1. Διαίρεση Πολυγώνων σε Τρίγωνα

1.1 Πολύγωνα

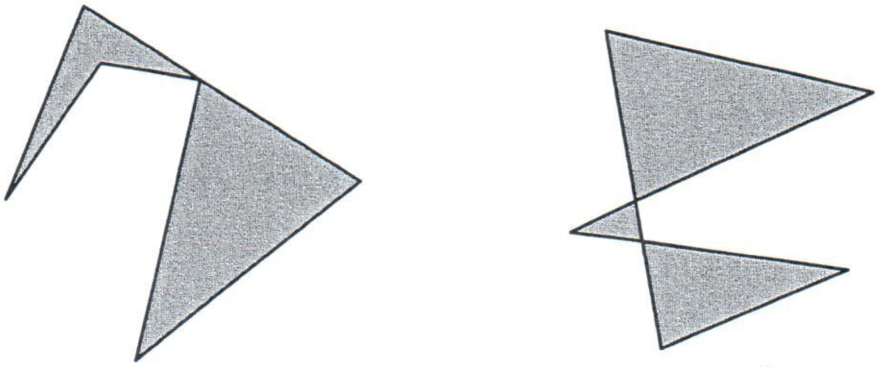
Το μεγαλύτερο μέρος της υπολογιστικής γεωμετρίας ασχολείται με υπολογισμούς που εκτελούνται πάνω σε πολύγωνα. Τα πολύγωνα είναι μια καλή αναπαράσταση για αρκετά αντικείμενα του κόσμου γύρω μας, τόσο γιατί ένα πολύγωνο είναι συχνά ένα αρκετά ακριβές μοντέλο ενός πραγματικού αντικειμένου, αλλά και γιατί είναι εύκολο να το χειριστούμε με τον υπολογιστή. Παραδείγματα χρήσης πολυγώνων περιλαμβάνουν την αναπαράσταση σχημάτων γραμμάτων για αυτόματη αναγνώριση γραφής, την αναπαράσταση εμποδίων που θα πρέπει να αποφύγει ένα ρομπότ, ή την αναπαράσταση κάποιου τμήματος ενός στερεού που θα παρουσιαστεί σε μια οθόνη γραφικών. Ωστόσο, τα πολύγωνα μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκα αντικείμενα και σε αρκετές περιπτώσεις χρειάζεται να θεωρήσουμε ότι αποτελούνται από απλούστερα κομμάτια. Έτσι οδηγούμαστε στο πρόβλημα της διαίρεσης πολυγώνων σε επιμέρους τμήματα.

Ένα **απλό πολύγωνο** *(simple polygon)* είναι η περιοχή του επιπέδου που περικλείεται από ένα πεπερασμένο σύνολο ευθυγράμμων τμημάτων τα οποία σχηματίζουν μία απλή κλειστή πολυγωνική γραμμή. Έστω ότι τα v_1, v_2, $\ldots$, v_n είναι n σημεία στο επίπεδο, και έστω ότι τα $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $\ldots$, $e_n = v_nv_1$ είναι n ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα σημεία. Τότε τα τμήματα αυτά ορίζουν ένα απλό πολύγωνο αν και μόνο αν

1. Η τομή κάθε ζεύγους διαδοχικών τμημάτων είναι το μοναδικό κοινό τους σημείο: $e_i \cap e_{i+1} = v_{i+1}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$ και $e_n \cap e_1 = v_1$.
2. Μη διαδοχικά τμήματα δεν τέμνονται: $e_i \cap e_j = \emptyset$ για κάθε $1 \leq i < j-1$ και $j \leq n$.

Ο λόγος που τα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζουν μια *πολυγωνική γραμμή* είναι γιατί είναι συνδεδεμένα στη σειρά το ένα μετά το άλλο. Ο λόγος που αυτή η γραμμή είναι *κλειστή* είναι γιατί τα τμήματα κλείνουν σε έναν "κύκλο." Ο λόγος που αυτή η κλειστή γραμμή είναι *απλή* είναι γιατί μη διαδοχικά τμήματα δεν τέμνονται.

Τα σημεία v_i ονομάζονται **κορυφές** *(vertices)* του πολυγώνου και τα τμήματα e_i **ακμές** *(edges)*. Ένα πολύγωνο με n κορυφές έχει n ακμές.



Σχήμα 1.1 Δύο πολύγωνα που δεν είναι απλά.

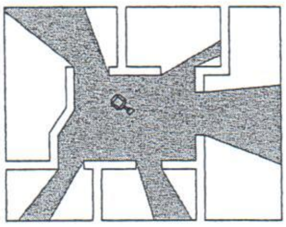
Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα στην τοπολογία είναι το ακόλουθο Jordan Curve Θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.1 (Jordan Curve Theorem)
Κάθε απλή και κλειστή επίπεδη καμπύλη χωρίζει το επίπεδο σε δύο τμήματα.

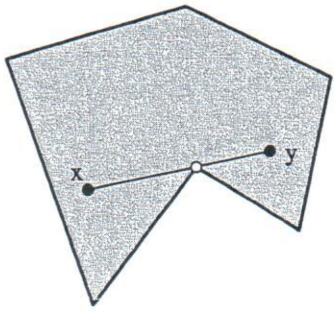
Το θεώρημα αυτό φαίνεται τόσο προφανές ώστε να μην χρειάζεται απόδειξη. Στην πραγματικότητα, μια αυστηρή απόδειξη είναι αρκετά δύσκολη και ξεπερνά τους στόχους αυτών των σημειώσεων. Έτσι, απλά θα θεωρήσουμε ότι το παραπάνω θεώρημα ισχύει. Τα δύο τμήματα στα οποία μια απλή κλειστή καμπύλη χωρίζει το επίπεδο ονομάζονται **εσωτερικό** *(interior)* και **εξωτερικό** *(exterior)* της καμπύλης: το εσωτερικό περικλείεται από την καμπύλη, ενώ το εξωτερικό εκτείνεται παντού γύρω από την καμπύλη. Έτσι δικαιολογείται ο ορισμός του πολυγώνου (που δώσαμε νωρίτερα) σαν την περιοχή που περικλείεται από ένα σύνολο ευθυγράμμων τμημάτων.

Σημειώνεται ότι ορίζουμε τα πολύγωνα ως κλειστές περιοχές στο επίπεδο (άλλοι συγγραφείς τα ορίζουν απλά ως το σύνολο των ευθυγράμμων τμημάτων που τα περικλείουν). Το σύνολο των ευθυγράμμων τμημάτων που περικλείουν ένα πολύγωνο P ονομάζεται **σύνορο** *(boundary)* του P και συμβολίζεται συνήθως με ϑP. Σύμφωνα με τον ορισμό μας, $\vartheta P \subseteq P$.

Το Σχήμα 1.1 δείχνει δύο πολύγωνα τα οποία δεν είναι απλά. Και τα δύο πολύγωνα πληρούν τη συνθήκη (1) που δώσαμε νωρίτερα αλλά όχι τη (2) καθώς μη διαδοχικά τμήματα τέμνονται.



Σχήμα 1.2



Σχήμα 1.3

1.2 Το Θεώρημα της Πινακοθήκης

Θα μελετήσουμε ένα πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα (Klee, 1973) το οποίο θα μας εισάγει στο πρόβλημα της διαίρεσης πολυγώνων σε τρίγωνα, της πιο σημαντικής διαίρεσης πολυγώνων. Ας θεωρήσουμε μια πινακοθήκη, η κάτοψη της οποίας έχει περιγραφεί σαν ένα απλό πολύγωνο με n κορυφές. Ο Klee έθεσε το ερώτημα: *Πόσοι ακίνητοι φύλακες απαιτούνται για να εποπτεύσουν όλο τον χώρο της πινακοθήκης;* Κάθε φύλακας θεωρείται σαν ένα σταθερό σημείο που μπορεί να δει προς όλες τις κατευθύνσεις ολόγυρά του, αλλά βέβαια το οπτικό του πεδίο περιορίζεται από τους τοίχους γύρω του.

Για να κάνουμε την έννοια της επόπτευσης του χώρου πιο σαφή, λέμε ότι ένα σημείο x μπορεί να *δει* ένα σημείο y (ή το σημείο y είναι *ορατό* από το x) αν και μόνο αν το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα xy δεν τέμνει το εξωτερικό του πολυγώνου P: $xy \subseteq P$ (Σχήμα 1.2). Σημειώστε ότι ο ορισμός αυτός επιτρέπει την περίπτωση όπου το τμήμα xy έχει κοινά σημεία με το σύνορο του πολυγώνου (Σχήμα 1.3). ('Ενας εναλλακτικός, εξίσου λογικός, ορισμός θα μπορούσε να αποκλείει τέτοιες περιπτώσεις.)

Ο κάθε φύλακας είναι ένα σημείο. Λέμε ότι ένα σύνολο από φύλακες *εποπτεύει* ένα πολύγωνο εάν κάθε σημείο του πολυγώνου είναι ορατό από κάποιον φύλακα. Ας σημειωθεί ότι ένα ρεαλιστικό σενάριο θα απαιτούσε οι φύλακες να εποπτεύουν απλά το σύνορο ϑP του πολυγώνου P καθώς οι πίνακες βρίσκονται στους τοίχους της πινακοθήκης. Και αυτή είναι μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή του προβλήματος.

Πόσους ακίνητους φύλακες χρειαζόμαστε για να εποπτεύσουν ένα πολύγωνο; Αυτό σίγουρα εξαρτάται από το συγκεκριμένο πολύγωνο: όσο πιο "περίπλοκο" είναι το πολύγωνο, τόσο περισσότεροι φύλακες απαιτούνται. Θα εκφράσουμε λοιπόν το φράγμα στο πλήθος των φυλάκων ως συνάρτηση του πλήθους n των κορυφών του πολυγώνου. Αλλά ακόμη κι όταν δύο πολύγωνα έχουν το ίδιο πλήθος κορυφών, δεν είναι απαραίτητο ότι είναι εξίσου εύκολο να εποπτευθούν. Για παράδειγμα, κάθε κυρτό πολύγωνο μπορεί

Σχήμα 1.4 Ένα απλό πολύγωνο και μια διαίρεσή του σε τρίγωνα

να εποπτευθεί από έναν μόνο φύλακα. Για να είμαστε ωστόσο εξασφαλισμένοι, θα ασχοληθούμε με τη χειρότερη περίπτωση, δηλαδή, θα δώσουμε ένα άνω φράγμα το οποίο θα ισχύει για κάθε πολύγωνο με n κορυφές. (Θα ήταν πολύ επιθυμητό εάν μπορούσαμε να βρούμε το ελάχιστο πλήθος φυλάκων για κάθε δοσμένο πολύγωνο αντί για ένα φράγμα στη χειρότερη περίπτωση. Δυστυχώς το πρόβλημα της εύρεσης του ελαχίστου πλήθους ακίνητων φυλάκων για δοσμένο πολύγωνο είναι NP-hard.)

Έστω ότι P είναι ένα απλό πολύγωνο με n κορυφές. Επειδή το P μπορεί να έχει αρκετά πολύπλοκο σχήμα, διαιρούμε το πολύγωνο σε κομμάτια τα οποία είναι εύκολο να εποπτευθούν, παραδείγματος χάριν σε τρίγωνα. Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή **διαγωνίων** *(diagonals)* ανάμεσα σε ζευγάρια κορυφών του P (Σχήμα 1.4): μια διαγώνιος είναι ένα ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο κορυφές του P και βρίσκεται στο εσωτερικό του P. Για τη διαίρεση ενός πολυγώνου σε τρίγωνα χρησιμοποιούμε ικανό αριθμό από μη τεμνόμενες διαγωνίους ώστε οι πλευρές κάθε τριγώνου να είναι είτε πλευρές του P είτε διαγώνιοι. (Σημειώνεται ότι ένα τρίγωνο κάποια πλευρά του οποίου περιέχει στο εσωτερικό της μια κορυφή του P δεν είναι αποδεκτό. Κάτι τέτοιο μπορεί να προκύψει, για παράδειγμα, εάν το πολύγωνο έχει τρεις συνευθειακές κορυφές.) Η διαίρεση ενός πολυγώνου σε τρίγωνα συνήθως δεν είναι μοναδική: το πολύγωνο του Σχήματος 1.4, για παράδειγμα, μπορεί να διαιρεθεί σε τρίγωνα με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Όμως, οποιαδήποτε τέτοια διαίρεση μας δίνει έναν τρόπο να εποπτεύσουμε το πολύγωνο P τοποθετώντας έναν φύλακα σε κάθε τρίγωνο του P. Αλλά, υπάρχει πάντα μια διαίρεση σε τρίγωνα; Και πόσα τρίγωνα μπορεί να υπάρχουν σε μια τέτοια διαίρεση; Το παρακάτω θεώρημα απαντά σε αυτές τις ερωτήσεις.

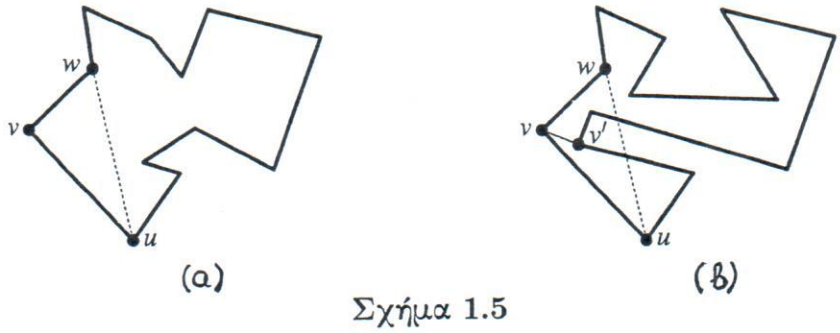
Θεώρημα 1.2.1

Κάθε απλό πολύγωνο μπορεί να διαιρεθεί σε τρίγωνα, και κάθε διαίρεση ενός απλού πολυγώνου με n κορυφές σε τρίγωνα αποτελείται από ακριβώς $n-2$ τρίγωνα.

Απόδειξη Αποδεικνύουμε το θεώρημα με επαγωγή στο n. Για $n = 3$, το ίδιο το πολύγωνο είναι ένα τρίγωνο και το θεώρημα προφανώς ισχύει. Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου $n > 3$ και έστω ότι το θεώρημα ισχύει για όλα τα $m < n$. Έστω P ένα πολύγωνο με n κορυφές. Αποδεικνύουμε πρώτα την ύπαρξη μιας διαγωνίου στο P. Έστω v η αριστερότερη κορυφή του P, δηλ., η κορυφή με τη μικρότερη x-συντεταγμενη. (Σε περίπτωση που υπάρχουν παραπάνω από μία κορυφές με την ίδια x-συντεταγμένη, επιλέγουμε από αυτές την κορυφή με τη μικρότερη y-συντεταγμένη.) Έστω u και w οι κορυφές που είναι γειτονικές στην κορυφή v. Εάν το ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα uw βρίσκεται στο εσωτερικό του P, έχουμε βρει μια διαγώνιο (Σχήμα 1.5(α)). Αλλιώς, υπαρχει τουλάχιστον μία κορυφή του P στο εσωτερικό του τριγώνου T_{uvw} (το οποίο ορίζεται από τις κορυφές u, v και w) ή επάνω στο τμήμα uw. Έστω v' η αριστερότερη κορυφή από αυτές τις κορυφές (Σχήμα 1.5(β)). Τότε, το ευθύγραμμο τμήμα vv' δεν μπορεί να τέμνεται από καμία ακμή του P: εάν τεμνόταν από κάποια ακμή, τότε το ένα άκρο αυτής της ακμής θα ανήκε στο τρίγωνο T_{uvw} και θα ήταν πιο αριστερά από την v', σε αντίθεση με τον ορισμό της v'. Συνεπώς, το ευθύγραμμο τμήμα vv' είναι μια διαγώνιος.

Άρα μια διαγώνιος πάντα υπάρχει. Οποιαδήποτε διαγώνιος χωρίζει το πολύγωνο P σε δύο μικρότερα απλά πολύγωνα P_1 και P_2. Έστω m_1 και m_2 το πλήθος κορυφών των P_1 και P_2 αντίστοιχα. Τόσο το m_1 όσο και το m_2 είναι μικρότερα από n, οπότε από την επαγωγή συμπεραίνουμε ότι τα P_1 και P_2 μπορούν να χωριστούν σε τρίγωνα. Άρα και το P μπορεί να χωριστεί σε τρίγωνα επίσης.

Απομένει να αποδείξουμε ότι οποιαδήποτε διαίρεση του πολυγώνου P σε τρίγωνα δίνει $n-2$ τρίγωνα. Θεωρούμε μια τυχαία διαγώνιο σε κάποια διαίρεση του P σε



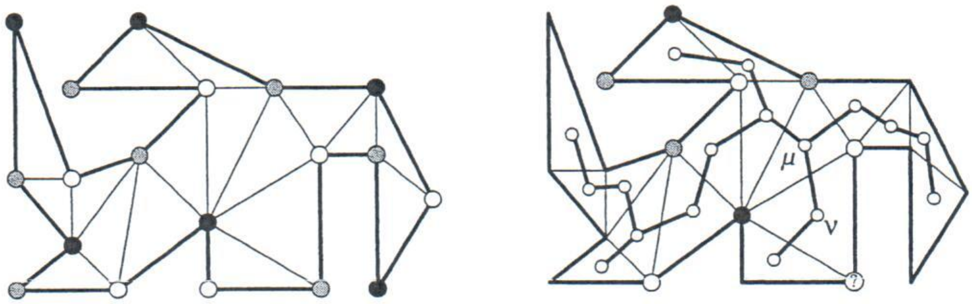
Σχήμα 1.5

τρίγωνα. Η διαγώνιος αυτή χωρίζει το P σε δύο μικρότερα πολύγωνα με m_1 και m_2 κορυφές αντίστοιχα. Κάθε κορυφή του P εμφανίζεται σε ένα μόνο από τα δύο αυτά πολύγωνα με εξαίρεση τις κορυφές της διαγωνίου που εμφανίζονται και στα δύο. Άρα, $m_1 + m_2 = n + 2$. Με βάση την επαγωγή, έχουμε ότι τα δύο αυτά πολύγωνα διαιρούνται σε $m_1 - 2$ και $m_2 - 2$ τρίγωνα αντίστοιχα, οπότε η διαίρεση του P σε τρίγωνα θα αποτελείται από $m_1 - 2 + m_2 - 2 = n - 2$ τρίγωνα. ∎

Το Θεώρημα 1.2.1 συνεπάγεται ότι οποιοδήποτε απλό πολύγωνο με n κορυφές μπορεί να εποπτευθεί από $n-2$ φύλακες. Ωστόσο, η τοποθέτηση ενός φύλακα σε κάθε τρίγωνο φαίνεται να οδηγεί σε σπατάλη. Για παράδειγμα, ένας φύλακας τοποθετημένος σε μια διαγώνιο μπορεί να εποπτεύσει δύο τρίγωνα, οπότε εάν τοποθετήσουμε τους φύλακες σε καλά επιλεγμένες διαγωνίους είναι πολύ πιθανόν ότι θα μπορέσουμε να μειώσουμε το πλήθος των φυλάκων που θα χρειαστούμε σε $n/2$. Εάν μάλιστα τοποθετήσουμε τους φύλακες σε κορυφές του πολυγώνου είναι πολύ πιθανόν να καταλήξουμε σε ακόμη μικρότερο πλήθος φυλάκων καθώς μια κορυφή μπορεί να είναι γειτονική σε πολλά τρίγωνα και άρα ένας φύλακας σ' αυτήν την κορυφή θα τα εποπτεύει όλα. Η τελευταία παρατήρηση οδηγεί στην ακόλουθη προσέγγιση (Fisk, 1978).

Έστω T_P μια διαίρεση του πολυγώνου P σε τρίγωνα. Επιλέγουμε ένα υποσύνολο των κορυφών του P τέτοιο ώστε κάθε τρίγωνο στην T_P να έχει τουλάχιστον μία επιλεγμένη κορυφή και τοποθετούμε τους φύλακες στις επιλεγμένες κορυφές. Για να βρούμε ένα τέτοιο υποσύνολο, αναθέτουμε σε κάθε κορυφή του P ένα χρώμα: λευκό, γκρίζο ή μαύρο. Η ανάθεση χρωμάτων είναι τέτοια ώστε οποιεσδήποτε δύο κορυφές που συνδέονται με μια ακμή ή μια διαγώνιο έχουν διαφορετικά χρώματα. Μια τέτοια ανάθεση χρωμάτων ονομάζεται **3-coloring** του χωρισμένου σε τρίγωνα πολυγώνου. Σε ένα 3-coloring, κάθε τρίγωνο έχει μία λευκή, μία γκρίζα και μία μαύρη κορυφή (Σχήμα 1.6(α)). Συνεπώς, εάν, για παράδειγμα, τοποθετήσουμε φύλακες σε όλες τις γκρίζες κορυφές, θα έχουμε καταφέρει να εποπτεύουμε ολόκληρο το πολύγωνο P. Εάν επιλέξουμε το χρώμα το οποίο έχει ανατεθεί στις λιγότερες κορυφές και τοποθετήσουμε τους φύλακες στις κορυφές με αυτό το χρώμα, εξασφαλίζουμε ότι μπορούμε να εποπτεύσουμε ολόκληρο το P με το πολύ $\lfloor n/3 \rfloor$ φύλακες.

Αλλά υπάρχει πάντα ένα 3-coloring; Η απάντηση είναι ναι. Για να το αποδείξουμε αυτό, θεωρούμε το **δυϊκό γράφημα** *(dual graph)* της διαίρεσης T_P του πολυγώνου P σε τρίγωνα. Το γράφημα αυτό, έστω $G(T_P)$, έχει έναν κόμβο για κάθε τρίγωνο της T_P. Ανάμεσα σε δύο κόμβους v_1 και v_2 του $G(T_P)$ υπάρχει μια ακμή εάν τα τρίγωνα που αντιστοιχούν στους κόμβους v_1 και v_2 έχουν μια κοινή πλευρά, δηλ., μια διαγώνιο του

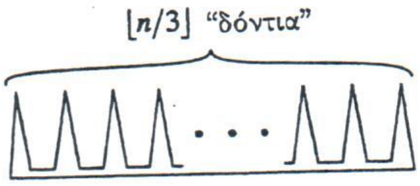


Σχήμα **1.6**

P. Δηλαδή, οι ακμές του $G(T_P)$ αντιστοιχούν στις διαγωνίους της T_P. Επειδή κάθε διαγώνιος χωρίζει το P σε δύο κομμάτια, η αφαίρεση μιας οποιασδήποτε ακμής από τον $G(T_P)$ χωρίζει το γράφημα στα δύο. Συνεπώς, το γράφημα $G(T_P)$ είναι ένα δέντρο (Σχήμα 1.6(β)). (Παρατηρήστε ότι αυτό δεν ισχύει για ένα πολύγωνο με τρύπες.) Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε ένα 3-coloring κάνοντας μια απλή διάσχιση του γραφήματος $G(T_P)$, π.χ. χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο διάσχισης κατά βάθος. Το πώς μπορούμε να το κάνουμε αυτό το περιγράφουμε λίγο παρακάτω. Πάντως, κατά τη διάρκεια της διάσχισης διατηρούμε την ακόλουθη σταθερή συνθήκη (*invariant*): όλες οι κορυφές των τριγώνων που έχουμε ηδη επισκεφτεί έχουν χρωματιστεί με κάποιο από τα τρία χρώματα (λευκό, γκρίζο ή μαύρο) και κάθε κορυφή έχει χρωματιστεί με χρώμα διαφορετικό από όλες τις γειτονικές της. Η συνθήκη αυτή συνεπάγεται ότι θα έχουμε βρεί ένα σωστό 3-coloring όταν θα έχουμε επισκεφτεί όλα τα τρίγωνα της T_P.

Η διάσχιση κατά βάθος μπορεί να ξεκινήσει από οποιονδήποτε κόμβο του $G(T_P)$· οι τρεις κορυφές του αντίστοιχου τριγώνου χρωματίζονται αυθαίρετα με λευκό, γκρίζο και μαύρο χρώμα. Ας υποθέσουμε τώρα ότι από έναν κόμβο u του $G(T_P)$ πηγαίνουμε σε έναν άλλο κόμβο v. Τότε, τα αντίστοιχα τρίγωνα $t(u)$ και $t(v)$ έχουν μια κοινή πλευρά. Καθώς οι κορυφές του $t(u)$ έχουν ήδη χρωματιστεί, μόνο μία κορυφή του $t(v)$ απομένει να χρωματιστεί. Επίσης, απομένει ένα μόνο χρώμα γι' αυτήν, το χρώμα που δεν έχει χρησιμοποιηθεί για τις κορυφές της κοινής πλευράς των $t(u)$ και $t(v)$. Επειδή το γράφημα $G(T_P)$ είναι δέντρο, δεν έχουμε ακόμα επισκεφτεί τους άλλους κόμβους (εκτός από τον u) που είναι γειτονικοί στον v, και άρα έχουμε τη δυνατότητα να χρωματίσουμε αυτήν την κορυφή με το τρίτο χρώμα.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μπορούμε να βρούμε πάντα ένα 3-coloring ενός απλού πολυγώνου που έχει χωριστεί σε τρίγωνα. Αυτό συνεπάγεται ότι οποιοδήποτε απλό πολύγωνο με n κορυφές μπορεί να εποπτευθεί από $\lfloor n/3 \rfloor$ φύλακες. Αλλά ίσως μπορούμε να τα καταφέρουμε με λιγότερους φύλακες. Άλλωστε, ένας φύλακας τοποθετημένος σε μια κορυφή του πολυγώνου μπορεί να εποπτεύει όχι μόνο τα γειτονικά τρίγωνα αλλά και άλλα. Δυστυχώς, για κάθε τιμή του n, υπάρχουν απλά πολύγωνα που απαιτούν $\lfloor n/3 \rfloor$ φύλακες. Ένα παράδειγμα είναι το πολύγωνο του Σχήματος 1.7 που έχει σχήμα χτένας με μια μακρυά οριζόντια βάση και $\lfloor n/3 \rfloor$ "δόντια" καθένα από τα οποία σχηματίζεται από 2 ακμές (Chvátal, 1975). Τα "δόντια" συνδέονται με οριζόντιες ακμές. Το πολύγωνο έχει φτιαχτεί έτσι ώστε να μην υπάρχει σημείο του πολυγώνου το οποίο να μπορεί να εποπτεύσει δύο "δόντια" ταυτόχρονα. Έτσι, δεν υπάρχει περίπτωση να βρούμε έναν αλγόριθμο ο οποίος θα επιστρέφει λιγότερους από $\lfloor n/3 \rfloor$ φύλακες για κάθε n-γωνο. Με άλλα λόγια, η μέθοδος με το 3-coloring που περιγράψαμε προηγούμενα είναι βέλτιστη στη χειρότερη περίπτωση.



Σχήμα 1.7

Με τα παραπάνω αποδείξαμε το **Θεώρημα της Πινακοθήκης** *(Art Gallery Theorem)*, ένα κλασσικό αποτέλεσμα στη συνδυαστική γεωμετρία.

Θεώρημα 1.2.2
Για ένα απλό πολύγωνο με n κορυφές, $\lfloor n/3 \rfloor$ ακίνητοι φύλακες είναι μερικές φορές απαραίτητοι και πάντοτε αρκετοί έτσι ώστε κάθε σημείο του πολυγώνου να εποπτεύεται από κάποιον από τους φύλακες.

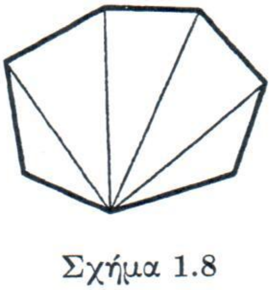
Γνωρίζουμε λοιπόν ότι $\lfloor n/3 \rfloor$ φύλακες επαρκούν σε κάθε περίπτωση. Ωστόσο, δεν έχουμε ακόμη έναν αποδοτικό αλγόριθμο για να υπολογίσουμε τις θέσεις τους. Αυτό που χρειαζόμαστε είναι ένας γρήγορος αλγόριθμος για τη διαίρεση ενός απλού πολυγώνου σε τρίγωνα. Ο αλγόριθμος αυτός θα πρέπει να επιστρέφει μια κατάλληλη αναπαράσταση της διαίρεσης ώστε να μπορούμε σε σταθερό χρόνο να μετακινηθούμε από ένα τρίγωνο στα γειτονικά του τρίγωνα. Με μια τέτοια αναπαράσταση, θα μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο από το πολύ $\lfloor n/3 \rfloor$ θέσεις για τους φύλακες σε γραμμικό χρόνο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που περιγράψαμε παραπάνω: διασχίζουμε το δυϊκό γράφημα κατά βάθος, βρίσκουμε ένα 3-coloring και τοποθετούμε τους φύλακες στις κορυφές της μικρότερης σε πλήθος ομάδας κορυφών με το ίδιο χρώμα. Στις επόμενες παραγράφους περιγράφουμε πως μπορούμε να χωρίσουμε ένα απλό πολύγωνο σε τρίγωνα σε $O(n \log n)$ χρόνο. Με αυτό το αποτέλεσμα υπόψιν μας, έχουμε το εξής τελικό αποτέλεσμα σχετικά με την εποπτευση πολυγώνων.

Θεώρημα 1.2.3

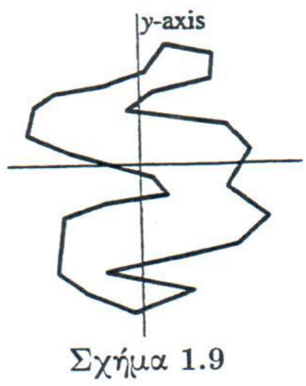
Έστω P ένα απλό πολύγωνο με n κορυφές. Ένα σύνολο από το πολύ $\lfloor n/3 \rfloor$ θέσεις για ακίνητους φύλακες τέτοιο ώστε κάθε σημείο του πολυγώνου εποπτεύεται από τουλάχιστον έναν από τους φύλακες μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n \log n)$ χρόνο.

1.3. Διαίρεση ενός Μονότονου Πολυγώνου σε Τρίγωνα

Έστω P ένα απλό πολύγωνο με n κορυφές. Είδαμε από το Θεώρημα 1.2.1 ότι μια διαίρεση του P σε τρίγωνα πάντα υπάρχει. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι κατασκευαστική και οδηγεί κατευθείαν στον εξής αναδρομικό αλγόριθμο: βρες μια διαγώνιο και αναδρομικά διαίρεσε σε τρίγωνα τα δύο μικρότερα πολύγωνα που σχηματίζονται από τη μία και την άλλη πλευρά της διαγωνίου. Για να βρούμε τη διαγώνιο, παίρνουμε την αριστερότερη κορυφή v του P και ελέγχουμε εάν υπάρχουν κορυφές του P στο τρίγωνο που ορίζεται από την v και τις δύο γειτονικές της κορυφές u και w. Εάν όχι, τότε το ευθύγραμμο τμήμα uw είναι διαγώνιος. Εάν ναι, τότε συνδέουμε την κορυφή v με την αριστερότερη κορυφή που βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο που ορίζεται από τα v, u και w. Έτσι, η εύρεση μιας διαγωνίου απαιτεί χρόνο γραμμικό στο πλήθος κορυφών του πολυγώνου P. Ενδέχεται η διαγώνιος να χωρίζει το P σε ένα τρίγωνο και ένα πολύγωνο με $n-1$ κορυφές. Σε αυτή την περίπτωση, ο παραπάνω αλγόριθμος απαιτεί τετραγωνικό χρόνο στη χειρότερη περίπτωση. Μπορούμε να επιτύχουμε κάτι καλύτερο; Σε μερικές περιπτώσεις, πράγματι μπορούμε. Για παράδειγμα, η διαίρεση ενός κυρτού πολυγώνου σε τρίγωνα γίνεται εύκολα: επιλέγουμε μια κορυφή v και φέρουμε διαγωνίους από την v προς καθεμία από τις άλλες κορυφές του πολυγώνου εκτός από αυτές που είναι γειτονικές στην v (Σχήμα 1.8). Αυτό απαιτεί γραμμικό χρόνο μόνον. Άρα, μια πιθανή προσέγγιση του προβλήματος διαίρεσης ενός μη κυρτού πολυγώνου σε τρίγωνα είναι να χωρίσουμε το πολύγωνο σε κυρτά κομμάτια και μετά



Σχήμα 1.8



Σχήμα 1.9

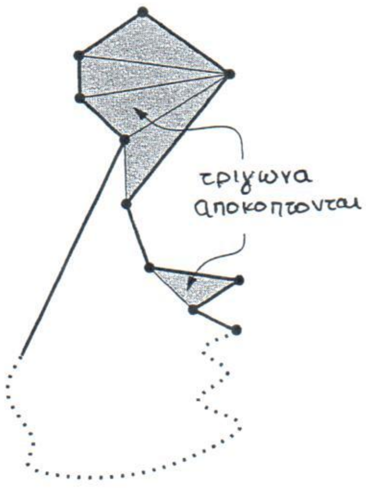
να διαιρέσουμε τα κομμάτια αυτά σε τρίγωνα. Δυστυχώς, το πρόβλημα του χωρισμού ενός πολυγώνου σε κυρτά κομμάτια είναι εξίσου δύσκολο με το πρόβλημα χωρισμού του πολυγώνου σε τρίγωνα.

Μια άλλη κατηγορία πολυγώνων που επιδέχονται "γρήγορη" διαίρεση σε τρίγωνα είναι αυτή των μονότονων πολυγώνων. Ένα απλό πολύγωνο λέγεται **μονότονο** *(monotone)* **ως προς μια ευθεία γραμμή** ℓ εάν για κάθε ευθεία ℓ' κάθετη στην ℓ, η τομή του πολυγώνου με την ℓ' είναι ένα συνεκτικό σύνολο. Με άλλα λόγια, η τομή είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, ένα σημείο ή το κενό σύνολο. Ένα πολύγωνο που είναι μονότονο ως προς τον άξονα των y λέγεται πιο απλά **y-μονότονο** πολύγωνο (Σχήμα 1.9). Τα y-μονότονα πολύγωνα χαρακτηρίζονται από την εξής ιδιότητα: εάν κινηθούμε από την ψηλότερη προς την χαμηλότερη κορυφή τους κατά μήκος του δεξιού (ή του αριστερού) τμήματος του συνόρου τους, προχωράμε πάντα είτε προς τα κάτω ή οριζόντια, ποτέ προς τα πάνω.

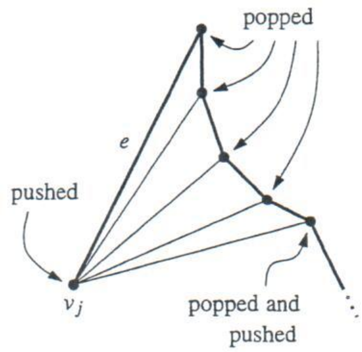
Θα περιγράψουμε παρακάτω έναν αλγόριθμο για τη διαίρεση ενός y-μονότονου πολυγώνου σε τρίγωνα. Ο αλγόριθμος μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί στη γενική περίπτωση, δηλαδή, για πολύγωνα μονότονα ως προς τυχαία κατεύθυνση l.

Έστω P ένα y-μονότονο πολύγωνο με n κορυφές. Ας θεωρήσουμε αρχικά ότι το πολύγωνο είναι **αυστηρά y-μονότονο**, δηλαδή, ότι το πολύγωνο είναι y-μονότονο και δεν έχει οριζόντιες ακμές. Συνεπώς, πάντα προχωράμε προς τα κάτω όταν κινούμαστε πάνω στο δεξί ή στο αριστερό τμήμα του συνόρου του πολυγώνου κατευθυνόμενοι από την ψηλότερη στην χαμηλότερη κορυφή του. Αυτή είναι η ιδιότητα που κάνει τη διαίρεση ενός μονότονου πολυγώνου εύκολη: σαρώνουμε το πολύγωνο από πάνω προς τα κάτω προχωρώντας παράλληλα στο δεξί και στο αριστερό τμήμα του συνόρου του και φέροντας διαγωνίους όποτε αυτό είναι δυνατόν.

Πιο συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος (που είναι άπληστος *(greedy)*) επεξεργάζεται τις κορυφές κατά φθίνουσα y-συντεταγμένη. Εάν δύο κορυφές έχουν την ίδια y-συντεταγμένη, τότε επεξεργαζόμαστε πρώτα αυτήν που είναι πιο αριστερά (δηλ., έχει τη μικρότερη x-συντεταγμένη). Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια στοίβα S ως βοηθητική δομή δεδομένων. Αρχικά η στοίβα είναι άδεια· γενικά περιέχει κορυφές του P που έχουμε ήδη συναντήσει και προς τις οποίες θα φέρουμε διαγωνίους. Όταν επεξεργαζόμαστε μια κορυφή, προσθέτουμε όσες περισσότερες διαγωνίους μπορούμε από την κορυφή αυτή σε κορυφές στη στοίβα αποκόπτοντας έτσι τρίγωνα από το P. Οι κορυφές τις οποίες έχουμε επεξεργαστεί αλλά δεν έχουν αποκοπεί από το πολύγωνο –οι κορυφές στην στοίβα– βρίσκονται στο σύνορο του κομματιού του P που εκκρεμεί να χωριστεί



Σχήμα 1.10

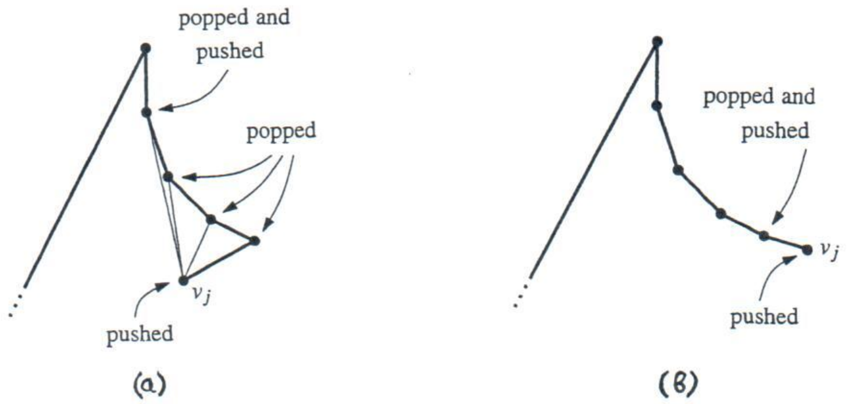


Σχήμα 1.11

σε τρίγωνα. Από αυτές, η κορυφή με τη μικρότερη y-συντεταγμένη (που είναι αυτή που επεξεργαστήκαμε τελευταία) βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας, η κορυφή με την αμέσως μεγαλύτερη y-συντεταγμένη βρίσκεται δεύτερη στη στοίβα, κ.ο.κ. Το τμήμα του P που δεν έχει ακόμη χωριστεί σε τρίγωνα και βρίσκεται ψηλότερα από την τελευταία κορυφή που συναντήσαμε, μοιάζει με ανεστραμμένο "χωνί" (Σχήμα 1.10). Η μία πλευρά του χωνιού αποτελείται από ένα τμήμα μιας ακμής του πολυγώνου, ενώ η άλλη είναι μια αλυσίδα από μη κυρτές κορυφές[1] εκτός από την ψηλότερη κορυφή αυτής της αλυσίδας, που είναι κυρτή, και πιθανώς την χαμηλότερη κορυφή. Η ιδιότητα αυτή συνεχίζει να ισχύει και μετά την επεξεργασία της επόμενης κορυφής, είναι δηλαδή μια σταθερή συνθήκη για τον αλγόριθμο.

Ας δούμε τώρα ποιες διαγωνίους μπορούμε να προσθέσουμε όταν επεξεργαζόμαστε την επόμενη κορυφή. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: η v_j, η επόμενη κορυφή που θα επεξεργαστούμε, μπορεί να βρίσκεται είτε στην ίδια πλευρά του συνόρου του P με τις μη κυρτές κορυφές στη στοίβα, είτε στην αντίθετη πλευρά. Στην περίπτωση που η v_j βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά, θα πρέπει να είναι το χαμηλότερο άκρο της μοναδικής ακμής e που ορίζει το χωνί από εκείνη την πλευρά (Σχήμα 1.11). Εξ αιτίας του σχήματος του χωνιού, μπορούμε να προσθέσουμε διαγωνίους από την κορυφή v_j προς όλες τις κορυφές στη στοίβα εκτός από την τελευταία· η τελευταία κορυφή είναι το ψηλότερο άκρο της e και άρα είναι ήδη γειτονική της v_j. Τότε, όλες αυτές οι κορυφές απωθούνται (λειτουργία pop) από τη στοίβα (Σχήμα 1.11). Το τμήμα του P που δεν έχει ακόμη χωριστεί σε τρίγωνα και βρίσκεται ψηλότερα από την v_j περικλείεται τώρα από την διαγώνιο που συνδέει την v_j με τη χαμηλότερη από τις κορυφές στην μη κυρτή

[1] Μια κορυφή ονομάζεται κυρτή όταν η αντίστοιχη εσωτερική γωνία είναι μικρότερη από $180°$. Σε αντίθετη περίπτωση ονομάζεται μη κυρτή.



Σχήμα **1.12**

αλυσίδα, έστω v, και από μία ακμή του P γειτονική στην v. Δηλαδή, το σχήμα του είναι και πάλι σαν ανεστραμμένο χωνί και άρα η σταθερή συνθήκη ισχύει και πάλι. Οι κορυφές v και v_j είναι κορυφές του τμήματος του πολυγώνου P που δεν έχει ακόμη χωριστεί σε τρίγωνα και γι' αυτό ωθούνται (λειτουργία push) στη στοίβα.

Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν η v_j είναι στην ίδια πλευρά με την μη κυρτή αλυσίδα. Αυτή τη φορά, είναι πιθανόν η v_j να μην ορίζει διαγωνίους με όλες τις κορυφές στη στοίβα. Ωστόσο, αυτές με τις οποίες ορίζει διαγωνίους είναι όλες συνεχόμενες στην κορυφή της στοίβας, οπότε εργαζόμαστε ως εξής: Πρώτα, απωθούμε από τη στοίβα μία κορυφή· αυτή είναι ήδη γειτονική της v_j στο P. Στη συνέχεια, απωθούμε κορυφές από τη στοίβα και φέρουμε διαγωνίους από αυτές προς την v_j όσο αυτό είναι δυνατόν (Σχήμα 1.12(α)). Ο έλεγχος για το εάν η κορυφή v_j και η v_k στη στοίβα ορίζουν μια διαγώνιο γίνεται εύκολα με έλεγχο της θέσης των v_j, v_k και της κόρυφης που είχε απωθηθεί αμέσως προηγούμενα. Όταν φτάσουμε σε κάποια κορυφή που δεν ορίζει διαγώνιο με την v_j ή εξαντλήσουμε τις κορυφές στη στοίβα, ωθούμε και πάλι στη στοίβα την κορυφή που είχε απωθηθεί τελευταία. Αυτή είναι είτε η τελευταία κορυφή προς την οποία φέραμε διαγώνιο, ή σε περίπτωση που δεν προστέθηκε καμία διαγώνιος μια από τις γειτονικές κορυφές της v_j στο σύνορο του P (Σχήμα 1.12(β)). Τέλος, ωθούμε την v_j στη στοίβα. Και στις δύο περιπτώσεις, η σταθερή συνθήκη συνεχίζει να ισχύει: η μία πλευρά του "χωνιού" ορίζεται από ένα τμήμα μιας ακμής του P ενώ η άλλη από μια αλυσίδα από μη κυρτές κορυφές. Ο αλγόριθμος περιγράφεται συνοπτικά στο Σχήμα 1.13.

Ποια είναι η πολυπλοκότητα χρόνου αυτού του αλγορίθμου; Το βήμα 1 απαιτεί γραμμικό χρόνο ενώ το βήμα 2 σταθερό χρόνο. Ο βρόχος **for** εκτελείται $n-3$ φορές, και κάθε τέτοια εκτέλεση μπορεί να απαιτήσει γραμμικό χρόνο. Ωστόσο σε κάθε εκτέλεση του βρόχου **for** γίνονται το πολύ δύο ωθήσεις στη στοίβα. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος των ωθήσεων, συμπεριλαμβανομένων και των δύο στο βήμα 2, είναι το πολύ

Αλγόριθμος διαίρεσης ενός αυστηρά y-μονότονου πολυγώνου σε τρίγωνα

Είσοδος. Ένα αυστηρά y-μονότονο πολύγωνο P.

Έξοδος. Χωρισμός του P σε τρίγωνα.

1. Συγχώνευσε (merge) τις κορυφές στο αριστερό και στο δεξί τμήμα του συνόρου του P σε μια ακολουθία κατά φθίνουσα y-συντεταγμένη. Εάν δύο κορυφές έχουν την ίδια y-συντεταγμένη, τότε τοποθετούμε πρώτη αυτήν με τη μικρότερη x-συντεταγμένη. Έστω $u_1, \ldots, u_n$ η ακολουθία των κορυφών που προκύπτει.
2. Ώθησε τις κορυφές u_1 και u_2 στη στοίβα S.
3. **for** j από 3 έως $n-1$ **do**
4.   **if** η u_j και η κορυφή στην κορυφή της S είναι σε διαφορετικές πλευρές του συνόρου του P
5.   **then** Απώθησε όλες τις κορυφές από την S.
6.   Φέρε διαγώνιο από την u_j σε καθεμία από τις κορυφές που απωθήθηκαν εκτός από την τελευταία.
7.   Ώθησε τις κορυφές u_{j-1} και u_j στην S.
8.   **else** Απώθησε μία κορυφή από την S.
9.   Απώθησε και άλλες κορυφές από την S, υπό την προϋπόθεση ότι τα ευθύγραμμα τμήματα από την u_j προς αυτές είναι διαγώνιοι. Φέρε τις αντίστοιχες διαγωνίους.
10.   Ώθησε πάλι στη στοίβα S την κορυφή που απωθήθηκε τελευταία.
11.   Ώθησε την κορυφή u_j στην S.
12. Φέρε διαγωνίους από την κορυφή u_n προς όλες τις κορυφές στη στοίβα εκτός από την πρώτη και την τελευταία.

Σχήμα 1.13

$2n-4$. Καθώς το συνολικό πλήθος απωθήσεων δεν μπορεί να υπερβεί το συνολικό πλήθος ωθήσεων, ο συνολικός χρόνος για όλες τις εκτελέσεις του βρόχου **for** είναι $O(n)$. Το τελευταίο βήμα του αλγορίθμου επίσης απαιτεί γραμμικό χρόνο, και άρα η πολυπλοκότητα χρόνου ολόκληρου του αλγορίθμου είναι $O(n)$. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.1
Οποιοδήποτε αυστηρά y-μονότονο πολύγωνο μπορεί να διαιρεθεί σε τρίγωνα σε γραμμικό χρόνο.

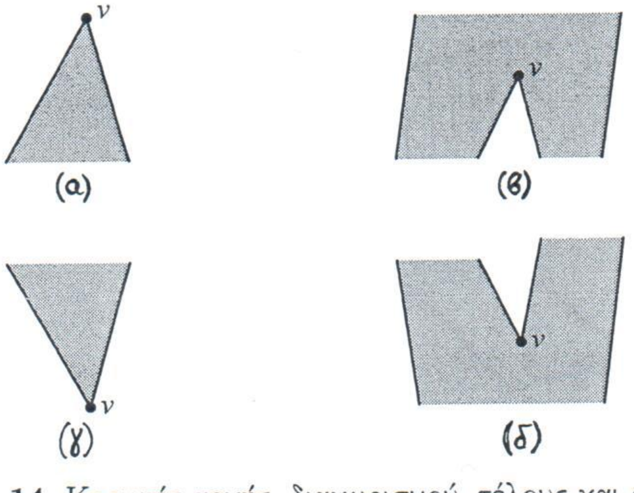
1.4. Διαίρεση Πολυγώνου σε Μονότονα Τμήματα

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πως μπορούμε να χωρίσουμε ένα y-μονότονο πολύγωνο σε τρίγωνα. Πέρα από το ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι χρήσιμο από μόνο του, μπορεί επίσης να χρησιμεύσει στη διαίρεση οποιουδήποτε απλού πολυγώνου σε τρίγωνα, υπό την προϋπόθεση ότι έχουμε έναν αλγόριθμο που μας επιτρέπει να χωρίσουμε ένα απλό πολύγωνο σε y-μονότονα πολύγωνα.

Έναν τέτοιο αλγόριθμο θα περιγράψουμε σ' αυτήν την παράγραφο. Αλλά πρώτα θα μελετήσουμε σε τι διαφέρει ένα απλό πολύγωνο που δεν είναι y-μονότονο από ένα y-μονότονο πολύγωνο. Για λόγους απλοποίησης της ανάλυσης, θεωρούμε απλά πολύγωνα που δεν έχουν οριζόντιες ακμές. Η ανάλυση και ο αλγόριθμος γενικεύεται και για πολύγωνα με οριζόντιες ακμές όπου η ταξινόμηση κορυφών με την ίδια y-συντεταγμένη καθορίζεται από αριστερά προς τα δεξιά: μια τέτοια σύμβαση αντιστοιχεί σε μια απειροελάχιστη στροφή του πολυγώνου κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Οι κορυφές ενός απλού πολυγώνου (χωρίς οριζόντιες ακμές) μπορούν να διακριθούν σε πέντε κατηγορίες:

1. *κορυφές αρχής* (Σχήμα 1.14(α)): η κορυφή είναι κυρτή (δηλαδή, η εσωτερική γωνία του πολυγώνου στη συγκεκριμένη κορυφή είναι η κυρτή γωνία που ορίζεται από τις προσκείμενες ακμές) και οι γειτονικές κορυφές έχουν και οι δύο μικρότερες y-συντεταγμένες.
2. *κορυφές διαχωρισμού* (Σχήμα 1.14(β)): η κορυφή είναι μη κυρτή (δηλαδή, η εσωτερική γωνία του πολυγώνου στη συγκεκριμένη κορυφή είναι η μη κυρτή γωνία που ορίζεται από τις προσκείμενες ακμές) και οι γειτονικές κορυφές έχουν και οι δύο μικρότερες y-συντεταγμένες.

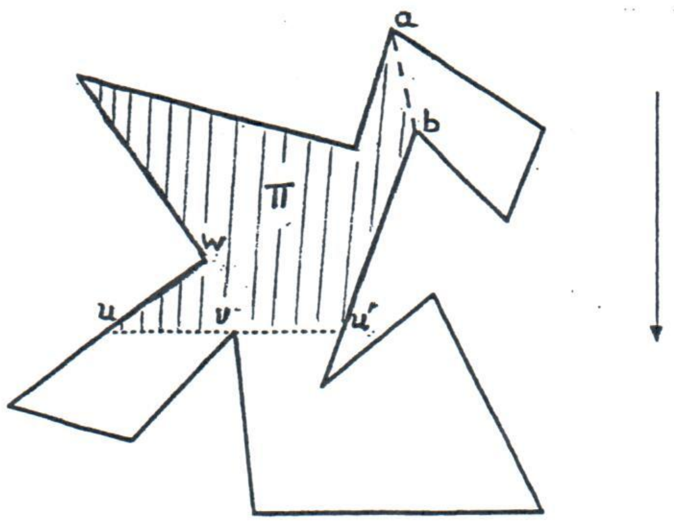


Σχήμα 1.14 Κορυφές αρχής, διαχωρισμού, τέλους και συνένωσης

3. *κορυφές τέλους* (Σχήμα 1.14(γ)): η κορυφή είναι κυρτή και οι γειτονικές κορυφές έχουν και οι δύο μεγαλύτερες y-συντεταγμένες.
4. *κορυφές συνένωσης* (Σχήμα 1.14(δ)): η κορυφή είναι μη κυρτή και οι γειτονικές κορυφές έχουν και οι δύο μεγαλύτερες y-συντεταγμένες.
5. *"κανονικές" κορυφές*, όπου οι γειτονικές κορυφές έχουν η μία μικρότερη και η άλλη μεγαλύτερη y-συντεταγμένη, δηλαδή, οι προσκείμενες ακμές σχηματίζουν μια y-μονότονη αλυσίδα.

Η περιγραφή των πέντε παραπάνω κατηγοριών φανερώνει ότι ένα απλό πολύγωνο είναι y-μονότονο αν και μόνο αν δεν έχει ούτε κορυφές διαχωρισμού ούτε κορυφές συνένωσης. Σε αυτήν ακριβώς την παρατήρηση βασίζεται ο αλγόριθμος των Lee και Preparata για τον χωρισμό ενός απλού πολυγώνου σε y-μονότονα τμήματα. Ο αλγόριθμος δουλεύει σε δύο περάσματα: στο πρώτο "κανονικοποιούνται" οι κορυφές διαχωρισμού και στο δεύτερο οι κορυφές συνένωσης. Η "κανονικοποίηση" μιας τέτοιας κορυφής v συνίσταται στην προσθήκη μιας κατάλληλης διαγωνίου προσκείμενης στην v έτσι ώστε η v να συνεισφέρει "κανονικές" κορυφές στα δύο πολύγωνα στα οποία η διαγώνιος χωρίζει το αρχικό πολύγωνο.

Πιο συγκεκριμένα, εάν η v είναι μια κορυφή διαχωρισμού, η κανονικοποίησή της θα απαιτήσει την προσθήκη μιας διαγωνίου που θα συνδέει την v με μια άλλη κορυφή, έστω v', με μεγαλύτερη y-συντεταγμένη. Επειδή ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο κορυφές του πολυγώνου δεν είναι απαραίτητα διαγώνιος, η επιλογή της κορυφής v' πρέπει να γίνει με προσοχή. Ο προσδιορισμός μιας κατάλληλης κορυφής v' (δηλαδή, έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα vv' να είναι διαγώνιος) μπορεί να γίνει ως εξής: θεωρούμε ότι κανονικοποιούμε τις κορυφές διαχωρισμού κατά σειρά φθίνουσας y-συντεταγμένης.



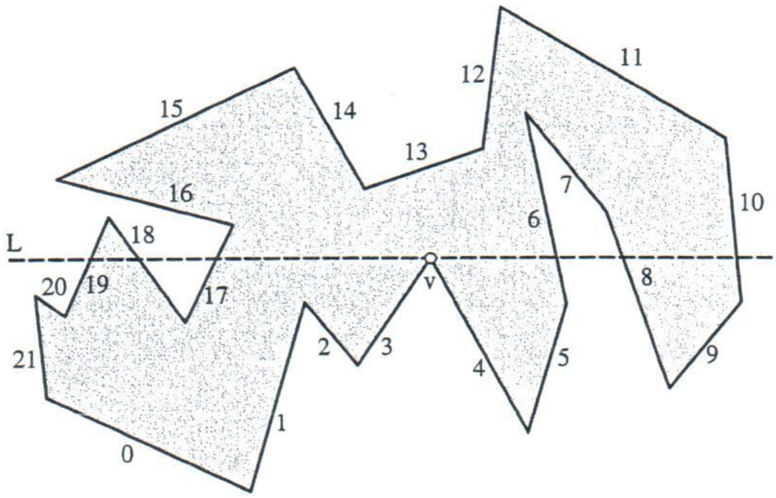
Σχήμα **1.15**

Η κανονικοποίηση των κορυφών διαχωρισμού με y-συντεταγμένη μεγαλύτερη από την y-συντεταγμένη της v έχει απαιτήσει την προσθήκη αντίστοιχων διαγωνίων και έχει έτσι προκαλέσει τον χωρισμό του πολυγώνου σε μικρότερα πολύγωνα (Σχήμα 1.15). Έστω λοιπόν ότι η κορυφή v ανήκει σε ένα τέτοιο πολύγωνο Π. Η οριζόντια γραμμή που περνάει από το v τέμνει το σύνορο του Π σε τουλάχιστον δύο σημεία, δύο από τα οποία, έστω τα u και u', ορίζουν το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα που περιέχει το v. Εάν σ είναι το τμήμα του συνόρου του Π με άκρα τα u και u' που δεν περιέχει το v, τότε η κορυφή v μπορεί να κανονικοποιηθεί με την προσθήκη μιας διαγωνίου που συνδέει την v με την κορυφή στο σ που έχει τη μικρότερη y-συντεταγμένη (η κορυφή w στο Σχήμα 1.15).

Η επεξεργασία μιας κορυφής συνένωσης είναι εντελώς συμμετρική, καθώς το είδωλο μιας τέτοιας κορυφής ως προς μια οριζόντια γραμμή είναι μια κορυφή διαχωρισμού (συγκρίνετε τα Σχήματα 1.14(β) και (δ)).

Σάρωση του επιπέδου με γραμμή σάρωσης (plane sweep)

Ο αλγόριθμος των Lee και Preparata που επιτυγχάνει τον χωρισμό απλών πολυγώνων σε y-μονότονα τμήματα με κανονικοποίηση των κορυφών διαχωρισμού και συνένωσης βασίζεται στη μέθοδο σάρωσης γραμμής (*plane sweep* ή *sweep-line method*) η οποία είναι χρήσιμη σε πολλούς γεωμετρικούς αλγορίθμους. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ότι μια γραμμή "σαρώνει" το επίπεδο (κινούμενη παράλληλα προς τον εαυτό της) και η πληροφορία κατά μήκος της γραμμής αποθηκεύεται σε μια κατάλληλη δομή δεδομένων. Η σάρωση σταματά σε διακριτά "γεγονότα" οπότε και γίνεται κάποια επεξεργασία και



Σχήμα 1.16

κατόπιν ενημέρωση της δομής δεδομένων.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε, χρησιμοποιούμε μια οριζόντια γραμμή σάρωσης L με την οποία σαρώνουμε το πολύγωνο σταματώντας στις κορυφές του. Αυτό πρώτα-πρώτα απαιτεί ταξινόμηση των κορυφών του πολυγώνου κατά φθίνουσα y-συντεταγμένη και συνεπώς $O(n \log n)$ χρόνο. Επιπλέον, απαιτεί την αποθήκευση της πληροφορίας κατά μήκος της L (δηλαδή, των ευθύγραμμων τμημάτων που αποτελούν την τομή της L με το πολύγωνο) με τέτοιον τρόπο ώστε να μην χρειάζεται να δαπανούμε πολύ χρόνο για την ενημέρωσή της κάθε φορά που σταματάμε. Ένας τέτοιος τρόπος είναι η αποθήκευση κάθε ευθύγραμμου τμήματος σαν το ζεύγος (e_i, e_j), όπου οι e_i και e_j είναι δείκτες στις ακμές που το ορίζουν από αριστερά και δεξιά αντίστοιχα.

Ένα βασικό βήμα της επεξεργασίας που επιτελείται για κάθε κορυφή v είναι ο εντοπισμός της θέσης της v επάνω στη γραμμή σάρωσης L, δηλαδή, η εύρεση του ευθύγραμμου τμήματος που περιέχει την v, εάν υπάρχει τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα, ή αλλιώς η εύρεση των ευθυγράμμων τμημάτων αριστερά και δεξιά της v. Για να εκτελέσουμε αυτή τη λειτουργία, φροντίζουμε να κρατάμε τα ευθύγραμμα τμήματα σε μια λίστα με τη σειρά που εμφανίζονται από αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος της L. Για παράδειγμα, για τη γραμμή σάρωσης στη θέση που φαίνεται στο Σχήμα 1.16, η αντίστοιχη λίστα των ευθυγράμμων τμημάτων είναι: (e_{19}, e_{18}), (e_{17}, e_6), (e_8, e_{10}).

Έστω λοιπόν ότι μια τέτοια λίστα είναι διαθέσιμη. Πως βρίσκουμε τη θέση της κορυφής v σε σχέση με τα ευθύγραμμα τμήματα πάνω στην L; Ο πιο απλός τρόπος που έρχεται στο μυαλό είναι να διασχίσουμε σειριακά τη λίστα ξεκινώντας από το αριστερό της άκρο, και για κάθε ευθύγραμμο τμήμα (e_i, e_j) που επισκεπτόμαστε να κάνουμε τους ακόλουθους ελέγχους:

(1) *είναι το v δεξιότερα ή επάνω στην e_i;* Εάν ναι, προχωράμε στον έλεγχο (2).

/* Αλγόριθμος χωρισμού πολυγώνου σε μονότονα τμήματα */
Ταξινόμησε τις κορυφές του πολυγώνου ως προς την y-συντεταγμένη τους
Κανονικοποίησε τις κορυφές διαχωρισμού (σάρωση από πάνω προς τα κάτω)
Κανονικοποίησε τις κορυφές συνένωσης (σάρωση από κάτω προς τα πάνω)

Σχήμα 1.17 Αλγόριθμος χωρισμού πολυγώνου σε μονότονα τμήματα

Εάν όχι, τότε η διαδικασία της αναζήτησης ολοκληρώνεται: το v δεν περιέχεται σε κανένα από τα ευθύγραμμα τμήματα πάνω στην L, αλλά βρίσκεται ανάμεσα στο τρέχον ευθύγραμμο τμήμα και το τμήμα αμέσως αριστερά του.

2) *είναι το v αριστερότερα ή επάνω στην e_j;* Εάν ναι, τότε η διαδικασία της αναζήτησης ολοκληρώνεται και πάλι καθώς το v περιέχεται στο τρέχον ευθύγραμμο τμήμα (e_i, e_j). Εάν όχι, τότε το v είναι πιο δεξιά ακόμη, και συνεχίζουμε την αναζήτηση στο επόμενο (αμέσως δεξιότερο) ευθύγραμμο τμήμα πάνω στην L.

Η μέθοδος αυτή απαιτεί χρόνο ανάλογο του μεγέθους της λίστας στη χειρότερη περίπτωση, δηλαδή $O(n)$. Εάν, όμως, η λίστα είναι αποθηκευμένη σε ένα ισοζυγισμένο δέντρο αναζήτησης, η αναζήτηση θα απαιτήσει μόνο $O(\log n)$ χρόνο. Δεδομένου ότι μια τέτοια αναζήτηση θα εκτελεστεί για κάθε κορυφή, ο συνολικός χρόνος για τις αναζητήσεις θα είναι $O(n \log n)$.

Εκτός όμως από την αναζήτηση που περιγράφηκε παραπάνω, θα πρέπει να ενημερώνουμε τη δομή δεδομένων για τις αλλαγές που συμβαίνουν κατά τη σάρωση. Συγκεκριμένα, ευθύγραμμα τμήματα μπορεί να χρειαστεί να διαγραφούν ή να εισαχθούν ή να ενημερωθούν όταν αλλάζουν οι ακμές που τα ορίζουν. Καθεμία από αυτές τις λειτουργίες εκτελείται σε χρόνο λογαριθμικό (στο μέγεθος του δένδρου) σε ισοζυγισμένα δέντρα αναζήτησης. Έτσι, καθώς θα εκτελεστούν συνολικά $O(n)$ τέτοιες λειτουργίες, η συνολική πολυπλοκότητα χρόνου θα είναι $O(n \log n)$.

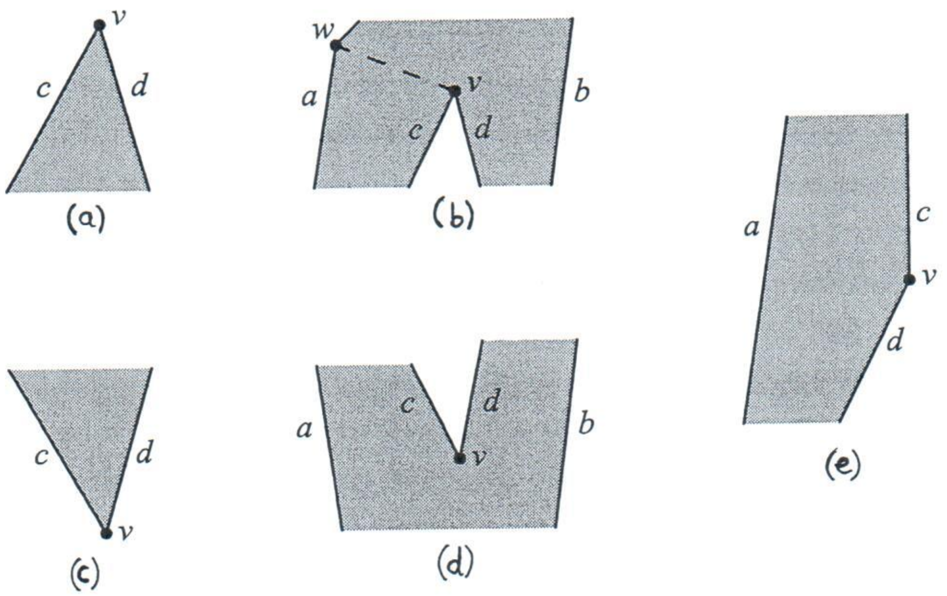
Η γενική περιγραφή του αλγορίθμου δίνεται στο Σχήμα 1.17. Παρακάτω περιγράφουμε τις διάφορες περιπτώσεις που διακρίνουμε κατά την κανονικοποίηση των κορυφών διαχωρισμού. Η διαδικασία κανονικοποίησης των κορυφών συνένωσης είναι εντελώς ανάλογη. Δεδομένου ότι καθεμία από τις δύο διαδικασίες απαιτεί $O(n \log n)$ χρόνο, όπως άλλωστε και η διαδικασία ταξινόμησης, η συνολική πολυπλοκότητα χρόνου του αλγορίθμου χωρισμού του πολυγώνου σε μονότονα τμήματα είναι $O(n \log n)$.

Κανονικοποίηση των κορυφών διαχωρισμού

Αρχικά, η γραμμή σάρωσης L δεν τέμνει το πολύγωνο και το ισοζυγισμένο δέντρο όπου αποθηκεύουμε τα ευθύγραμμα τμήματα (που ορίζονται από την τομή της L με το πολύγωνο) είναι κενό. Σημειώνεται ότι για κάθε τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα αποθηκεύουμε τις δύο ακμές που το ορίζουν και έναν δείκτη `lowest` που θα μας βοηθήσει στον προσδιορισμό της διαγωνίου για την κανονικοποίηση μιας κορυφής διαχωρισμού. Η κανονικοποίηση των κορυφών διαχωρισμού κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου οδηγεί στην πρόσθεση διαγωνίων και συνεπώς τον χωρισμό του πολυγώνου σε μικρότερα πολύγωνα. Εάν το ευθύγραμμο τμήμα, έστω uu', ανήκει σε ένα τέτοιο πολύγωνο Π και σ είναι το τμήμα του συνόρου του Π που περικλείει το τμήμα του Π ψηλότερα από το uu', τότε ο δείκτης `lowest` του uu' δείχνει στην κορυφή του σ με τη μικρότερη y-συντεταγμένη. (Παρατηρήστε την ομοιότητα με την περιγραφή της διαγωνίου που μας επιτρέπει να κανονικοποιήσουμε μια κορυφή διαχωρισμού και το Σχήμα 1.15.) Ο `lowest` θα δείχνει είτε στό ψηλότερο άκρο της μίας από τις δύο ακμές που ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα, είτε σε μια κορυφή συνένωσης που βρίσκεται λίγο ψηλότερα από το ευθύγραμμο τμήμα. Για απλοποίηση, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $(e_1\text{-}e_2, x)$ για να δηλώσουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τις ακμές e_1 και e_2 και του οποίου ο δείκτης `lowest` δείχνει στην κορυφή x.

Γιά να προσομοιώσουμε τη σάρωση του πολυγώνου από πάνω προς τα κάτω, επεξεργαζόμαστε τις κορυφές με σειρά φθίνουσας y-συντεταγμένης. Έστω v η τρέχουσα κορυφή, η οποία πρόσκειται σε δύο ακμές c και d. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. *Οι δύο προσκείμενες ακμές στην v είναι χαμηλότερα από την L.* Τότε, καμία από τις c και d δεν έχει τμηθεί ακόμη από την L και άρα δεν ορίζει ευθύγραμμα τμήματα στο ισοζυγισμένο δέντρο αναζήτησης των ευθυγράμμων τμημάτων. Έχουμε τις εξής δύο υποπεριπτώσεις:
   - 1a. *Η v δεν ανήκει σε κανένα από τα ευθύγραμμα τμήματα στην L.* Τότε, η v είναι κορυφή αρχής (Σχήμα 1.18(a)). Σ' αυτήν την περίπτωση, δεσμεύουμε έναν κόμβο για ένα νέο ευθύγραμμο τμήμα $(c\text{-}d, v)$ και τον εισάγουμε στο δέντρο που αποθηκεύει τα ευθύγραμμα τμήματα (ισοζυγίζοντας εάν χρειαστεί).
   - 1b. *Η v ανήκει σε ένα ευθύγραμμο τμήμα $(a\text{-}b, w)$ στην L (όπου $a \neq c, d$ και $b \neq c, d$).* Τότε, η v είναι κορυφή διαχωρισμού (Σχήμα 1.18(b)), οπότε την κανονικοποιούμε προσθέτωντας τη διαγώνιο vw, και κατόπιν ενημερώνουμε το δέντρο των ευθ. τμημάτων διαγράφοντας το ευθύγραμμο τμήμα $(a\text{-}b, w)$ και εισάγοντας στη θέση του τα δύο ευθύγραμμα τμήματα $(a\text{-}c, v)$ και $(d\text{-}b, v)$.
2. *Οι δύο προσκείμενες ακμές στην v είναι ψηλότερα από την L.* Τότε, τόσο η c όσο και η d έχουν τμηθεί από την L και άρα ορίζουν ευθύγραμμα τμήματα στο



Σχήμα 1.18

ισοζυγισμένο δέντρο αναζήτησης των ευθυγράμμων τμημάτων. Έχουμε τις εξής δύο υποπεριπτώσεις:

2a. *Οι c και d ορίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα* $(c\text{-}d, w)$ *στην* L. Τότε, η κορυφή v είναι κορυφή τέλους (Σχήμα 1.18(c)), οπότε απλά διαγράφουμε το ευθύγραμμο τμήμα από το δέντρο (ισοζυγίζοντας εάν χρειαστεί).

2b. *Οι c και d ορίζουν δύο ευθύγραμμα τμήματα* $(a\text{-}c, w)$ *και* $(d\text{-}b, w')$ *στην* L. Τότε, η κορυφή v είναι κορυφή συνένωσης (Σχήμα 1.18(d)), οπότε διαγράφουμε τα δύο ευθύγραμμα τμήματα από το δέντρο και στη θέση τους εισάγουμε το ευθύγραμμο τμήμα $(a\text{-}b, v)$.

3. *Οι δύο προσκείμενες ακμές στην* v *είναι εκατέρωθεν της* L. Τότε η v είναι κανονική κορυφή και έστω ότι η c είναι πάνω ενώ η d είναι κάτω από την L (Σχήμα 1.18(e)). Τότε, η αναζήτηση της v στο δένδρο των ευθυγράμμων τμημάτων οδηγεί στην εύρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος $(a\text{-}c, w)$ που ορίζεται από την c. Η επεξεργασία της v έγκειται στην ενημέρωση των πεδίων αυτού του ευθύγραμμου τμήματος ώστε να είναι $(a\text{-}d, v)$.

Είναι φανερό ότι η πολυπλοκότητα χρόνου της διαδικασίας κανονικοποίησης των κορυφών διαχωρισμού απαιτεί $O(n \log n)$ χρόνο: για κάθε κορυφή εκτελούμε το πολύ μία αναζήτηση, δύο διαγραφές και δύο εισαγωγές, καθεμία από τις οποίες απαιτεί $O(\log n)$ χρόνο.

1.5. Αλγόριθμοι διαίρεσης απλού πολυγώνου σε τρίγωνα

Τετραγωνικοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα της διαίρεσης πολυγώνου σε τρίγωνα εμπεριέχονταν σε αποδείξεις ήδη από το 1911. Ο πρώτος $O(n \log n)$ αλγόριθμος, ένα από τα πρώτα επιτεύγματα της υπολογιστικής γεωμετρίας μετά την καθιέρωση του τομέα, δημοσιεύτηκε το 1978. Λίγο αργότερα, το ερώτημα εάν η βέλτιστη πολυπλοκότητα που μπορεί να επιτευχθεί είναι $O(n \log n)$ έγινε το σημαντικότερο αναπάντητο πρόβλημα στην υπολογιστική γεωμετρία οδηγώντας σε πολλούς έξυπνους αλγορίθμους. Βρέθηκαν αρκετοί αλγόριθμοι που απαιτούσαν λιγότερο από $\Theta(n \log n)$ χρόνο, αλλά όλοι αφορούσαν σε ειδικές περιπτώσεις: ο αλγόριθμος των Hertel και Mehlhorn (πολυπλοκότητα $O(n + r \log r)$, όπου r είναι το πλήθος μη κυρτών κορυφών), ο αλγόριθμος των Chazelle και Incerpi (πολυπλοκότητα $O(n \log s)$, όπου s είναι η *sinuosity*, ένα μέτρο της μη κυρτότητας του πολυγώνου). Στη χειρότερη περίπτωση, όλοι αυτοί οι αλγόριθμοι απαιτούσαν $O(n \log n)$ χρόνο.

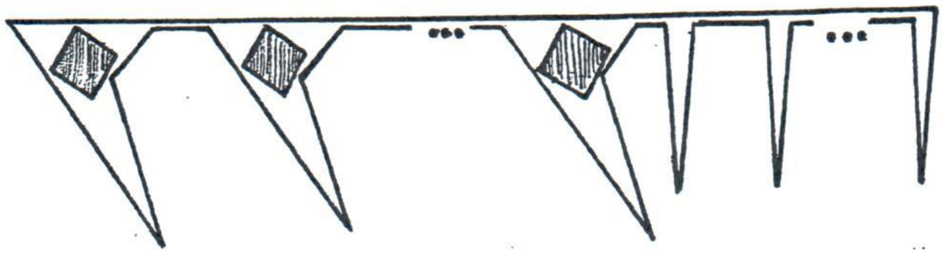
Το φράγμα της $O(n \log n)$ πολυπλοκότητας χρόνου στη χειρότερη περίπτωση καταρρίφθηκε το 1988, όταν οι Tarjan και VanWyk περιέγραψαν έναν $O(n \log(\log n))$ αλγόριθμο, ενώ λίγο αργότερα ακολούθησαν δύο $O(n \log^* n)$ αλγόριθμοι[2]: ένας πιθανοτικός (*probabilistic*) από τους Clarkson, Tarjan και VanWyk (1989) και ένας για κατάλληλα φραγμένες ακέραιες συντεταγμένες από τους Kirkpatrick, Klawe και Tarjan (1990).

Τέλος, το 1991, ο Chazelle επινόησε έναν εντυπωσιακό $O(n)$ αλγόριθμο. Ο αλγόριθμος είναι αρκετά πολύπλοκος, ώστε να είναι μάλλον άχρηστος για πρακτικές εφαρμογές. Έτσι ενώ έχει πλέον δοθεί καταφατική απάντηση στο ερώτημα εάν υπάρχει γραμμικός αλγόριθμος για τη διαίρεση ενός απλού πολυγώνου σε τρίγωνα, δεν έχει ακόμη βρεθεί ένας απλός και πρακτικός γραμμικός αλγόριθμος.

1.6. Πολύγωνα με Τρύπες

Στις προηγούμενες παραγράφους εξετάσαμε πολύγωνα που ήταν απλά. Για πολύγωνα με τρύπες, η κατάσταση είναι διαφορετική σε αρκετά σημεία.

[2] Θεωρήστε ότι υπολογίζουμε τον λογάριθμο (με βάση το 2) του n, κατόπιν τον λογάριθμο αυτής της ποσότητας, κ.ο.κ, έως ότου καταλήξουμε σε μια τιμή μικρότερη ή ίση με 1. Η ποσότητα $\log^* n$ ισούται ακριβώς με το πλήθος των φορών που χρειάζεται να υπολογίσουμε τον λογάριθμο στην παραπάνω αναδρομική διαδικασία. Έτσι, $\log^* 2 = 1$, $\log^* 4 = 2$, $\log^* 16 = 3$, $\log^* 65536 = 4$, $\log^*(2^{65536}) = 5$.



Σχήμα 1.19

Ειδικότερα, το Θεώρημα της Πινακοθήκης διαμορφώνεται σε:

Θεώρημα 1.6.1 **(Θεώρημα της Πινακοθήκης για πολύγωνα με τρύπες)**
Για ένα πολύγωνο με n κορυφές και h τρύπες, $\lfloor (n+h)/3 \rfloor$ ακίνητοι φύλακες είναι μερικές φορές απαραίτητοι και πάντοτε αρκετοί έτσι ώστε κάθε σημείο του πολυγώνου να εποπτεύεται από κάποιον από τους φύλακες.

Μια οικογένεια πολυγώνων με τρύπες που απαιτούν ακριβώς $\lfloor (n+h)/3 \rfloor$ ακίνητους φύλακες παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.19.

Οι αλγόριθμοι που παρουσιάσαμε αναλυτικά για τη διαίρεση απλών πολυγώνων σε τρίγωνα μπορούν να εφαρμοστούν και σε πολύγωνα με τρύπες με την ίδια πολυπλοκότητα χρόνου. Αυτό όμως δεν ισχύει για τον γραμμικό αλγόριθμο όπως και για τους περισσότερους αλγορίθμους που για ένα απλό n-γωνο απαιτούν $o(n \log n)$ χρόνο. Μάλιστα, αποδεικνύεται ότι *οποιοσδήποτε* αλγόριθμος για διαίρεση πολυγώνων με τρύπες σε τρίγωνα απαιτεί $\Omega(n \log n)$ στη χειρότερη περίπτωση.

1.7. Αναπαράσταση Διδιάστατης Ευθείας Γραμμής στον Υπολογιστή

Μια διδιάστατη ευθεία γραμμή μπορεί να οριστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, όπως, για παράδειγμα, από δύο σημεία της ή από την κλίση της και ένα σημείο κλπ. Ο πιο συνηθισμένος όμως τρόπος περιγραφής μιας ευθείας στον υπολογιστή βασίζεται στη χρήση της εξίσωσής της στη μορφή

$$Ax + By + C = 0$$

όπου οι A, B και C είναι πραγματικοί αριθμοί και οι A και B δεν μπορεί να είναι και οι δύο ίσοι με 0. Η περιγραφή αυτή χρησιμοποιεί τις τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές A, B και C, κάτι που ίσως να φαίνεται λάθος δεδομένου ότι μια ευθεία έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. (Ακριβώς λόγω του παραπάνω βαθμού ελευθερίας, μπορεί να τεθεί ένας επιπλέον περιορισμός μεταξύ των A, B και C. Σε μερικές περιπτώσεις χρησιμοποιείται ο περιορισμός $A^2 + B^2 = 1$.) Το κύριο πλεονέκτημα της παραπάνω εξίσωσης είναι ότι εξασφαλίζει την περιγραφή οποιασδήποτε ευθείας του επιπέδου. Αντίθετα, όλες οι περιγραφές όπου χρησιμοποιούνται μόνο δύο ανεξάρτητες μεταβλητές αποτυγχάνουν να παραστήσουν όλες τις πιθανές ευθείες του επιπέδου και χρησιμοποιούνται μόνο εφόσον οι ευθείες που δεν μπορούν να παρασταθούν αποκλείονται από τα δεδομένα του προβλήματος. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την περιγραφή $x + By + C = 0$. Τότε, δεν θα είχαμε τη δυνατότητα να παραστήσουμε στον υπολογιστή καμία ευθεία κάθετη στον άξονα των y: οι ευθείες αυτές έχουν τη γενική μορφή $By + C = 0$. Μια τέτοια περιγραφή θα ήταν ικανοποιητική μόνο εφόσον είτε δεν πρόκειται να χειριστούμε κατακόρυφες ευθείες, είτε πρόκειται να τις χειριστούμε με κάποιον ειδικό τρόπο και ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες ευθείες.

Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι η ευθεία $Ax+By+C = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα (A, B) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(B, -A)$.

Τέλος, εάν δίδονται δύο σημεία $p = (p_x, p_y)$ και $q = (q_x, q_y)$ στο επίπεδο, η εξίσωση της ευθείας που περνά από αυτά βρίσκεται από την ισότητα

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p_x & p_y & 1 \\ q_x & q_y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Δηλαδή, η ευθεία $\overline{pq}$ που περνά από τα σημεία p, q έχει εξίσωση $Ax + By + C = 0$ όπου

$$A = p_y - q_y \qquad B = -(p_x - q_x) \qquad C = p_x q_y - p_y q_x.$$

1.7.1. Απόσταση σημείου από ευθεία

Η Ευκλείδεια απόσταση σημείου p από ευθεία ℓ ορίζεται ως το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος από το p προς την ℓ κατά μήκος της καθέτου στην ℓ που περνάει από το p. Έστω ότι $p = (p_x, p_y)$ και ότι η ευθεία ℓ έχει εξίσωση $Ax + By + C = 0$. Τότε η *προσημασμένη* απόσταση $d(p, \ell)$ του p από την ℓ ισούται με

$$d(p, \ell) = \frac{Ap_x + Bp_y + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Η απόλυτη τιμή της ποσότητας αυτής δίνει την Ευκλείδεια απόσταση του σημείου από την ευθεία και το πρόσημο καθορίζει το εάν το p ανήκει στο θετικό ή στο αρνητικό ημιεπίπεδο που ορίζει η ℓ.

1.8. Υπολογισμός Εμβαδού Πολυγώνου

1.8.1. Εμβαδόν Τριγώνου

Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται ως γνωστόν με το μισό του γινομένου της βάσης επί το αντίστοιχο ύψος. Ο τρόπος αυτός υπολογισμού ωστόσο δεν διευκολύνει εάν το τρίγωνο περιγράφεται από τις τρεις κορυφές του $a = (a_x, a_y)$, $b = (b_x, b_y)$ και $c = (c_x, c_y)$. Σ' αυτήν την περίπτωση ενδείκνυται η χρήση του ακόλουθου τύπου:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(a_x b_y - a_y b_x + a_y c_x - a_x c_y + b_x c_y - b_y c_x\right).$$

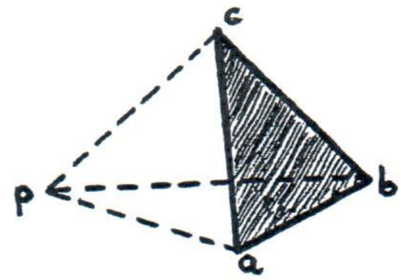
Η παραπάνω έκφραση δίνει το *προσημασμένο* εμβαδόν του τριγώνου, δηλαδή, η απόλυτη τιμή της παραπάνω ποσότητας ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ενώ το πρόσημο εξαρτάται από τη σχετική θέση των τριών κορυφών. Συγκεκριμένα, εάν οι κορυφές του τριγώνου όπως τις συναντάμε κατά την ανθωρολογιακή διάσχιση του συνόρου του τριγώνου είναι *a-b-c*, τότε το πρόσημο είναι θετικό, αλλιώς είναι αρνητικό.

1.8.2. Εμβαδόν Πολυγώνου

Ο υπολογισμός του εμβαδού πολυγώνου μπορεί να γίνει με διαίρεση του πολυγώνου σε τρίγωνα και με άθροιση των εμβαδών αυτών των τριγώνων. Ωστόσο, με χρήση του προσημασμένου εμβαδού η όλη διαδικασία απλοποιείται εάν θεωρήσουμε τα τρίγωνα που ορίζονται από ένα τυχαίο σημείο p και τις ακμές του πολυγώνου. Για παράδειγμα, για ένα τρίγωνο με κορυφές a, b και c και για τυχόν σημείο p του επίπεδου είναι εύκολο να δούμε ότι

$$E(a,b,c) = E(p,a,b) + E(p,b,c) + E(p,c,a) \qquad (1.1)$$

όπου $E(u,v,w)$ δηλώνει το προσημασμένο εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές u, v και w. Το Σχήμα 1.20 παρουσιάζει ένα παράδειγμα. Τα εμβαδά $E(p,a,b)$ και $E(p,b,c)$ είναι θετικά και το άθροισμά τους δίνει το εμβαδόν του τετραπλεύρου με κορυφές p, a, b και c. Το εμβαδόν $E(p,c,a)$ έχει αρνητικό πρόσημο όμως και έτσι όταν προστίθεται στους άλλους δύο όρους έχει ως αποτέλεσμα να απομένει ακριβώς το εμβαδόν $E(a,b,c)$ του τριγώνου. Η ίδια λογική ισχύει για οποιοδήποτε σημείο εκτός του τριγώνου, και βέβαια η ισότητα (1.1) ισχύει και για κάθε σημείο εσωτερικό του τριγώνου.



Σχήμα 1.20

Η παραπάνω μέθοδος γενικεύεται για τυχαίο (όχι απαραίτητα κυρτό) απλό πολύγωνο, οπότε έχουμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 1.8.1

Έστω P ένα (κυρτό ή μη κυρτό) πολύγωνο με κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_n$ και p ένα σημείο του επιπέδου. Τότε, το προσημασμένο εμβαδόν του πολυγώνου P είναι

$$E(P) \;=\; E(p, v_1, v_2) + E(p, v_2, v_3) + \ldots + E(p, v_{n-1}, v_n) + E(p, v_n, v_1).$$

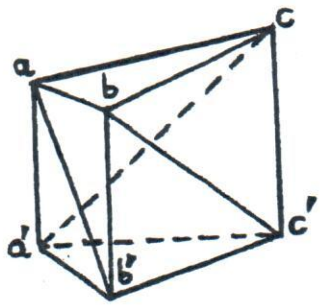
Εάν $v_i = (x_i, y_i)$, η έκφραση αυτή γράφεται

$$\begin{aligned} E(P) &= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})\right) + (x_n y_1 - y_n x_1)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1}\end{vmatrix}\right) + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right]. \end{aligned}$$

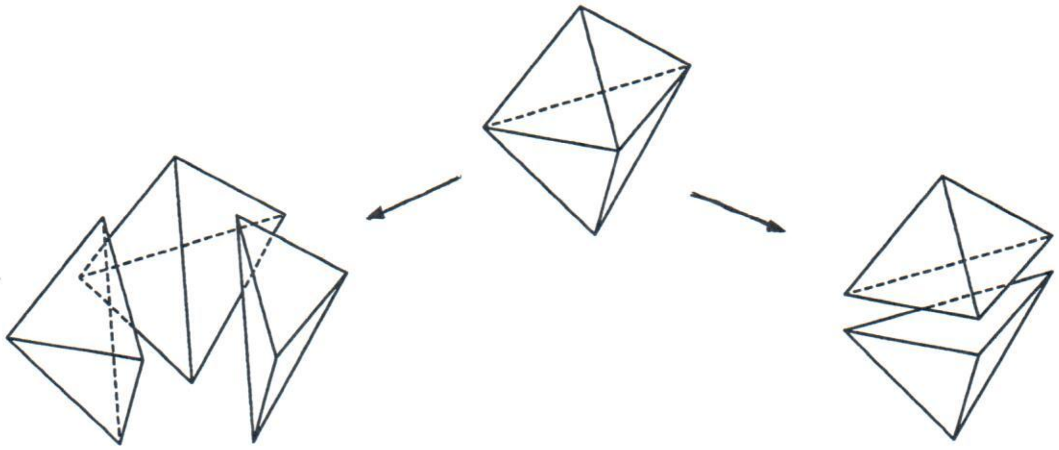
1.9. Διαίρεση Πολυέδρου σε Τετράεδρα

Το πρόβλημα της διαίρεσης πολυγώνων σε τρίγωνα μεταφέρεται στις τρεις διαστάσεις στο πρόβλημα της διαίρεσης πολυέδρων σε τετράεδρα. Η σύγκριση ωστόσο των δύο προβλημάτων παρουσιάζει πολύ σημαντικές διαφορές.

1. Ενώ κάθε απλό πολύγωνο μπορεί να διαιρεθεί σε τρίγωνα χωρίς επιπλέον κορυφές (δηλ., έτσι ώστε οι κορυφές των τριγώνων να είναι κορυφές του πολυγώνου), το ίδιο δεν ισχύει για κάθε πολύεδρο. Με άλλα λόγια, υπάρχουν πολύεδρα που δεν μπορούν να χωριστούν σε τετράεδρα εκτός και αν χρησιμοποιήσουμε επιπλέον σημεία σαν κορυφές των τετραέδρων. Αυτά τα σημεία λέγονται **σημεία Steiner**. Το πιο απλό παράδειγμα είναι το λεγόμενο πολύεδρο του Schönhardt (Σχήμα 1.21). Πρόκειται για ένα πρίσμα με τριγωνικές βάσεις (a, b, c) και (a', b', c') που παρουσιάζουν μια απειροελάχιστη σχετική γωνία στροφής (γύρω από τον άξονα του πρίσματος) ώστε οι ακμές ab', bc' και ca' να είναι μη κυρτές. Λόγω αυτής ακριβώς της μη κυρτότητας, τα ευθύγραμμα τμήματα ac', ba'



Σχήμα 1.21



Σχήμα 1.22 Ένα πολύεδρο με δύο διαιρέσεις σε διαφορετικό πλήθος τετραέδρων.

και cb' βρίσκονται στο εξωτερικό του πολυέδρου και συνεπώς ένα τετράεδρο με κορυφές a και c' (ή αντίστοιχα b και a' ή c και b') δεν περιέχεται στο πολύεδρο. Με βάση τα παραπάνω, το τετράεδρο (a, b, c, a') δεν περιέχεται στο πολύεδρο, καθώς έχει ως κορυφές τις b και a', και άρα δεν μπορεί να αποτελέσει τμήμα μιας πιθανής διαίρεσης του πολυέδρου σε τετράεδρα. Με ανάλογα επιχειρήματα αποκλείονται και τα τετράεδρα (a, b, c, b'), (a, b, c, c'), (a', b', c', a), (a', b', c', b) και (a', b', c', c). Η μόνη εναλλακτική λύση πάντα για τετράεδρα με κορυφές από τις κορυφές του πολυέδρου είναι τετράεδρα με δύο κορυφές από τις a, b και c και δύο κορυφές από τις a', b' και c'. Αλλά, ούτε και σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να βρούμε τετράεδρα που περιέχονται πλήρως στο πολύεδρο: εάν επιλέξουμε για παράδειγμα τις κορυφές a και b από τις a,b,c για το τετράεδρο, θα πρέπει να απορρίψουμε τις c' και a' εάν θέλουμε το τετράεδρο να περιέχεται στο πολύεδρο, και άρα απομένει μόνο η b' που δεν μας αρκεί για να σχηματίσουμε τετράεδρο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το πρόβλημα του εάν ένα πολύεδρο μπορεί να διαιρεθεί σε τετράεδρα χωρίς επιπλέον κορυφές είναι εξαιρετικά δύσκολο (NP-πλήρες), ενώ κάθε πολύεδρο μπορεί να διαιρεθεί σε τετράεδρα εάν επιτρέψουμε επιπλέον κορυφές.

2. Ενώ κάθε n-γωνο που μπορεί να χωριστεί σε τρίγωνα χωρίς επιπλέον κορυφές απαιτεί για οποιονδήποτε δυνατό χωρισμό ακριβώς $n - 2$ τρίγωνα, διαφορετικές διαιρέσεις ενός πολυέδρου σε τετράεδρα (και πάλι χωρίς επιπλέον κορυφές) μπορεί να οδηγήσουν σε διαφορετικό πλήθος τετραέδρων. Το πιο απλό παράδειγμα είναι το πολύεδρο του Σχήματος 1.22, όπου δύο τριγωνικές πυραμίδες έχουν κολληθεί στις βάσεις τους. Όπως φαίνεται στο σχήμα, το πολύεδρο αυτό μπορεί να διαιρεθεί σε 2 ή 3 τετράεδρα (χωρίς να χρησιμοποιηθούν επιπλέον κορυφές).

3. Τέλος, ένα απλό πολύεδρο με n κορυφές μπορεί να διαιρεθεί σε $O(n^2)$ τετράεδρα (πιθανώς με τη χρήση επιπλέον κορυφών), και μάλιστα υπάρχουν πολύεδρα που απαιτούν $\Omega(n^2)$ τετράεδρα. Εάν λάβουμε υπόψη μας και το πλήθος r των μη κυρτών ακμών του πολυέδρου (ακμές όπου η αντίστοιχη εσωτερική δίεδρη γωνία είναι μεγαλύτερη από $180°$), τα παραπάνω φράγματα γίνονται $O(n + r^2)$ και $\Omega(n + r^2)$ αντίστοιχα. Ο μεχρι στιγμής καλύτερος αλγόριθμος επιτυγχάνει τη διαίρεση ενός πολυέδρου σε $O(n + r^2)$ τετράεδρα σε $O((n + r^2) \log r)$ χρόνο.

1.9.1. Αναπαράσταση Επιπέδου στον Υπολογιστή

Σε αναλογία με την περίπτωση της διδιάστατης ευθείας, ένα επίπεδο περιγράφεται στον υπολογιστή με τη μορφή

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Καθώς η περιγραφή αυτή έχει τέσσερις βαθμούς ελευθερίας, έναν περισσότερο από ότι το επίπεδο στις τρεις διαστάσεις, συχνά τίθεται ο περιορισμός $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Σημειώνεται ότι το επίπεδο $Ax+By+Cz+D = 0$ είναι κάθετο στο διάνυσμα (A, B, C).

Επίσης, εάν δίδονται τρία σημεία $p = (p_x, p_y, p_z)$, $q = (q_x, q_y, q_z)$ και $r = (r_x, r_y, r_z)$, η εξίσωση του επιπέδου που αυτά ορίζουν δίδεται από την ισότητα

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p_x & p_y & p_z & 1 \\ q_x & q_y & q_z & 1 \\ r_x & r_y & r_z & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.9.2. Απόσταση Σημείου από Επίπεδο

Η Ευκλείδεια απόσταση σημείου p από επίπεδο Π ορίζεται ως η μικρότερη απόσταση του p από κάποιο σημείο του Π και αποδεικνύεται ότι είναι ίση με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος από το σημείο p προς το επίπεδο Π κατά μήκος της καθέτου στο Π που περνάει από το p. Έστω ότι $p = (p_x, p_y, p_z)$ και ότι το επίπεδο Π έχει εξίσωση $Ax + By + Cz + D = 0$. Τότε η *προσημασμένη* απόσταση $d(p, \Pi)$ του p από το Π ισούται με

$$d(p, \Pi) = \frac{Ap_x + Bp_y + Cp_z + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Η απόλυτη τιμή της ποσότητας αυτής δίνει την Ευκλείδεια απόσταση του σημείου από το επίπεδο και το πρόσημο καθορίζει το εάν το p ανήκει στον θετικό ή στον αρνητικό ημι-χώρο που ορίζει το Π.

1.9.3. Όγκος Τετραέδρου

Η έκφραση για το προσημασμένο εμβαδόν ενός τριγώνου (που βασίζεται στη χρήση ορίζουσας) γενικεύεται και στις τρεις διαστάσεις επιτρέποντάς μας να υπολογίσουμε αντίστοιχα τον όγκο ενός τετραέδρου. Συγκεκριμένα, ο προσημασμένος όγκος ενός τετραέδρου με κορυφές $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$, $c = (c_x, c_y, c_z)$, και $d = (d_x, d_y, d_z)$ δίνεται από την έκφραση

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z & 1 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \\ c_x & c_y & c_z & 1 \\ d_x & d_y & d_z & 1 \end{vmatrix}.$$

Όπως και στην περίπτωση του εμβαδού τριγώνου, η παραπάνω έκφραση δίνει τον *προσημασμένο* όγκο του τετραέδρου, δηλαδή, η απόλυτη τιμή της παραπάνω ποσότητας ισούται με τον όγκο του τετραέδρου ενώ το πρόσημο εξαρτάται από τη σχετική θέση των τεσσάρων κορυφών.

1.10. Έλεγχος εάν Σημείο Ανήκει σε Κύκλο

Με χρήση ορίζουσας, μπορούμε επίσης να ελέγξουμε εάν ένα σημείο του επιπέδου βρίσκεται εντός, επάνω στην περιφέρεια, ή εκτός ενός κύκλου που περνάει από τρία σημεία. Συγκεκριμένα, έστω κύκλος C που περνά από τα σημεία $a = (a_x, a_y)$, $b = (b_x, b_y)$ και $c = (c_x, c_y)$, και έστω ότι εάν κινηθούμε από το a αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού κατά μήκος της περιφέρειας του C συναντάμε πρώτα το b και κατόπιν το c. Τότε, για κάποιο σημείο $p = (p_x, p_y)$ έχουμε

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_x^2 + a_y^2 & 1 \\ b_x & b_y & b_x^2 + b_y^2 & 1 \\ c_x & c_y & c_x^2 + c_y^2 & 1 \\ p_x & p_y & p_x^2 + p_y^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} > 0 & \text{εάν } p \in \text{εσωτερικό του } C, \\ = 0 & \text{εάν } p \in \text{περιφέρεια του } C, \\ < 0 & \text{εάν } p \in \text{εξωτερικό του } C. \end{cases}$$

Σε περίπτωση που εάν κινηθούμε από το a αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού κατά μήκος της περιφέρειας του C συναντάμε πρώτα το c και κατόπιν το b, τότε το σημείο p ανήκει στο εσωτερικό, στην περιφέρεια, ή στο εξωτερικό του κύκλου C εάν η παραπάνω ορίζουσα έχει αρνητική, μηδενική, ή θετική τιμή, αντίστοιχα.