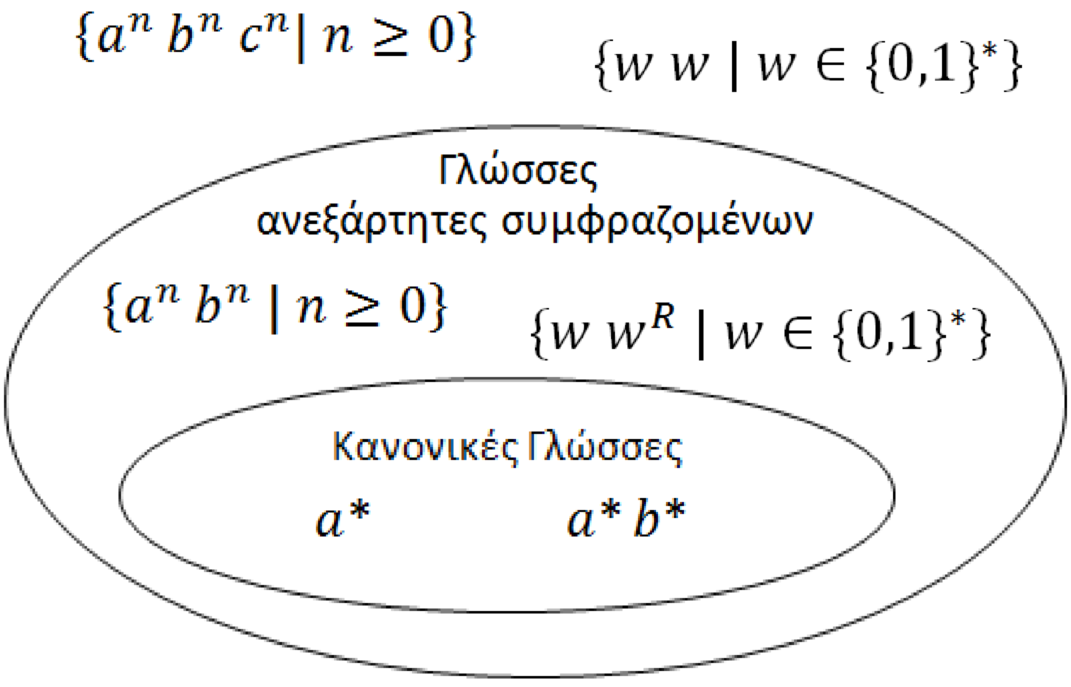
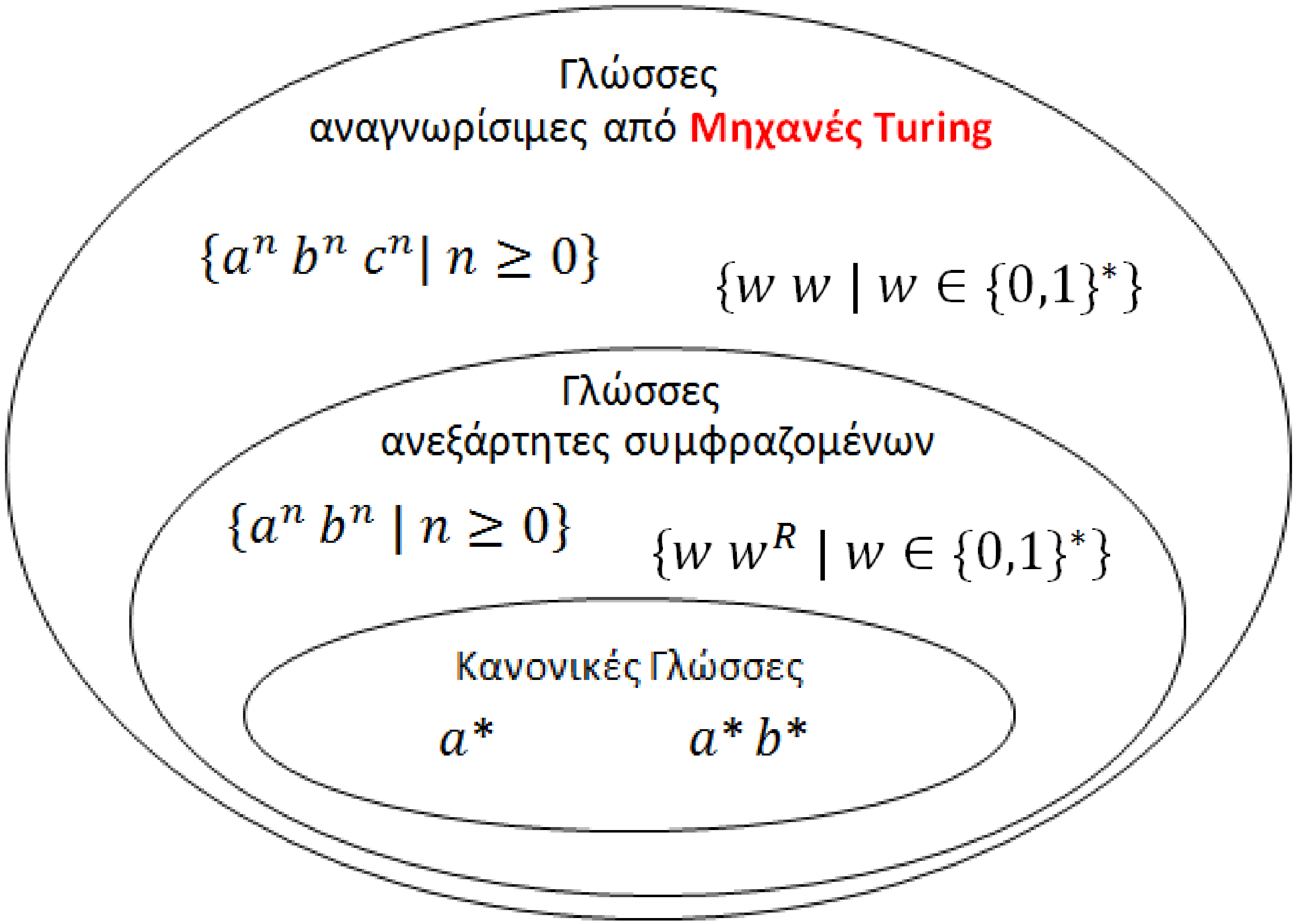
Μηχανές Turing

Μηχανές Turing
Κατά Turing Αναγνωρίσιμες Γλώσσες
Κατά Turing Διαγνώσιμες Γλώσσες
Απαριθμήσιμες Γλώσσες
Το Δόγμα Church-Turing

Μηχανές Turing

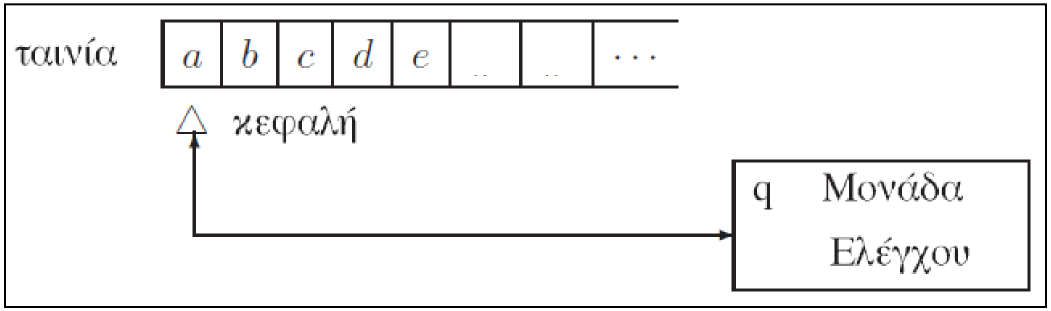


Μηχανές Turing



Μηχανές Turing

Τα **καθοριστικά** Υπολογιστικά Μοντέλα!



Η **ταινία**

- χωρίζεται σε **κελιά** (***θέσεις***) που περιέχουν **1 σύμβολο** το καθένα
- έχει **αριστερό άκρο** αλλά εκτείνεται **απεριόριστα στα δεξιά**

Η **κεφαλή**

- **διαβάζει** το σύμβολο σε **ένα** κελί σε κάθε ανάγνωση
- **γράφει** **1 σύμβολο** στο τρέχον κελί

$q_{\text{αποδοχής}}$: κατάσταση **αποδοχής** $q_{\text{απόρριψης}}$: κατάσταση **απόρριψης**

Αιτιοκρατικές Μηχανές Turing

σύγγραμμα M. Sipser

Μια **αιτιοκρατική Μηχανή Turing** M είναι μια **7-άδα**
$M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{αποδοχής}, q_{απόρριψης})$ όπου

K : ένα **πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων**, το οποίο περιέχει τις καταστάσεις q_0, $q_{αποδοχής}$, $q_{απόρριψης}$,

Σ : **αλφάβητο εισόδου** (το Σ **δεν περιέχει** το ␣ (**κενό**)),

Γ : **αλφάβητο ταινίας** ($\Sigma \cup \{ ␣ \} \subseteq \Gamma$),

δ : η **συνάρτηση μετάβασης** από το $K \times \Gamma$ στο $K \times \Gamma \times \{Α, Δ\}$

q_0: η **εναρκτήρια** (**αρχική**) **κατάσταση**.

Εάν $\delta(p, \sigma_1) = (q, \sigma_2, Α)$ τότε η μηχανή Turing:

από την **κατάσταση** p και για **σύμβολο** $\sigma_1 \in \Gamma$ στο τετράγωνο στο οποίο βρίσκεται η κεφαλή,

μεταβαίνει στην **κατάσταση** q, **γράφει** το **σύμβολο** $\sigma_2 \in \Gamma$ πάνω στο σ_1 και **κινεί** την κεφαλή **1 θέση αριστερά**.

Αιτιοκρατικές Μηχανές Turing

Παρατηρήσεις

1. **Αρχικά**, η μηχανή Turing βρίσκεται στην **αρχική κατάσταση**, η είσοδος w έχει γραφεί στα $|w|$ **αριστερότερα** κελιά της ταινίας και η κεφαλή διαβάζει το **αριστερότερο κελί** της ταινίας.

2. Για **κάποια είσοδο**, μια μηχανή Turing ενδέχεται **τελικά**:
   α) να μεταβεί στην **κατάσταση** $q_{αποδοχής}$ (***αποδέχεται & σταματά***)
   β) να μεταβεί στην **κατάσταση** $q_{απόρριψης}$ (***απορρίπτει & σταματά***)
   γ) να **εγκλωβισθεί** (***δουλεύει επ' άπειρον***)

3. Εάν η μηχανή Turing προσπαθήσει να μετακινήσει την κεφαλή **πιο αριστερά από το αριστερότερο κελί** της ταινίας, η κεφαλή **παραμένει στην ίδια θέση** (στο αριστερότερο κελί της ταινίας).

Αιτιοκρατικές Μηχανές Turing

Παραδείγματα

1. $M = (K, \Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}})$

όπου $K = \{q_0, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}}\}$

και δ:

$$\delta(q_0, a) = (q_0, \sqcup, \Delta)$$
$$\delta(q_0, b) = (q_0, \sqcup, \Delta)$$
$$\delta(q_0, \sqcup) = (q_0, \sqcup, \Delta)$$

Η μηχανή Turing σβήνει την ταινία και **συνεχώς** κινεί την κεφαλή προς τα δεξιά ⇒ **εγκλωβίζεται**

2. Μηχανή Turing με αλφάβητο εισόδου $\Sigma = \{a, b\}$ η οποία:

κινεί την κεφαλή δεξιά,
μετατρέπει τα a σε b και τα b σε a
και όταν τελειώσει, **αποδέχεται**.

$$\delta(q_0, a) = (q_0, b, \Delta)$$
$$\delta(q_0, b) = (q_0, a, \Delta)$$
$$\delta(q_0, \sqcup) = (q_{\text{αποδοχής}}, \sqcup, \Delta)$$

Υπολογισμός Μηχανής Turing

Φάση (**στιγμιότυπο**) του υπολογισμού μιας Μ.Τ. ***M***

ένα **ζεύγος** $(q, w\underline{a}u)$ όπου

Sipser: $(wqau)$

- ***q*** η τρέχουσα **κατάσταση** της *M*
- ***a*** **σύμβολο ταινίας** που **διαβάζει** η κεφαλή
- ***w/u*** το (**μη κενό**) **περιεχόμενο** της ταινίας στα **αριστε-ρά/δεξιά** της κεφαλής

Εάν $q = q_{αποδοχής}$, **αποδεκτική φάση**.

Εάν $q = q_{απόρριψης}$, **απορριπτική φάση**.

παράγει σ' ένα βήμα $(q_1, w_1\underline{a_1}u_1) \vdash_M (q_2, w_2\underline{a_2}u_2)$

το 2ο στιγμιότυπο προκύπτει από το 1ο μετά από **μία μετάβαση**

Π.χ. εάν $\delta(p,a) = (q,a,A)$, $(p, ab\underline{a}b) \vdash_M (q, a\underline{b}ab)$

εάν $\delta(p,a) = (q,b,\Delta)$, $(p, ab\underline{a}b) \vdash_M (q, abb\underline{b})$

Υπολογισμός Μηχανής Turing

Παράδειγμα:

$$\boxed{\begin{aligned}&\delta(q_0, a) = (q_0, b, \Delta)\\&\delta(q_0, b) = (q_0, a, \Delta)\\&\delta(q_0, \sqcup) = (q_{\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\varsigma}, \sqcup, \Delta)\end{aligned}}$$

$(q_0, \underline{a}ba) \vdash_M (q_0, \mathbf{b}\underline{b}a) \vdash_M (q_0, b\mathbf{a}\underline{a}) \vdash_M (q_0, ba\mathbf{b}\underline{\sqcup}) \vdash_M (q_{\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\varsigma}, bab\sqcup\underline{\sqcup})$

παράγει $C_1 \vdash_M^* C_2$

το C_2 προκύπτει από το C_1 μετά από **ακολουθία μεταβάσεων**

($\vdash_M^*$ είναι η **ανακλαστική** & **μεταβατική** κλειστότητα της $\vdash_M$)

Υπολογισμός

ακολουθία μεταβάσεων $C_0, C_1, \ldots, C_n$ $(n \geq 0)$ τέτοια ώστε

$$C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M C_2 \vdash_M \ldots \vdash_M C_n.$$

Αναγνώριση Γλώσσας από Μηχανή Turing

Μια μηχανή Turing $\boldsymbol{M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{αποδοχής}, q_{απόρριψης})}$ **αποδέχεται την είσοδο $w \in \Sigma^*$ ανν** $(q_0, w) \vdash_M^* (q_{αποδοχής}, w')$, όπου στο στιγμιότυπο (q_0, w), η κεφαλή διαβάζει το **1ο σύμβολο** της $\boldsymbol{w}$.

Η **γλώσσα $L(M)$ την οποία αναγνωρίζει** μια μηχανή Turing M είναι το σύνολο των συμβολοσειρών που **αποδέχεται** η M, ($\forall$ συμβολοσειρά $w \notin L(M)$, η M **απορρίπτει** ή **εγκλωβίζεται**).

Μια γλώσσα λέγεται (**κατά Turing**) **αναγνωρίσιμη** εάν υπάρχει μηχανή Turing που την **αναγνωρίζει**.
(οι αναγνωρίσιμες γλώσσες λέγονται και **αναδρομικά απαριθμητές** (***recursively enumerable***))

Διάγνωση Γλώσσας από Μηχανή Turing

Διαγνώστης

μια μηχανή Turing η οποία για **κάθε** είσοδο οδηγείται είτε σε **αποδοχή** είτε σε **απόρριψη** (*δηλ. δεν εγκλωβίζεται για καμία είσοδο*).

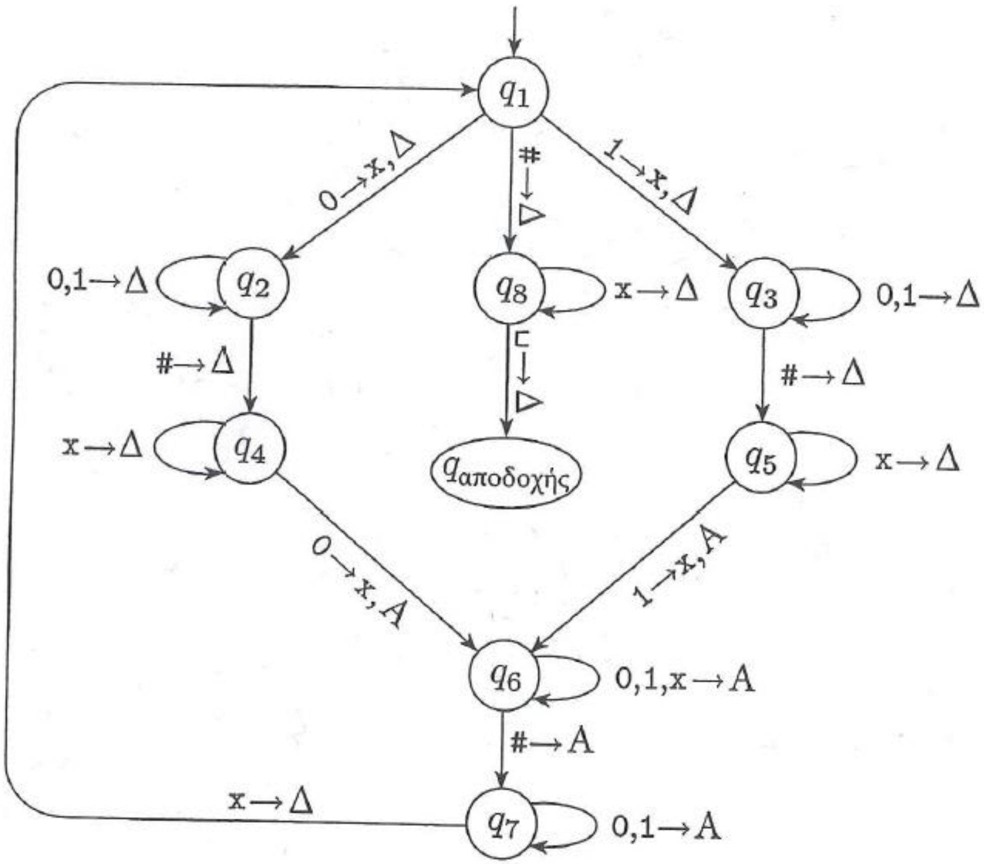
Μια μηχανή Turing **διαγιγνώσκει** μια γλώσσα ***L*** εάν οδηγείται σε **αποδοχή** για **κάθε** συμβολοσειρά που **ανήκει** στην ***L*** και οδηγείται σε **απόρριψη** για **κάθε** συμβολοσειρά που **δεν ανήκει** στην ***L***, δηλ., η μηχανή **αναγνωρίζει** την ***L*** **και** είναι **διαγνώστης**.

Μια γλώσσα λέγεται (**κατά Turing**) **διαγνώσιμη** εάν υπάρχει μηχανή Turing που την **διαγιγνώσκει**.
(οι διαγνώσιμες γλώσσες λέγονται και **αναδρομικές** (***recursive***))

Αναγνώριση/Διάγνωση Γλώσσας από Μ.Τ.

Παράδειγμα:

Μηχανή Turing που **διαγιγνώσκει** τη γλώσσα $\{ w\#w \mid w \in \{0,1\}^* \}$



***Σημείωση*:** Οι μεταβάσεις που **δεν εμφανίζονται** στο διάγραμμα **οδηγούν στην $q_{απόρριψης}$**.

Τεχνικές για Μηχανές Turing

- **Αποθήκευση** πληροφορίας στις **καταστάσεις**
  (όπως ακριβώς στα πεπερασμένα αυτόματα, αυτόματα στοίβας)
- **Ταίριασμα** / **μαρκάρισμα** συμβόλων
  π.χ. για $\boldsymbol{L = \{ 0^n 1^n 0^n : n \geq 0 \}}$.
- **Υπο-προγράμματα**
  π.χ., για πολλαπλές λειτουργίες αντιγραφής
- **Μετακίνηση** του περιεχομένου της ταινίας
- Εκμετάλλευση πολλαπλών «**καναλιών**» στην ταινία

***Σημείωση*:** αποφεύγετε να γράφετε το **σύμβολο** ⊔ στο **μέσον** της συμβολοσειράς στην ταινία.

Επεκτάσεις της Μηχανής Turing

Όλες οι παρακάτω επεκτάσεις είναι **ισοδύναμες** με το βασικό μοντέλο.

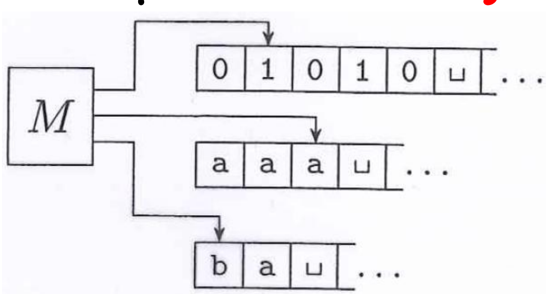
- M.T. με **άπειρη** ταινία **αριστερά και δεξιά**

$\cdots$	A_{-4}	A_{-3}	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$\cdots$

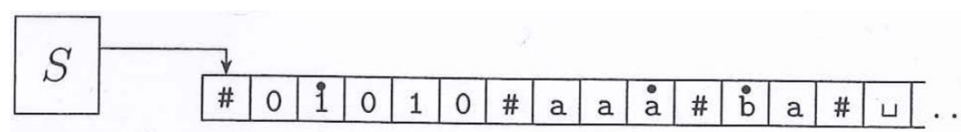
$\Leftrightarrow$

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$\cdots$
C	A_{-1}	A_{-2}	A_{-3}	A_{-4}	$\cdots$

- M.T. με **πολλαπλές ταινίες**



$\Leftrightarrow$



- M.T. με **μία ταινία** και **πολλαπλές κεφαλές**
  π.χ. για $L = \{ 0^n 1^n 0^n \mid n \geq 0 \}$.

- M.T. με **διδιάστατη** ή **πολυδιάστατη ταινία**

Μη Αιτιοκρατικές Μηχανές Turing

Μια **μη αιτιοκρατική Μηχανή Turing *M*** είναι μια **7-άδα**
$M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{αποδοχής}, q_{απόρριψης})$ όπου

- K : ένα **πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων**, το οποίο περιέχει τις καταστάσεις q_0, $q_{αποδοχής}$, $q_{απόρριψης}$,
- Σ : **αλφάβητο εισόδου** (το **Σ δεν περιέχει** το ⊔ (**κενό**)),
- Γ : **αλφάβητο ταινίας** ($\Sigma \cup \{ ⊔ \} \subseteq \Gamma$),
- δ : **συνάρτηση μετάβασης** από το $K \times \Gamma$ στο $2^{K\times\Gamma\times\{Α,Δ\}}$
- q_0: η **εναρκτήρια (αρχική) κατάσταση**.

Π.χ., $\delta(q, a) = \{ (q, a, Α), (p, a, Α), (q, b, Δ) \}$.

Η Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{αποδοχής}, q_{απόρριψης})$ **αποδέχεται την είσοδο $w \in \Sigma^*$ ανν** $\exists$ υπολογισμός $(q_0, w) \vdash_M^* (q_{αποδοχής}, w')$, όπου στο (q_0, w), η κεφαλή διαβάζει το **1ο σύμβολο** της w.

Μη Αιτιοκρατικές Μηχανές Turing

Θεώρημα

Για **κάθε** **μη αιτιοκρατική** **μηχανή Turing** $M_1 = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\varsigma}, q_{\alpha\pi\acute{o}\rho\rho\iota\psi\eta\varsigma})$, υπάρχει **ισοδύναμη αιτιοκρατική** **μηχανή Turing** M_2.

Ιδέα: Για **κάθε** είσοδο w, στην M_2 εκτελούμε τη **συστηματική επίσκεψη** του **δένδρου** που σχηματίζεται από **όλες** **τις πιθανές μεταβάσεις** της M_1 για είσοδο w.

Καθώς για **κάθε** ζεύγος **(κατάσταση, σύμβολο)** της M_1 έχουμε **το πολύ** $r = |K| \cdot |\Gamma| \cdot 2$ **επιλογές**, **κάθε υπολογισμός** της M_1 κωδικοποιείται ως μια **συμβολοσειρά** από το αλφάβητο $\{1, 2, \ldots, r\}$.

Π.χ., αν $\delta(s,a) = \{ (s,a,\mathrm{A}), (q,a,\Delta) \}$

$\delta(q,a) = \{ (p,a,\Delta), (q,b,\mathrm{A}), (s,\sqcup,\Delta) \}$

$\delta(p,\sqcup) = \{ (p,a,\mathrm{A}), (q_{\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\varsigma},\sqcup,\Delta) \}$

τότε ο υπολογισμός $(s, \underline{a}a) \vdash (q, a\underline{a}) \vdash (p, aa\underline{\sqcup}) \vdash (q_{\alpha\pi o\delta o\chi\acute{\eta}\varsigma}, aa\sqcup\underline{\sqcup})$ $\Rightarrow$ **2 1 2**

Μη Αιτιοκρατικές Μηχανές Turing

Απόδειξη Θεωρήματος

Η **αιτιοκρατική Μ.Τ.** M_2 χρησιμοποιεί **3 ταινίες**:

- στην **1η**, αποθηκεύει την **είσοδο** (και **δεν την τροποποιεί**)
- στην **2η**, **προσομοιώνει** τη λειτουργία της **Μ.Τ.** M_1
- στην **3η**, καταχωρεί την τρέχουσα **συμβολοσειρά από {1,2,...,*r*}**

και

- παράγει στην 3η ταινία την **πρώτη** συμβολοσειρά από $\{1,2,\ldots,r\}$ (*εκεί παράγει αυτές τις συμβολοσειρές κατά* ***λεξικογραφική σειρά***)
- για **κάθε** τέτοια συμβολοσειρά **z**, **αντιγράφει** στη 2η ταινία την **είσοδο** και **προσομοιώνει την** M_1 με **βάση τη z**
- αν κάποιο ψηφίο της **z δεν αντιστοιχεί σε μετάβαση** της M_1 ή η M_2 **δεν έχει μπει στην** $q_{\text{αποδοχής}}$ **ή την** $q_{\text{απόρριψης}}$ με το τέλος της **z**, η M_2 **σβήνει τη 2η ταινία** και παράγει στην **3η ταινία την επόμενη συμβολοσειρά**.

Η M_2 αποδέχεται αν και μόνο αν η M_1 αποδέχεται.

εκθετικό πλήθος βημάτων προσομοίωσης

Απαρίθμηση Γλώσσας από Μ.Τ.

Απαριθμητής

Μ.Τ. που **«γράφει»** συμβολοσειρές στην ***«έξοδο»***

Πιο πρακτικά: Μια Μ.Τ. ***M*** (με αρχική κατάσταση $\mathbf{s}$) **απαριθμεί** μια γλώσσα $\boldsymbol{L}$ εάν για την **κατάσταση απαρίθμησης** $\boldsymbol{q_{output}}$ της ***M*** ισχύει ότι: $\boldsymbol{L} = \{ \boldsymbol{w} \mid (\mathbf{s}, \sqcup) \vdash_M^* (\boldsymbol{q_{output}}, \boldsymbol{w}\sqcup) \}$.

Σημείωση: **Αρχικά** η ταινία είναι **κενή**.

Παράδειγμα: Μ.Τ. που **απαριθμεί** τη γλώσσα $\{ \mathbf{0}^n \mid \boldsymbol{n} \geq \mathbf{0} \}$

Θεώρημα

Μια γλώσσα είναι **αναγνωρίσιμη** **αν και μόνον αν** **απαριθμείται από Μ.Τ**.

(i) Απαρ. $\Rightarrow$ Αναγν.: ✓ (ii) Αναγν. $\Rightarrow$ Απαρ.: $\forall k$, k βήματα σε $s_1, \ldots, s_k$

Το Δόγμα Church-Turing

Το Δόγμα Church-Turing (*Church-Turing thesis*, 1936)

Αλγόριθμος = Πρόγραμμα μηχανής Turing

ή

οτιδήποτε μπορεί να **υπολογισθεί** υπολογίζεται από κάποιο **πρόγραμμα μηχανής Turing**.

Alonzo Church (1903-1995, Αμερικανός)
Μαθηματική Λογική,
Θεμελιώσεις Επιστήμης Υπολογιστών (λογισμός λ)
Φιλοσοφία Γλωσσών

Alan Turing (1912-1954, Βρεττανός)
Μαθηματικά, Μαθηματική Λογική,
Επιστήμη Υπολογιστών, Κρυπτανάλυση,
Φιλοσοφία, Θεωρητική Βιολογία