3η Θεματική Ενότητα : Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

Επιμέλεια διαφανειών:
Χρ. Καβουσιανός

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

- Η **πολυπλοκότητα του κυκλώματος** που υλοποιεί μια συνάρτηση Boole σχετίζεται άμεσα με **την πολυπλοκότητα της αλγεβρικής έκφρασης** από την οποία η συνάρτηση υλοποιείται.

- Αν και η αναπαράσταση μιας συνάρτησης Boole με πίνακα αλήθειας είναι μοναδική, η **αλγεβρική της αναπαράσταση** μπορεί να πάρει **πολλές μορφές**.

- Η απλοποίηση συναρτήσεων Boole με χρήση αλγεβρικών μετασχηματισμών είναι δύσχρηστη καθώς **δεν έχει** συγκεκριμένους κανόνες.

- Η μέθοδος του χάρτη (χάρτης Karnough) είναι μια **απλή** και **συστηματική** μέθοδος για την απλοποίηση συναρτήσεων Boole σε ελάχιστο πλήθος παραγόντων.

Η Μέθοδος του Χάρτη

- Ο χάρτης είναι ένα διάγραμμα αποτελούμενο από τετράγωνα.
- Κάθε τετράγωνο παριστάνει ένα ελαχιστόρο.
- Μια συνάρτηση Boole αναγνωρίζεται γραφικά στο χάρτη από την περιοχή που καλύπτουν τα τετράγωνα των ελαχιστόρων που περιέχονται στη συνάρτηση.
- Ο χάρτης είναι ένα διάγραμμα όλων των δυνατών τρόπων με τους οποίους μια συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί σε πρότυπη μορφή.

Χάρτης Δυο (2) Μεταβλητών

Ο χάρτης περιέχει 4 τετράγωνα, ένα για κάθε ελαχιστόρο.

	0	1
0	m_{00}	m_{01}
1	m_{10}	m_{11}

m_0	m_1
m_2	m_3

x \ y	0	1
0	x′y′	x′y
1	xy′	xy

Κωδικοποίηση Gray

Το x εμφανίζεται ως συμπλήρωμα στη γραμμή 0 και κανονικά στη γραμμή 1.

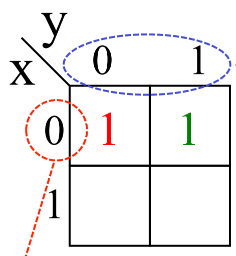
Το y εμφανίζεται ως συμπλήρωμα στη στήλη 0 και κανονικά στη στήλη 1.

Στόχος: η δημιουργία ομάδων από γειτονικούς άσσους

Χάρτης Δυο (2) Μεταβλητών

x	y	F	
0	0	1	x'y'
0	1	1	x'y
1	0	0	xy'
1	1	0	xy

$$F = x'y' + x'y = x'(y' + y) = x'(1) = x'$$



Οι δύο μονάδες του χάρτη έχουν διαφορετική την τιμή του y.

Απλοποιείται

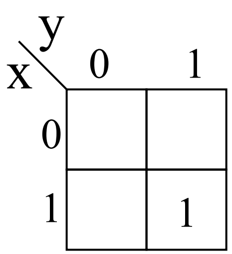
Και οι δύο μονάδες του χάρτη έχουν κοινή την τιμή x'.

Διατηρείται

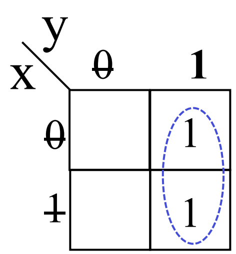
$F = x'$

Χάρτης Δυο (2) Μεταβλητών

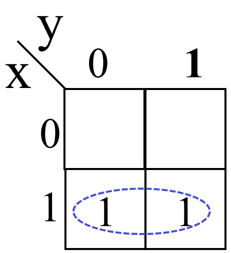
Παραδείγματα



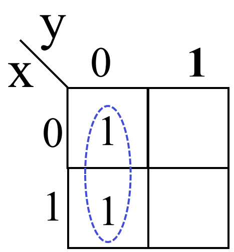
$F = xy = \Sigma(3) = m_3$



$F = x'y + xy = y$



$F = xy' + xy = x$

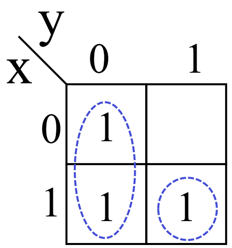


$F = x'y' + xy' = y'$

Χάρτης Δυο (2) Μεταβλητών

Βασικός στόχος:

Κάθε μονάδα στον χάρτη πρέπει να συμμετέχει σε τουλάχιστον μία ομάδα



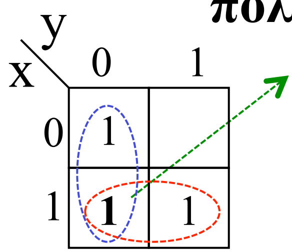
$F = y' + xy$

Η απλοποίηση δεν είναι ικανοποιητική γιατί:

$F = (y' + x)(y' + y) =$
$y' + x$

Αιτία: η μονάδα δεν ανήκει σε μεγάλη ομάδα

Συμμετέχει σε **πολλαπλές** ομάδες



$F = y' + x$

Συμπέρασμα: κάθε μονάδα πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στη μεγαλύτερη δυνατή ομάδα

Χάρτης Δυο (2) Μεταβλητών

Παραδείγματα:

x \ y	0	1
0		1
1	1	1

F = x+y

x \ y	0	1
0	1	1
1		1

F = x'+y

x \ y	0	1
0	1	1
1	1	

F = x'+y'

x \ y	0	1
0	1	1
1	1	1

F = 1

Προσοχή: επιλέγουμε πάντα ομάδες των 1, 2, 4, 8, 16, ... μονάδων του χάρτη

Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

Ο χάρτης περιέχει 8 τετράγωνα, ένα για κάθε ελαχιστόρο.

Οι ελαχιστόροι τοποθετούνται σε σειρά όμοια με τον κώδικα Gray.

x	y	z	
0	0	0	m_0
0	0	1	m_1
0	1	0	m_2
0	1	1	m_3
1	0	0	m_4
1	0	1	m_5
1	1	0	m_6
1	1	1	m_7

	00	01	11	10
0	m_{000}	m_{001}	m_{011}	m_{010}
1	m_{100}	m_{101}	m_{111}	m_{110}

	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

Κώδικας Gray

Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

Κάθε δύο γειτονικά τετράγωνα διαφέρουν σε μία μεταβλητή (κανονική/ συμπληρωματική)

$\Downarrow$

Διαγραφή μεταβλητής και απλοποίηση αθροίσματος

πχ. $m_5+m_7 = xy'z+xyz = xz(y'+y) = xz$

Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	m_{000}	m_{001}	m_{011}	m_{010}
1	m_{100}	m_{101}	m_{111}	m_{110}

Ομάδα Δύο Ελαχιστόρων

$$m_{000}+m_{100} = m_{-00} = b'c'$$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	m_{000}	m_{001}	m_{011}	m_{010}
1	m_{100}	m_{101}	m_{111}	m_{110}

Ομάδα Τεσσάρων Ελαχιστόρων

$$m_{011}+m_{010}+m_{111}+m_{110}=$$

$$m_{-1-} = b$$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	m_{000}	m_{001}	m_{011}	m_{010}
1	m_{100}	m_{101}	m_{111}	m_{110}

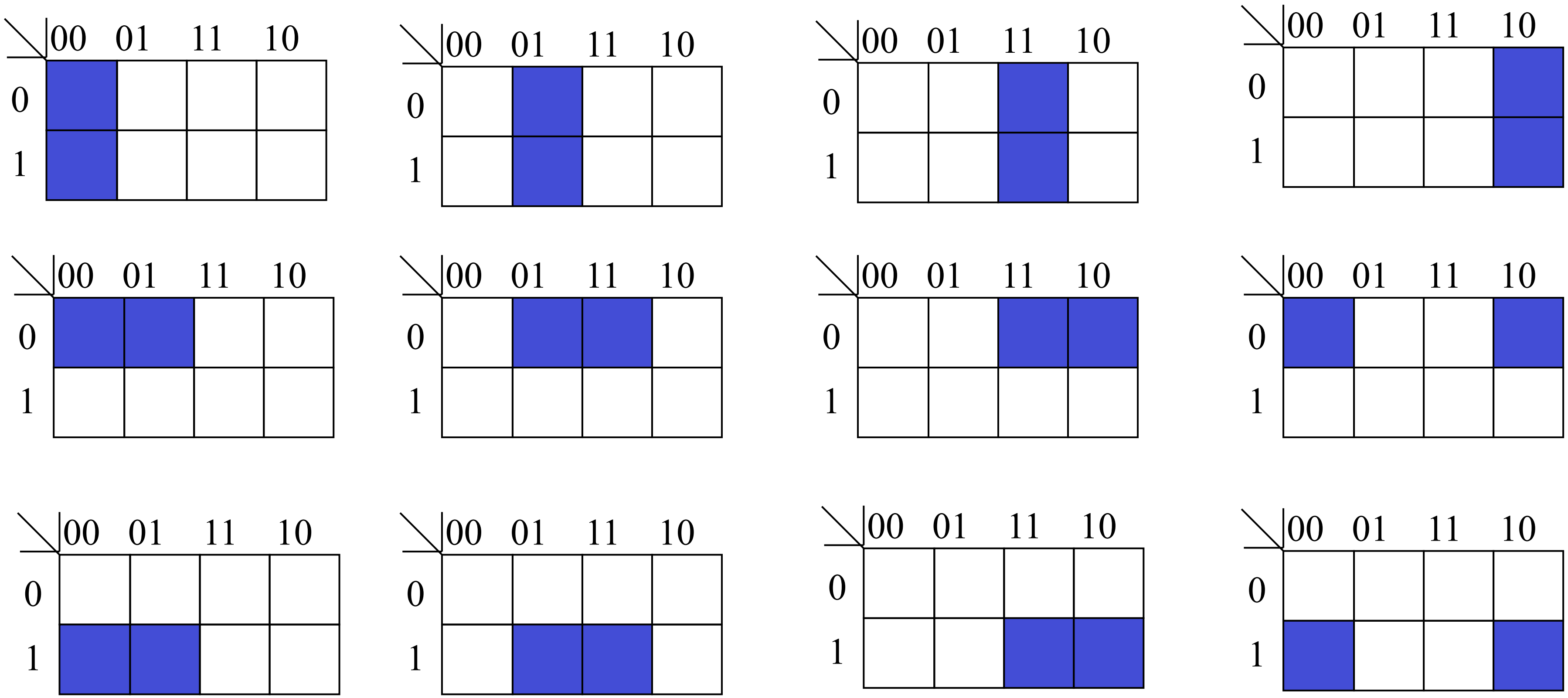
Ομάδα Οκτώ Ελαχιστόρων

$$m_{000}+m_{001}+m_{010}+m_{011}+$$
$$m_{100}+m_{101}+m_{110}+m_{111}=1$$

Υπάρχουν πολλές πιθανές ομάδες των 2 και 4 ελαχιστόρων

Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

Το άθροισμα δύο ελαχιστόρων της συνάρτησης που βρίσκονται σε γειτονικά τετράγωνα απλοποιείται σε ένα όρο ΚΑΙ με δύο μόνο παράγοντες.



Τέσσερα γειτονικά τετράγωνα

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
1 (x)	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

y: στήλες 11, 10; z: στήλες 01, 11

Κώδικας Gray

Κάθε τέσσερα γειτονικά τετράγωνα διαφέρουν σε δύο μεταβλητές

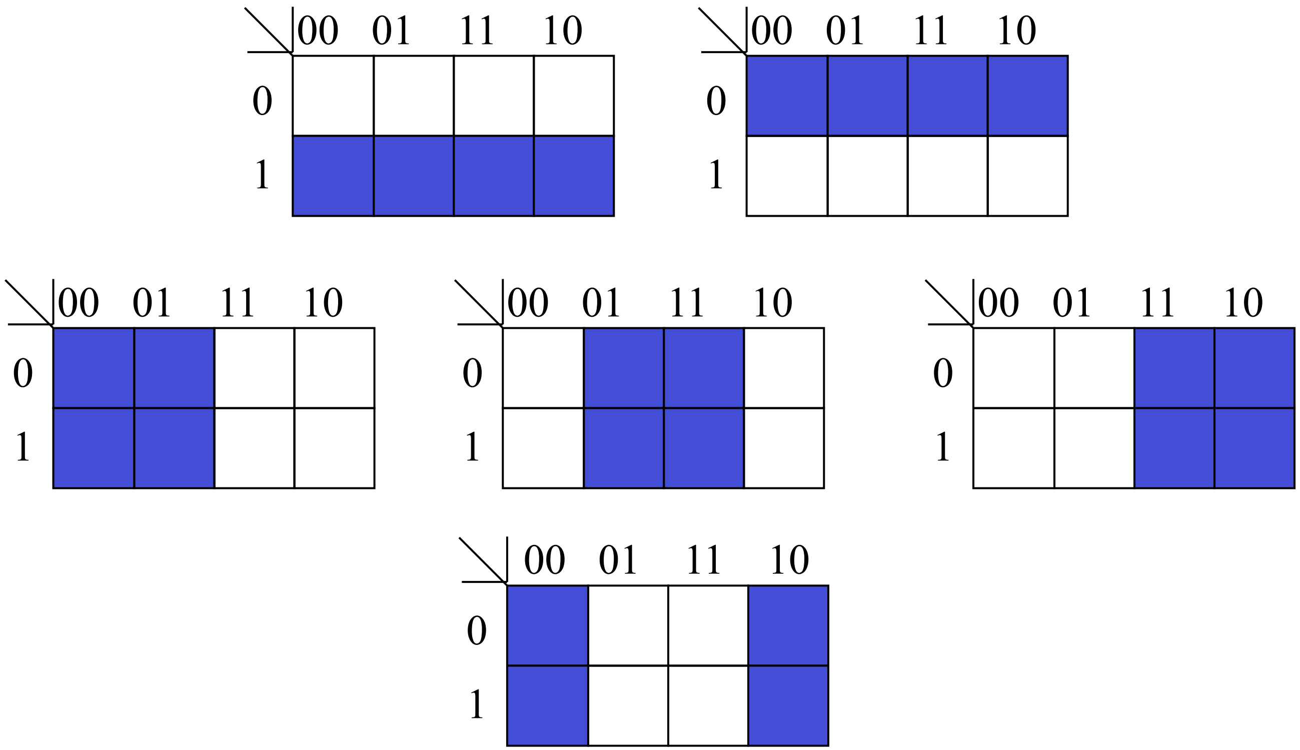
⇩

Διαγραφή μεταβλητών και απλοποίηση αθροίσματος

πχ. $m_1+m_3+m_5+m_7 = x'y'z+x'yz+xy'z+xyz = x'z(y'+y) + xz(y'+y) = x'z+xz = (x'+x)z = z$

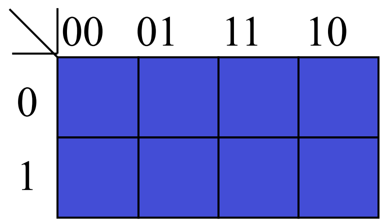
Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

Το άθροισμα τεσσάρων ελαχιστόρων της συνάρτησης που βρίσκονται σε γειτονικά τετράγωνα απλοποιείται σε ένα όρο με ένα μόνο παράγοντα.

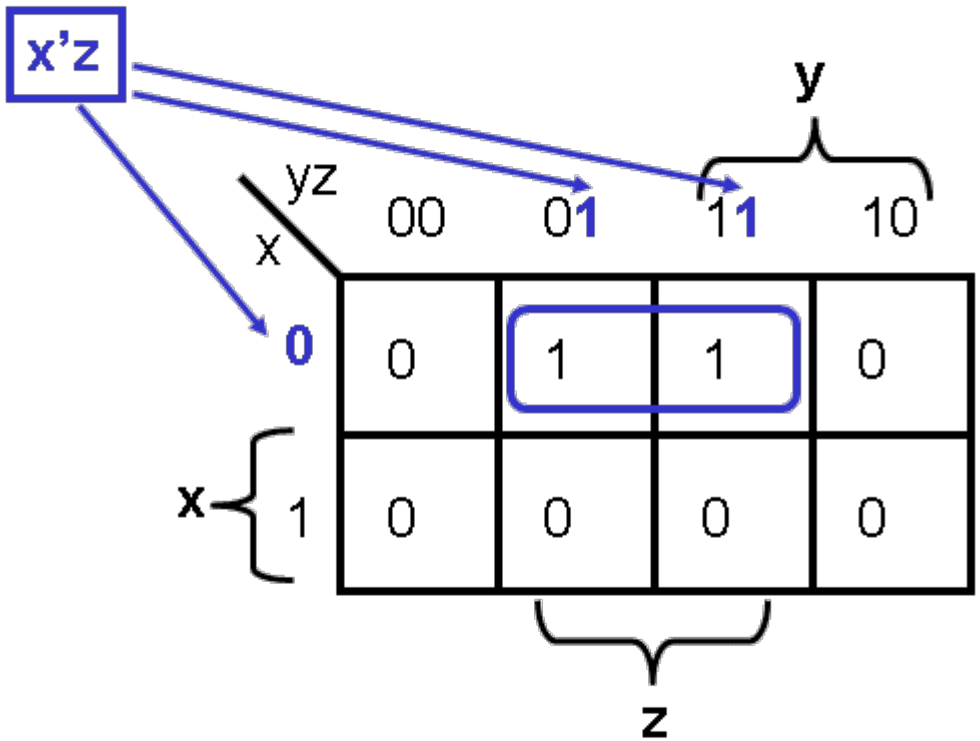


Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

Το άθροισμα οκτώ ελαχιστόρων της συνάρτησης που βρίσκονται σε γειτονικά τετράγωνα καταλαμβάνει όλο το χάρτη και παριστάνει τη συνάρτηση που είναι πάντα ίση με 1.

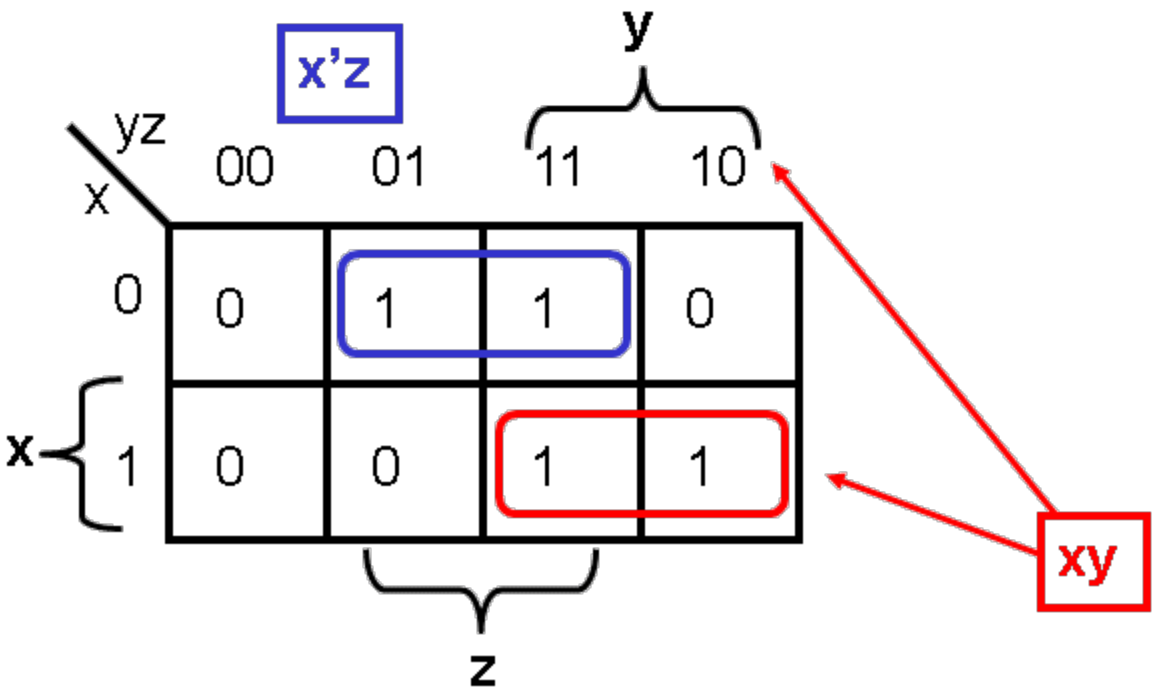


Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών



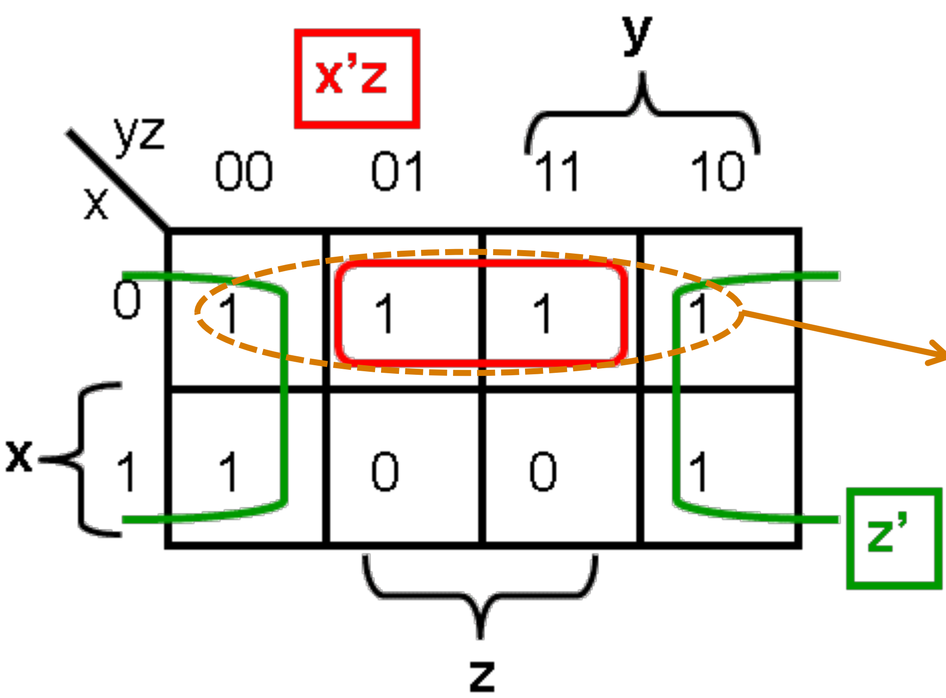
Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

$$F(x,y,z) = x'z + xy$$



Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

F(x,y,z) = x'z + z'



Η ομάδα x'z δεν είναι βέλτιστη

Η οριζόντια τετράδα δίνει απλοποιούμενη τον όρο x'

F(x,y,z) = x' + z'

Παραδείγματα Χάρτη Τριών (3) Μεταβλητών

F(x,y,z) = Σ(2,3,4,5)

x \ yz	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1		

$x'yz + x'yz' = x'y$

$xy'z' + xy'z = xy'$

F(x,y,z) = x′y+xy′

F(x,y,z) = Σ(3,4,6,7)

x \ yz	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	1

$x'yz + xyz = yz$

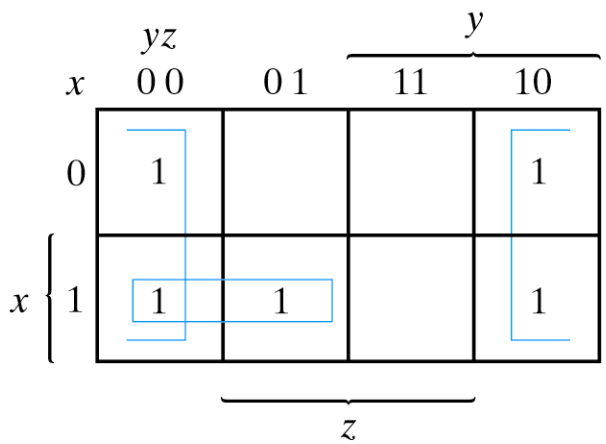
$xy'z' + xyz' = xz'$

F(x,y,z) = yz+xz′

Παραδείγματα Χάρτη Τριών (3) Μεταβλητών

Η ομαδοποίηση γειτονικών τετραγώνων μπορεί να γίνει σε ομάδες 2, 4, 8 (2^n)

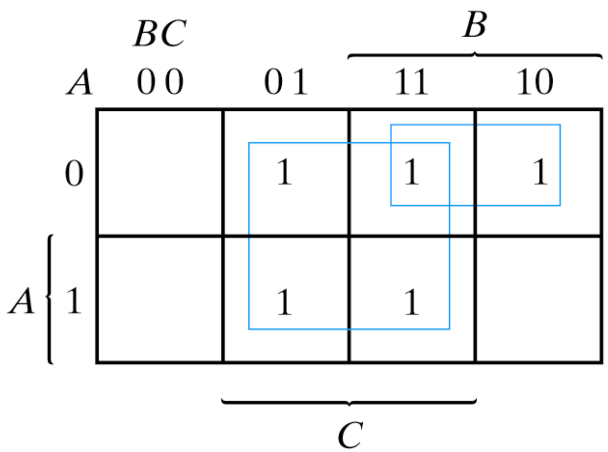
F(x,y,z) = Σ(0,2,4,5,6)



F(x,y,z) = z΄+xy΄

F(A,B,C) =

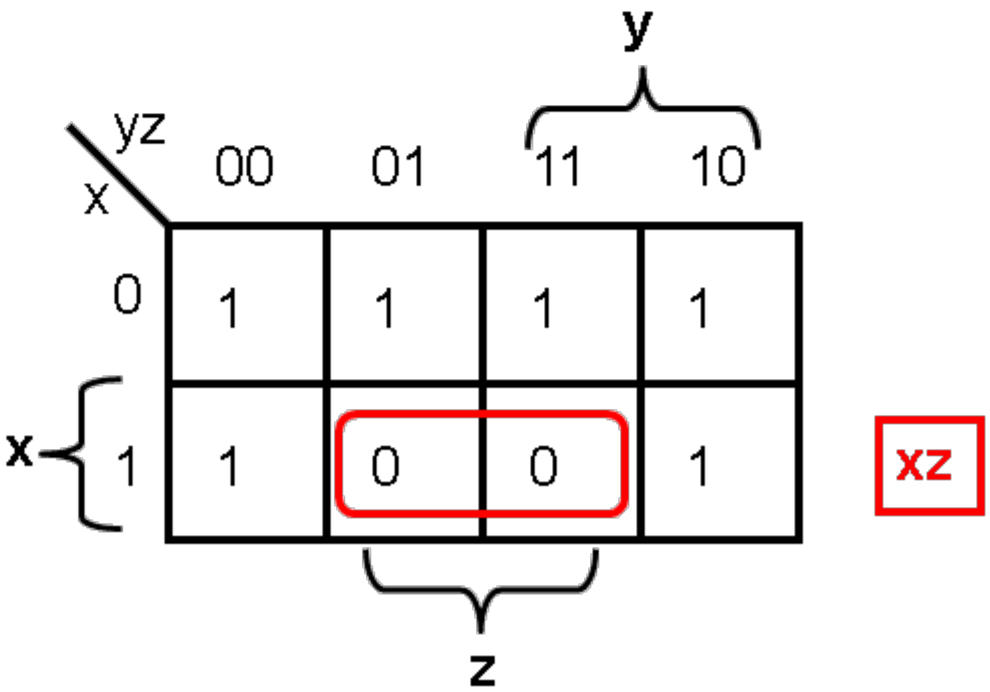
A΄C+A΄B+AB΄C+BC



F(A,B,C) =
Σ(1,2,3,5,7) = C
+A΄B

Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

F'(x,y,z) = xz ➔ $\boxed{F(x,y,z) = x' + z'}$



Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

Ο χάρτης περιέχει 16 τετράγωνα, ένα για κάθε ελαχιστόρο.

Οι ελαχιστόροι τοποθετούνται σε σειρά όμοια με τον κώδικα Gray.

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

y x w z

Κάθε 2^n γειτονικά τετράγωνα διαφέρουν σε n μεταβλητές και οδηγούν σε έναν όρο ΚΑΙ με $k - n$ παράγοντες, όπου k το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης.

2 τετράγωνα: όρος με 3 μεταβλητές

4 τετράγωνα: όρος με 2 μεταβλητές

8 τετράγωνα: όρος με 1 μεταβλητή

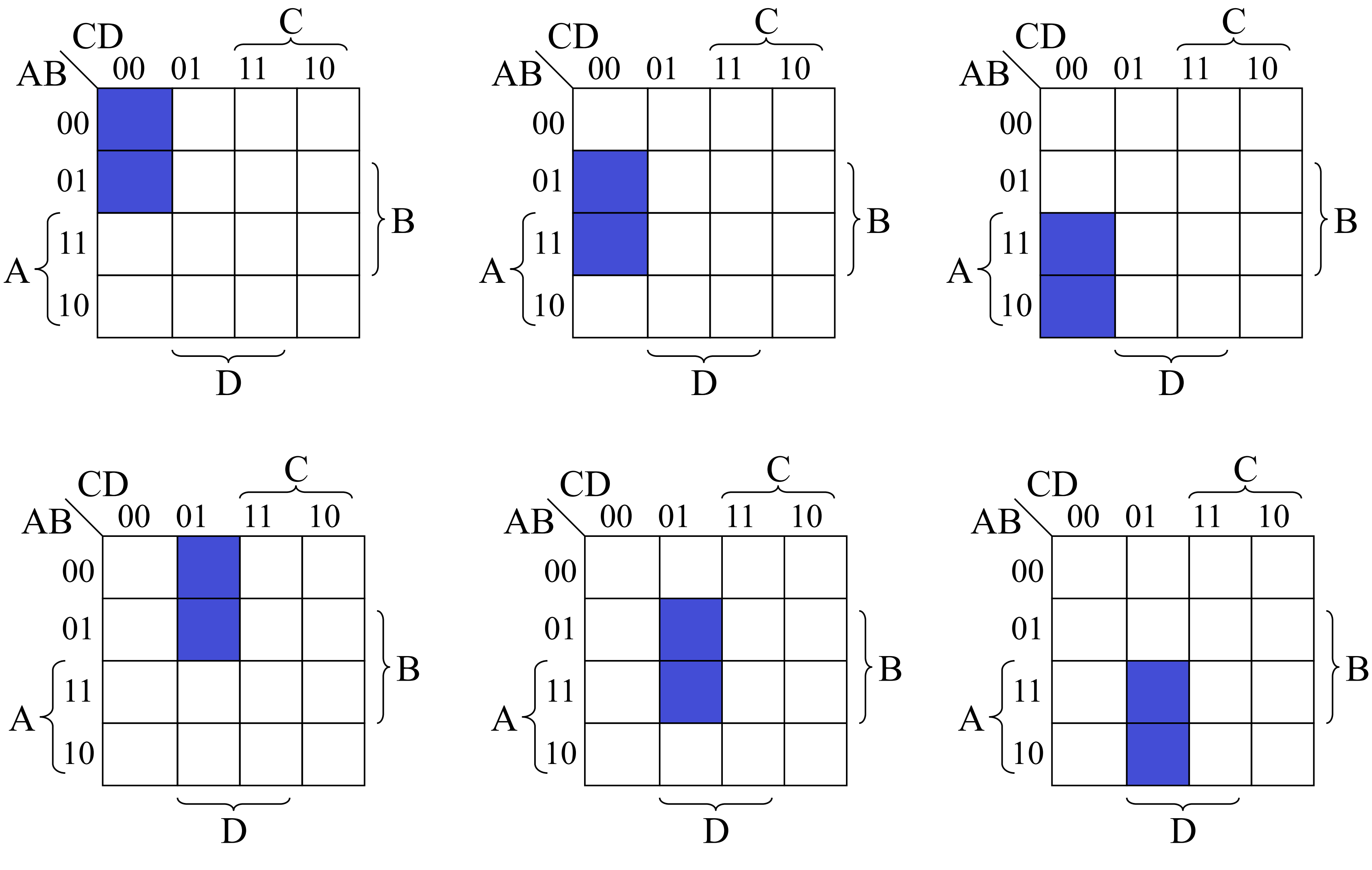
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

wx \ yz	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

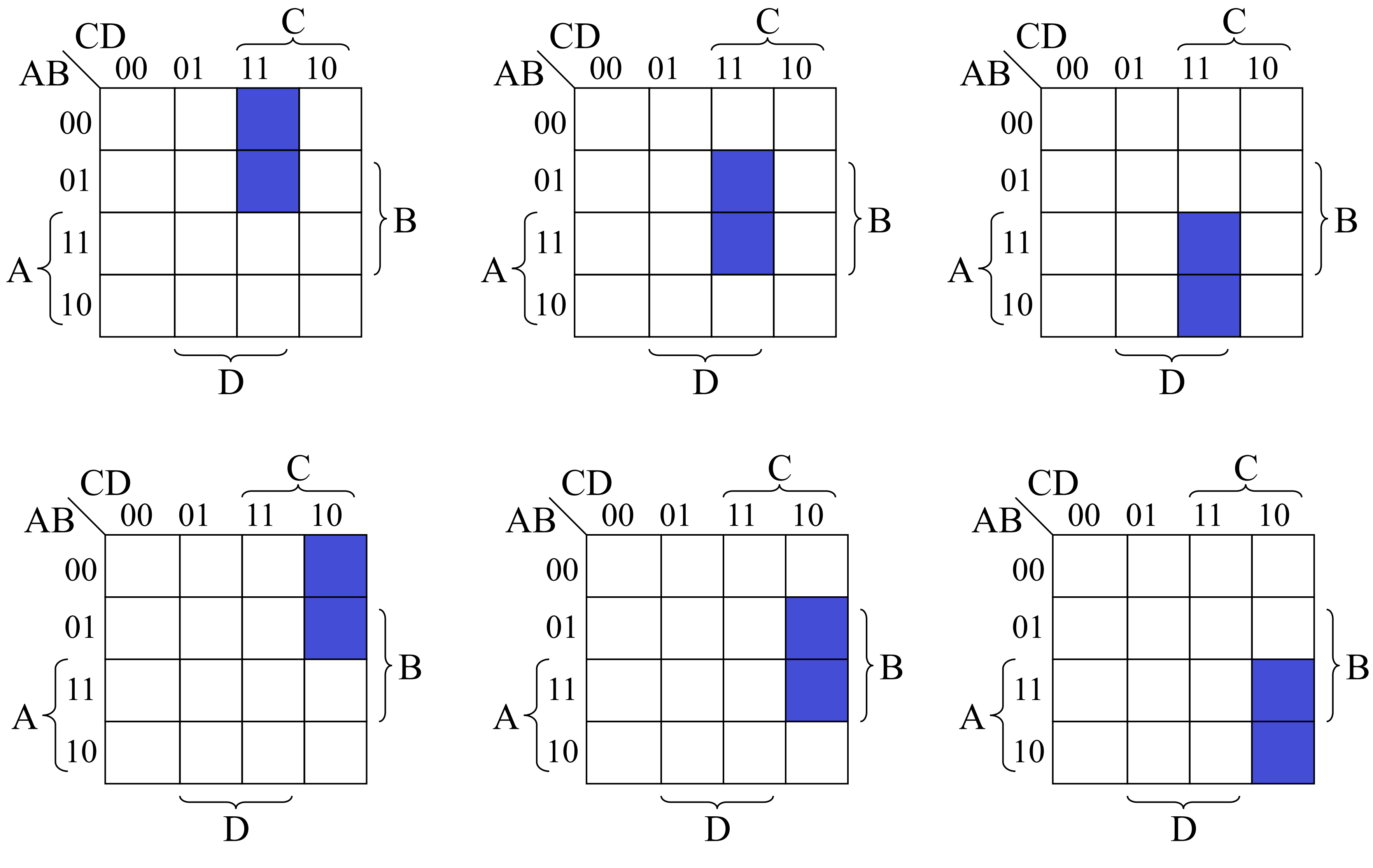
Ο χάρτης θεωρείται ότι μπορεί να διπλωθεί οριζόντια και κάθετα. Έτσι η 1η και η 4η στήλες και γραμμές θεωρούνται γειτονικές

Το πλήθος των λογικών μονάδων κάθε γειτονιάς είναι δύναμη του 2. Δηλαδή κάθε γειτονιά αποτελείται από 1,2,4 ή 8 λογικές μονάδες.

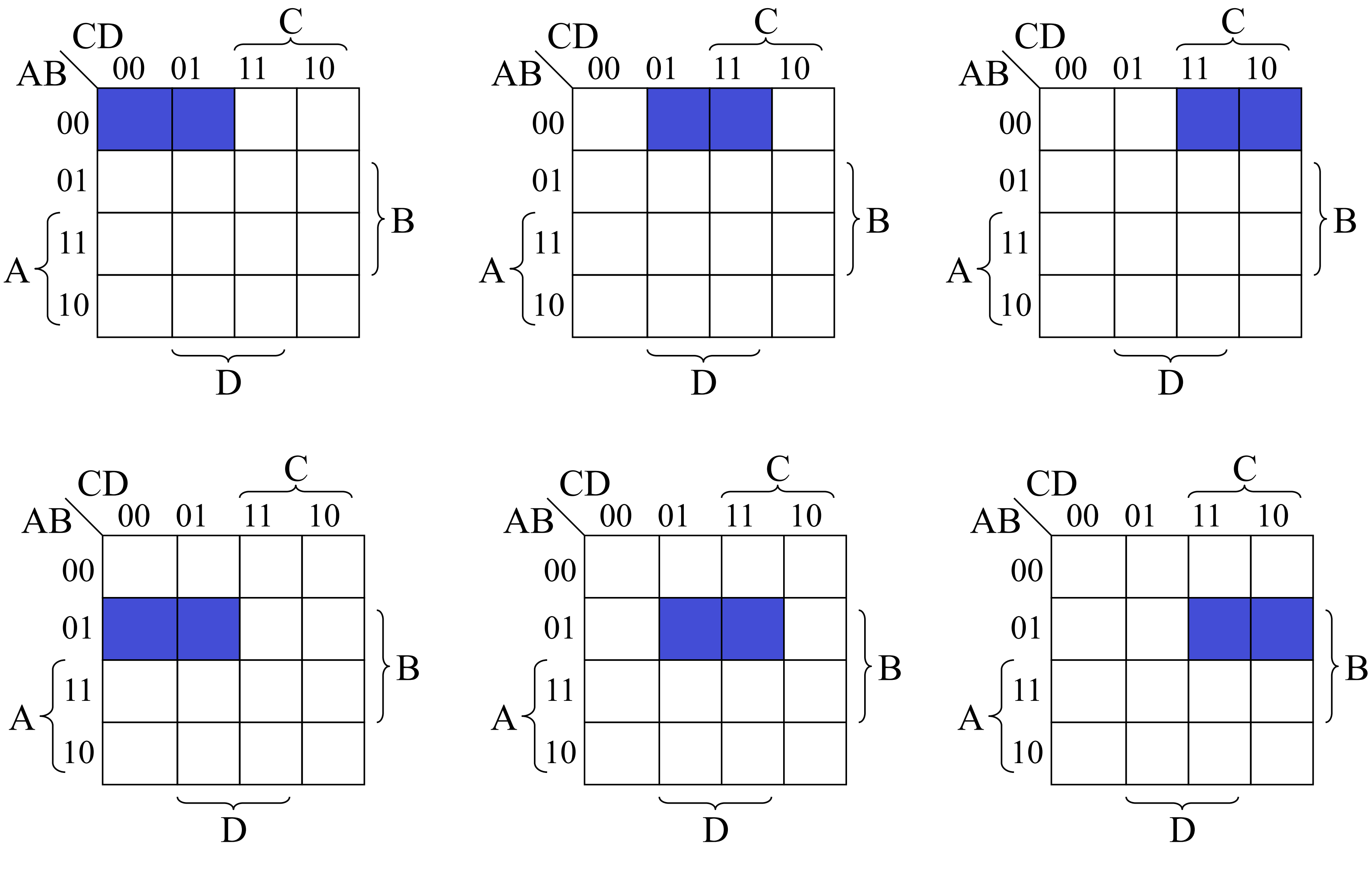
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



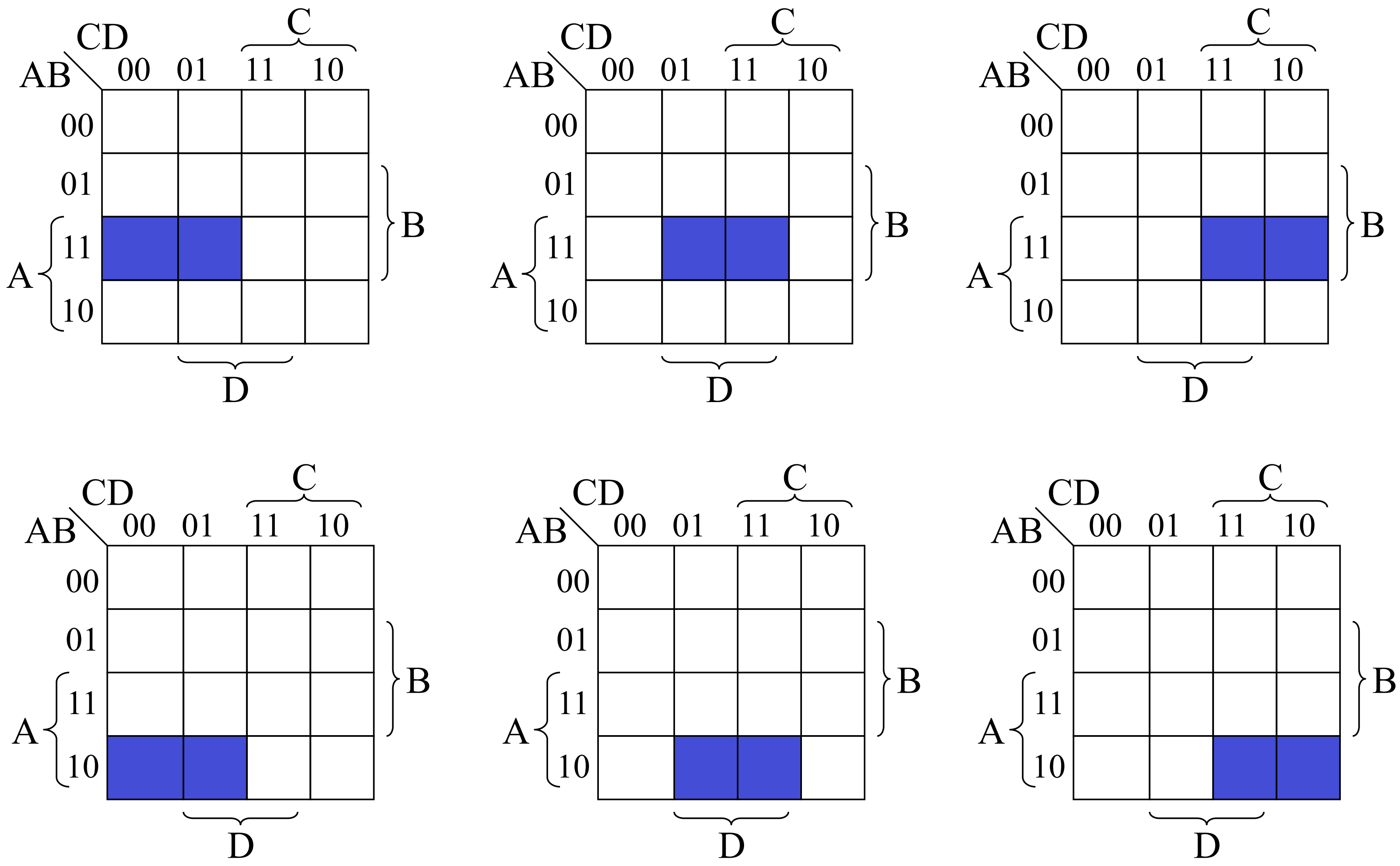
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



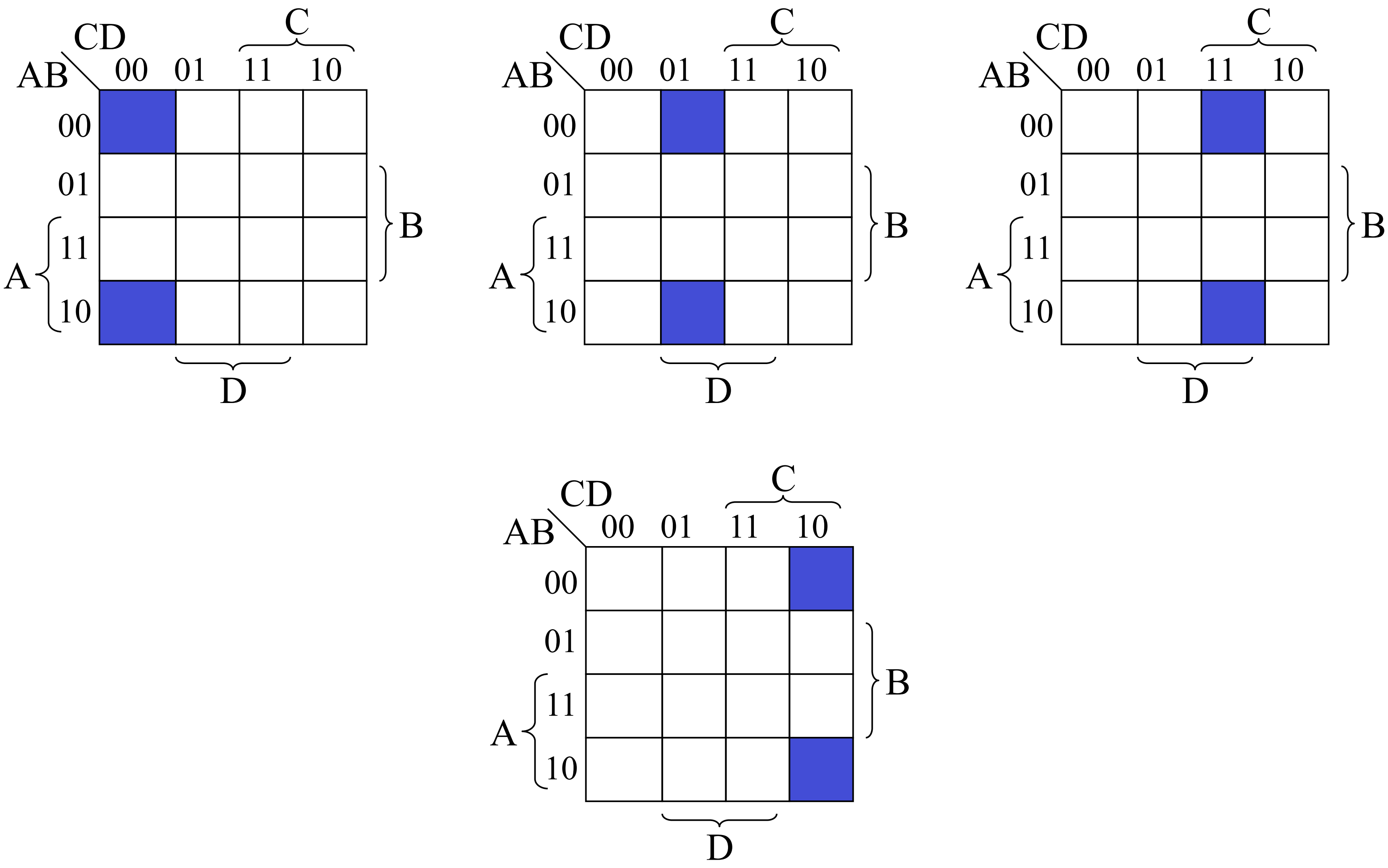
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



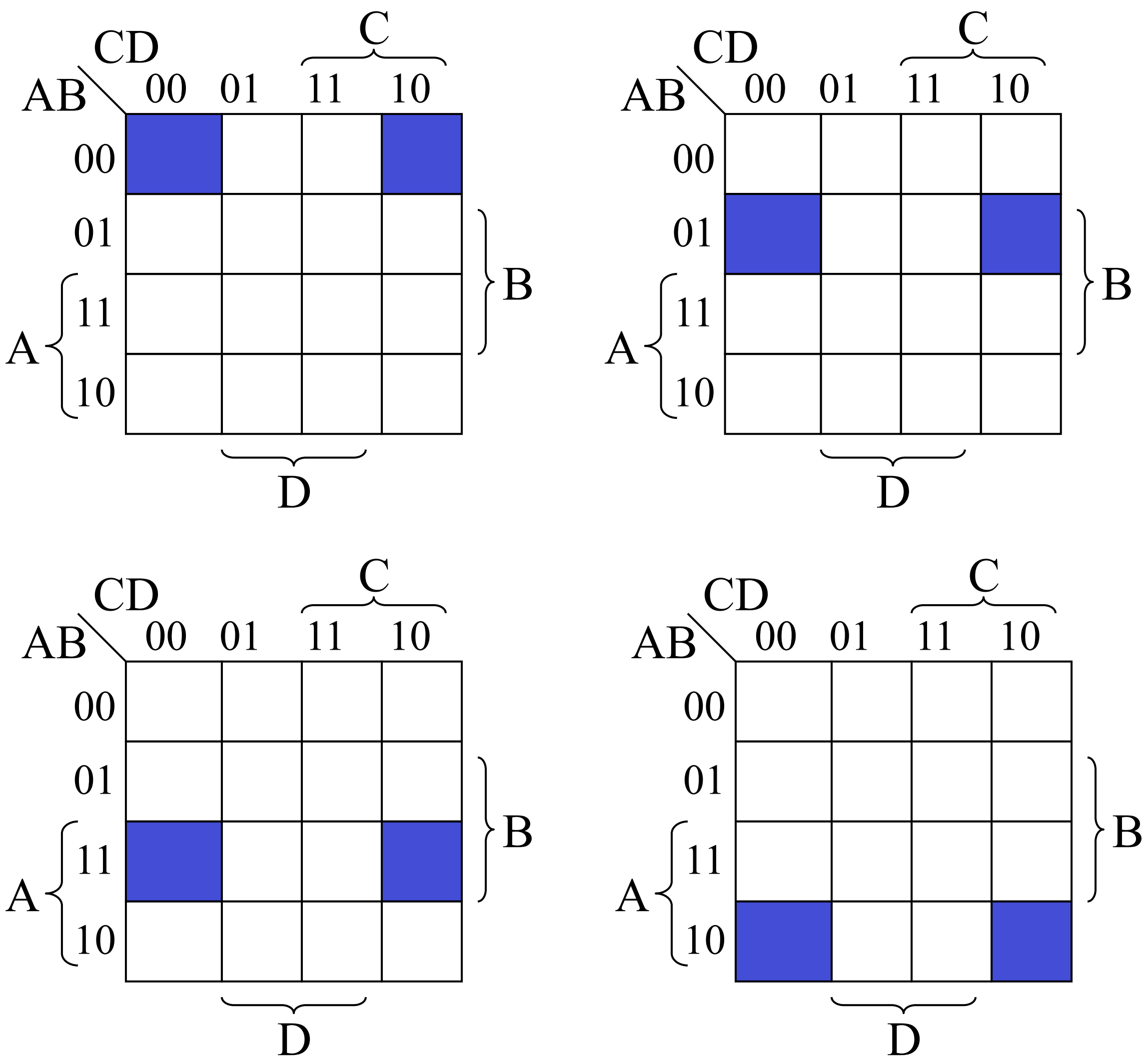
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



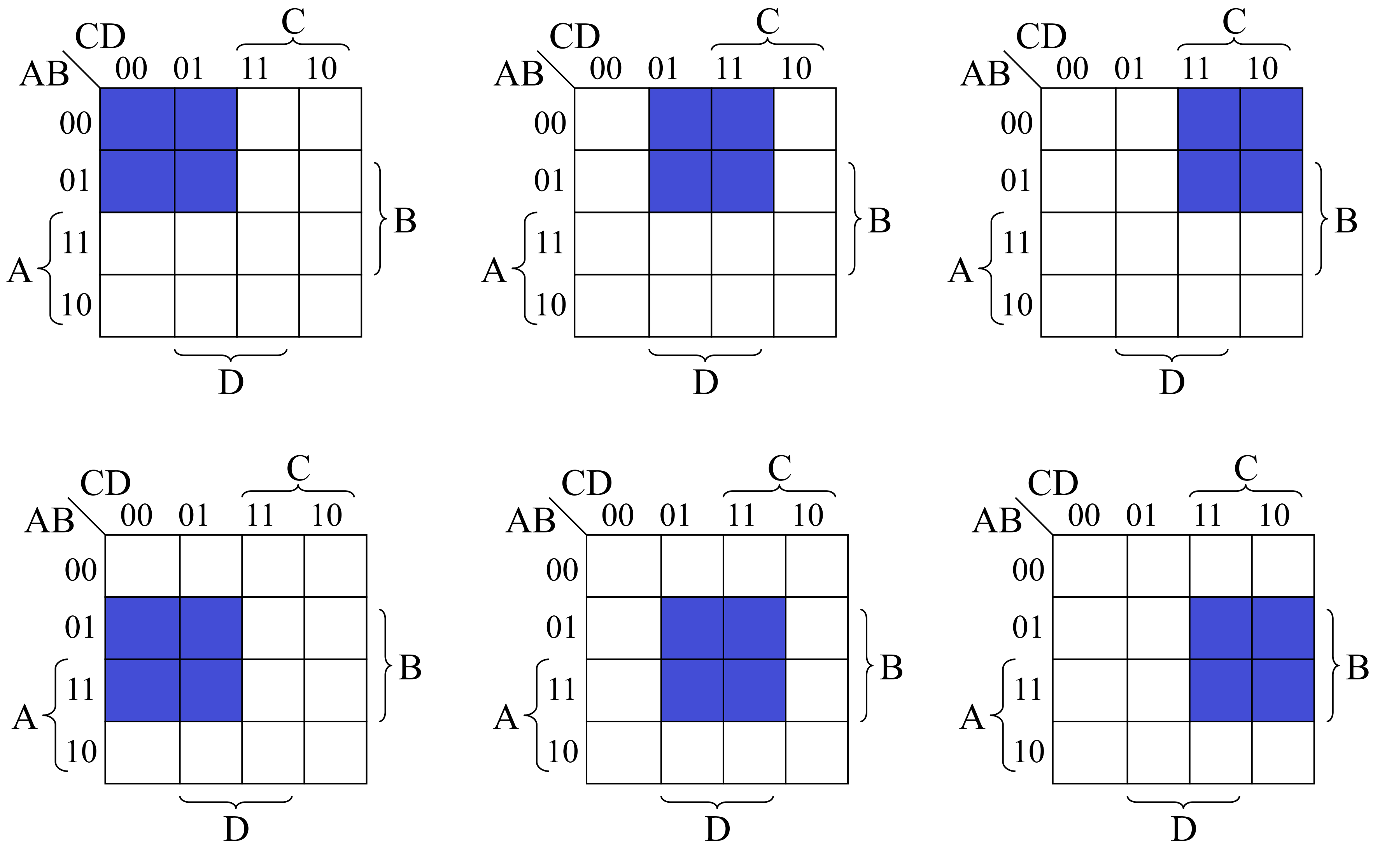
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



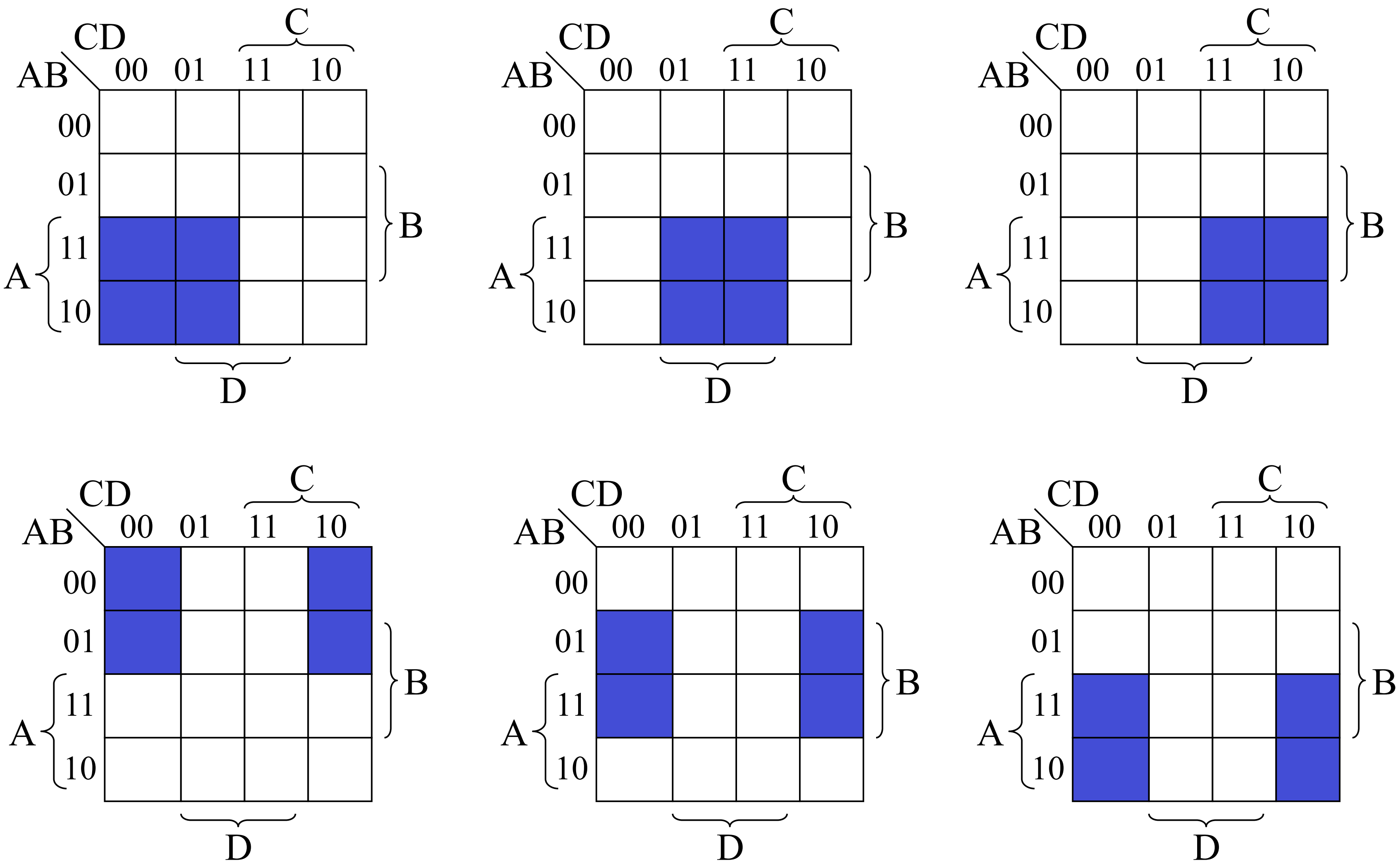
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



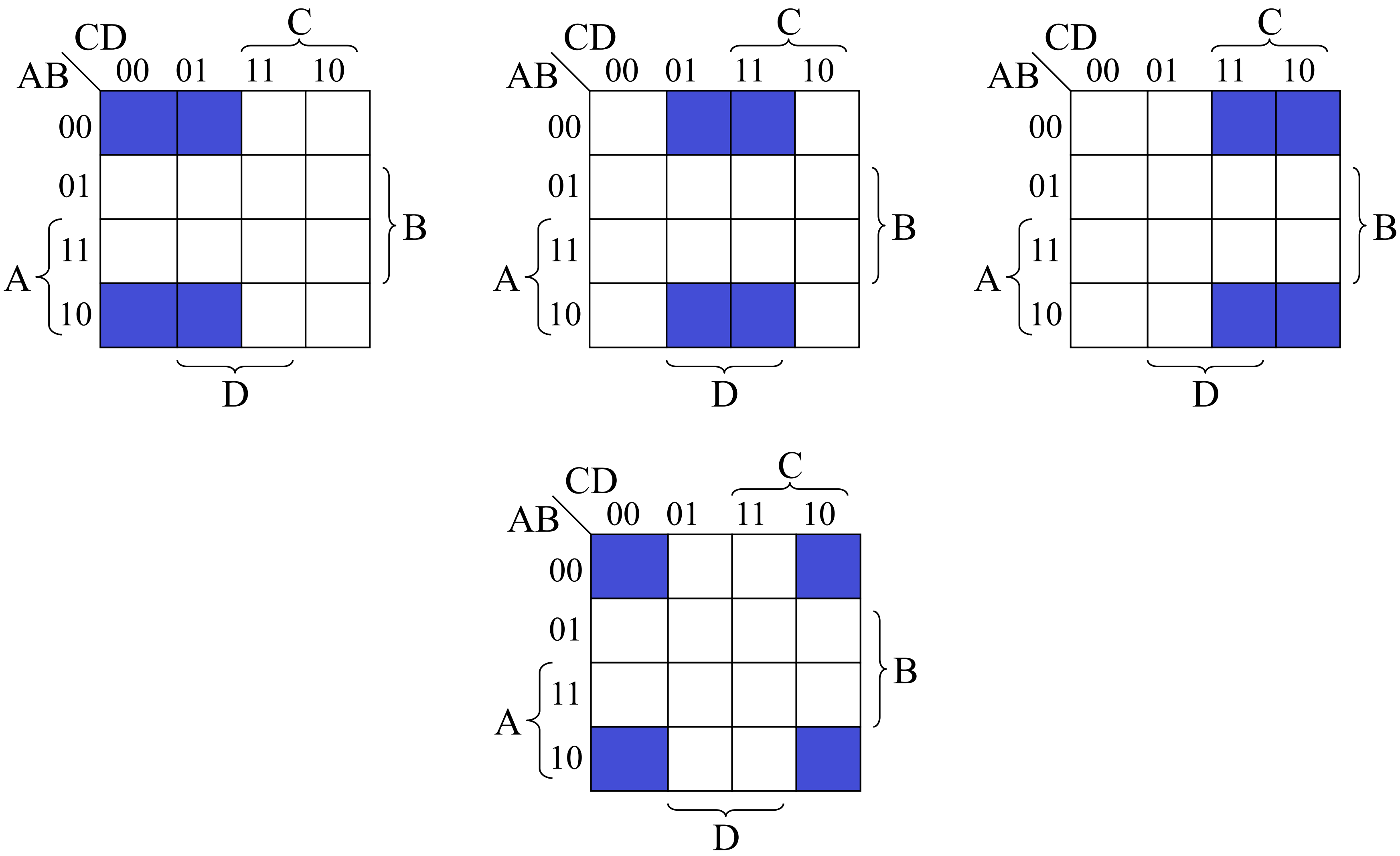
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



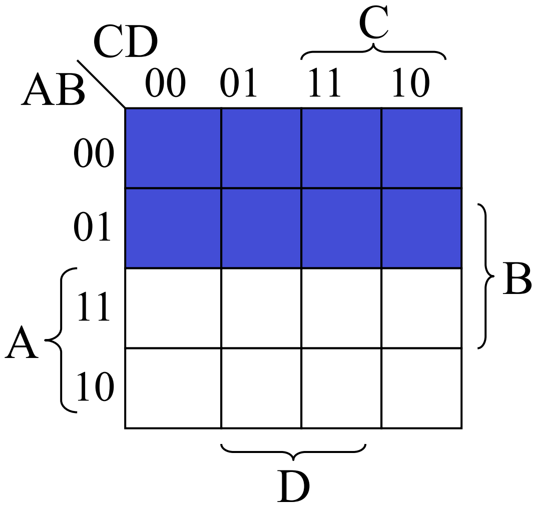
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

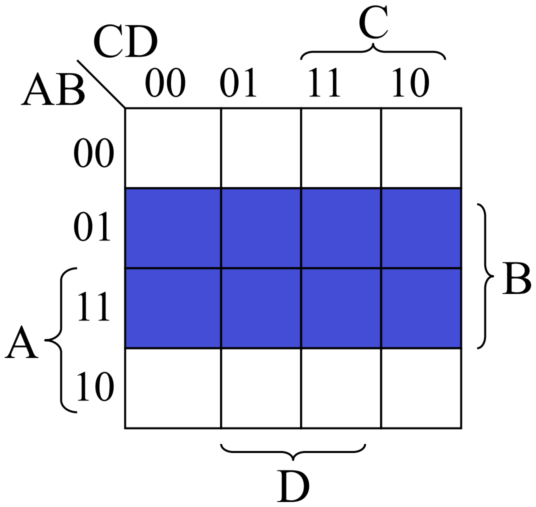


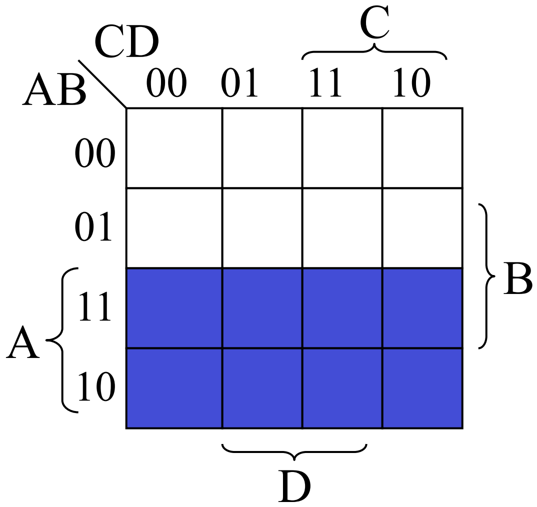
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

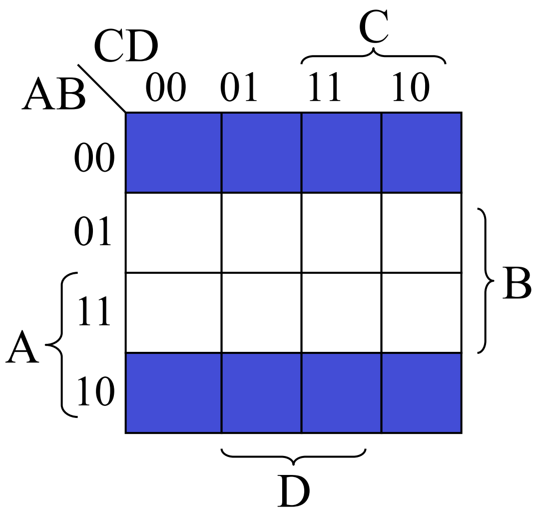


Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

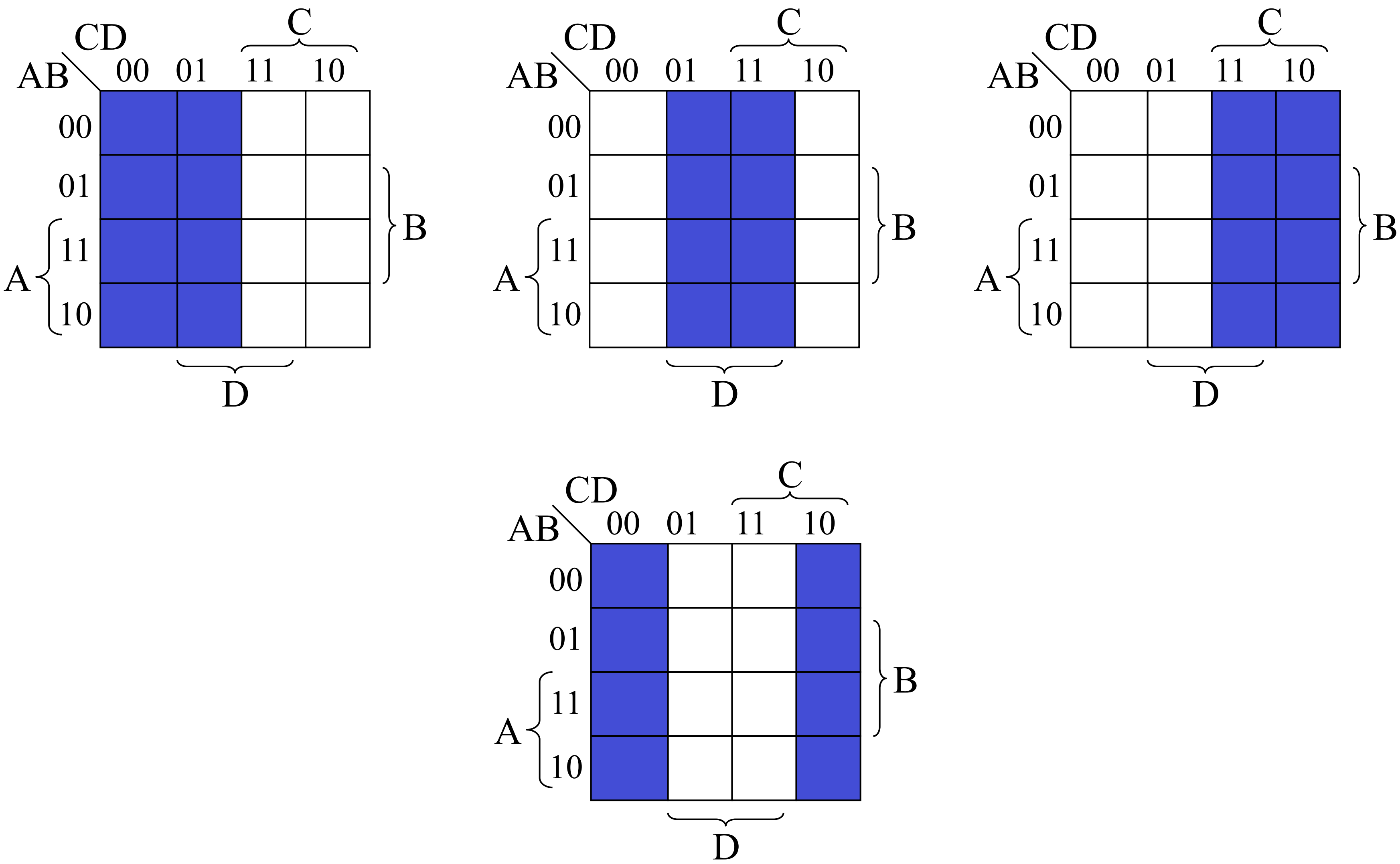




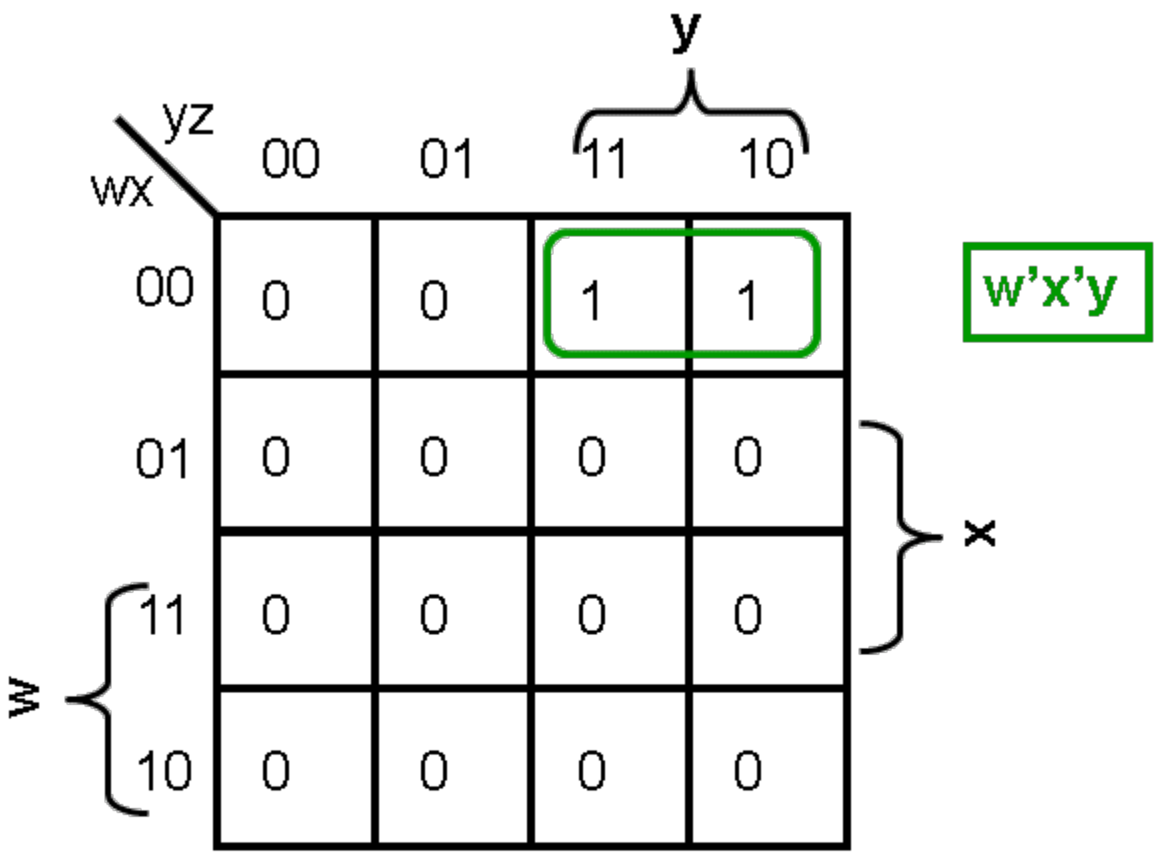




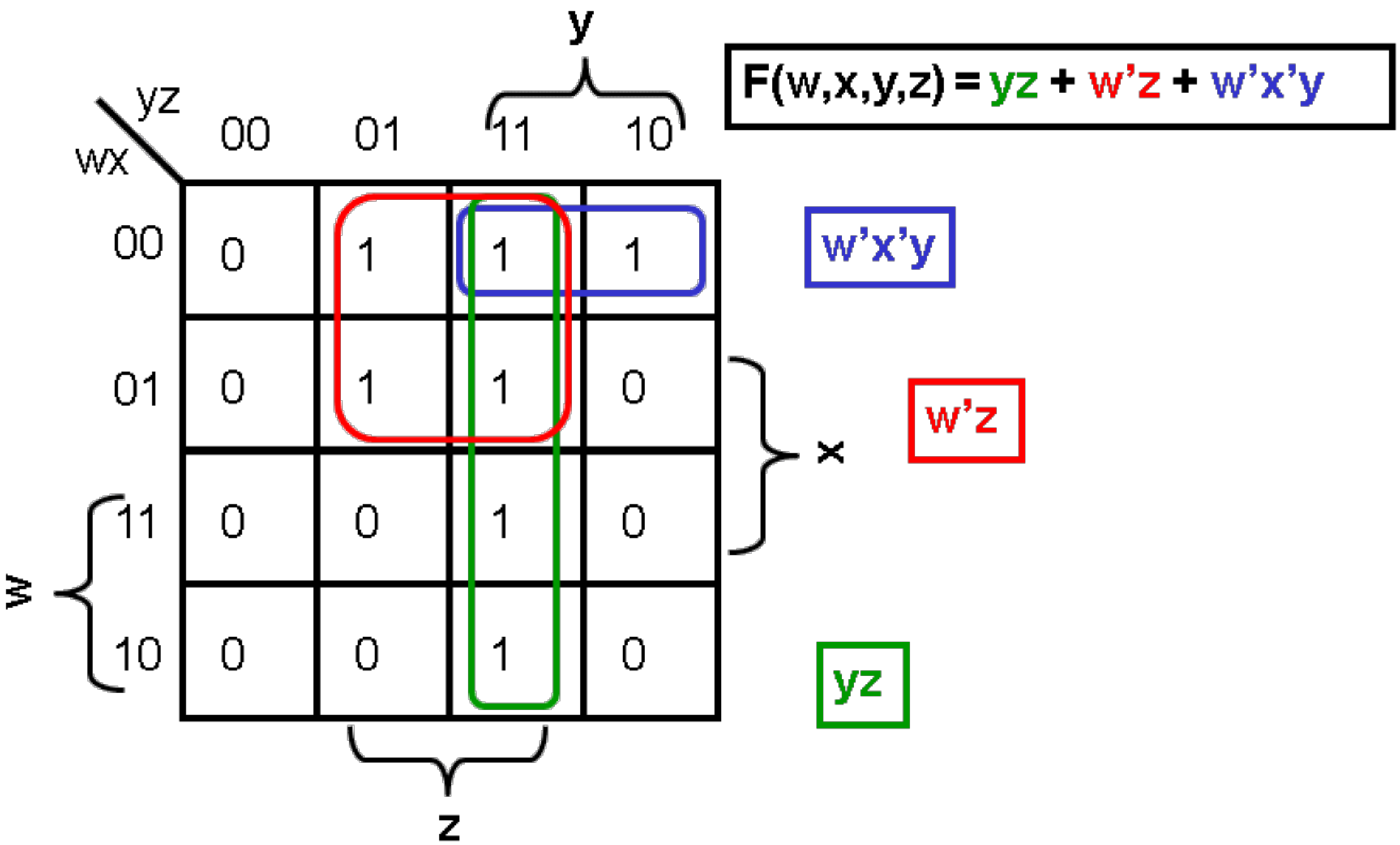
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



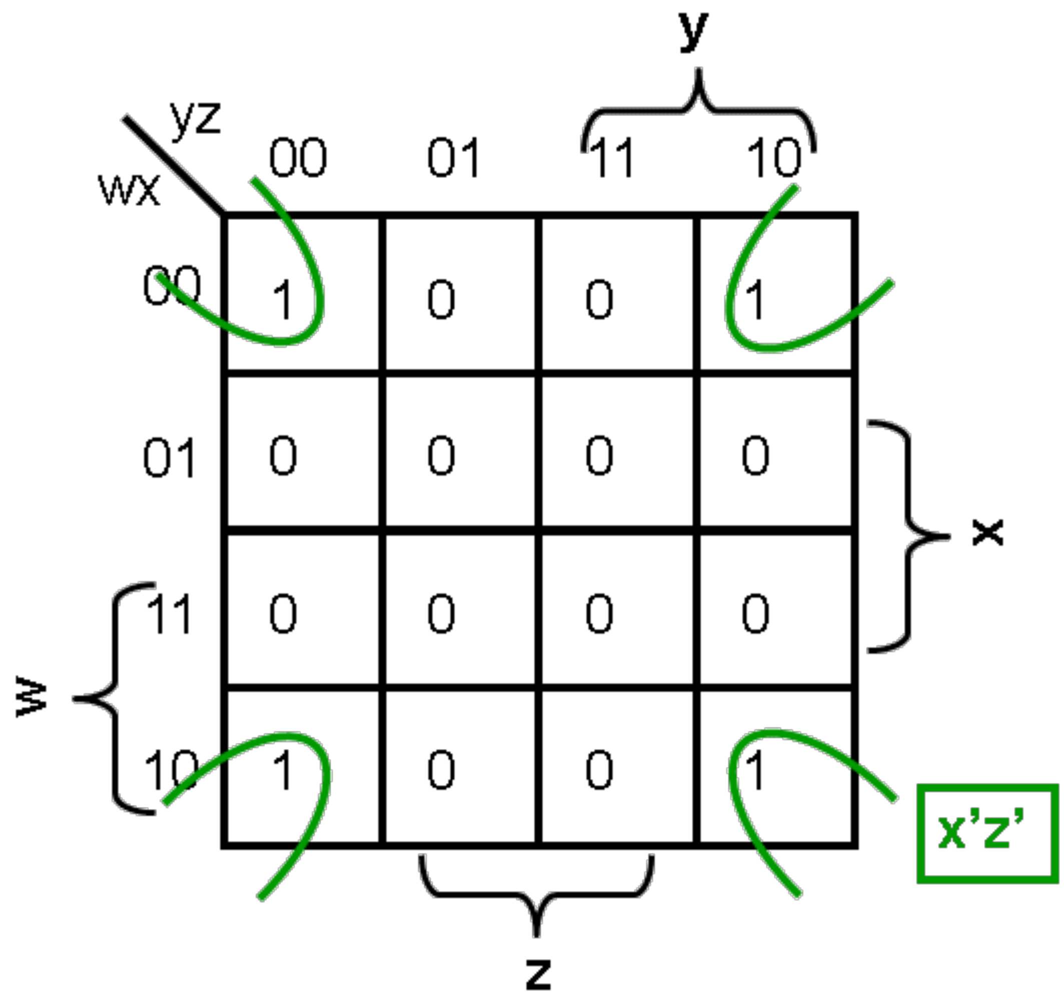
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



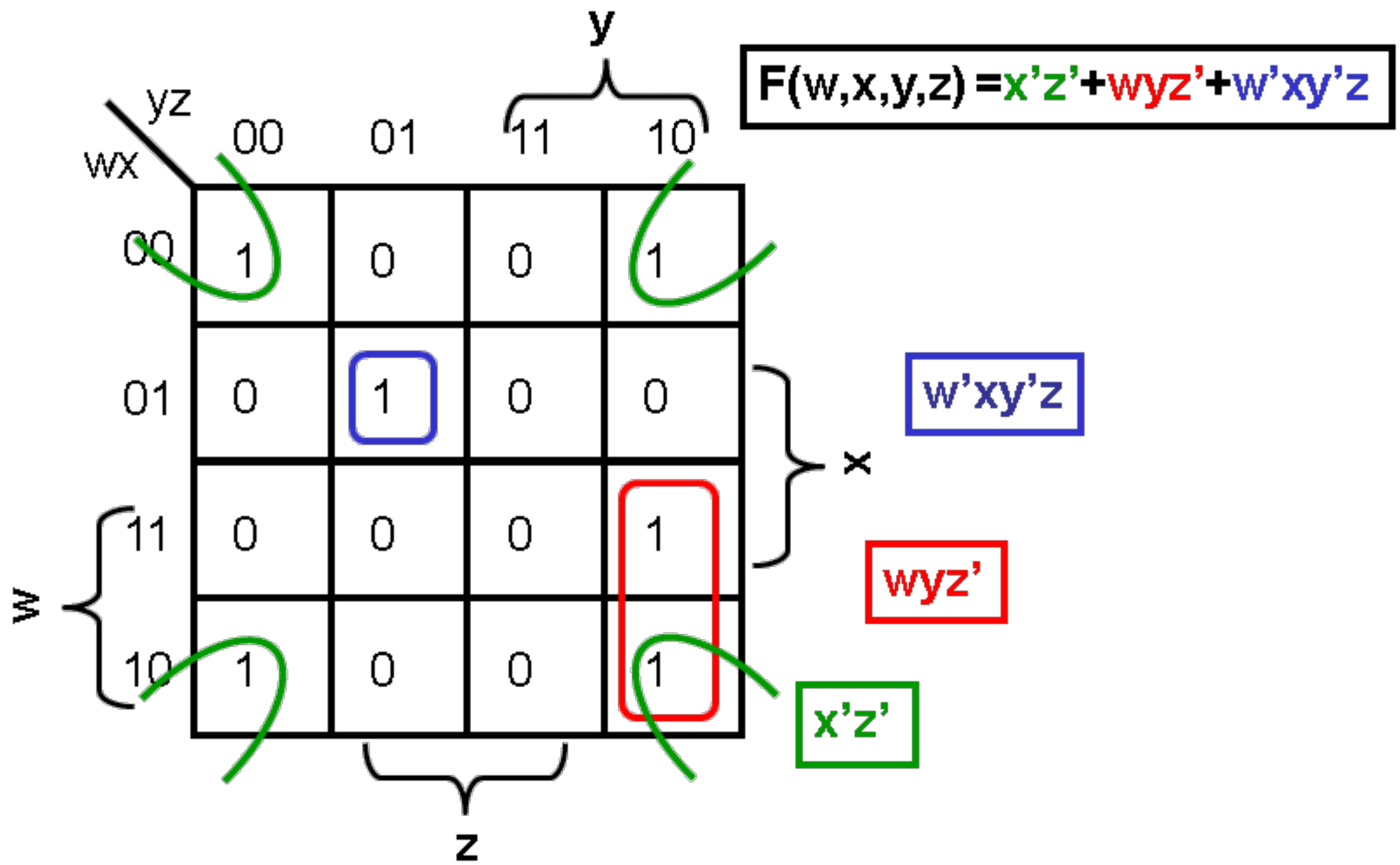
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

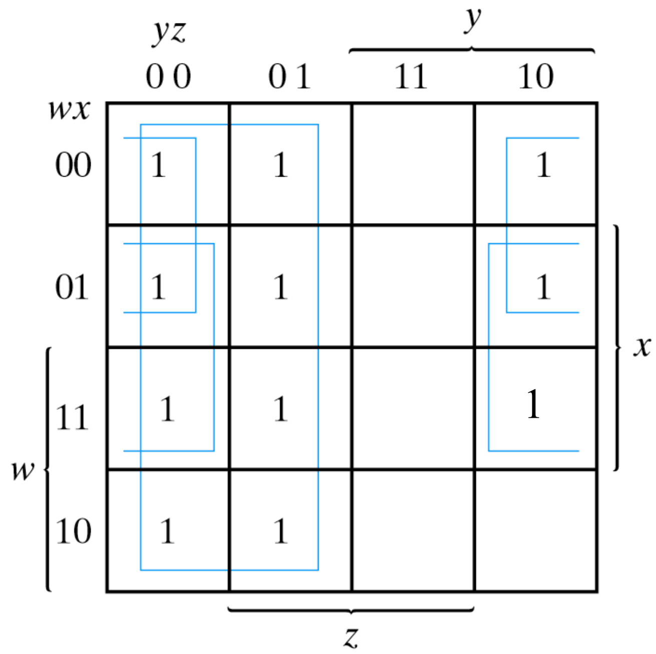


Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

Να απλοποιηθεί η συνάρτηση $F(w,x,y,z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$

$F(w,x,y,z) =$

$w'x'y'z' + w'x'y'z + w'x'yz' + w'xy'z' + w'xy'z + w'xyz' + wx'y'z' + wx'y'z + wxy'z' + wxy'z + wxyz'$



Αποτέλεσμα: $F(w,x,y,z) = y' + w'z' + xz'$

Παραδείγματα Χάρτη Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

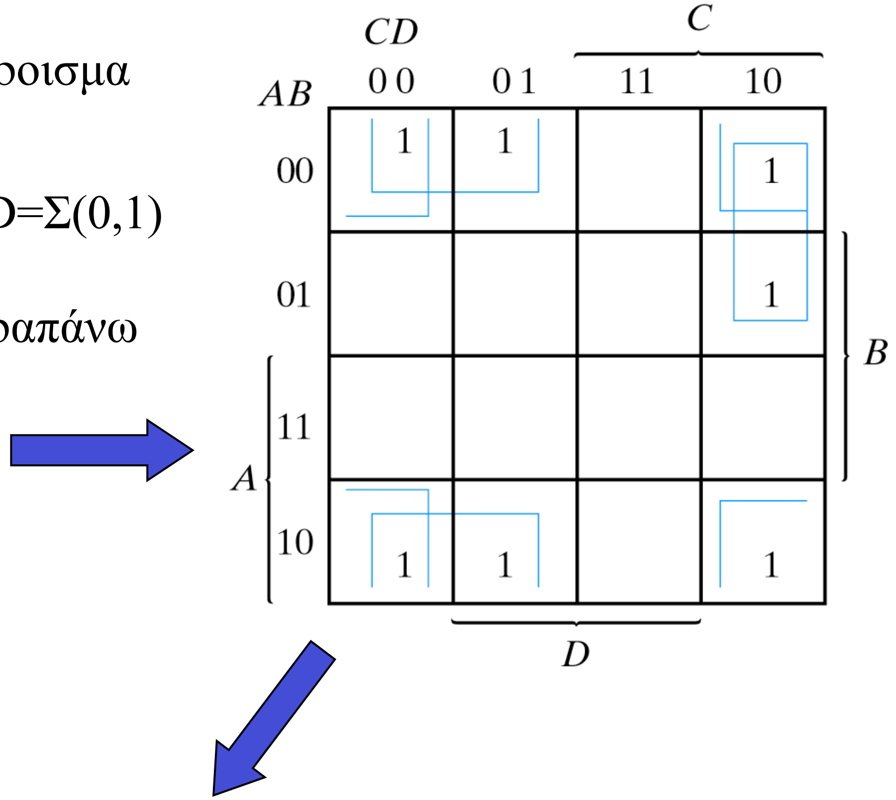
Να απλοποιηθεί η συνάρτηση F(A,B,C,D)=A΄B΄C΄+B΄CD΄+A΄BCD΄+ AB΄C΄

Ο όρος A΄B΄C΄ πρέπει να μετατραπεί σε άθροισμα ελαχιστόρων, οπότε:

A΄B΄C΄=A΄B΄C΄(D+D΄)=A΄B΄C΄D΄+A΄B΄C΄D=Σ(0,1)

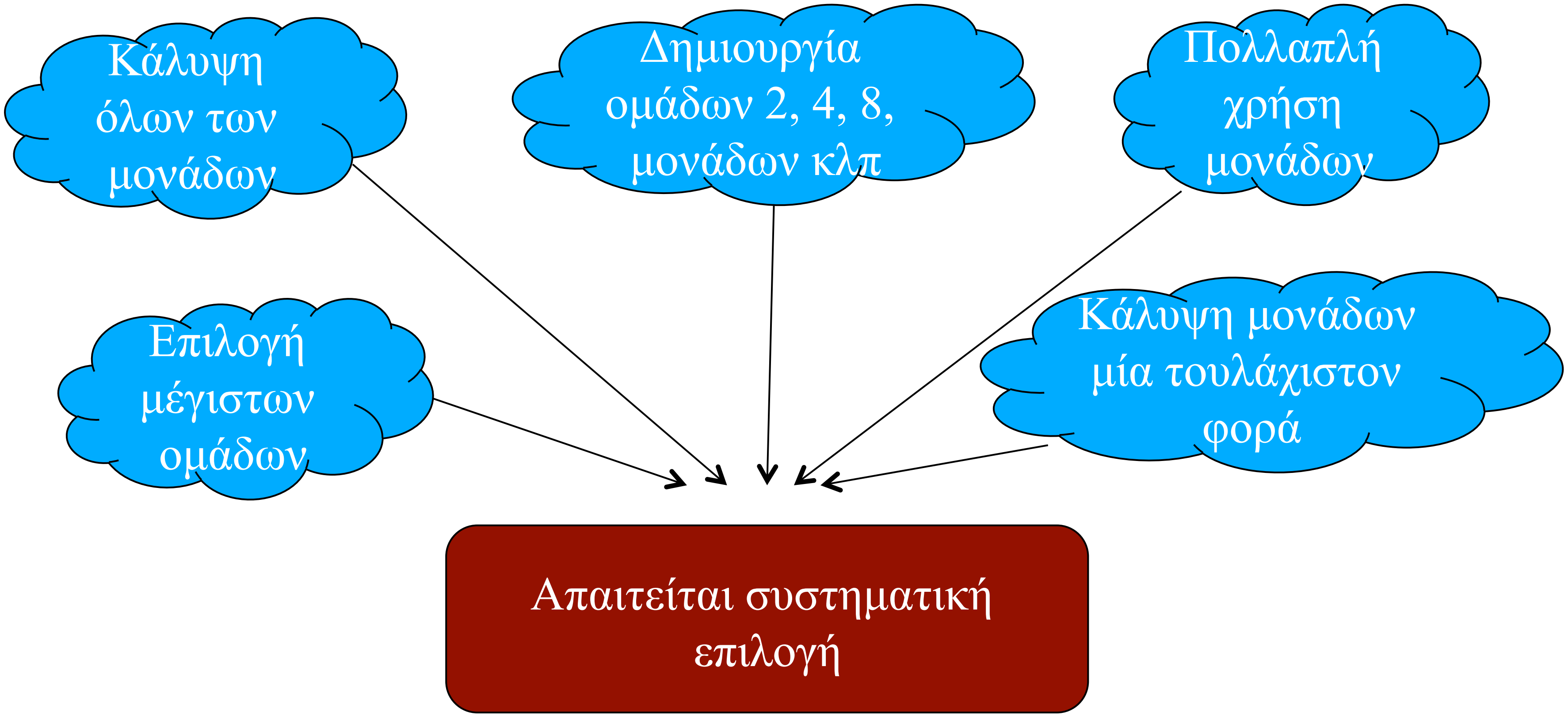
Με όμοιο τρόπο για κάθε παράγοντα η παραπάνω συνάρτηση γίνεται:

F(A,B,C,D)=Σ(0,1,2,6,8,9,10)



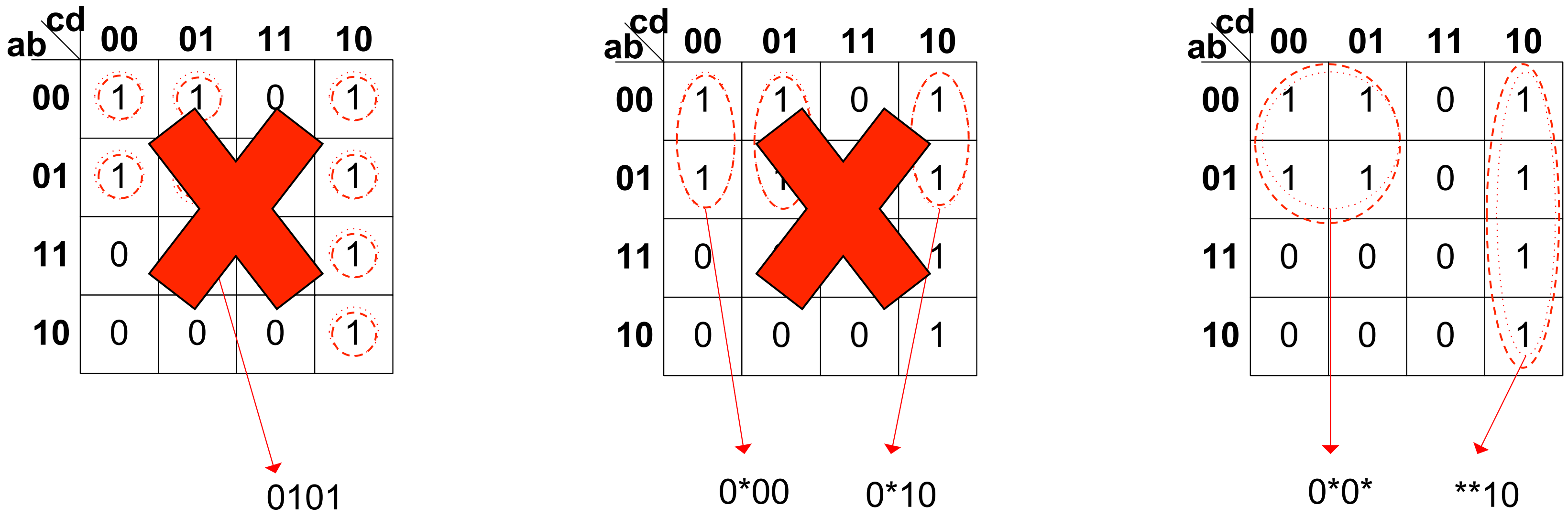
F(A,B,C,D) = B΄D΄ + B΄C΄ + A΄CD΄

Κριτήρια Απλοποίησης



Πρώτοι Συνεπαγωγοί

Ελαχιστόροι	Συνεπαγωγοί	Πρώτοι Συνεπαγωγοί
Minterms	**Implicants**	**Prime Implicants**



Σε κάθε απλοποίηση πρέπει να επιλέγονται **πρώτοι συνεπαγωγοί**

Πρώτοι Συνεπαγωγοί

Πρώτος Συνεπαγωγός: ένα γινόμενο παραγόντων που σχηματίζεται συνδυάζοντας τον μεγαλύτερο δυνατό αριθμό γειτονικών τετραγώνων.

- Ο πρώτος συνεπαγωγός έχει τον ελάχιστο αριθμό μεταβλητών
- Κάθε συνάρτηση πρέπει να απλοποιείται χρησιμοποιώντας μόνο πρώτους συνεπαγωγούς για να ελαχιστοποιείται το κόστος αυτής.
- Όσο λιγότεροι πρώτοι συνεπαγωγοί χρησιμοποιηθούν, τόσο απλούστερη είναι η συνάρτηση.
- Συνήθως υπάρχουν περισσότεροι από έναν πρώτοι συνεπαγωγοί που καλύπτουν κάποιον άσσο.

Πως κάνουμε την επιλογή;

Παράδειγμα πλεονάζουσας κάλυψης

Παράδειγμα πλεονάζουσας κάλυψης συνάρτησης

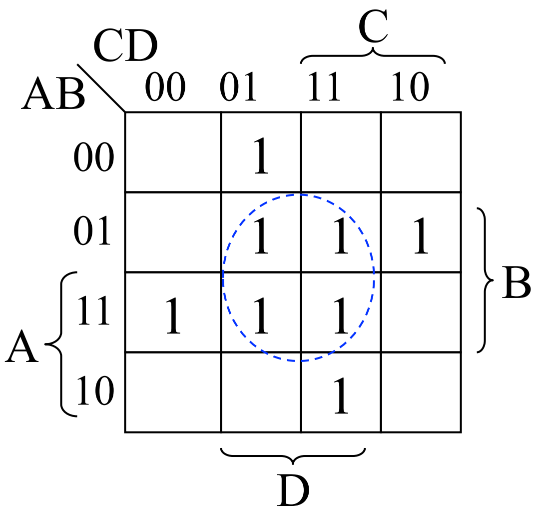
ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	1	0

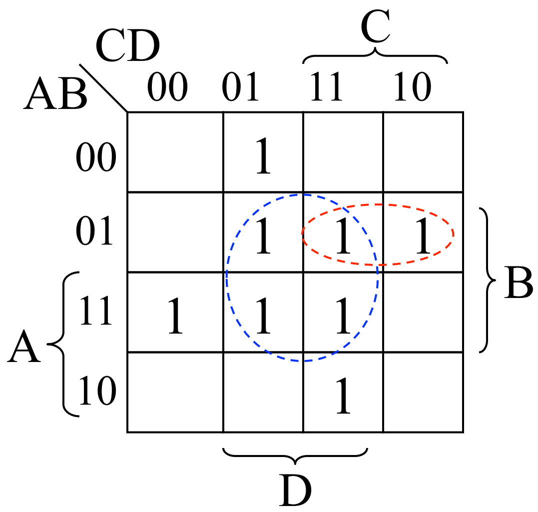
Πλεονάζουσα Κάλυψη Συνάρτησης

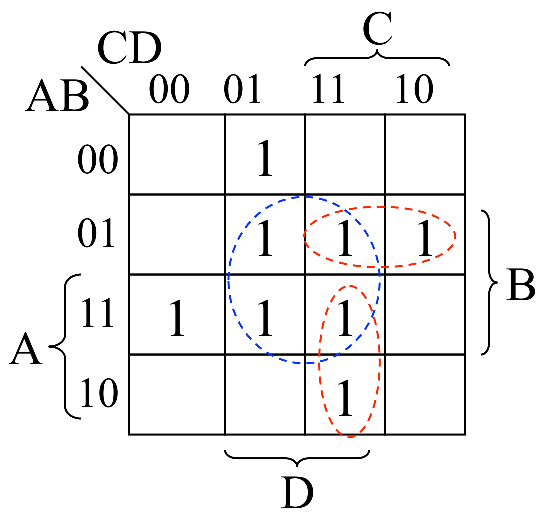
**00 $\underbrace{\text{*10* \quad *1*1}}$ **11

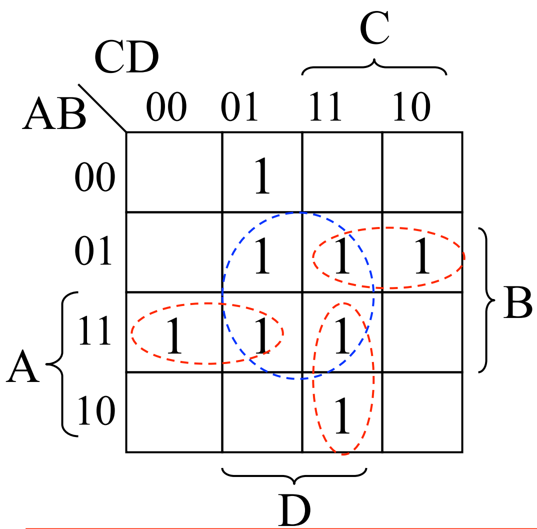
Ο ένας μπορεί να παραλειφθεί

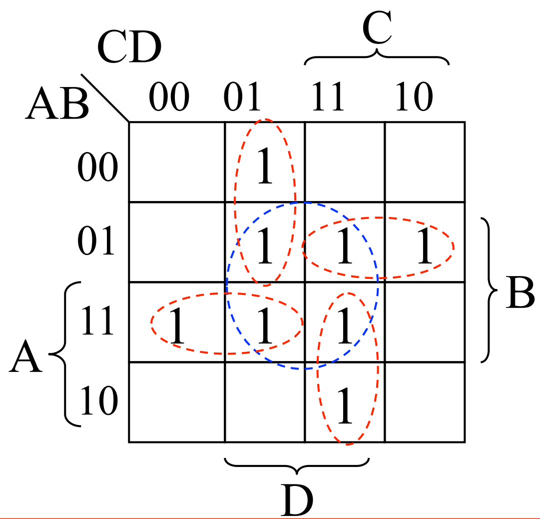
Παράδειγμα πλεονάζουσας κάλυψης









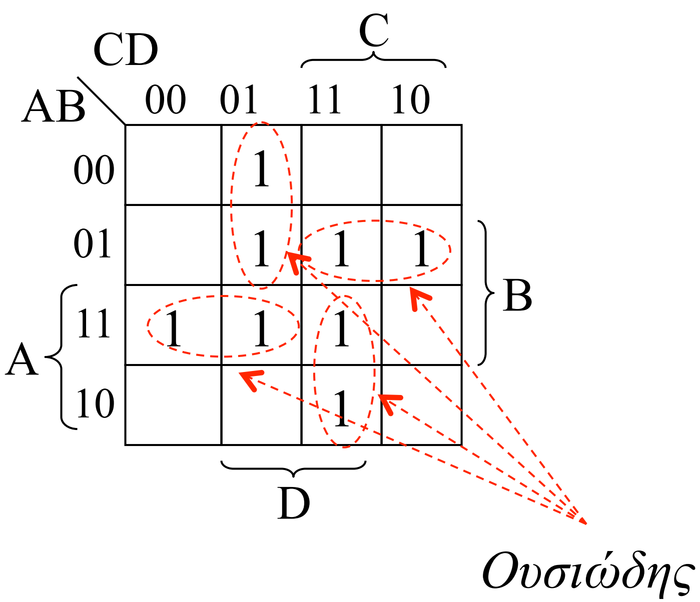


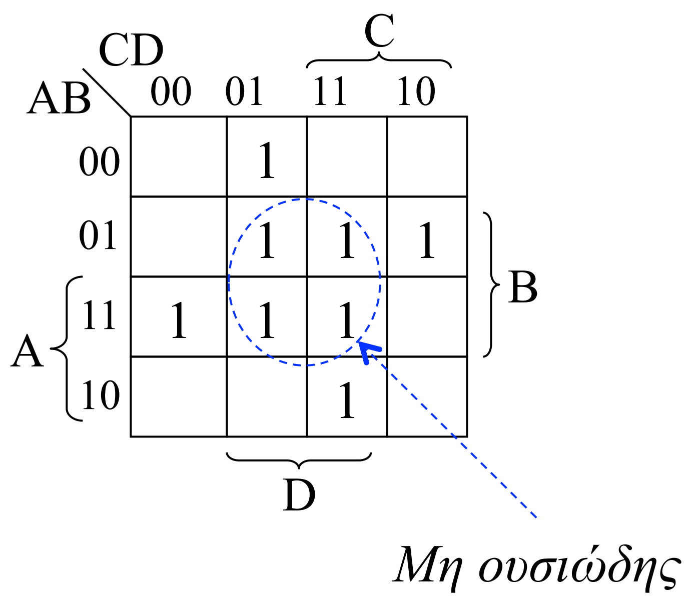
Τελικά η μπλε ομάδα χρειάζεται;;;;

Ουσιώδης Πρώτοι Συνεπαγωγοί

Ουσιώδης Πρώτος Συνεπαγωγός

Εκείνος ο πρώτος συνεπαγωγός που καλύπτει έναν ελαχιστόρο που δεν καλύπτει κανένας άλλος πρώτος συνεπαγωγός.





Καλύπτουμε πρώτα τους ουσιώδης και μετά τους μη-ουσιώδης πρώτους συνεπαγωγούς

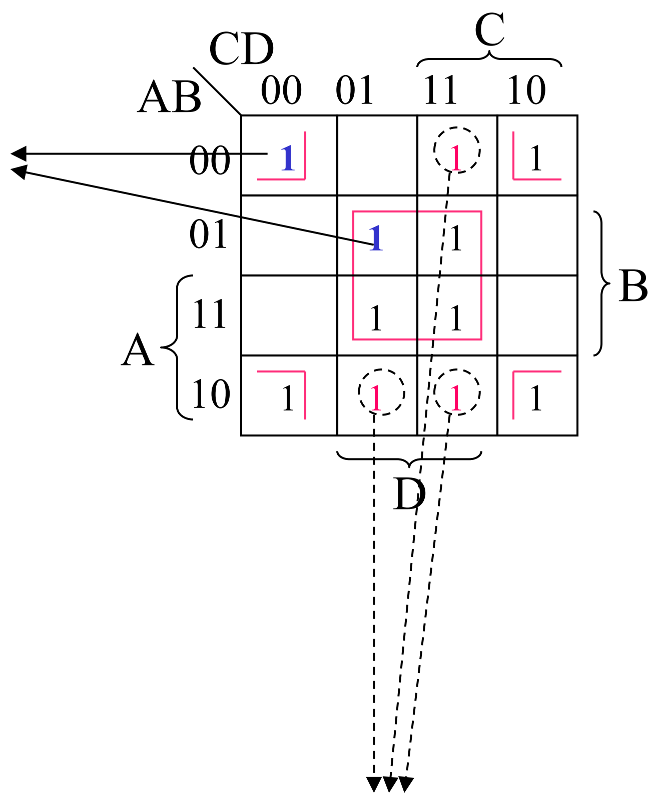
Ουσιώδης Πρώτοι Συνεπαγωγοί

Παράδειγμα: έστω η συνάρτηση F(A,B,C,D)=Σ(0,2,3,5,7,8,9,10,11,13, 15)

Ελαχιστόροι (m_0, m_5) που καλύπτονται μόνο από έναν PI

Ουσιώδης PI: BD, B΄D΄

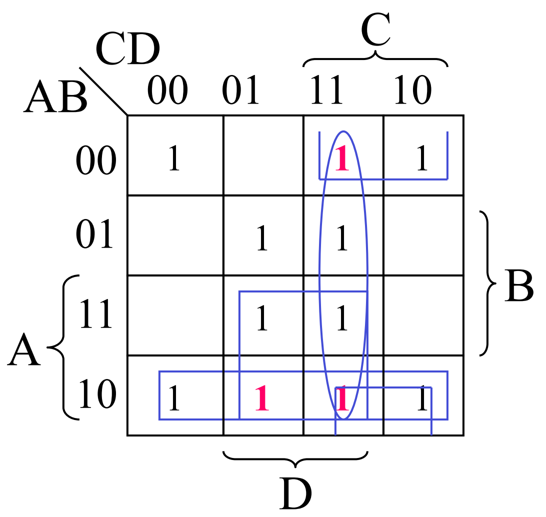
Οι ουσιώδης PI καλύπτουν επίσης και τους ελαχιστόρους m_2, m_7, m_8, m_{10}, m_{13}, m_{15}



Απομένουν για κάλυψη οι ελαχιστόροι m_3, m_9, m_{11}

Ουσιώδης Πρώτοι Συνεπαγωγοί

Για την κάλυψη των m_3, m_9, m_{11} έχουμε πολλούς πιθανούς Prime Implicants:



m_3: CD, B΄C

m_9: AD, AB΄

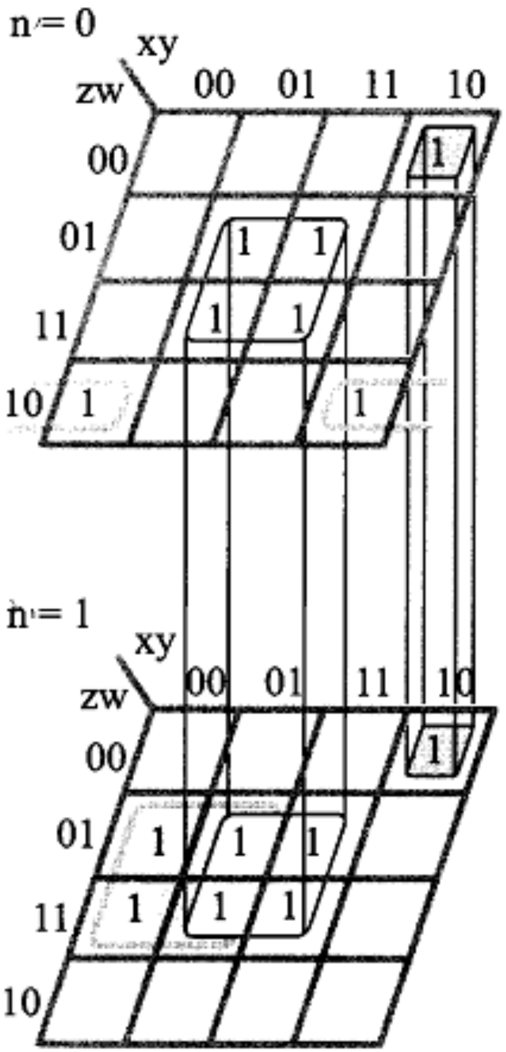
Καλύπτουν και τον m_{11}

m_{11}: CD, B΄C, AD, AB΄

Άρα χρησιμοποιούνται οι ουσιώδης PI και ένα από τους πιθανούς συνδυασμούς των PI που καλύπτουν τους m_3, m_9.

F=(BD+B΄D΄)+ {(CD+AD) or (CD + AB΄) or (B΄C+ AD) or (B΄C+AB΄)}

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών



$A = 0$

BC \ DE	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

D: columns 11, 10; E: columns 01, 11; C: rows 01, 11; B: rows 11, 10

$A = 1$

BC \ DE	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

D: columns 11, 10; E: columns 01, 11; C: rows 01, 11; B: rows 11, 10

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

v=0

wx \ yz	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

v=1

wx \ yz	00	01	11	10
00	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}
01	m_{20}	m_{21}	m_{23}	m_{22}
11	m_{28}	m_{29}	m_{31}	m_{30}
10	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

m_{28}=11100

v=0

wx \ yz	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

v=1

wx \ yz	00	01	11	10
00	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}
01	m_{20}	m_{21}	m_{23}	m_{22}
11	m_{28}	m_{29}	m_{31}	m_{30}
10	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

x'y'z'

v=0

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	1	0	0	0

v=1

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	0	1
11	0	1	0	1
10	1	0	0	0

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

xy'z

v=0

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	1	0	0	0

v=1

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	0	1
11	0	1	0	1
10	1	0	0	0

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

w'x'y'

v=0

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	1	0	0	0

v=1

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	0	1
11	0	1	0	1
10	1	0	0	0

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

$v'w'x'$

v=0

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	1	0	0	0

v=1

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	0	1
11	0	1	0	1
10	1	0	0	0

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

$vxyz'$

v=0

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	1	0	0	0

v=1

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	0	1
11	0	1	0	1
10	1	0	0	0

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

$$F(v,w,x,y,z) = x'y'z' + xy'z + w'x'y' + v'w'x' + vxyz'$$

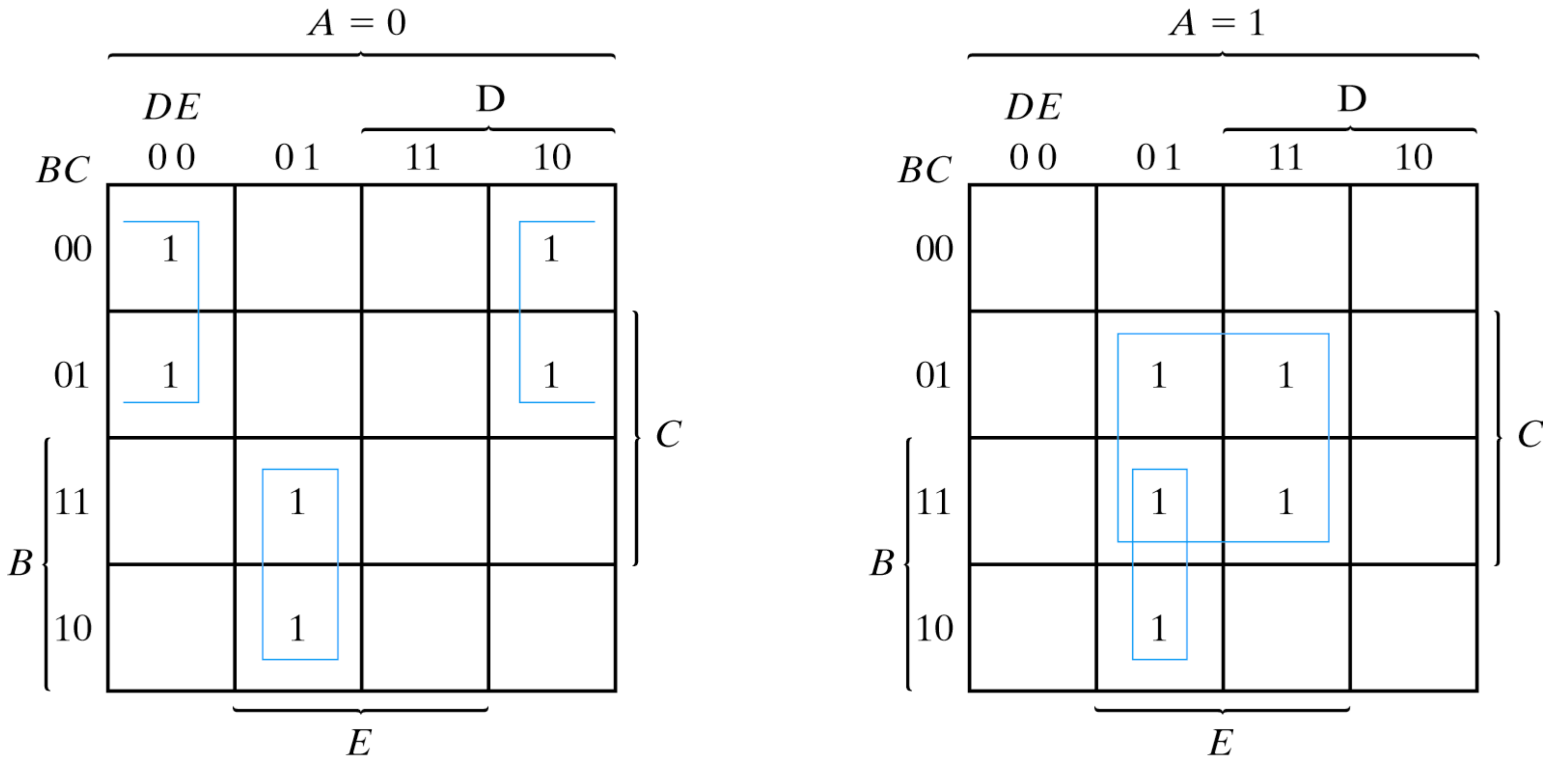
v=0

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	1	0	0	0

v=1

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	0	1
11	0	1	0	1
10	1	0	0	0

Παράδειγμα Χάρτη Πέντε (5) Μεταβλητών



F(A, B, C, D, E) = Σ(0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)

F(A, B, C, D, E) = A΄B΄E΄ + BD΄E + ACE

Κανόνες Απλοποίησης

1. Καλύπτουμε όλους τους **ουσιώδης** πρώτους συνεπαγωγούς.
2. Καλύπτουμε υποχρεωτικά **όλες τις μονά**δες του χάρτη (κάθε μονάδα πρέπει να συμμετάσχει σε **τουλάχιστον** μία ομάδα).
3. Χρησιμοποιούμε **μόνο πρώτους** συνεπαγωγούς
4. Μία μονάδα μπορεί να συμμετάσχει σε **περισσότερες** από μία ομάδες εάν αυτό είναι αναγκαίο.
5. Μία μονάδα που καλύπτεται από μία ομάδα δεν απαιτείται να καλυφθεί ξανά.

Απλοποίηση Γινομένων Αθροισμάτων

Βασική αρχή:

$$\underbrace{m_0+m_1+\dots}_{\text{Άθροισμα γινομένων}} \quad = \quad \underbrace{M_0M_1\dots}_{\text{Γινόμενο Αθροισμάτων}}$$

<u>Διαδικασία απλοποίησης για γινόμενο αθροισμάτων</u>

- Φτιάχνουμε το χάρτη της F όπως γνωρίζουμε.
- Απλοποιούμε την F΄, συνδυάζοντας τα μηδενικά (αντί για τους άσσους).
- Το αποτέλεσμα είναι ένα ελαχιστοποιημένο άθροισμα γινομένων.
- Αντιστρέφουμε την F΄ με το θεώρημα De Morgan, οπότε προκύπτει η F ως γινόμενο αθροισμάτων.

Απλοποίηση Γινομένων Αθροισμάτων

Άθροισμα Γινομένων (συνδυασμός άσσων)

$$F(A,B,C,D) = \Sigma(0,1,2,5,8,9,10),\ F = B'D' + B'C' + A'C'D$$

Γινόμενο Αθροισμάτων (συνδυασμός μηδενικών)

$$F'(A,B,C,D) = \Sigma(3,4,6,7,11,12,13,14,15) = AB + CD + BD',$$

$$F(A,B,C,D) = F''(A,B,C,D) = \overline{AB + CD + BD'}' = (A'+B')\,(C'+D')\,(B'+D)$$

Παράδειγμα:

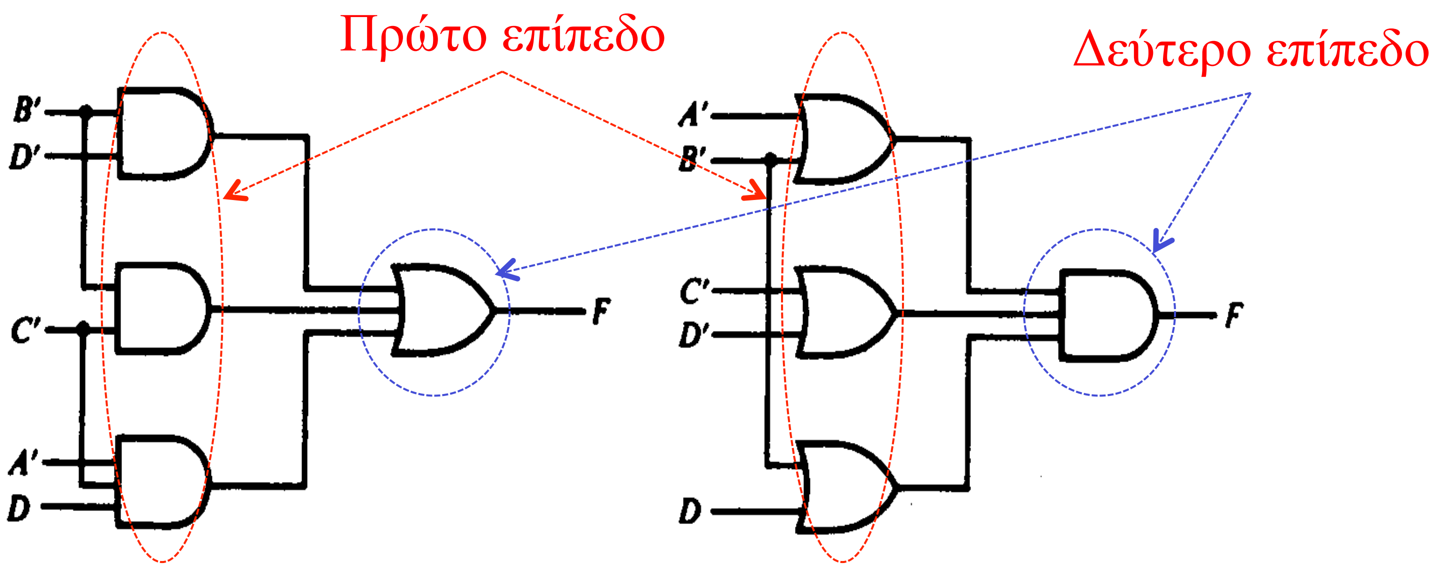
Έστω η συνάρτηση $F(A,B,C,D) = \Sigma(0,1,2,5,8,9,10)$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

Απλοποίηση Γινομένων Αθροισμάτων

Η υλοποίηση του κυκλώματος σε αυτές τις περιπτώσεις είναι διεπίπεδη AND-OR (άθροισμα γινομένων) ή OR-AND

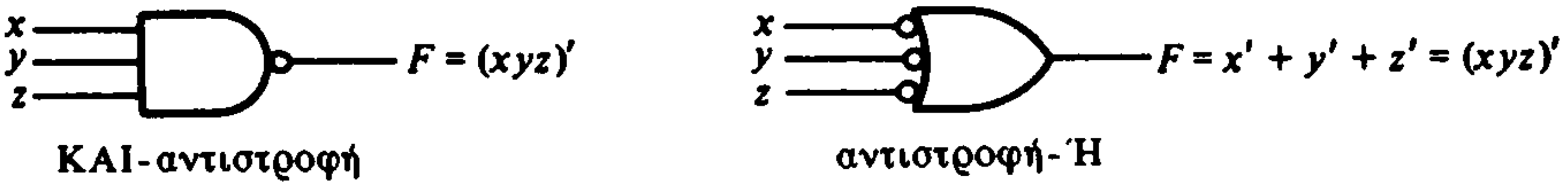
$$F = B'D' + B'C' + A'C'D = (A'+B')(C'+D')(B'+D)$$



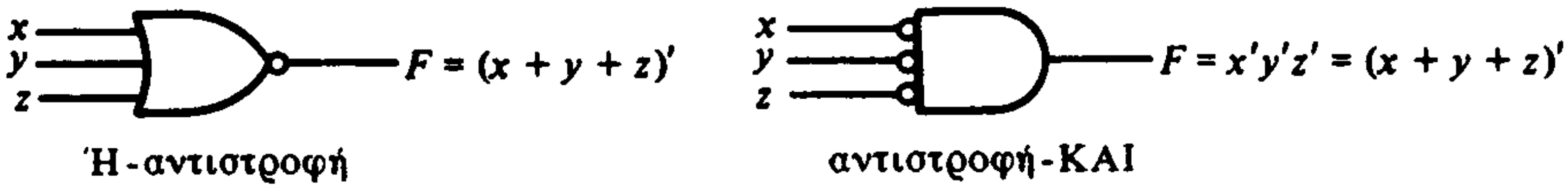
(α) $F = B'D' + B'C' + A'C'D$ (β) $F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$

Υλοποίηση με πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ & ΟΥΤΕ

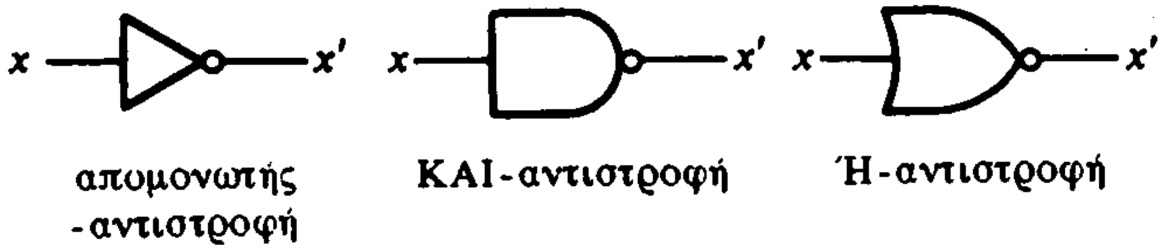
Οι πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ & ΟΥΤΕ χρησιμοποιούνται πολύ συχνότερα από τις ΚΑΙ & Ή γιατί κατασκευάζονται ευκολότερα.



(α) Δύο σύμβολα για πύλες ΟΧΙ-ΚΑΙ



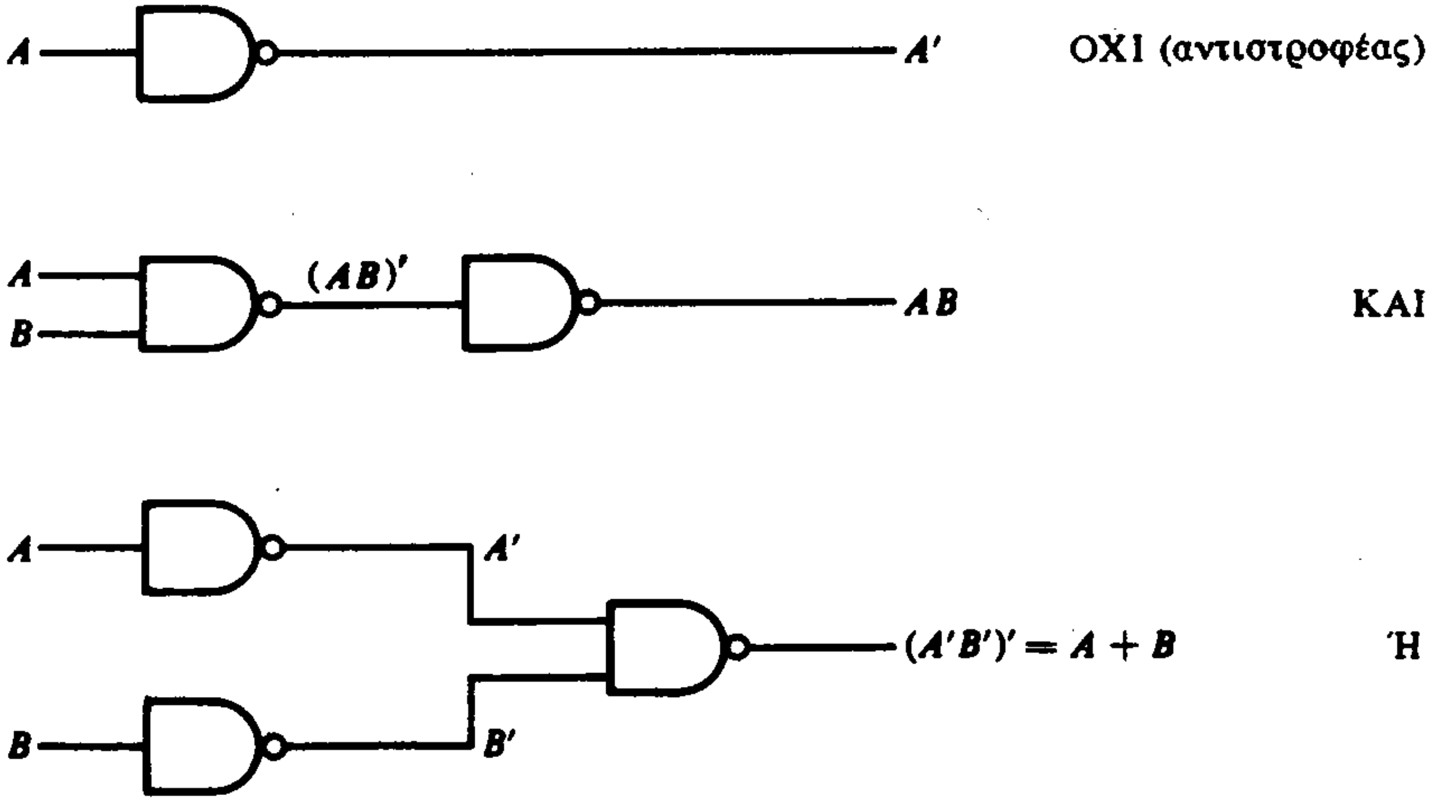
(β) Δύο σύμβολα για πύλες ΟΥΤΕ



(γ) Τρία σύμβολα για αντιστροφείς

Οικουμενικότητα Πύλης ΟΧΙ-ΚΑΙ

Οικουμενική Πύλη: Κάθε ψηφιακό σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί με αυτή.

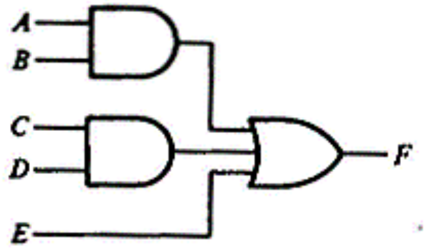


ΣΧΗΜΑ 4-10
Υλοποίηση των ΟΧΙ, ΚΑΙ, και Ή με πύλες ΟΧΙ-ΚΑΙ

Υλοποίηση $1^{η}$ με πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ

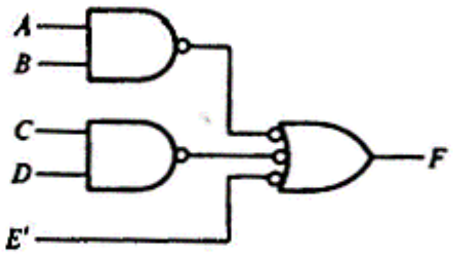
Η συνάρτηση θα πρέπει να είναι απλοποιημένη σε άθροισμα γινομένων.

1. Απλοποιούμε τη συνάρτηση σε άθροισμα γινομένων.
2. Σχεδιάζουμε μια πύλη ΟΧΙ-ΚΑΙ για κάθε όρο γινομένου με >1 παράγοντες.
3. Σχεδιάζουμε μία πύλη ΟΧΙ-ΚΑΙ στο δεύτερο επίπεδο.
4. Όροι με έναν παράγοντα χρησιμοποιούν αντιστροφέα.

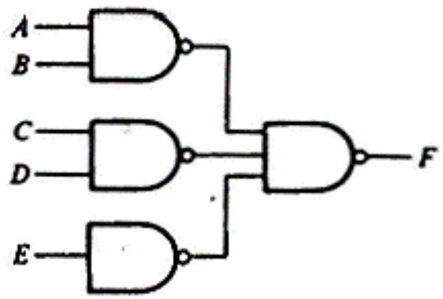


(α) ΚΑΙ-Ή (AND-OR)

<u>Παράδειγμα:</u> Υλοποίηση της συνάρτησης F=AB+CD+E με πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ.

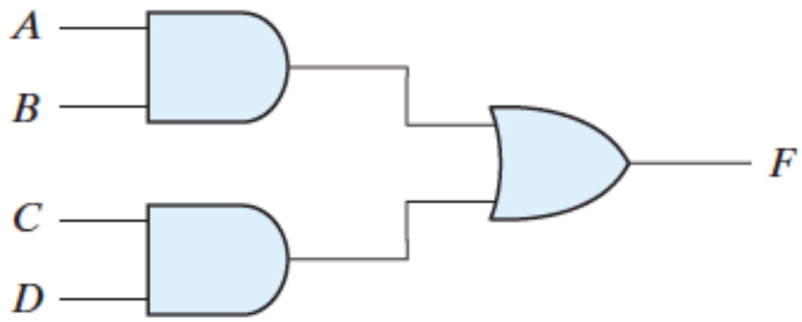


(β) ΟΧΙ ΚΑΙ-ΟΧΙ ΚΑΙ (NAND-NAND)

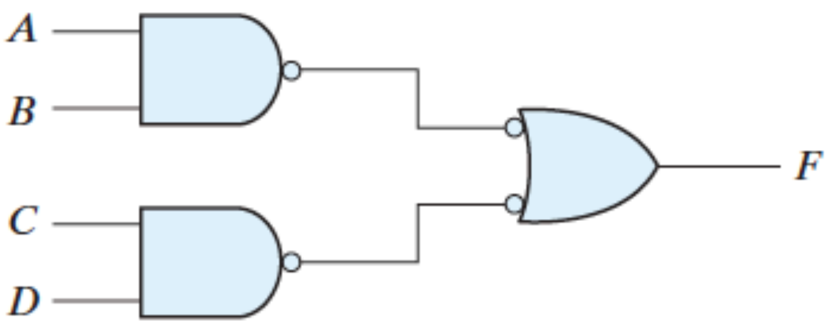


(γ) ΟΧΙ ΚΑΙ-ΟΧΙ ΚΑΙ (NAND-NAND)

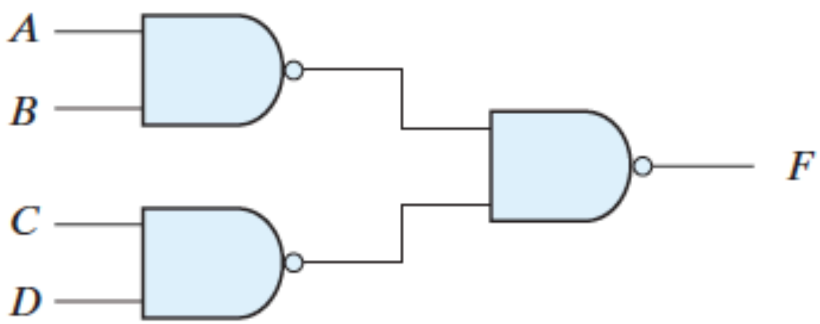
Παράδειγμα



(a)



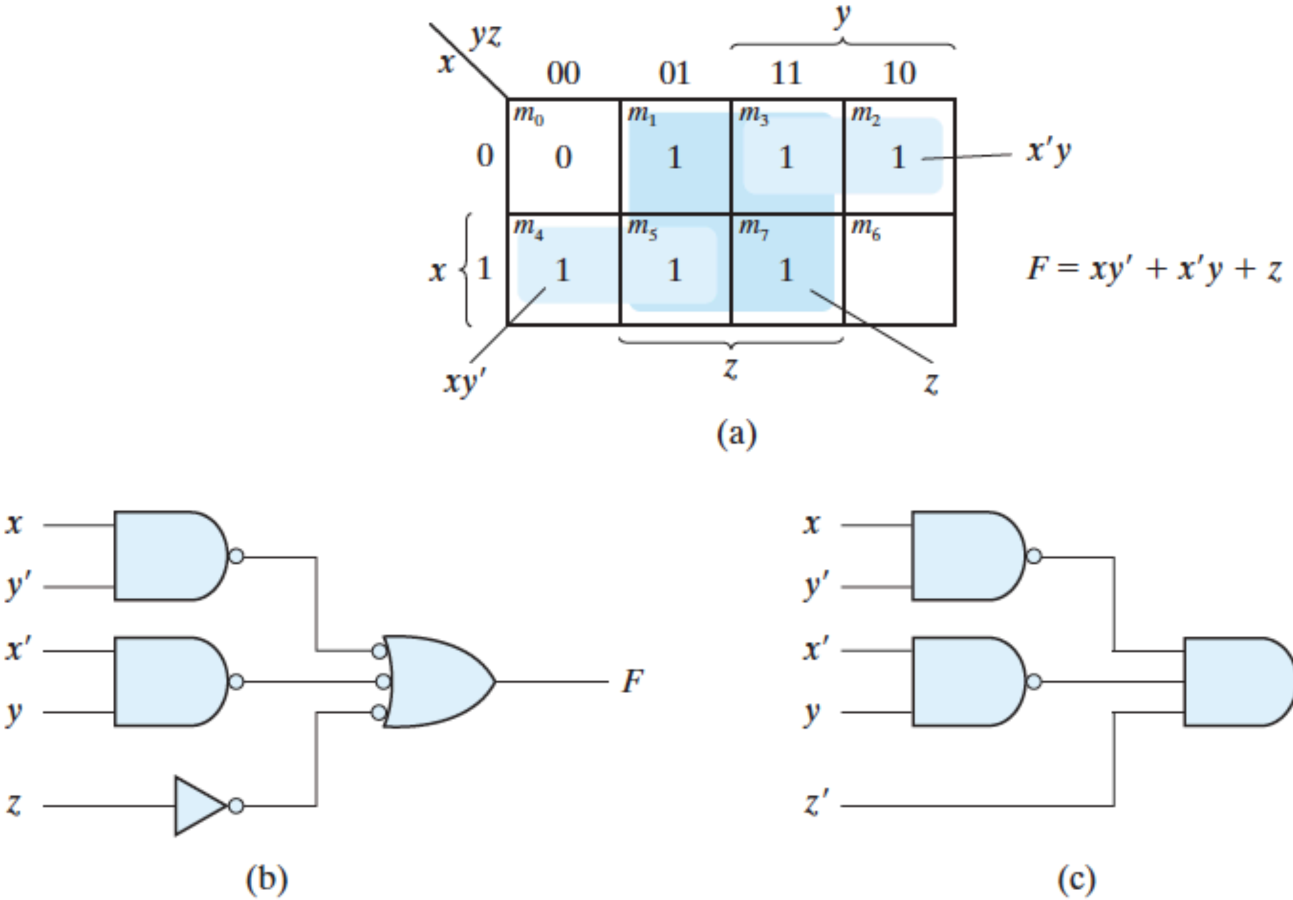
(b)



(c)

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση F(x, y, z) = Σ(1,2,3,4,5,7)



Υλοποίηση 2^{η} με πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ

Εναλλακτικά μπορούμε να απλοποιήσουμε την F΄ σε άθροισμα γινομένων (με συνδυασμό των μηδενικών). Τελικά προσθέτουμε και έναν αντιστροφέα στην έξοδο.

<u>Παράδειγμα:</u> Υλοποίηση της συνάρτησης F=Σ(0,2,3,8,10,11,12,14,15) με πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	0	0
11	1	0	1	1
10	1	0	1	1

Η συμπληρωματική είναι η F΄=Σ(1,4,5,6,7,9,13)

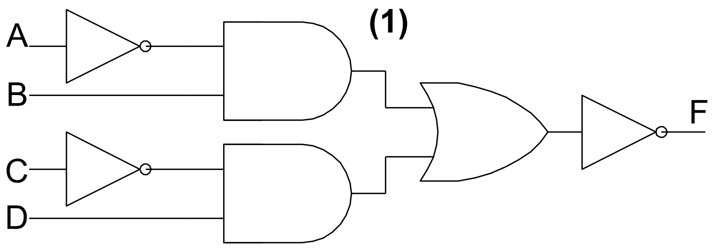
Απλοποίηση

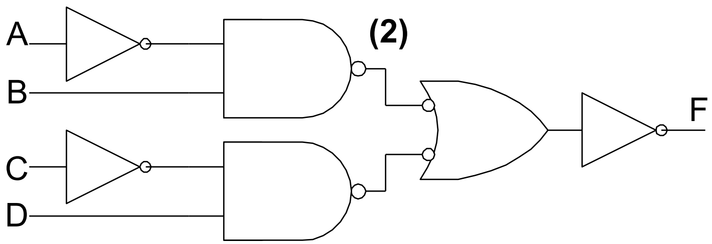
$$F' = A'B + C'D \text{ άρα } F = \overline{A'B + C'D} = \overline{A'B}\;\overline{C'D} =$$

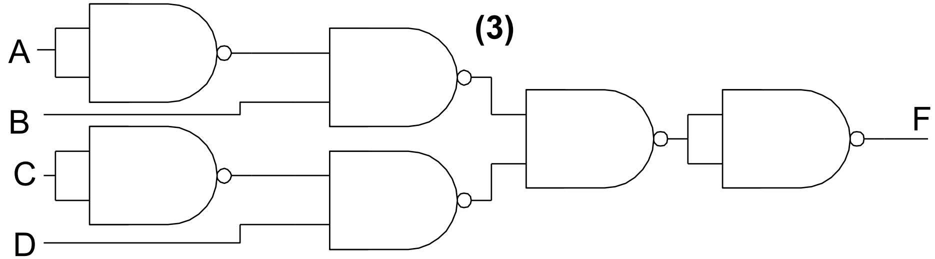
$$= \overline{\overline{\overline{A'B}\;\overline{C'D}}}$$

Υλοποίηση 2η με πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ

$$F = \overline{A'B + C'D}$$





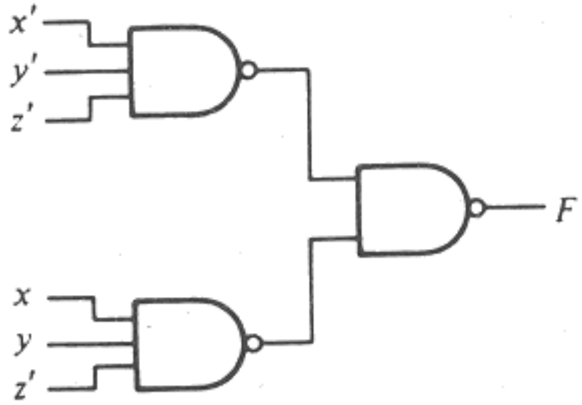


Παράδειγμα Υλοποίησης με πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ

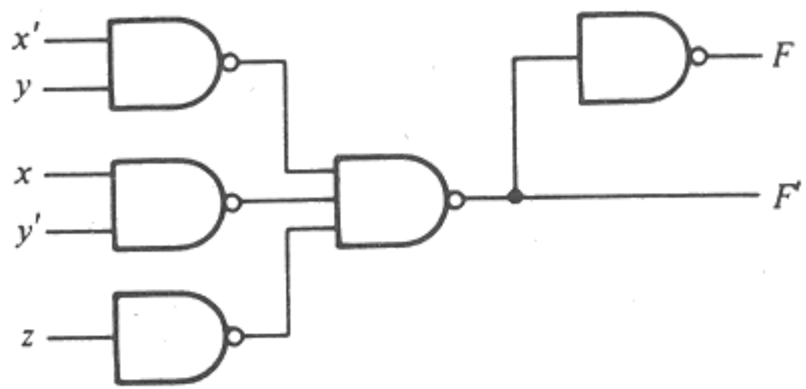
$F(x,y,z) = \Sigma(0,6)$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1

$$F = x'y'z' + xyz'$$
$$F' = x'y + xy' + z$$

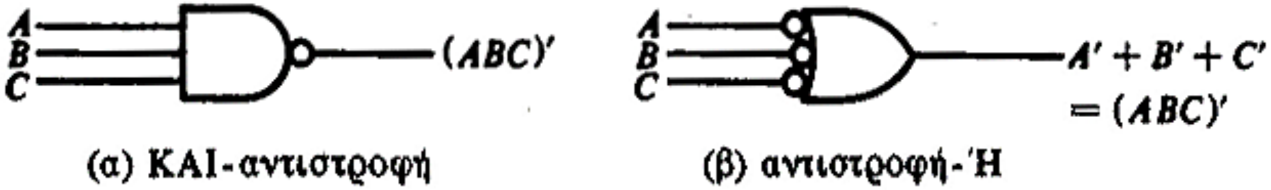


(β) $F = x'y'z' + xyz'$



(γ) $F' = x'y + xy' + z$

Κυκλώματα ΟΧΙ-ΚΑΙ Πολλαπλών Επιπέδων

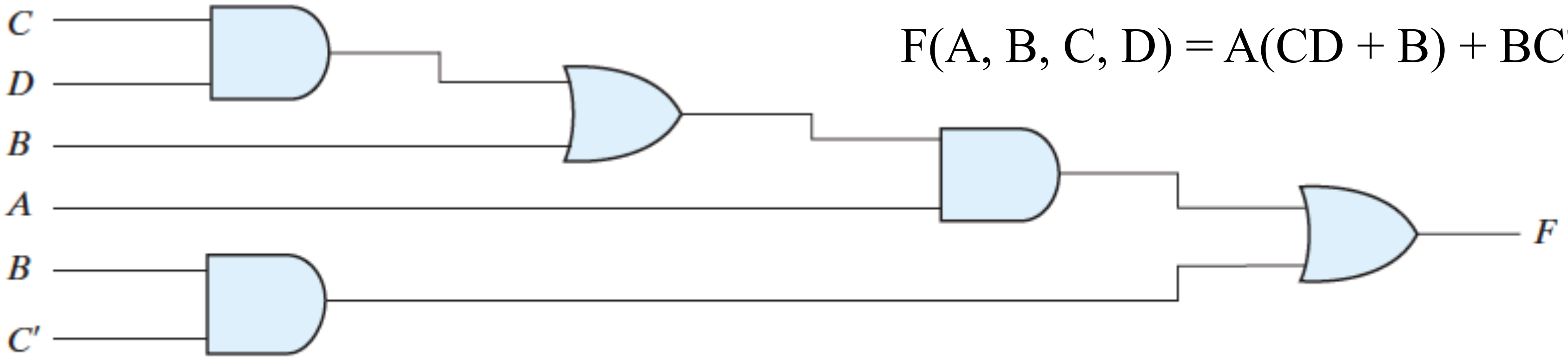


ΣΧΗΜΑ 4-11
Δύο συμβολισμοί για μια πύλη ΟΧΙ-ΚΑΙ

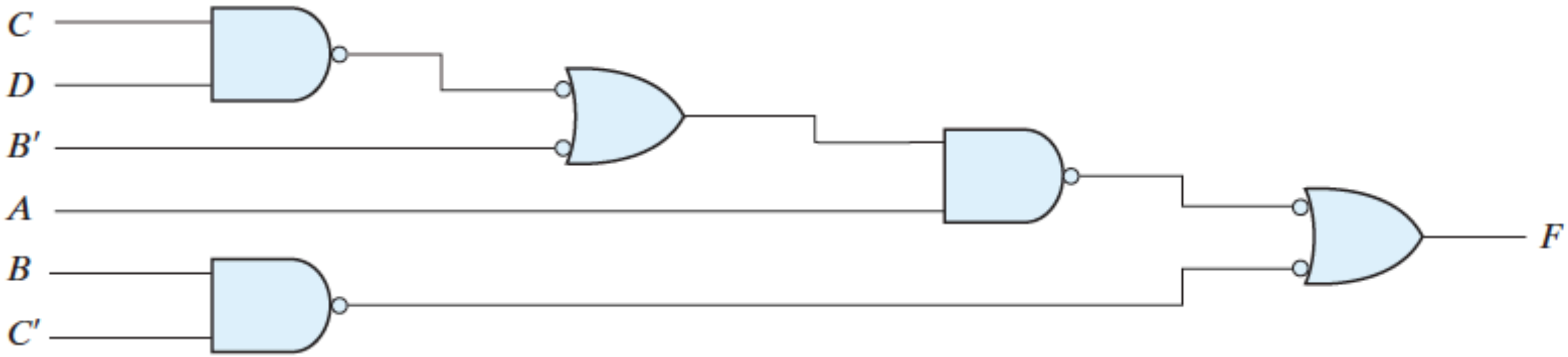
1. Σχεδιάζουμε το λογικό διάγραμμα με πύλες ΚΑΙ, Η και ΌΧΙ.
2. Μετατρέπουμε όλες τις πύλες ΚΑΙ σε ΌΧΙ-ΚΑΙ με σύμβολα ΚΑΙ-αντιστροφής.
3. Μετατρέπουμε όλες τις πύλες Η σε ΌΧΙ-ΚΑΙ με σύμβολα αντιστροφής-Η.
4. Για κάθε κύκλο που δεν αναιρείται βάζουμε έναν αντιστροφέα.

Υλοποίηση ΌΧΙ-ΚΑΙ Πολλαπλών Επιπέδων

$F(A, B, C, D) = A(CD + B) + BC'$

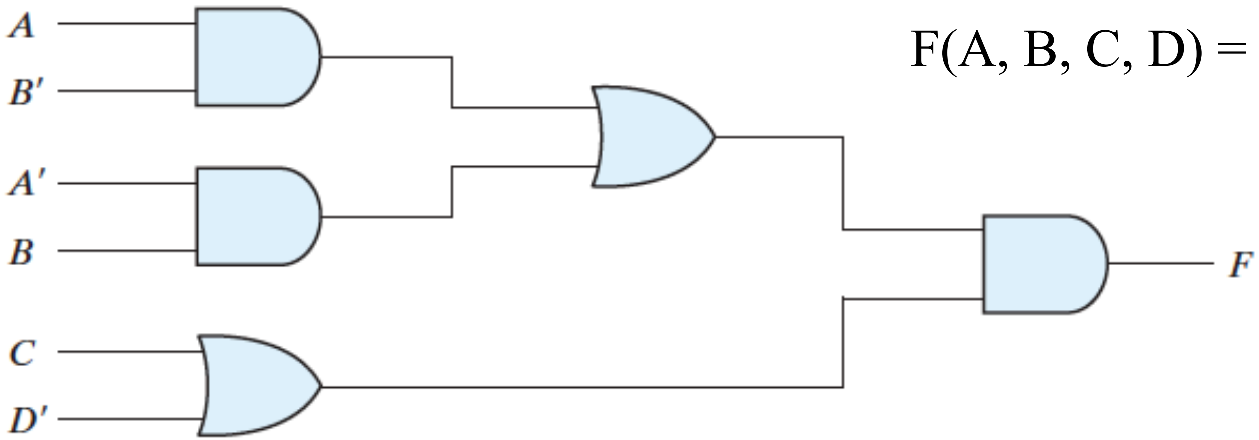


(a) AND–OR gates

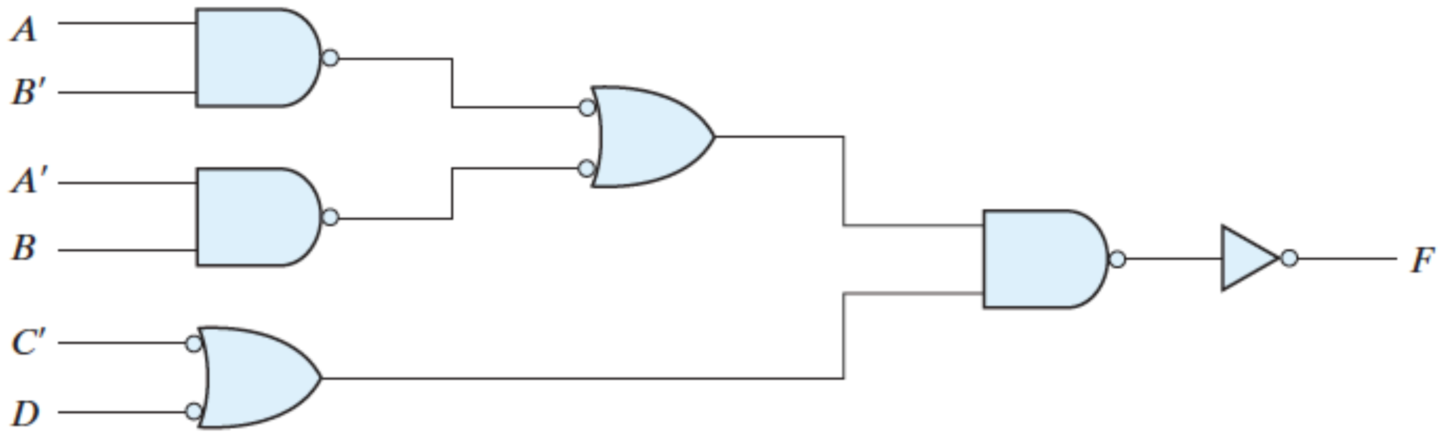


Υλοποίηση ΌΧΙ-ΚΑΙ Πολλαπλών Επιπέδων

F(A, B, C, D) = (AB' + A'B) (C+D')

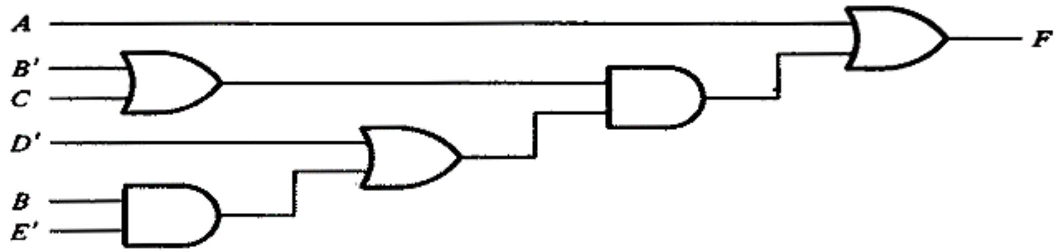


(a) AND–OR gates

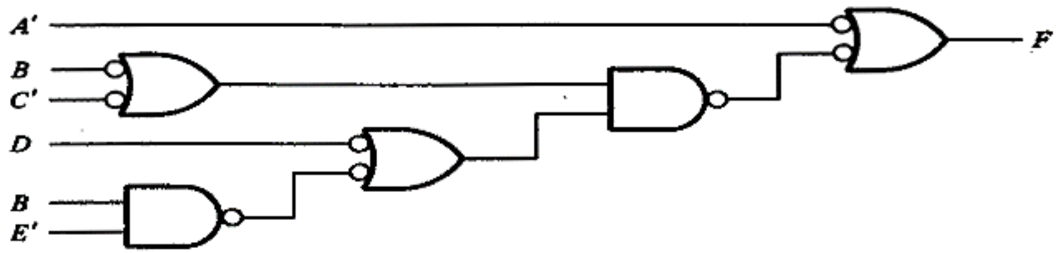


Παράδειγμα (1)

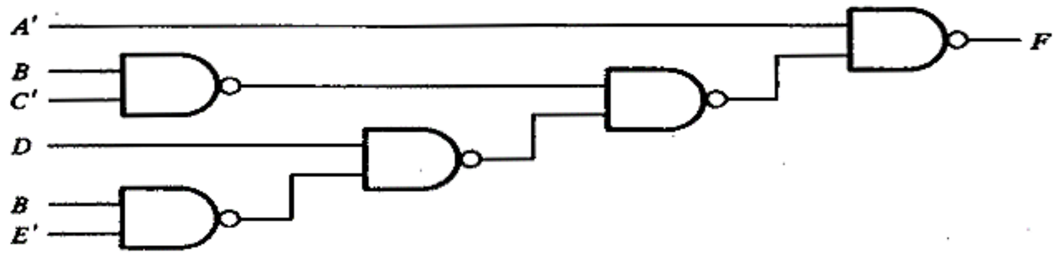
$F=A+(B'+C)(D'+BE')$



(α) Διάγραμμα ΚΑΙ-Ή



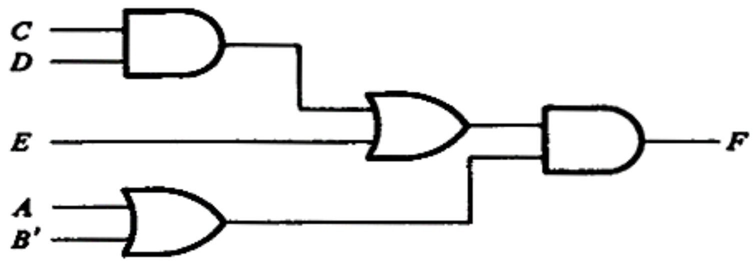
(β) Διάγραμμα με πύλες ΟΧΙ-ΚΑΙ με δύο γραφικά σύμβολα



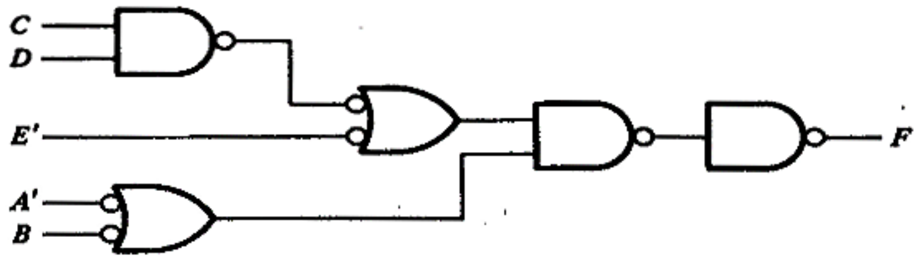
(γ) Διάγραμμα με πύλες ΟΧΙ-ΚΑΙ με ένα γραφικό σύμβολο

Παράδειγμα (2)

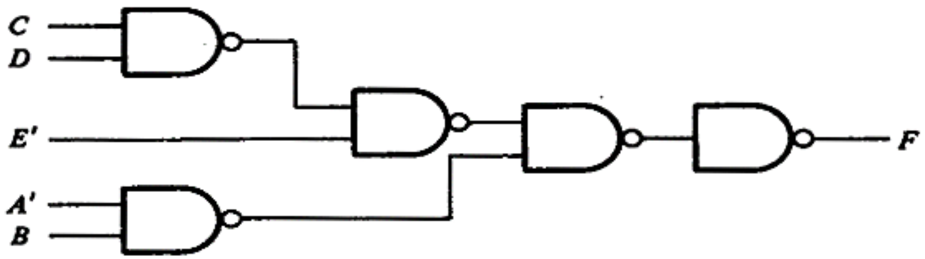
F=(CD+E)(A+B΄)



(α) Διάγραμμα ΚΑΙ-Ή



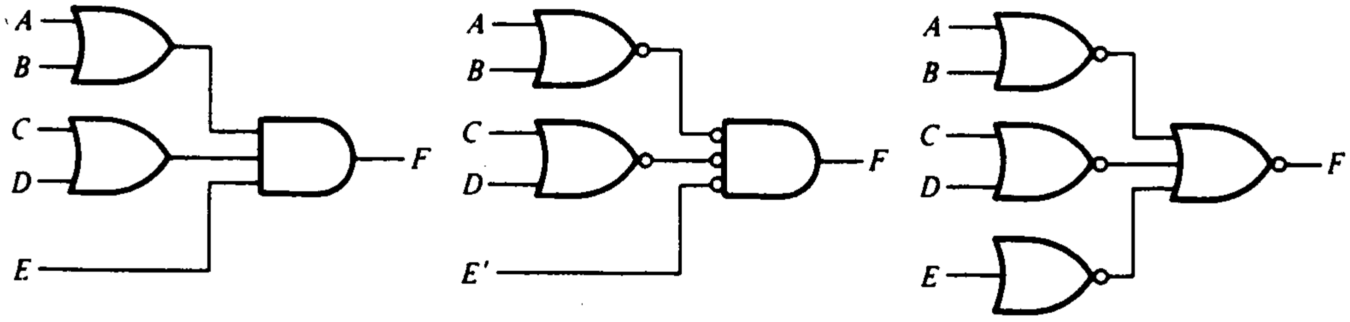
(β) Διάγραμμα ΟΧΙ-ΚΑΙ



(γ) Εναλλακτικό διάγραμμα με πύλες ΟΧΙ-ΚΑΙ

Υλοποίηση με πύλες ΟΥΤΕ

Η συνάρτηση ΟΥΤΕ είναι το δυϊκό της Ό́ΧΙ-ΚΑΙ και άρα οι κανόνες μετατροπής είναι δυϊκοί.



(α) Ή-ΚΑΙ (OR-AND) (β) ΟΥΤΕ-ΟΥΤΕ (NOR-NOR) (γ) ΟΥΤΕ-ΟΥΤΕ (NOR-NOR)

ΣΧΗΜΑ 3-20
Τρεις τρόποι για την υλοποίηση της $F = (A + B)(C + D)E$

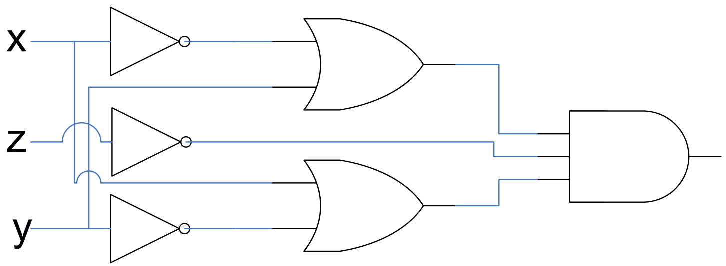
- Η συνάρτηση θα πρέπει να είναι απλοποιημένη σε γινόμενο αθροισμάτων.
- Και εδώ μπορούμε να υλοποιήσουμε την F΄ σε γινόμενο αθροισμάτων και να τοποθετήσουμε τελικά έναν αντιστροφέα

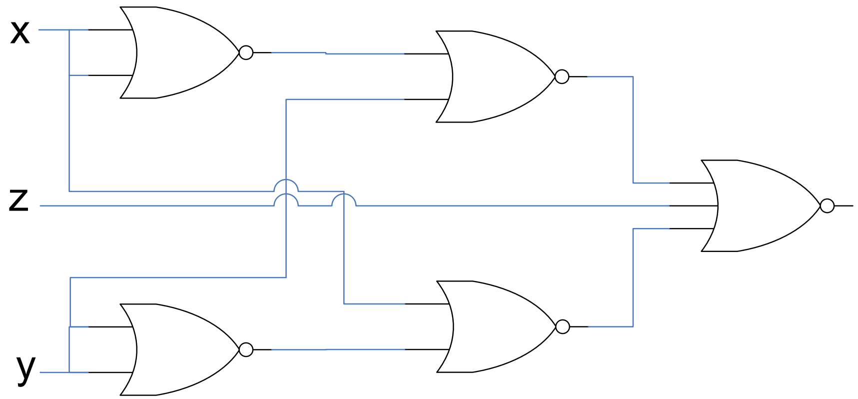
Παράδειγμα Υλοποίησης με πύλες ΟΥΤΕ

$$F(x,y,z) = \Sigma(0,6)$$

$$F' = x'y + xy' + z \;\Rightarrow\; F = (x + y')(x' + y)z'$$

x \ yz	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1

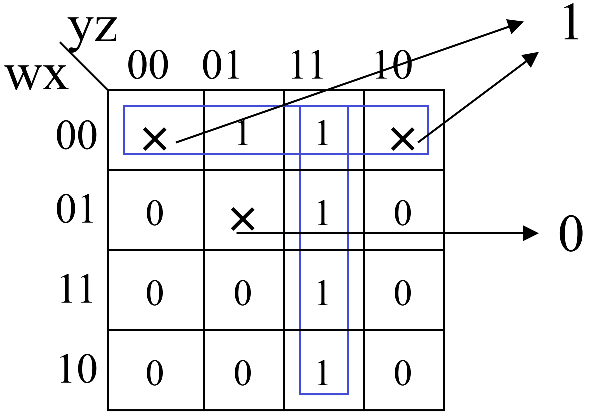




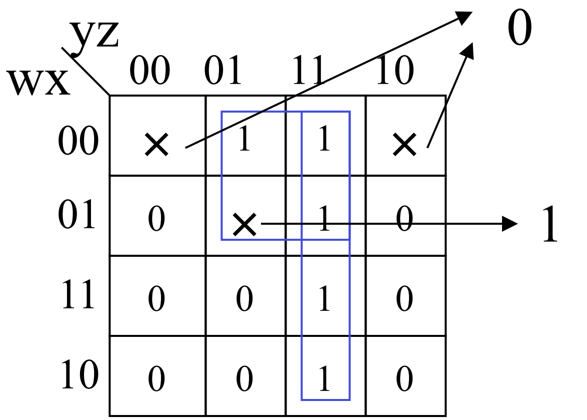
Συνθήκες Αδιαφορίας

Συμβολίζονται με × και αντιστοιχούν σε συνδυασμούς εισόδων που δεν ορίζονται για μία συνάρτηση.

Π.χ. $F(w,x,y,z)=\Sigma(1,3,7,11,15)$ με συνθήκες αδιαφορίας $d(w,x,y,z)=\Sigma(0,2,5)$



$F = yz + w'x' = \Sigma(\underline{0},1,\underline{2},3,7,11,15)$



$F = yz + w'z = \Sigma(1,3,\underline{5},7,11,15)$

Οι αδιάφοροι όροι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως άσσοι ή μηδενικά ανάλογα με την απλοποίηση που οδηγεί στο μικρότερο κύκλωμα.

Η Συνάρτηση Αποκλειστικό Ή

Αποκλειστικό Ή (XOR)	*Σχ. Αντιστρ.*	Αποκλειστικό ΟΥΤΕ (XNOR)
$x \oplus y = x'y + xy'$	$\Longleftrightarrow$	$(x \oplus y)' = xy + x'y'$

- Ιδιότητες:

$$x \oplus 0 = x \qquad x \oplus 1 = x'$$

$$x \oplus x = 0 \qquad x \oplus x' = 1$$

$$x \oplus y' = (x \oplus y)' \qquad x' \oplus y = (x \oplus y)'$$

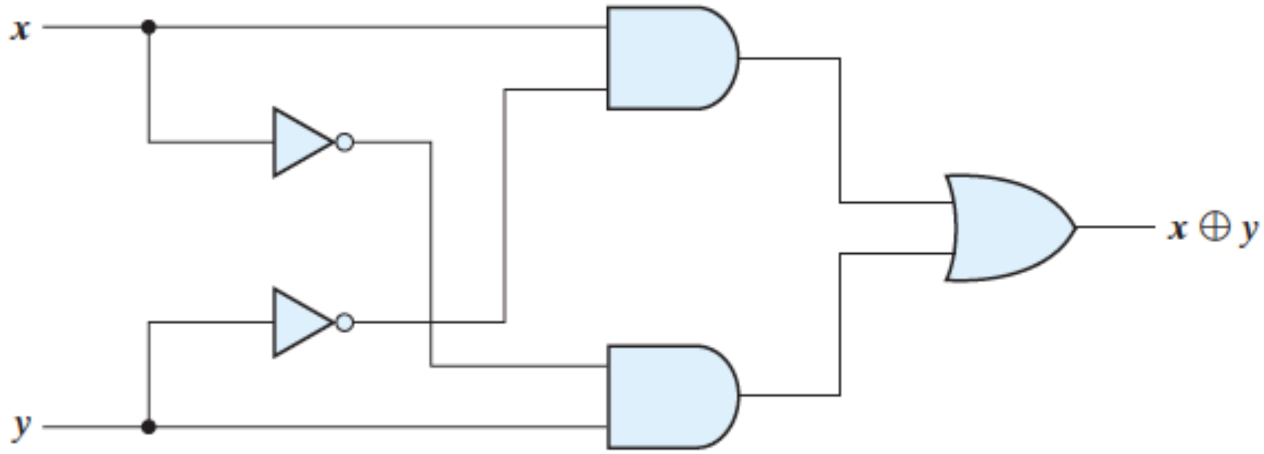
- Η πράξη XOR είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική:

$$A \oplus B = B \oplus A$$

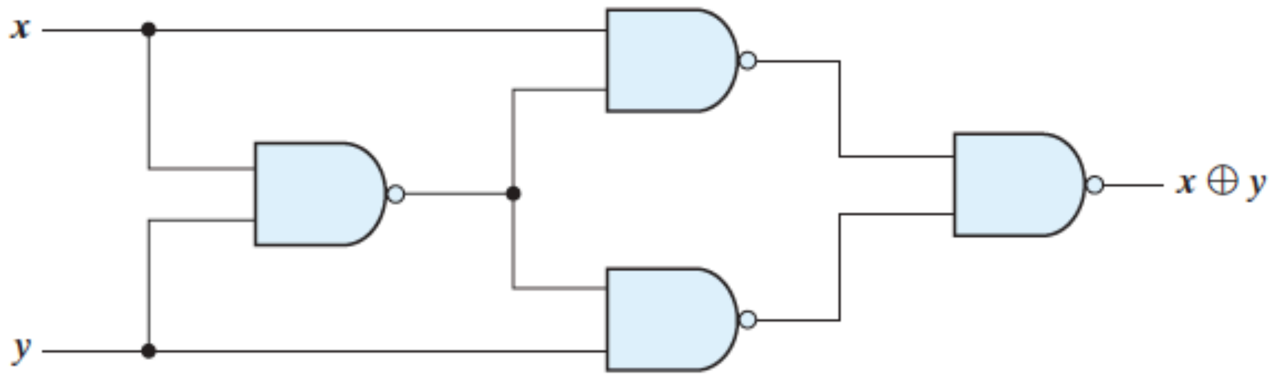
$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C = A \oplus B \oplus C$$

- Δεν φτιάχνονται συχνά πύλες XOR με περισσότερες από 2 εισόδους.

Η Συνάρτηση Αποκλειστικό Ή

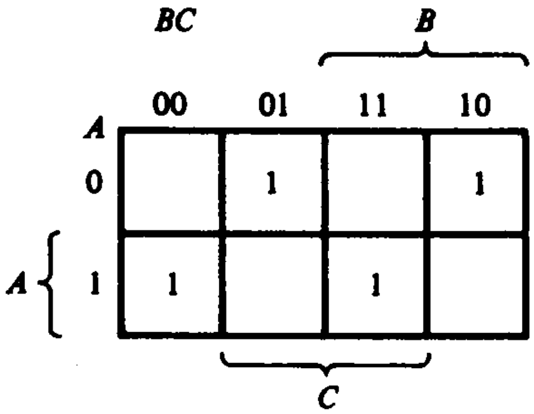


(a) Exclusive-OR with AND–OR–NOT gates



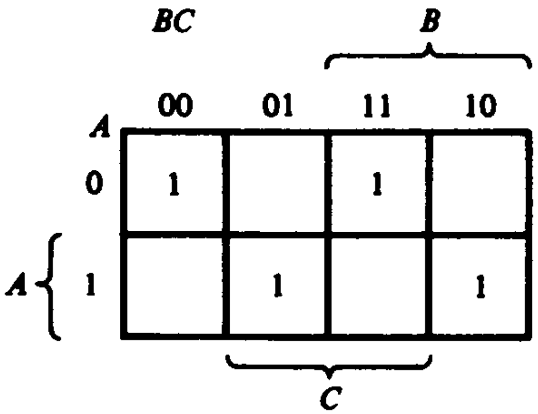
Η Συνάρτηση Αποκλειστικό Ή

Η συνάρτηση XOR πολλών μεταβλητών είναι περιττή: παίρνει τιμή 1 μόνο όταν περιττός αριθμός εισόδων είναι ίσος με 1.



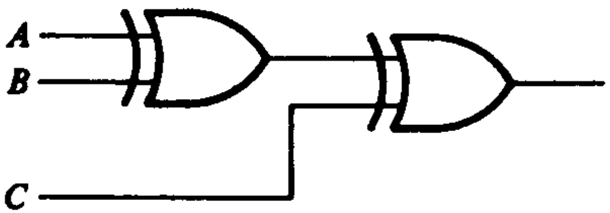
(α) Περιττή συνάρτηση

$F = A \oplus B \oplus C$

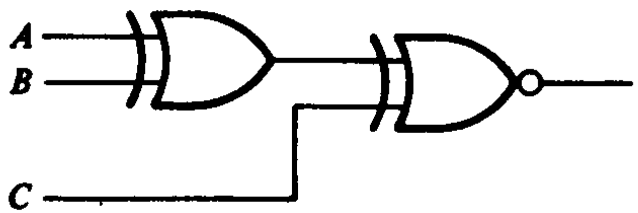


(β) Άρτια συνάρτηση

$F = (A \oplus B \oplus C)'$



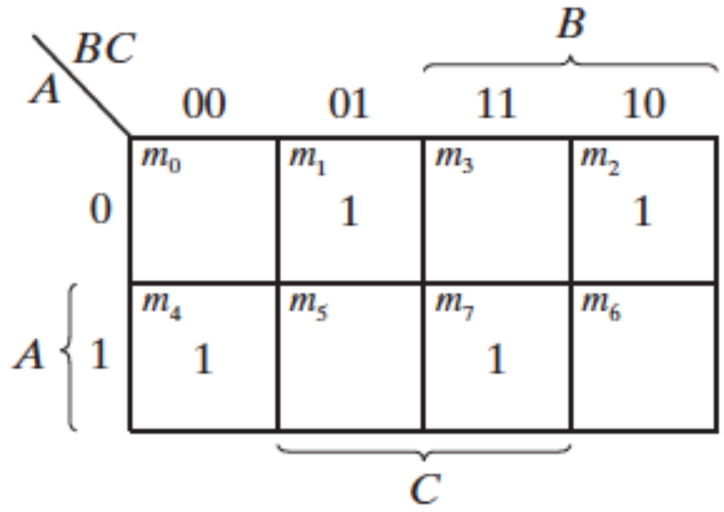
(α) Περιττή συνάρτηση τριών εισόδων



(β) Άρτια συνάρτηση τριών εισόδων

Η περιττή συνάρτηση 3 μεταβλητών

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



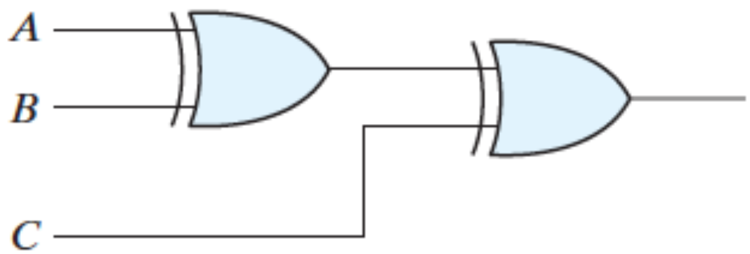
F = A'B'C+A'BC'+AB'C'+ABC =

A'(B'C + BC') + A(B'C' + BC) = A'(B xor C) + A(B xor C)'

Θέτουμε Y = B xor C

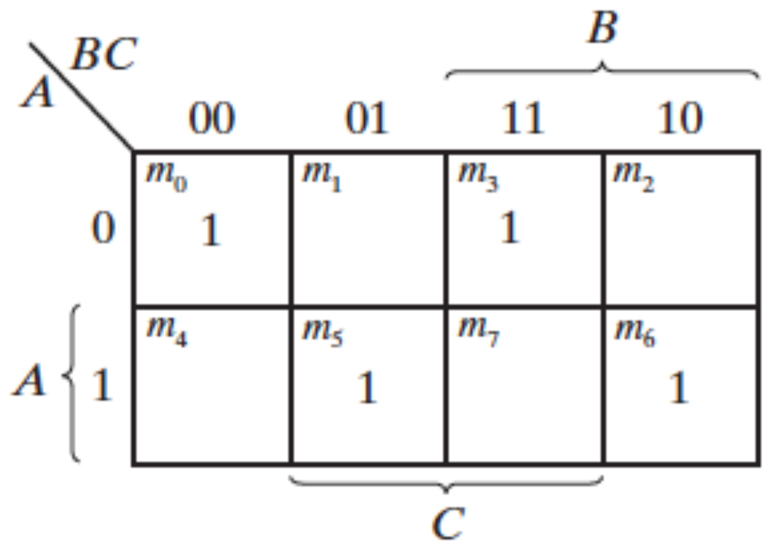
F = A'Y+AY' = A xor Y

F = A xor B xor C



Η άρτια συνάρτηση 3 μεταβλητών

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



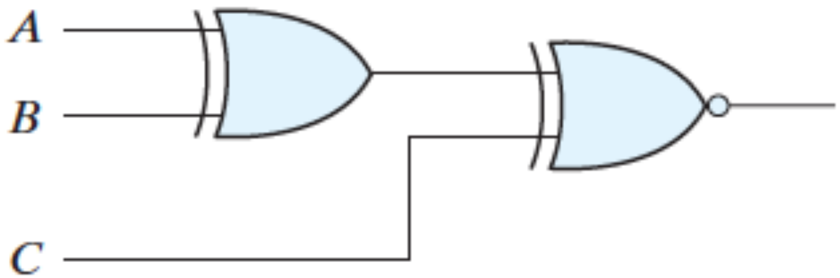
F = A'B'C'+A'BC+AB'C+ABC' =

A'(B'C' + BC) + A(B'C + BC') = A'(B xor C)' + A(B xor C)

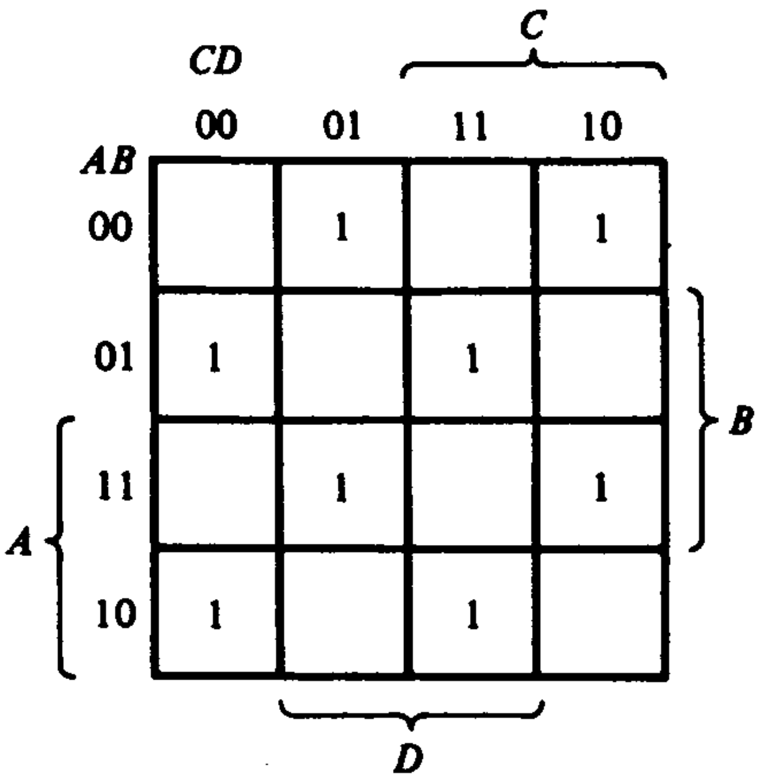
Θέτουμε Y = B xor C

F = A'Y'+AY = (A xor Y)'

F = (A xor B xor C)'

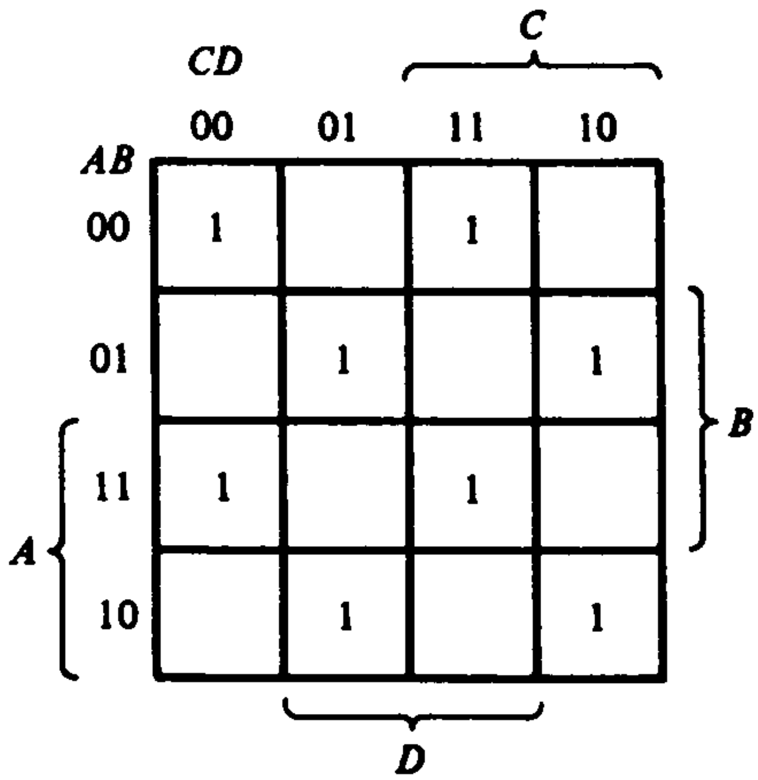


Περιττή – 'Αρτια Συνάρτηση 4 Μεταβλητών



(α) Περιττή συνάρτηση

$F = A \oplus B \oplus C \oplus D$



(β) Άρτια συνάρτηση

$F = (A \oplus B \oplus C \oplus D)'$

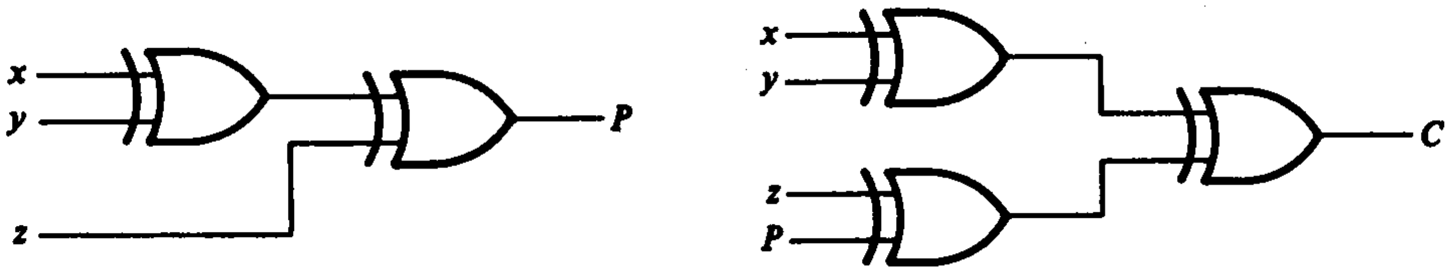
Γεννήτρια και Ελεγκτής Ισοτιμίας

ΠΙΝΑΚΑΣ 4-4
Πίνακας Αληθείας για τη Γεννήτρια Άρτιας Ισοτιμίας

Μήνυμα τριών bits			Bit Ισοτιμίας
x	*y*	*z*	*P*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Γεννήτρια και Ελεγκτής Ισοτιμίας

Τα κυκλώματα αυτά χρησιμοποιούνται στην ανίχνευση λαθών κατά τη μετάδοση ή λειτουργία των κυκλωμάτων.



(α) Γεννήτρια άρτιας ισοτιμίας τριών bits

(β) Ελεγκτής άρτιας ισοτιμίας τεσσάρων bits

ΣΧΗΜΑ 4-25
Λογικό διάγραμμα μιας γεννήτριας και ενός ελεγκτή ισοτιμίας

Το bit ισοτιμίας είναι περιττή πληροφορία η οποία όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση μονού αριθμού λαθών.