Σύνολα

Σύνολο

μια **συλλογή** αντικειμένων

στοιχεία ή **μέλη**

περιγραφή με **απαρίθμηση στοιχείων** ή **ιδιότητα στοιχείων**

Τα στοιχεία ή μέλη **ανήκουν** στο σύνολο π.χ., $1 \in \{0, 1, 2\}$

Πληθάριθμος ή **πληθικός αριθμός** ή **πληθικότητα** $|A|$

Κενό σύνολο $\varnothing$

Υποσύνολο $A \subseteq B$, **Γνήσιο Υποσύνολο** $A \subset B$

Ισότητα συνόλων $A = B$ **ανν** $A \subseteq B$ **και** $B \subseteq A$

Σύνολα

Συμπλήρωμα $A' = \{\, x \in U \mid x \notin A \,\}$

Ένωση $A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ ή } x \in B \,\}$

Τομή $A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ και } x \in B \,\}$

Διαφορά $A - B = \{\, x \mid x \in A \text{ και } x \notin B \,\} = A \cap B'$

Ιδιότητες

Αντιμεταθετικότητα	$A \cup B =$
	$A \cap B =$
Προσεταιριστικότητα	$A\,(A \cup B)$
	$A\,(A \cap B)$
Επιμεριστικότητα	$A \cup (B$
	$A \cap (B$

Σύνολα

Δυναμοσύνολο 2^A συνόλου A

το σύνολο **όλων** των **υποσυνόλων** του A

π.χ., αν $A=\{1,2,3\}$,

$$2^A = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$$

Σημειώστε: $|2^A| = 2^{|A|}$

Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ συνόλων A, B

το σύνολο **όλων** των **διατεταγμένων ζευγών (a,b)**: $a \in A$ & $b \in B$

π.χ., αν $A=\{1,2,3\}$ και $B=\{a,b\}$,

$$A \times B = \{ (1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b) \}$$

Σημειώστε: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Αποδείξεις

Έστω ότι θέλουμε να δείξουμε ότι **$p \to q$**.

Άμεση ή **Ευθεία Απόδειξη**

υποθέτουμε το p και **αποδεικνύουμε το q**

π.χ., αν m, n περιττοί αριθμοί τότε το γινόμενό τους m·n περιττός

Τότε: m, n περιττοί ⇒ … ⇒ m·n περιττός. ✓

Εις άτοπον απαγωγή

(*αποδεικνύουμε το **λογικό αντιθετοαντίστροφο*** **$\neg q \to \neg p$**)

υποθέτουμε την άρνηση του q,

αποδεικνύουμε την άρνηση του p, **ΑΤΟΠΟ ⇒ q**

π.χ., αν m, n περιττοί αριθμοί τότε το γινόμενό τους m·n περιττός

Τότε: ΌΧΙ(m·n περιττός) ⇒ … ⇒ ΌΧΙ(m,n περιττοί). Άτοπο. ✓

Μαθηματική Επαγωγή

Απόδειξη προτάσεων **$f(i,j,\ldots)$** για **ακέραιες** μεταβλητές $i,j,\ldots$
π.χ., δείξτε ότι $f(n)$: $1+2+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2$, $n\geq 1$

Μαθηματική Επαγωγή για $f(n)$ με $n\geq n_0$
Βάση: **απόδειξη** $f(n_0)$ (πιθανώς και $f(n_0+1)$, $f(n_0+2)$, ...)
Επαγωγική Υπόθεση: **υποθέτουμε** ότι ισχύει $f(k)$ για $k\geq n_0$
Επαγωγικό Βήμα: **αποδεικνύουμε** $f(k+1)$ με χρήση **Επαγ. Υπόθ.**

Ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή για $f(n)$ με $n\geq n_0$
Βάση: **απόδειξη** $f(n_0)$ (πιθανώς και $f(n_0+1)$, $f(n_0+2)$, ...)
Επαγωγική Υπόθεση: **υποθέτουμε** ότι ισχύει $f(j)$ $\boxed{\forall\ n_0\leq j\leq k}$
Επαγωγικό Βήμα: **αποδεικνύουμε** $f(k+1)$ με χρήση **Επαγ. Υπόθ.**

Αλφάβητα και Γλώσσες

Αλφάβητο (***alphabet***)

ένα **πεπερασμένο** σύνολο από **σύμβολα**

π.χ., $\{0, 1\}$, $\{a, b, c\}$

Συμβολοσειρά ή **λέξη** (***string***)

μια **πεπερασμένη** **ακολουθία** από **σύμβολα** του αλφαβήτου

π.χ., 10110, 000, 1 συμβολοσειρές από το αλφάβητο $\{0, 1\}$

Μήκος συμβολοσειράς $|w|$

το **πλήθος συμβόλων** της συμβολοσειράς w

Κενή συμβολοσειρά e ή ϵ

η συμβολοσειρά με 0 σύμβολα (δηλ., $|e| = 0$)

Αλφάβητα και Γλώσσες

Παράθεση ή **Συναρμογή** (***concatenation***) $\boldsymbol{xy}$ συμβολοσειρών $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$
η συμβολοσειρά που προκύπτει γράφοντας τα **σύμβολα της $\boldsymbol{x}$ και μετά τα σύμβολα της $\boldsymbol{y}$**
π.χ., παράθεση("ευ", "καιρος") = "ευκαιρος"
Σημείωση: $\boldsymbol{e\,x = x\,e = x}$

Μια συμβολοσειρά $\boldsymbol{x}$ είναι **υποσυμβολοσειρά** της $\boldsymbol{y}$ αν υπάρχουν συμβολοσειρές $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ τέτοιες ώστε $\boldsymbol{y = u\,x\,w}$.
π.χ., οι ***συμ***, ***ολο***, ***σειρα***, ***υποσυμβολοσειρα*** και $\boldsymbol{e}$ είναι υποσυμβολοσειρές της συμβολοσειράς ***υποσυμβολοσειρα***.

Μια συμβολοσειρά $\boldsymbol{x}$ είναι **πρόθεμα** της $\boldsymbol{y}$ αν $\exists\, \boldsymbol{w} : \boldsymbol{y = x\,w}$.

Μια συμβολοσειρά $\boldsymbol{x}$ είναι **κατάληξη** της $\boldsymbol{y}$ αν $\exists\, \boldsymbol{u} : \boldsymbol{y = u\,x}$.

Αλφάβητα και Γλώσσες

Αντίστροφη (***reverse***) $\boldsymbol{x^R}$ συμβολοσειράς $\boldsymbol{x}$

η συμβολοσειρά που προκύπτει γράφοντας τα **σύμβολα της *x* από δεξιά προς τα αριστερά**

π.χ., $\text{reverse}^R = \text{esrever}$

Παράθεση $\boldsymbol{L_1 L_2}$ **συνόλων** συμβολοσειρών $\boldsymbol{L_1, L_2}$

$L_1 L_2 = \{\, xy \mid \text{για κάθε } x \in L_1 \text{ και κάθε } y \in L_2 \,\}$

π.χ., {α, ευ} {πιστος, στοχος}

= {απιστος, αστοχος, ευπιστος, ευστοχος }

Παρόμοια:

$L^0 = \{e\}, \quad L^1 = L, \quad L^2 = L\,L$

Αλφάβητα και Γλώσσες

Kleene star ή **σώρευση** ***L****** συνόλου συμβολοσειρών ***L***

το σύνολο συμβολοσειρών που προκύπτουν **παραθέτοντας 0, 1 ή περισσότερες** συμβολοσειρές της L

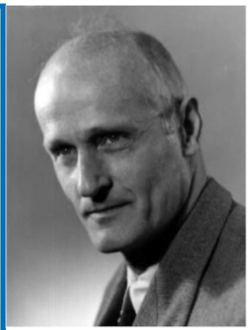
$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots \cup L^k \cup \ldots$$

$$= \{ x_1 x_2 \ldots x_k \mid \forall\, k \geq 0 \ \ \text{και} \ \ x_1, x_2, \ldots, x_k \in L \}$$

π.χ., $\{0\}^* = \{ e, 0, 00, 000, \ldots \}$

$\{0, 1\}^* = \{ e, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \ldots \}$

Stephen C. Kleene (1909-1994)
- Μαθηματικά & Φιλοσοφία (Amherst College)
- PhD στα Μαθηματικά (Princeton University)
- Δίδαξε στο Univ. of Wisconsin-Madison
- Θεωρία Αναδρομής (Recursion Theory)
- Ιεραρχία Kleene, Άλγεβρα Kleene, Kleene star, Θεωρήματα



Αλφάβητα και Γλώσσες

Kleene star ή **σώρευση** L^* συνόλου συμβολοσειρών L

το σύνολο συμβολοσειρών που προκύπτουν **παραθέτοντας 0, 1 ή περισσότερες** συμβολοσειρές της L

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots \cup L^k \cup \ldots$$

$$= \{ x_1 x_2 \ldots x_k \mid \forall k \geq 0 \ \ \text{και} \ \ x_1, x_2, \ldots, x_k \in L \}$$

π.χ., $\{0\}^* = \{ e, 0, 00, 000, \ldots \}$

$\{0, 1\}^* = \{ e, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \ldots \}$

$$L^+ = L^1 \cup L^2 \cup \ldots \cup L^k \cup \ldots$$

$$= \{ x_1 x_2 \ldots x_k \mid \forall k \geq 1 \ \ \text{και} \ \ x_1, x_2, \ldots, x_k \in L \}$$

π.χ., $\{0\}^+ = \{ 0, 00, 000, \ldots \}$

$\{0, 1\}^+ = \{ 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \ldots \}$

$\{e, 0\}^+ = \{ e, 0, 00, 000, \ldots \}$

Αλφάβητα και Γλώσσες

Για αλφάβητο Σ

Σ* **=** **όλες** οι συμβολοσειρές με σύμβολα από το Σ

π.χ., $\{\mathbf{0}\}^* = \{\, \boldsymbol{e}, \mathbf{0}, \mathbf{00}, \mathbf{000}, \ldots \}$

$\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^* = \{\, \boldsymbol{e}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{00}, \mathbf{01}, \mathbf{10}, \mathbf{11}, \mathbf{000}, \mathbf{001}, \mathbf{010}, \ldots \}$

Γλώσσα (με αλφάβητο **Σ**)

ένα **υποσύνολο** του συνόλου **Σ***

π.χ., $\{\boldsymbol{e}\}$

$\{\, x \in \{a,b\}^* \mid$ η x έχει περιττό μήκος $\}$

$\{\, x \in \{a,b\}^* \mid$ η x αρχίζει και τελειώνει με a $\}$

$\{\, x \in \{a,b\}^* \mid$ η x έχει ίδιο πλήθος από a και $b\}$