**«ΕΙΣ ΠΛΑΤΟΣ» ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕ «ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ»**

Ιωάννινα 7-10-2004

1. Δοθείσης της συνάρτησης: $f(x,y) = x^2 + y^2 + \beta xy + x + 2y$, βρείτε τα ακρότατά της για κάθε τιμή του β.
    a. Ποια από αυτά είναι τοπικά και ποια καθολικά ελάχιστα;
    b. Αναλύστε τα ακρότατα σαν συνάρτηση της παραμέτρου β.

2. Υπολογίστε και χαρακτηρίστε τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2$$

όπου $a_i, \quad i = 1, \cdots, n$, δοθείσες σταθερές.

3. Οι μέθοδοι Quasi Newton, εφαρμόζουν μια γραμμική αναζήτηση στην κατεύθυνση $d = -Hg$, όπου $g = \nabla f(x)$, και ο πίνακας H είναι συμμετρικός, θετικά ορισμένος και προσεγγίζει τον αντίστροφο του Εσσιανού πίνακα. Εάν υπάρχει ο γραμμικός ισοτικός περιορισμός $c^T x - b = 0$, (τα διανύσματα $c \in R^n$ και $x \in R^n$) και ο οποίος ικανοποιείται στο τρέχον σημείο, βρείτε τον πίνακα D έτσι ώστε η κατεύθυνση $d^c = -(H - D)g$ να είναι τέτοια ώστε σε όλα της τα σημεία να ικανοποιείται ο περιορισμός και να είναι φθίνουσα.

4. Έστω η συνάρτηση $f(x), \quad x \in R^n$ και η κλίση της $g = \nabla f(x)$. Εάν το διάνυσμα $p \in R^n$, ορίζει μια φθίνουσα κατεύθυνση, τότε δείξτε ότι ο πίνακας $H = I - \frac{pp^T}{p^T g} - \frac{gg^T}{g^T g}$, ($I$, ο πίνακας μονάδα) είναι θετικά ορισμένος.

5. Έστω η τετραγωνική συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + p^T x$.

    a. Το σημείο Cauchy ($x_c$), ορίζεται ως το σημείο που ελαχιστοποιεί την $f(x)$ στην κατεύθυνση $d = -\nabla f(x)$ και περνά από την αρχή των αξόνων. Υπολογίστε το.

    b. Το σημείο Newton ($x_N$), είναι το σημείο που ελαχιστοποιεί την $f(x)$. Υπολογίστε το και δείξτε ότι η $f(x)$ είναι συνεχώς φθίνουσα κατά την ευθύγραμμη διαδρομή από το $x_c \rightarrow x_N$.