  είτε ο  $\hat{\beta}$ , όποιος από τους δύο χαρακτηρίζεται από τη μικρότερη γωνία. Προφανώς, το  $c$  μπορεί να βρεθεί σε χρόνο ανάλογο προς το πλήθος των κορυφών που είναι γειτονικές στο  $a$  ή στο  $b$ .

Αμέσως παρατηρούμε δύο προβλήματα. Πρώτον, ο προσδιορισμός ενός μόνον σημείου  $c$  μπορεί να απαιτήσει τον έλεγχο  $\Omega(n)$  υποψηφίων κορυφών, στην περίπτωση που τα  $a$  και  $b$  έχουν πολλούς γείτονες. Για να συγχωνεύσουμε πλήρως τα  $A$  και  $B$ , μπορεί να χρειαστούν  $\Omega(n)$  σημεία  $c$ , πράγμα που συνεπάγεται τετραγωνικό χρόνο συγχώνευσης. Αν και δεν μπορούμε να αποφύγουμε το γεγονός ότι ο προσδιορισμός ενός μόνο σημείου  $c$  μπορεί να απαιτήσει  $\Omega(n)$  χρόνο, αυτό τελικά δεν είναι τόσο καταστροφικό όσο φαίνεται, επειδή στόχος μας είναι να πετύχουμε σταθερό χρόνο κατά μέσο όρο για κάθε τέτοιο σημείο. Θα δούμε ότι αυτό είναι πράγματι δυνατόν.

Το δεύτερο πρόβλημα είναι ότι εάν ο  $\hat{\alpha}$  είναι ο τελικός νικητής, η δουλειά για τον προσδιορισμό του  $\hat{\beta}$  φαίνεται να έχει γίνει χωρίς λόγο. Φανταστείτε την περίπτωση που ο αντίστοιχος  $\hat{\alpha}$  επιλέγεται πολλές φορές στη σειρά, ώστε το  $b$  δεν μεταβάλλεται. Ακόμη χειρότερα φανταστείτε ο  $b$  να έχει πολλές γειτονικές κορυφές. Τότε, εάν κάθε φορά βρίσκουμε το αντίστοιχο  $\hat{\beta}$  και μετά το αγνοούμε μπορεί να καταλήξουμε και πάλι σε τετραγωνικό χρόνο συγχώνευσης.

Ευτυχώς, η επανάληψη της αναζήτησης πολλές φορές μπορεί να αποφευχθεί εξ αιτίας της ακόλουθης ιδιότητας μονοτονικότητας. Έστω  $\hat{\alpha}_i$  και  $\hat{\beta}_i$  είναι οι  $A$ - και  $B$ -νικητές αντίστοιχα στην  $i$ -οστή επανάληψη. Τότε:

### Λήμμα 3.2.2

Εάν  $\hat{\alpha}_i$  είναι ο τελικός νικητής, τότε ο  $B$ -νικητής στην επόμενη επανάληψη,  $\hat{\beta}_{i+1}$ , βρίσκεται ανθρωπολογικά ως προς το  $\hat{\beta}_i$  γύρω από το  $b$ .

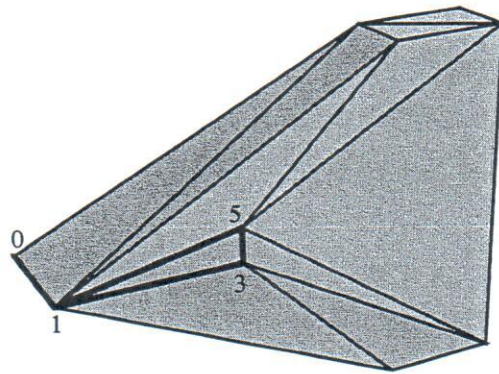
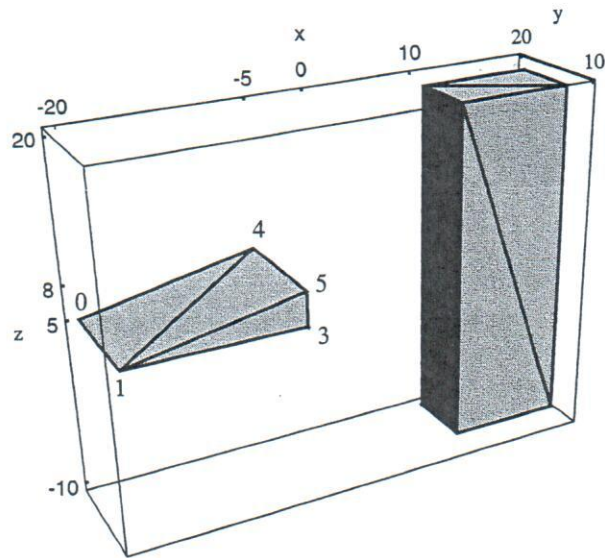
Φυσικά, μια συμμετρική πρόταση με αντεστραμμένους τους ρόλους των  $A$  και  $B$  ισχύει επίσης.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε φορά η αναζήτηση του  $\hat{\alpha}$  και του  $\hat{\beta}$  είτε καταλήγει στον προσδιορισμό του τελικού νικητή, είτε προχωρά ελέγχοντας νέες γειτονικές κορυφές χωρίς όμως ποτέ να οπισθοχωρεί. Συνεπώς, εάν “χρεώσουμε” την αντίστοιχη εργασία στις ακμές που εξετάζονται, κάθε ακμή θα χρεωθεί το πολύ δύο φορές (μία φορά για κάθε ένα από τα δύο άκρα της). Δηλαδή, ο προσδιορισμός των εδρών του κυλίνδρου μπορεί να επιτευχθεί σε γραμμικό χρόνο.

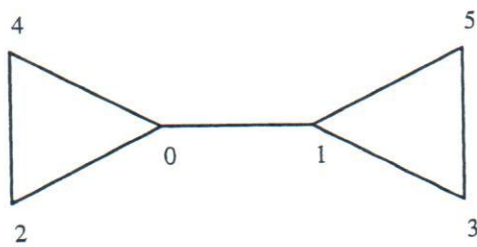
### Αφαίρεση των Εσωτερικών Εδρών

Μετά τον προσδιορισμό των εδρών του κυλίνδρου που συνδέει τα  $A$  και  $B$ , θα πρέπει να βρούμε και να αφαιρέσουμε τις εδρες που βρίσκονται στο εσωτερικό αυτού του κυλίνδρου. Δυστυχώς, η διαδικασία προσδιορισμού του κυλίνδρου δεν μας παρέχει πληροφορία σχετικά με το ποιες έδρες πρέπει να αφαιρεθούν. Βέβαια, προσδιορίζει πλήρως τους ορίζοντες που αντιστοιχούν στα  $A$  και  $B$ . Διαισθητικά, κάποιος θα μπορούσε να αφαιρέσει τις εσωτερικές έδρες αποσυνδέοντας το σύνορο των  $A$  και  $B$  κατά μήκος των αντιστοίχων οριζόντων.

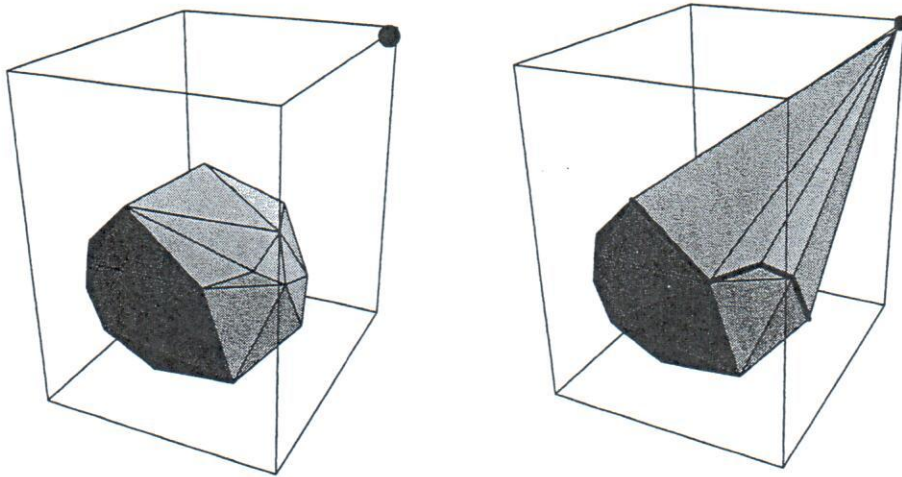
Μια μικρή λεπτομέρεια που θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν είναι ότι ο κάθε ορίζοντας δεν είναι απαραίτητα μια απλή κλειστή πολυγωνική γραμμή: μπορεί να έχει ακμές που διασχίζονται δύο φορές σε αντίθετες κατευθύνσεις. Αυτό δείχνεται στο Σχήμα 3.7. Οι κορυφές κατά μήκος του ορίζοντα στο πολύεδρο στα αριστερά είναι 0,2,4,0,1,3,5,1 και παρουσιάζουν την τοπολογία του Σχήματος 3.8. Παρατηρήστε ότι ο ορίζοντας διατρέχει την ακμή μεταξύ των κορυφών 0 και 1 δύο φορές. Παρά αυτή τη μικρή επιπλοκή, οι εσωτερικές έδρες σχηματίζουν ένα συνεκτικό τμήμα του συνόρου του πολυέδρου και μπορούν να προσδιοριστούν με αναζήτηση (πχ, αναζήτηση κατά βάθος) ξεκινώντας από τις εσωτερικές έδρες που είναι γειτονικές στον ορίζοντα.



Σχήμα 3.7 Πολύεδρα πριν και μετά τη συγχώνευση.



Σχήμα 3.8 Η τοπολογία του οριζοντα στο ένα πολύεδρο του Σχήματος 3.7.



Σχήμα 3.9 Το  $H_{i-1}$  και το  $H_i$  μετά την προσθήκη του σημείου.

### 3.2.3. Ο Αυξητικός (Incremental) Αλγόριθμος

Η δομή του τριδιάστατου αυξητικού αλγορίθμου<sup>2</sup> ταυτίζεται με τη δομή της διδιάστατης έκδοσης: στην  $i$ -οστή επανάληψη, το τρέχον κυρτό περίβλημα  $H_i$  είναι το κυρτό περίβλημα του  $H_{i-1}$  και του τρέχοντος σημείου  $p_i$ . Όπως στον διδιάστατο αλγόριθμο, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τον υπολογισμό του  $H_i$ . Ελέγχουμε εάν το  $p_i$  ανήκει στο  $H_{i-1}$ . Εάν ναι, αγνοούμε το  $p_i$  και  $H_i = H_{i-1}$ . Εάν όχι, υπολογίζουμε τον “κώνο” που έχει κορυφή το  $p_i$  και εφάπτεται στο  $H_{i-1}$ , και κατασκευάζουμε το νέο περίβλημα (Σχήμα 3.9).

Ο έλεγχος εάν το  $p_i \in H_{i-1}$  μπορεί να εκτελεστεί με τον ίδιο τρόπο όπως και στις δύο διαστάσεις: το  $p_i$  είναι μέσα στο  $H_{i-1}$  αν και μόνο αν το  $p_i$  βρίσκεται από την αριστερή πλευρά του επιπέδου κάθε έδρας του  $H_{i-1}$  (υπό την προϋπόθεση ότι η κάθε έδρα έχει τον κατάλληλο προσανατολισμό: η σειρά των κορυφών κάθε έδρας, όπως αυτή φαίνεται από το εξωτερικό του πολυέδρου, ακολουθεί την ανθρωπολογιακή φορά). Ο έλεγχος για το εάν ένα σημείο είναι από την αριστερή πλευρά ενός επιπέδου που ορίζεται από τρία σημεία γίνεται χρησιμοποιώντας τον (προσημασμένο) όγκο του τετραέδρου που ορίζουν τα τέσσερα σημεία, ακριβώς όπως στις δύο διαστάσεις ο έλεγχος για το εάν ένα σημείο είναι στα αριστερά ενός ευθυγράμμου τμήματος γίνεται χρησιμοποιώντας το προσημασμένο εμβαδόν του αντίστοιχου τριγώνου. Ο έλεγχος αυτός προφανώς μπορεί να εκτελεστεί σε χρόνο ανάλογο του πλήθους των εδρών του  $H_{i-1}$  που όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι  $O(n)$ .

Όταν το σημείο  $p_i$  δεν ανήκει στο  $H_{i-1}$ , το πρόβλημα είναι πιο δύσκολο καθώς

<sup>2</sup> Όταν χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό κυρτών περιβλημάτων σε οποιαδήποτε διάσταση, ο αλγόριθμος αυτός συχνά αναφέρεται και ως μέθοδος “beneath-beyond.”

το περίβλημα θα πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα. Στη διδιάστατη έκδοση, η τροποποίηση απαιτούσε την εύρεση των δύο εφαπτομένων από το σημείο στο τρέχον κυρτό περίβλημα (Σχήμα 2.8). Στις τρεις διαστάσεις, υπάρχουν εφαπτόμενα επίπεδα αντί για εφαπτόμενες γραμμές. Αυτά τα επίπεδα περικλείουν έναν “κώνο” από τριγωνικές έδρες καθεμία από τις οποίες ορίζεται από το  $p_i$  και μία ακμή του  $H_{i-1}$ . Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 3.9. Ας δούμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τις έδρες αυτού του κώνου.

Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στο σημείο  $p_i$  έξω από το  $H_{i-1}$  και κυττάζουμε προς το  $H_{i-1}$ . Ας υποθέσουμε επίσης ότι το  $p_i$  δεν είναι συνεπίπεδο με καμία έδρα του πολυέδρου: δηλαδή, μια έδρα του  $H_{i-1}$  είτε είναι εντελώς ορατή είτε δεν είναι καθόλου ορατή από το  $p_i$ . Δεν είναι δύσκολο να παρατηρήσει κανείς ότι οι ορατές έδρες είναι ακριβώς οι έδρες που θα αγνοήσουμε κατά τη μετάβαση από το  $H_{i-1}$  στο  $H_i$ . Επιπλέον, οι ακμές του ορίζοντα, οι ακμές δηλαδή που περικλείουν την ορατή περιοχή, είναι ακριβώς οι ακμές που μαζί με το  $p_i$  ορίζουν τις έδρες του κώνου. Η περίπτωση είναι εντελώς ανάλογη με τις ορατές έδρες και τον ορίζοντα της προηγούμενης παραγράφου με την εξαίρεση ότι τώρα αντί να έχουμε δύο κυρτά πολυέδρα, έχουμε ένα κυρτό πολυέδρο και ένα σημείο. Εξ αιτίας αυτής της διαφοράς, ο ορίζοντας στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε τώρα είναι μία απλή κλειστή πολυγωνική γραμμή κατά μήκος ακμών του  $H_{i-1}$ .

Οι παραπάνω διαπιστώσεις συνεπάγονται ότι ο καθορισμός των ορατών και μη ορατών εδρών του  $H_{i-1}$  μας επιτρέπει να βρούμε τις ακμές του ορίζοντα, και άρα να κατασκευάσουμε τον κώνο, αλλά και να εντοπίσουμε τις έδρες που θα αγνοήσουμε. Το εάν μια έδρα είναι ορατή ή όχι εξαρτάται από το εάν το  $p_i$  είναι δεξιά από το επίπεδο της έδρας ή όχι αντίστοιχα. Άρα, σύμφωνα με όσα αναφέραμε κατά τον έλεγχο του εάν το σημείο  $p_i$  ανήκει στο  $H_{i-1}$  ή όχι, μια τριγωνική έδρα  $(a, b, c)$  είναι ορατή από το  $p_i$  αν και μόνο αν ο προσημασμένος όγκος του τετραέδρου που ορίζουν τα  $a, b, c$  και  $p_i$  είναι αρνητικός. Μάλιστα, ο έλεγχος για το εάν το σημείο  $p_i$  ανήκει στο  $H_{i-1}$  και ο εντοπισμός των ορατών εδρών μπορούν να γίνουν παράλληλα, όπως φαίνεται στον Αλγόριθμο 3.1 που περιγράφει σε γενικές γραμμές τα βασικά βήματα του αλγορίθμου.

Δεδομένου ότι  $F = O(n)$  και  $E = O(n)$ , όπου  $n$  είναι το πλήθος κορυφών ενός πολυέδρου (Θεώρημα 3.1.1), οι βρόχοι που διατρέχουν τις ακμές και τις έδρες απαιτούν γραμμικό χρόνο. Καθώς αυτοί οι βρόχοι εκτελούνται για κάθε επανάληψη ενός άλλου εξωτερικού βρόχου που εκτελείται  $n$  φορές, η συνολική πολυπλοκότητα χρόνου είναι τετραγωνική:  $O(n^2)$ .

---

```

/* αυξητικός αλγόριθμος για 3-διάστατα κυρτά περιβλήματα */
H4 ← τετράεδρο(p1, p2, p3, p4).
for (i = 5, ..., n) do
    πλήθος_ορατών_εδρών ← 0
    for (κάθε έδρα f του Hi-1) do
        if (ο όγκος του τετραέδρου(f, pi) < 0)
            then η f είναι ορατή
                πλήθος_ορατών_εδρών ← πλήθος_ορατών_εδρών + 1
    if (πλήθος_ορατών_εδρών = 0)
        then Hi ← Hi-1
    else
        for (κάθε ακμή e του Hi-1 στον ορίζοντα) do
            κατασκεύασε την έδρα του κώνου που ορίζεται από την e και το pi
        for (κάθε ορατή έδρα f) do
            διάγραψε την f
        ενημέρωσε το κυρτό περίβλημα Hi

```

---

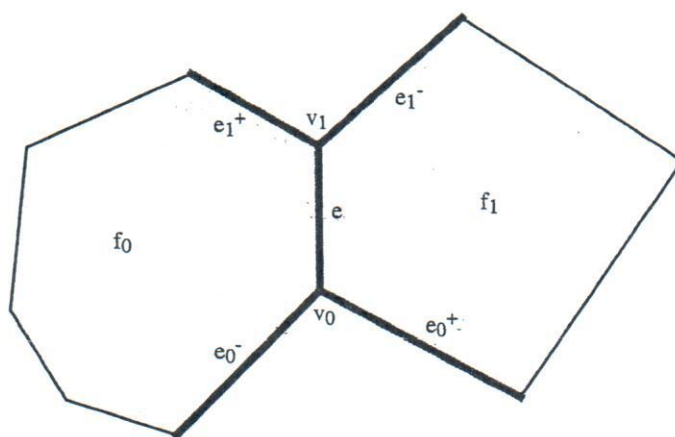
**Αλγόριθμος 3.1** Ο Αυξητικός αλγόριθμος στις τρεις διαστάσεις.

### 3.3 Τρόποι Παράστασης του Συνόρου Πολυέδρου

Η παράσταση του συνόρου ενός πολυέδρου ή ενός πιο γενικού αντικειμένου στον υπολογιστή έχει εξελιχθεί σε έναν σημαντικό τομέα μέσα στους ευρύτερους τομείς των γραφικών, της γεωμετρικής μοντελοποίησης και της υπολογιστικής γεωμετρίας. Κύρια απαίτηση για την αποτελεσματικότητα ενός τρόπου παράστασης είναι αυτός να μας επιτρέπει να εκτελούμε εύκολα κάποιες βασικές λειτουργίες, όπως για παράδειγμα να μπορούμε να κινηθούμε κατά μήκος του συνόρου μιας περιοχής/έδρας ή να μπορούμε να μετακινηθούμε από μια περιοχή σε μια γειτονική της όταν μας δίδεται η κοινή τους ακμή. Για αυτό το λόγο, οι τρόποι παράστασης που έχουν προταθεί αποθηκεύουν στις εγγραφές των κορυφών, των ακμών και των περιοχών την κατάλληλη γεωμετρική και τοπολογική πληροφορία (γειτνίαση, κλπ). Επιπρόσθετα, μια εγγραφή μπορεί να περιέχει και άλλες πληροφορίες. Για παράδειγμα, εάν οι έδρες ενός πολυέδρου έχουν χρωματιστεί με κάποιο χρώμα και μας ενδιαφέρει να καταχωρήσουμε αυτήν την πληροφορία στην παράσταση του πολυέδρου, μπορούμε να ορίσουμε ένα πεδίο χρώματος στις εγγραφές των εδρών και να αποθηκεύσουμε σε αυτό το αντίστοιχο χρώμα.

Τρεις από τους πιο σημαντικούς τρόπους παράστασης δίνονται παρακάτω. Η περι-





Σχήμα 3.10 Η winged-edge δομή δεδομένων.

γραφή μας επικεντρώνεται στην καταχώριση της γεωμετρικής και τοπολογικής πληροφορίας.

### 3.3.1. Η Winged-Edge Δομή Δεδομένων

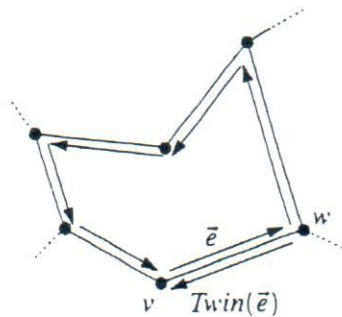
Ένας από τους πρώτους τρόπους παράστασης και ίσως ο πιο δημοφιλής ακόμη και σήμερα είναι η *winged-edge* (“ακμή με φτερά”) δομή δεδομένων που προτάθηκε από τον Baumgart (1975). Η δομή εστιάζεται γύρω από την εγγραφή της ακμής. Η εγγραφή κάθε κορυφής απλά περιλαμβάνει έναν δείκτη προς την εγγραφή μιας από τις γειτονικές της ακμές (επιπλέον της πληροφορίας που αφορά καθαρά στην κορυφή, πχ συντεταγμένες, κλπ). Αντίστοιχα, η εγγραφή κάθε έδρας περιλαμβάνει έναν δείκτη προς την εγγραφή κάποιας από τις ακμές της. Αντίθετα, η εγγραφή μιας ακμής  $e$  περιλαμβάνει οκτώ δείκτες: στις δύο κορυφές της  $v_0$  και  $v_1$ , στις δύο γειτονικές έδρες  $f_0$  και  $f_1$  αριστερά και δεξιά του (κατευθυνόμενου) ευθύγραμμου τμήματος  $v_0v_1$  και σε τέσσερις ακμές (τα “φτερά” της  $e$ ), τις ακμές  $e_0^-$  και  $e_0^+$  που είναι γειτονικές στην κορυφή  $v_0$  κατά την ανθρωπολογιακή και την ωρολογιακή φορά αντίστοιχα, και τις  $e_1^-$  και  $e_1^+$  γειτονικές στην κορυφή  $v_1$  κατά την ανθρωπολογιακή και την ωρολογιακή φορά αντίστοιχα (Σχήμα 3.10). Παρατηρήστε ότι και οι τρεις τύποι εγγραφών έχουν σταθερό μέγεθος, ένα πολύ χρήσιμο χαρακτηριστικό.

Ως παράδειγμα χρήσης της δομής δεδομένων ας δούμε πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ακμές που περικλείουν μια έδρα  $f$ : αρκεί να μεταβούμε στην μοναδική ακμή  $e$  στην οποία δείχνει η εγγραφή της  $f$  και από εκεί με διαδοχικές μεταβάσεις στις ακμές  $e_0^+$  ή  $e_1^+$  μέχρις ότου συναντήσουμε και πάλι την  $e$ .

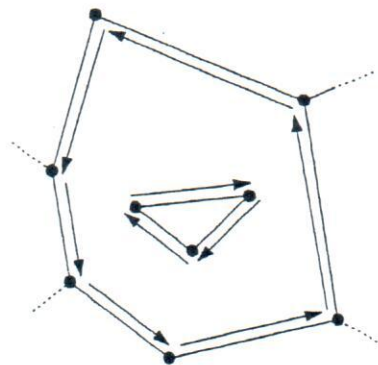
### 3.3.2. Η Διπλά Συνδεδεμένη Λίστα Ακμών (doubly-connected edge list)

Η διπλά συνδεδεμένη λίστα ακμών (doubly-connected edge list) βασίζεται στην παράσταση των δύο πλευρών μιας ακμής ως δύο ξεχωριστές ημι-ακμές (half-edge), οι οποίες ονομάζονται δίδυμες (twins). Αυτό συνεπάγεται ότι κάθε ημι-ακμή ανήκει στο σύνορο μίας μόνο περιοχής/έδρας. Οι ημι-ακμές είναι κατευθυνόμενες και συνήθως οι φορές τους είναι σύμφωνες με τη διάσχιση του συνόρου των περιοχών/εδρών κατά την ανθωρολογιακή φορά. Τότε, η περιοχή/έδρα που είναι γειτονική σε μια ημι-ακμή βρίσκεται στα αριστερά ενός παρατηρητή που κινείται κατά μήκος της κατευθυνόμενης ημι-ακμής. Επίσης, για κάθε ημι-ακμή μπορούμε να ορίσουμε την κορυφή αφετηρίας της και την κορυφή προορισμού της. Εάν μια ημι-ακμή  $\vec{e}$  έχει ως αφετηρία της την κορυφή  $v$  και ως προορισμό της την κορυφή  $w$ , τότε η δίδυμή της  $Twin(\vec{e})$  έχει ως αφετηρία της το  $w$  και ως προορισμό της το  $v$  (Σχήμα 3.11). Για να έχουμε πρόσβαση στο σύνορο μιας περιοχής/έδρας, συμπεριλαμβάνουμε στην εγγραφή της περιοχής έναν δείκτη σε μία από τις ημι-ακμές που περικλείουν την περιοχή. Τότε, μπορούμε να κινηθούμε κατά μήκος του συνόρου της περιοχής ξεκινώντας από αυτήν την ημι-ακμή και πηγαίνοντας από εκεί στην επόμενη της, και από εκεί στην επόμενη της, κ.ο.κ.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις δεν ισχύουν για περιοχές/έδρες που έχουν τρύπες: εάν ένας παρατηρητής μετακινηθεί κατά μήκος του συνόρου μιας τρύπας κατά την ανθωρολογιακή φορά τότε η περιοχή που περικλείει την τρύπα θα βρίσκεται στα δεξιά του. Καθώς είναι χρήσιμο όλες οι περιοχές να βρίσκονται από την ίδια πλευρά ως προς όλες τις (κατευθυνόμενες) ημι-ακμές που τις περικλείουν, θεωρούμε ότι το σύνορο κάθε τρύπας διαγράφεται κατά την ωρολογιακή φορά (Σχήμα 3.12). Με αυτόν τον τρόπο, μια περιοχή βρίσκεται πάντα στα αριστερά κάθε ημι-ακμής της. Μια άλλη συνέπεια είναι ότι οι δίδυμες ημι-ακμές έχουν πάντοτε αντίθετες φορές. Θα πρέπει να σημειωθεί



Σχήμα 3.11

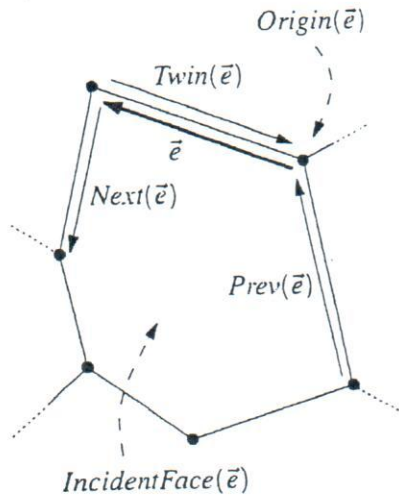


Σχήμα 3.12

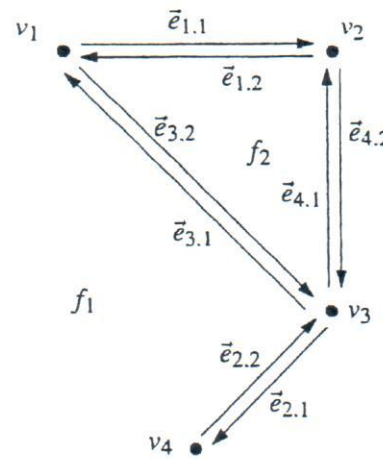
επίσης ότι η παρουσία τρυπών σε μια περιοχή/έδρα συνεπάγεται ότι η καταχώριση ενός μόνο δείκτη στην εγγραφή της περιοχής προς κάποια ημι-ακμή της δεν αρκεί για να μας επιτρέψει να επισκεφθούμε όλες τις ημι-ακμές που είναι γειτονικές στην περιοχή. Τέλος, μια περιοχή μπορεί να έχει μεμονωμένες κορυφές, δηλαδή, κορυφές οι οποίες δεν πρόσκεινται σε καμία ακμή: μπορούμε να χειριστούμε μια τέτοια περίπτωση συμπεριλαμβάνοντας στην εγγραφή της περιοχής δείκτες και σε αυτές τις κορυφές. Για λόγους απλότητας θα αγνοήσουμε αυτήν την περίπτωση.

Συνοψίζοντας, η διπλά συνδεδεμένη λίστα ακμών περιλαμβάνει τρία σύνολα εγγραφών: ένα για τις κορυφές, ένα για τις περιοχές/έδρες και ένα για τις ημι-ακμές. Σε αυτές τις εγγραφές καταχωρούνται οι ακόλουθες γεωμετρικές και τοπολογικές πληροφορίες:

- Η εγγραφή μιας κορυφής  $v$  αποθηκεύει τις συντεταγμένες της  $v$  σε ένα πεδίο  $\text{Coordinates}(v)$ . Περιέχει επίσης έναν δείκτη  $\text{IncidentEdge}(v)$  σε κάποια ημι-ακμή που έχει την κορυφή  $v$  ως κορυφή αφετηρίας.
- Η εγγραφή μιας περιοχής/έδρας  $f$  περιέχει έναν δείκτη  $\text{OuterComponent}(f)$  σε μία ημι-ακμή του εξωτερικού της συνόρου (ο δείκτης αυτός είναι  $\text{nil}$  για περιοχές που δεν έχουν εξωτερικό σύνορο). Περιέχει επίσης μια λίστα  $\text{InnerComponents}(f)$  η οποία έχει έναν κόμβο για καθεμία από τις τρύπες της  $f$ : κάθε τέτοιος κόμβος περιέχει έναν δείκτη σε μία ημι-ακμή του συνόρου της αντίστοιχης τρύπας.
- Η εγγραφή μιας ημι-ακμής  $\vec{e}$  περιέχει έναν δείκτη  $\text{Origin}(\vec{e})$  στην κορυφή αφετηρίας, έναν δείκτη  $\text{Twin}(\vec{e})$  στη δίδυμη ημι-ακμή και έναν δείκτη  $\text{IncidentFace}(\vec{e})$  στην περιοχή/έδρα στην οποία πρόσκειται (Σχήμα 3.13). Δεν χρειάζεται να αποθηκεύσουμε την κορυφή προορισμού γιατί αυτή ταυτίζεται με την  $\text{Origin}(\text{Twin}(\vec{e}))$ . Η κορυφή αφετηρίας ορίζεται έτσι ώστε η περιοχή  $\text{IncidentFace}(\vec{e})$  να βρίσκεται στα αριστερά της  $\vec{e}$  καθώς κινούμαστε από την κορυφή αφετηρίας της προς την κορυφή προορισμού της. Η εγγραφή της ημι-ακμής περιέχει επίσης δείκτες  $\text{Prev}(\vec{e})$  και  $\text{Next}(\vec{e})$  στην προηγούμενη και στην επόμενη ημι-ακμή στο σύνορο της  $\text{IncidentFace}(\vec{e})$ . Συνεπώς, η ημι-ακμή που δείχνεται από τον δείκτη  $\text{Prev}(\vec{e})$  της εγγραφής της  $\vec{e}$  είναι η μόνη ημι-ακμή στο σύνορο της  $\text{IncidentFace}(\vec{e})$  που έχει ως κορυφή προορισμού την κορυφή αφετηρίας της  $\vec{e}$ . Αντίστοιχα, η ημι-ακμή που δείχνεται από τον δείκτη  $\text{Next}(\vec{e})$  της εγγραφής της  $\vec{e}$  είναι η μόνη ημι-ακμή στο σύνορο της  $\text{IncidentFace}(\vec{e})$  που έχει ως κορυφή αφετηρίας την κορυφή προορισμού της  $\vec{e}$ .



Σχήμα 3.13



Σχήμα 3.14

Η περιγραφή των εγγραφών καταδεικνύει ότι οι εγγραφές των κορυφών και των ακμών έχουν σταθερό μέγεθος. Η εγγραφή μιας περιοχής/έδρας ενδέχεται να απαιτήσει περισσότερο χώρο, καθώς η λίστα  $InnerComponents(f)$  έχει τόσους κόμβους όσες είναι οι τρύπες της αντίστοιχης περιοχής. Καθώς μια οποιαδήποτε ημι-ακμή δείχνεται από το πολύ έναν από τους δείκτες όλων των λιστών  $InnerComponents()$  όλων των περιοχών, συμπεραίνουμε ότι το μέγεθος της μνήμης που απαιτείται για την αποθήκευση όλων των εγγραφών είναι γραμμικό στο μέγεθος του αναπαριστώμενου αντικειμένου.

Ας δούμε ένα παράδειγμα μιας διπλά συνδεδεμένης λίστας ακμών για ένα απλό επίπεδο γράφημα (Σχήμα 3.14). Οι δύο ημι-ακμές που αντιστοιχούν στην ακμή  $e_i$  συμβολίζονται με  $\vec{e}_{i,1}$  και  $\vec{e}_{i,2}$ .

Κορυφή	Συντεταγμένες Coordinates	Προσκειμένη Ακμή IncidentEdge
$v_1$	(0,4)	$\vec{e}_{1,1}$
$v_2$	(2,4)	$\vec{e}_{4,2}$
$v_3$	(2,2)	$\vec{e}_{2,1}$
$v_4$	(1,1)	$\vec{e}_{2,2}$

Περιοχή	Εξωτερικό Σύνορο OuterComponent	Εσωτερικά Σύνορα InnerComponents
$f_1$	nil	$\vec{e}_{1,1}$
$f_2$	$\vec{e}_{4,1}$	nil

Ημι-ακμή	Αφετηρία Origin	Δίδυμη Twin	Γειτονική Περιοχή IncidentFace	Επόμενη Next	Προηγούμενη Prev
$\vec{e}_{1,1}$	$v_1$	$\vec{e}_{1,2}$	$f_1$	$\vec{e}_{4,2}$	$\vec{e}_{3,1}$
$\vec{e}_{1,2}$	$v_2$	$\vec{e}_{1,1}$	$f_2$	$\vec{e}_{3,2}$	$\vec{e}_{4,1}$
$\vec{e}_{2,1}$	$v_3$	$\vec{e}_{2,2}$	$f_1$	$\vec{e}_{2,2}$	$\vec{e}_{4,2}$
$\vec{e}_{2,2}$	$v_4$	$\vec{e}_{2,1}$	$f_1$	$\vec{e}_{3,1}$	$\vec{e}_{2,1}$
$\vec{e}_{3,1}$	$v_3$	$\vec{e}_{3,2}$	$f_1$	$\vec{e}_{1,1}$	$\vec{e}_{2,2}$
$\vec{e}_{3,2}$	$v_1$	$\vec{e}_{3,1}$	$f_2$	$\vec{e}_{4,1}$	$\vec{e}_{1,2}$
$\vec{e}_{4,1}$	$v_3$	$\vec{e}_{4,2}$	$f_2$	$\vec{e}_{1,2}$	$\vec{e}_{3,2}$
$\vec{e}_{4,2}$	$v_2$	$\vec{e}_{4,1}$	$f_1$	$\vec{e}_{2,1}$	$\vec{e}_{1,1}$

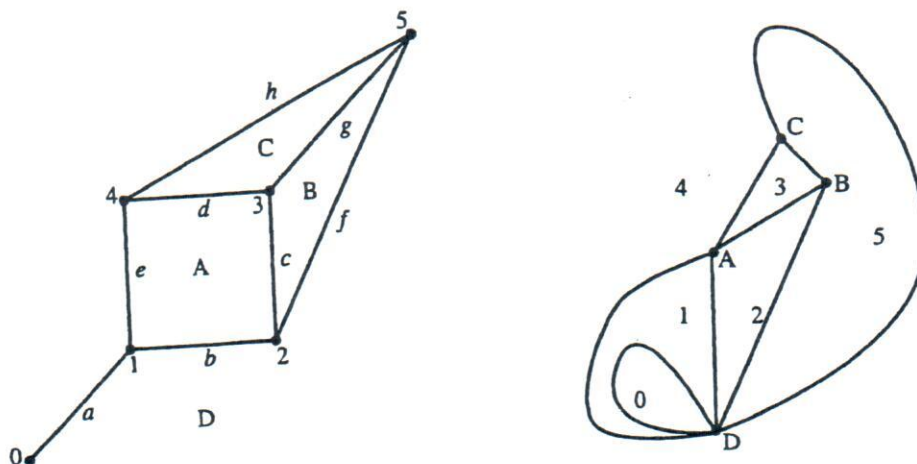
Η πληροφορία η οποία είναι αποθηκευμένη στη διπλά συνδεδεμένη λίστα ακμών αρκεί για να μας επιτρέψει να εκτελέσουμε τις βασικές λειτουργίες που επιθυμούμε. Για παράδειγμα, μπορούμε να κινηθούμε κατά μήκος του εξωτερικού συνόρου μιας περιοχής/έδρας  $f$  ξεκινώντας από την ημι-ακμή  $OuterComponent(f)$  και ακολουθώντας δείκτες  $Next(\vec{e})$ .

Η μορφή της διπλά συνδεδεμένης λίστας ακμών που περιγράψαμε είναι αρκετά γενική. Πιο απλές μορφές μπορεί να είναι επαρκείς για ειδικές εφαρμογές. Παραδείγματος χάριν, εάν σε κάποια εφαρμογή δεν χρησιμοποιούμε επιπλέον πληροφορία για τις κορυφές πέρα από τις συντεταγμένες τους, τότε μπορούμε να καταχωρήσουμε τις συντεταγμένες στο πεδίο  $Origin()$  των ημι-ακμών και να αποφύγουμε να έχουμε εγγραφές για τις κορυφές. Επίσης, εάν σε κάποια άλλη εφαρμογή ο υπολογισμός επικεντρώνεται στην επεξεργασία των κορυφών και των ακμών αλλά όχι των περιοχών/εδρών, τότε μπορούμε να αγνοήσουμε εντελώς τις εγγραφές των περιοχών και το πεδίο  $IncidentFace()$  των ημι-ακμών. Τέλος, κάποιες υλοποιήσεις της διπλά συνδεδεμένης λίστας ακμών ενδέχεται να απαιτούν το γράφημα που ορίζεται από τις κορυφές και τις ακμές να είναι συνεκτικό. Ένας τέτοιος περιορισμός μπορεί πάντοτε να ικανοποιηθεί με την προσθήκη “ψευδών” ακμών και έχει δύο πλεονεκτήματα: πρώτον, εξασφαλίζει ότι μπορούμε να επισκεφθούμε όλες τις ημι-ακμές εφαρμόζοντας κάποιον απλό αλγόριθμο διάσχισης γραφημάτων, και δεύτερον, δεν χρειαζόμαστε πλέον τη λίστα  $InnerComponents()$  στις εγγραφές των περιοχών/εδρών.

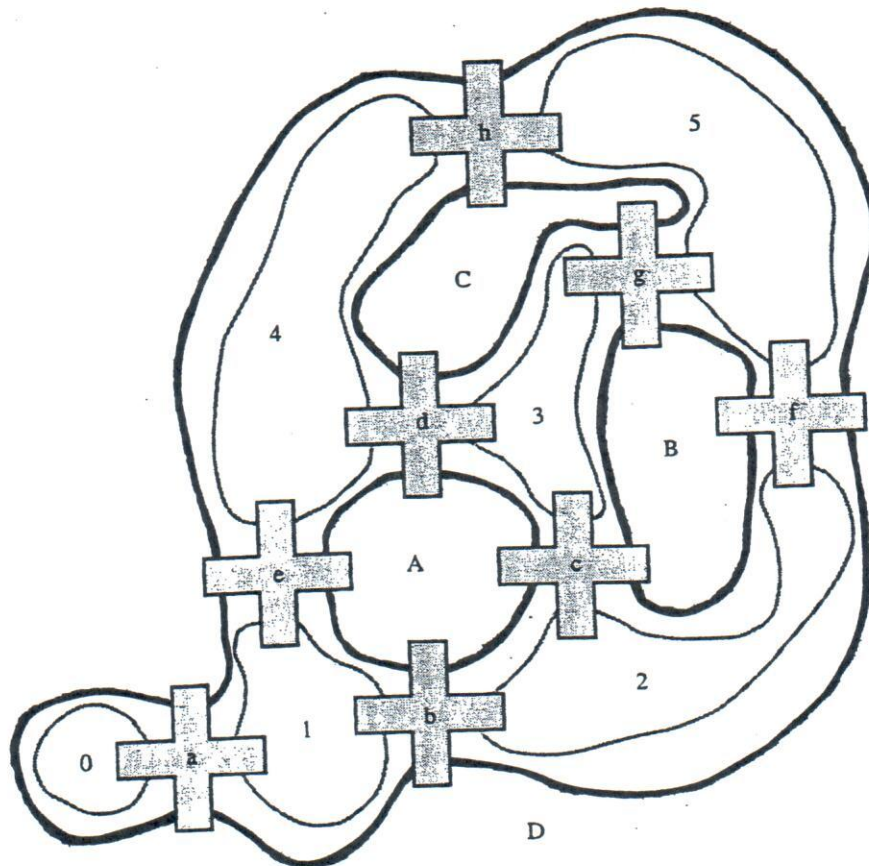
### 3.3.3. Η Quad-Edge Δομή Δεδομένων

Οι Guibas και Stolfi (1985) πρότειναν μια άλλη ιδιαίτερα ελκυστική δομή δεδομένων, που την ονόμασαν *quad-edge* δομή. Αν και περισσότερο πολύπλοκη από τις δύο προηγούμενες δομές, τελικά απλοποιεί αρκετές διαδικασίες και αλγορίθμους. Έχει το πλεονέκτημα ότι είναι αρκετά γενική ώστε να μπορεί να παραστήσει πιο γενικές επιφάνειες από το σύνολο πολυέδρων, επιτρέπει ακμές με άκρα την ίδια κορυφή, δίνει τη δυνατότητα διάκρισης ανάμεσα στις δύο πλευρές μιας επιφάνειας, κλπ.

Η εγγραφή κάθε ακμής συμμετέχει σε τέσσερις κυκλικές λίστες: στις λίστες των δύο γειτονικών κορυφών και των δύο γειτονικών εδρών. Περιέχει συνεπώς τέσσερις δείκτες. Φυσικά μπορεί επίσης να αποθηκευτούν και άλλες επιπλέον πληροφορίες ανάλογα με την εφαρμογή (πχ, γεωμετρική πληροφορία κλπ). Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στα Σχήματα 3.15 και 3.16. Το Σχήμα 3.15(α) δείχνει ένα επίπεδο γράφημα. Παρατηρήστε ότι το συγκεκριμένο γράφημα δεν μπορεί να έχει παραχθεί από ένα πολυέδρο (λόγω της ακμής  $a$ ), αλλά είναι πιο γενικό. Υπάρχουν τρεις εσωτερικές περιοχές/έδρες, οι  $A$ ,  $B$  και  $C$ , ενώ η  $D$  είναι η εξωτερική περιοχή/έδρα. Οι οκτώ ακμές έχουν χαρακτηριστεί με τα γράμματα  $a, \dots, h$  και οι έξι κορυφές με τα  $0, \dots, 5$ . Το Σχήμα 3.16 παρουσιάζει την αντίστοιχη *quad-edge* δομή, όπου κάθε εγγραφή ακμής παρίσταται σαν ένας σταυρός τα τέσσερα άκρα του οποίου αντιστοιχούν στους τέσσερις δείκτες. Κάθε περιοχή/έδρα αντιστοιχεί σε έναν από τους κύκλους με τις έντονες μαύρες γραμμές, ενώ κάθε κορυφή αντιστοιχεί σε έναν από τους κύκλους με τις γκριζες γραμμές. Για παράδειγμα, η περιοχή  $A$  αντιστοιχεί στον κύκλο που αποτελείται από τις ακμές  $(b, c, d, e)$ , και η κορυφή  $3$  στον κύκλο  $(c, g, d)$ . Παρατηρήστε ότι η ακμή  $a$  έχει παρασταθεί ομοιόμορφα με τις άλλες ακμές και εμφανίζεται δύο φορές στον κύκλο της



Σχήμα 3.15 Ένα επίπεδο γράφημα και το αντίστοιχο δυϊκό γράφημα.



Σχήμα 3.16 Η quad-edge δομή για την παράσταση του γραφήματος του Σχήματος 3.15.

εξωτερικής περιοχής  $D$ .

Όπως και στη winged-edge δομή, οι κορυφές και οι περιοχές/έδρες έχουν απλά έναν δείκτη στην εγγραφή μίας από τις γειτονικές ακμές. Η πραγματική παράσταση της κορυφής ή της περιοχής/έδρας είναι ακριβώς η κυκλική λίστα που υλοποιεί τον αντίστοιχο κύκλο, απλώς ο δείκτης δίνει πρόσβαση σ' αυτή τη λίστα.

Ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά της δομής είναι ότι παριστά αυτόματα και το δυϊκό γράφημα. Μιλήσαμε για το δυϊκό γράφημα μιας διαίρεσης σε τρίγωνα στο Κεφάλαιο 1. Το δυϊκό (dual) ενός γενικού επίπεδου γραφήματος  $G$  έχει μία κορυφή για κάθε περιοχή/έδρα του  $G$  και μια ακμή ανάμεσα σε δύο κορυφές όταν οι αντίστοιχες περιοχές είναι γειτονικές στο  $G$ . Το δυϊκό γράφημα έχει μία κορυφή και για την εξωτερική περιοχή του  $G$ . Η παράσταση του δυϊκού γραφήματος στην quad-edge δομή επιτυγχάνεται απλά ερμηνεύοντας τους κύκλους κορυφών (λεπτοί κύκλοι) ως κύκλους περιοχών/εδρών (έντονοι κύκλοι) και αντίστροφα (Σχήμα 3.16): δεν απαιτείται δηλαδή κανένας υπολογισμός!