$2^η$ Θεματική Ενότητα : Άλγεβρα Boole και Λογικές Πύλες

Επιμέλεια διαφανειών:
Χρ. Καβουσιανός

Βασικοί Ορισμοί

Δυαδικός Τελεστής (Binary Operator): σε κάθε ζεύγος από το Σ αντιστοιχίζει ένα στοιχείο του Σ.

Συνηθισμένα Αξιώματα (α, β, γ, e)$\in$Σ, $\otimes$, • δυαδικοί τελεστές :

1. Κλειστότητα ως προς δυαδικό τελεστή: $\alpha \otimes \beta \in \Sigma$

2. Προσεταιριστικός Νόμος: $(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$

3. Αντιμεταθετικός Νόμος: $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$

4. Ουδέτερο Στοιχείο e: $\alpha \otimes e = e \otimes \alpha = \alpha$

5. Αντίστροφο: $\alpha \otimes \alpha' = e$

6. Επιμεριστικός Νόμος: $\alpha \bullet (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \bullet \beta) \otimes (\alpha \bullet \gamma)$

Πεδίο: Αλγεβρική δομή με σύνολο στοιχείων και δύο δυαδικούς τελεστές όπου ο καθένας έχει τις ιδιότητες 1 έως 5 και που και οι δύο μαζί έχουν την ιδιότητα 6.

Παράδειγμα: Πεδίο Πραγματικών Αριθμών

Σύνολο: πραγματικών αριθμών Δυαδικοί τελεστές: +, •

\+ ορίζει την πρόσθεση

Ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης: 0

Αντίστροφο (-α) ορίζει την αφαίρεση

• ορίζει τον πολλαπλασιασμό

Ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού: 1

Αντίστροφο (1/α) ορίζει τη διαίρεση

Επιμεριστικός νόμος: $\alpha \bullet (\beta + \gamma) = \alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma$

Αξιωματικός Ορισμός Άλγεβρας Boole

Άλγεβρα Boole: είναι μία αλγεβρική δομή πάνω σε ένα σύνολο στοιχείων B μαζί με τους δυαδικούς τελεστές +, •, αρκεί να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα (Huntington) :

1. Κλειστή ως προς τελεστή +, • : $\alpha + \beta$, $\alpha \bullet \beta \in B$

2. Αντιμεταθετική ως προς +, • : $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$

3. Ουδέτερο Στοιχείο 0(+), 1(•): $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha \bullet 1 = \alpha$

4. Συμπλήρωμα ως προς +, • : $\alpha + \alpha' = 1$, $\alpha \bullet \alpha' = 0$

5. Επιμεριστική ως προς +, • : $\alpha \bullet(\beta+\gamma)=(\alpha\bullet\beta)+(\alpha\bullet \gamma)$, $\alpha+(\beta\bullet\gamma)=(\alpha + \beta) \bullet (\alpha + \gamma)$

6. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία $\alpha, \beta \in B$ με $\alpha \neq \beta$.

Διαφορές με συνήθη Άλγεβρα

1. Τα αξιώματα Huntington δεν περιλαμβάνουν τον προσεταιριστικό νόμο που όμως αποδεικνύεται ότι ισχύει.

2. Ο επιμεριστικός νόμος του + ως προς τον • ισχύει για την άλγεβρα Boole αλλά όχι για την συνήθη άλγεβρα.

3. Η άλγεβρα Boole δεν έχει προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά αντίστροφα άρα δεν υπάρχει αφαίρεση - διαίρεση.

4. Το συμπλήρωμα δεν υπάρχει στην συνήθη άλγεβρα.

5. Η συνήθης άλγεβρα ασχολείται με το απειροσύνολο των πραγματικών. Η Boole έχει δύο στοιχεία, τα 0, 1.

Ανάλογα με την επιλογή των στοιχείων του B και των κανόνων λειτουργίας των τελεστών μπορούμε να σχηματίσουμε πολλές άλγεβρες Boole.

Η δίτιμη άλγεβρα Boole

- Σύνολο στοιχείων: B = {0, 1}
- Δυαδικοί τελεστές: + (λογική πράξη Η), • (λογική πράξη ΚΑΙ), και τελεστής συμπληρώματος (λογική πράξη ΟΧΙ)

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	x'
0	1
1	0

- Ισχύουν τα αξιώματα Huntington

Η δίτιμη άλγεβρα Boole

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	x'
0	1
1	0

1. Η κλειστότητα προφανώς ισχύει.

2. Τα ουδέτερα στοιχεία είναι 0 για το + και 1 για το • : (0+0=0, 0+1=1+0=1) και (1 • 1=1, 1 • 0=0 • 1=0)

3. Οι αντιμεταθετικοί νόμοι είναι προφανείς από τη συμμετρία.

4. Από τον πίνακα συμπληρώματος έχουμε x+x΄=1: 0+0΄=0+1=1, 1+1΄=1+0=1 και x • x΄=0: 0 • 0΄=0 • 1=0, 1 • 1΄=1 • 0=0

5. Η άλγεβρα έχει τουλάχιστον 2 στοιχεία αφού 1≠0.

6. Ο επιμεριστικός νόμος φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα

Ο επιμεριστικός νόμος

x	y	z	$y+z$	$x\cdot(y+z)$	$x\cdot y$	$x\cdot z$	$(x\cdot y)+(x\cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Δύο συναρτήσεις που δίνουν τις ίδιες λογικές τιμές για όλες τις πιθανές τιμές των μεταβλητών τους είναι ισοδύναμες

Δυισμός

Δυϊσμός: Ότι ισχύει από τα αξιώματα Huntigton για το + (•) μπορεί να προκύψει από το • (+) με εναλλαγή τελεστών και ουδέτερων στοιχείων.

Μια αληθής αλγεβρική έκφραση παραμένει αληθής αν εναλλάξω τελεστές και ουδέτερα στοιχεία (ΚΑΙ-Η, 0-1)

Η αρχή δυισμού αποτελεί απόδειξη ισχύος μίας λογικής έκφρασης και αξιοποιείται στα βασικά αξιώματα-θεωρήματα

Βασικά θεωρήματα και ιδιότητες

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-1
Αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας Boole

Αξίωμα 2	(a) $x+0=x$	(b) $x \cdot 1 = x$
Αξίωμα 5	(a) $x+x'=1$	(b) $x \cdot x' = 0$
Θεώρημα 1	(a) $x+x=x$	(b) $x \cdot x = x$
Θεώρημα 2	(a) $x+1=1$	(b) $x \cdot 0 = 0$
Θεώρημα 3, (δύο αρνήσεις)	$(x')'=x$	
Αξίωμα 3, αντιμεταθετική	(a) $x+y=y+x$	(b) $xy=yx$
Θεώρημα 4, προσεταιριστική	(a) $x+(y+z)=(x+y)+z$	(b) $x(yz)=(xy)z$
Αξίωμα 4, επιμεριστική	(a) $x(y+z)=xy+xz$	(b) $x+yz=(x+y)(x+z)$
Θεώρημα 5, De Morgan	(a) $(x+y)'=x'y'$	(b) $(xy)'=x'+y'$
Θεώρημα 6, απορρόφηση	(a) $x+xy=x$	(b) $x(x+y)=x$

Τα θεωρήματα αποδεικνύονται:
(α) με χρήση των αξιωμάτων και των θεωρημάτων που έχουν ήδη αποδειχθεί, ή
(β) με τη βοήθεια των πινάκων αλήθειας

Αξιώματα

<u>Αξίωμα 2:</u> $x + 0 = x$

OR

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Για $y = 0$ αποδεικνύεται

<u>Δυϊκο:</u> $x \bullet 1 = x$

<u>Αξίωμα 5:</u> $x + x' = 1$

OR

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Για $y = x'$ αποδεικνύεται

<u>Δυϊκο:</u> $x \bullet x' = 0$

Απόδειξη Θεωρημάτων

Θεώρημα 1a: $x+x=x$

$x+x$	$=$	
	$(x+x)\cdot 1 =$	αξίωμα $a\cdot 1 = a$
	$(x+x)\cdot(x+x') =$	αξίωμα $a+a' = 1$
	$x+xx' =$	αξίωμα $a+bc = (a+b)(a+c)$
	$x+0 =$	αξίωμα $a\cdot a' = 0$
	x	αξίωμα $a+0 = a$

x = Ο Πέτρος έγραψε 10 στην Ψηφιακή σχεδίαση ⇨ Εαν η πρόταση είναι αληθής τότε και η πρόταση "ο Πέτρος έγραψε 10 **Ή** ο Πέτρος έγραψε 10" είναι επίσης αληθής

Απόδειξη Θεωρημάτων

<u>Θεώρημα 1b:</u> $x \cdot x = x$ (δυικό του 1a)

$x \cdot x =$

$xx+0 =$	αξίωμα $a+0 = a$
$xx+xx' =$	αξίωμα $a \cdot a' = 0$
$x(x+x')=$	αξίωμα $a(b+c) = ab+ac$
$x \cdot 1 =$	αξίωμα $a+a' = 1$
x	αξίωμα $a \cdot 1 = a$

x = Ο Πέτρος έγραψε 10 στην Ψηφιακή σχεδίαση → Εαν η πρόταση είναι αληθής τότε και η πρόταση "ο Πέτρος έγραψε 10 ΄**ΚΑΙ** ο Πέτρος έγραψε 10" είναι επίσης αληθής

Απόδειξη Θεωρημάτων

Θεώρημα 2a: $x+1=1$

$x+1 =$

$1\cdot(x+1) =$	αξίωμα $a\cdot 1 = a$
$(x+x')\cdot(x+1) =$	αξίωμα $a+a' = 1$
$x+x'\cdot 1 =$	αξίωμα $a+bc =(a+b)\cdot(a+c)$
$x+x' =$	αξίωμα $a\cdot 1 = a$
1	αξίωμα $a+a' = 1$

Θεώρημα 2b: $x\cdot 0=0$ (δυικό του 2a)

x = Ο Πέτρος έγραψε 10 στην Ψηφιακή σχεδίαση ⇒ Είτε η πρόταση είναι αληθής είτε όχι, η πρόταση "ο Πέτρος έγραψε 10 **Ή** το 10 είναι μεγαλύτερο του 9" είναι αληθής

Απόδειξη Θεωρημάτων

Θεώρημα 6a: $x+xy=x$

$x+xy =$	
$x\cdot 1+x\cdot y =$	αξίωμα $a\cdot 1 = a$
$x\cdot(1+y) =$	αξίωμα $a(b+c) = ab+ac$
$x\cdot(y+1) =$	αξίωμα $a+b = b+a$
$x\cdot 1 =$	θεώρημα $a+1 = 1$
x	αξίωμα $a\cdot 1 = a$

Θεώρημα 6b: $x\cdot(x+y) = x$ (δυικό του 6a)

Απόδειξη Θεωρημάτων

Θεώρημα 5a (De Morgan): $(x+y)'=x'y'$

x	y	$x+y$	$(x+y)'$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

x'	y'	$x'y'$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Θεώρημα 5b (De Morgan): $(xy)'=x'+y'$

Προτεραιότητα Τελεστών

1. Παρένθεση
2. ΌΧΙ
3. ΚΑΙ
4. Η

<u>Παραδείγματα</u>

$(x + y)'$: 1) υπολογίζουμε το $x + y$.

2) παίρνουμε το συμπλήρωμα του αποτελέσματος.

$x'y'$: 1) παίρνουμε τα συμπληρώματα των x και y.

2) παίρνουμε το ΚΑΙ των συμπληρωμάτων.

Συναρτήσεις Boole

Συνάρτηση: Έκφραση από δυαδικές μεταβλητές, τους δύο δυαδικούς τελεστές Η και ΚΑΙ, τον τελεστή ΌΧΙ, παρενθέσεις και ένα ίσον.

F_1=x+y΄z είναι αληθής (1) μόνο αν (x=1) ή (y=0 και z=1).

Πίνακας Αλήθειας

n

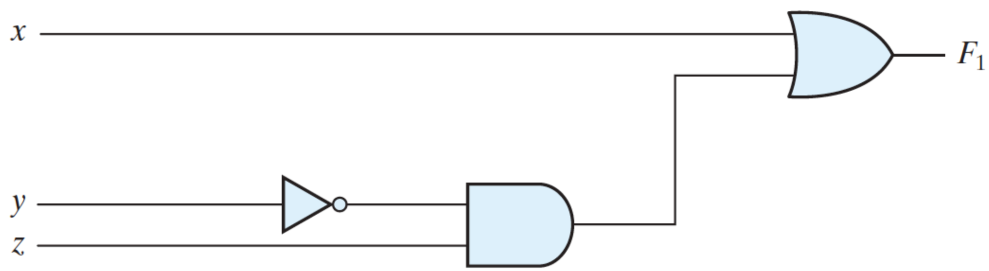
2^n συνδυασμοί σε αύξουσα δυαδική αρίθμηση

x	*y*	*z*	F_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Αλγεβρική έκφραση

F_1=x+y΄z

Κυκλωματικη Υλοποίηση

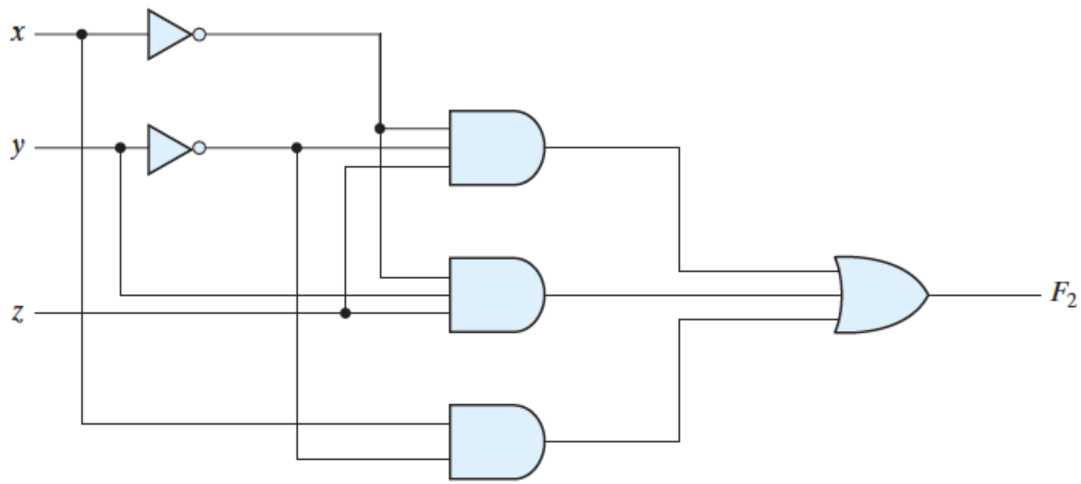


Συναρτήσεις Boole

Ο πίνακας αλήθειας είναι **ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ**, ενώ υπάρχουν πολλαπλές αλγεβρικές εκφράσεις και κυκλωματικές υλοποιήσεις

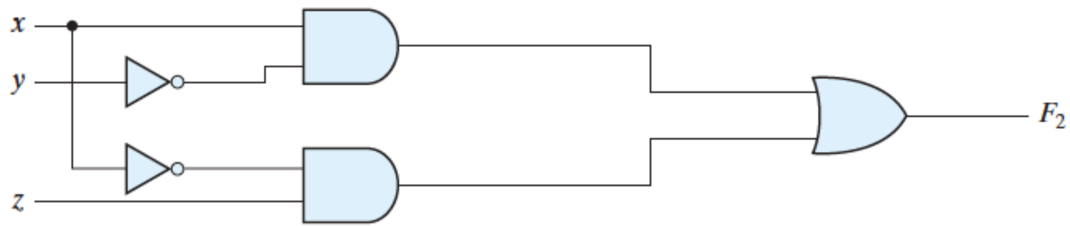
Πίνακας Αλήθειας

x	y	z	F_2
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0



(a) $F_2 = x'y'z + x'yz + xy'$

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ!!!



(b) $F_2 = xy' + x'z$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

$$F_3 = x'y'z + x'yz + xy'$$

term literal

Εύρεση απλούστερων εκφράσεων μιας συνάρτησης με χρήση αλγεβρικών μετασχηματισμών.

<u>Παράδειγμα</u>

$$\begin{aligned} F_3 &= x'y'z + x'yz + xy' \\ &= x'z\,(y' + y) + xy' \\ &= x'z1 + xy' \\ &= x'z + xy' \\ &= F_4 \end{aligned}$$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

1→ $[(x' + z)' \bullet y] + [(x + y) \bullet z] =$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

$$1 \rightarrow [\underbrace{(x' + z)'}_{} \bullet y] + [(x + y) \bullet z] =$$

$$2 \rightarrow [(x')' \bullet z' \bullet y] \quad +$$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

$$1 \rightarrow [(x' + z)' \bullet y] + [(x + y) \bullet z] =$$

$$2 \rightarrow [(x')' \bullet z' \bullet y] + [x \bullet z + y \bullet z]$$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

$$1 \rightarrow [(x' + z)' \bullet y] + [(x + y) \bullet z] =$$

$$2 \rightarrow [(x')' \bullet z' \bullet y] + [x \bullet z + y \bullet z] =$$

$$3 \rightarrow (x \bullet z' \bullet y) + (x \bullet z + y \bullet z) =$$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

$1 \rightarrow [(x' + z)' \bullet y] + [(x + y) \bullet z] =$

$2 \rightarrow [(x')' \bullet z' \bullet y] + [x \bullet z + y \bullet z] =$

$3 \rightarrow (x \bullet z' \bullet y) + (x \bullet z + y \bullet z) =$

$4 \rightarrow x \bullet y \bullet z' + x \bullet z + y \bullet z$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

1. $x(x' + y) = xx' + xy = 0 + xy = xy.$

2. $x + x'y = (x + x')(x + y) = 1(x + y) = x + y.$

3. $(x + y)(x + y') = x + xy + xy' + yy' = x(1 + y + y') = x.$

4.
$$\begin{aligned} xy + x'z + yz &= xy + x'z + yz(x + x') \\ &= xy + x'z + xyz + x'yz \\ &= xy(1 + z) + x'z(1 + y) \\ &= xy + x'z. \end{aligned}$$

5. $(x + y)(x' + z)(y + z) = (x + y)(x' + z)$, by duality from function 4.

Συμπλήρωμα Συνάρτησης Boole

Το συμπλήρωμα F΄ μιας συνάρτησης F είναι η συνάρτηση εκείνη που ισούται με 0 όταν F = 1 και 1 όταν F = 0.

Το συμπλήρωμα μιας συνάρτησης προκύπτει εφαρμόζοντας τα γενικευμένα θεωρήματα DeMorgan

$$(A + B + C + D + \ldots + F)' = A'\, B'\, C'\, D' \ldots F'$$

$$(ABCD\ldots F)' = A' + B' + C' + D' + \ldots + F'$$

εάν αλλάξουμε τα ΚΑΙ με τα Η και συμπληρώσουμε κάθε παράγοντα.

Το συμπλήρωμα προκύπτει εύκολα εάν πάρουμε το δυϊκό της συνάρτησης και συγχρόνως το συμπλήρωμα κάθε παράγοντα.

Συμπλήρωμα Συνάρτησης Boole

$$F_1' = (x'yz' + x'y'z)' = (x'yz')'(x'y'z)' = (x + y' + z)(x + y + z')$$

$$\begin{aligned} F_2' = [x(y'z' + yz)]' &= x' + (y'z' + yz)' = x' + (y'z')'(yz)' \\ &= x' + (y + z)(y' + z') \\ &= x' + yz' + y'z \end{aligned}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Το θεώρημα De Morgan πρέπει να εφαρμόζεται σταδιακά και ακολουθώντας την προτεραιότητα των τελεστών ανάποδα

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

Minterm (Ελαχιστόρος) : Το ΚΑΙ n μεταβλητών στην κανονική ή συμπληρωματική τους μορφή.

Παραδείγματα ελαχιστόρων με 4 μεταβλητές:

$$x\,y\,z\,w, \quad x'\,y\,z'\,w, \quad x\,y'\,z\,w$$

Maxterm (Μεγιστόρος) : Το Η΄ n μεταβλητών στην κανονική ή συμπληρωματική τους μορφή.

Παραδείγματα μεγιστόρων με 4 μεταβλητές:

$$x + y + z + w, \quad x' + y + z' + w, \quad x + y' + z + w$$

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

			Ελαχιστόροι		Μεγιστόροι	
x	y	z	Όρος	Ονομασία	Όρος	Ονομασία
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x+y+z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x+y'+z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x+y'+z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x'+y+z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x'+y+z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x'+y'+z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x'+y'+z'$	M_7

Για n μεταβλητές έχουμε 2^n ελαχιστόρους και μεγιστόρους. Οι μεταβλητές έχουν ανεστραμένες τιμές στους αντίστοιχους ελαχιστόρους / μεγιστόρους

Κάθε ελαχιστόρος είναι το συμπλήρωμα του αντίστοιχου μεγιστόρου και αντίστροφα, π.χ. $m_0=x'y'z'$, $M_0=x+y+z$

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

x	y	z	Function f_1	Function f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$f_1 = x'y'z + xy'z' + xyz = m_1 + m_4 + m_7$$

$$f_2 = x'yz + xy'z + xyz' + xyz = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

x y z	F	F'
0 0 0	1	0
0 0 1	1	0
0 1 0	0	1
0 1 1	0	1
1 0 0	1	0
1 0 1	0	1
1 1 0	1	0
1 1 1	1	0

$$F = \Sigma(0, 1, 4, 6, 7)$$

$$F' = \Sigma(2, 3, 5)$$

$\Downarrow$

Όσοι ελαχιστόροι λείπουν από την F υπάρχουν στην συμπληρωματική της F'

$\Downarrow$

$$F' = m_2 + m_3 + m_5 \quad F = (F')' = m_2' m_3' m_5' = M_2 M_3 M_5$$

$\Downarrow$

$$F = \underbrace{\Sigma(0, 1, 4, 6, 7)} = \underbrace{\Pi(2, 3, 5)}$$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Κανονικές Μορφές

$$f_1 = x'y'z + xy'z' + xyz \quad \begin{cases} f_1 = m_1 + m_4 + m_7 \quad f_1' = m_0 + m_2 + m_3 + m_5 + m_6 \\ f_1 = M_0 M_2 M_3 M_5 M_6 \quad f_1' = M_1 M_4 M_7 \end{cases}$$

x	*y*	*z*	**Function f_1**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Οι συναρτήσεις Boole που είναι εκφρασμένες ως άθροισμα ελαχιστόρων ή ως γινόμενο μεγιστόρων λέμε ότι είναι σε **κανονική μορφή**.

Συνάρτηση Boole σε Αθροισμα Ελαχιστόρων

1. Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση σε άθροισμα γινομένων.
2. Συμπληρώνουμε κάθε γινόμενο με τις μεταβλητές που λείπουν πολ/ζοντας με μία παράσταση (x + x΄) για κάθε μεταβλητή που λείπει.

ή εναλλακτικά

1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης κατ'ευθείαν από την αλγεβρική έκφραση.
2. Παίρνουμε τους ελαχιστόρους από τον πίνακα αλήθειας.

<u>Παράδειγμα</u>

$$
\begin{aligned}
F &= A + B'C \\
&= A(B + B')(C + C') + (A + A')B'C \\
&= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + AB'C + A'B'C \\
&= A'B'C + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC \\
&= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)
\end{aligned}
$$

Συνάρτηση Boole σε Γινόμενο Μεγιστόρων

1. Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση σε γινόμενο αθροισμάτων χρησιμοποιώντας τον επιμεριστικό κανόνα: $x + yz = (x + y)(x + z)$.
2. Συμπληρώνουμε κάθε άθροισμα με τις μεταβλητές που λείπουν προσθέτοντας τον όρο (xx΄) για κάθε μεταβλητή που λείπει.

ή εναλλακτικά

1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης κατ'ευθείαν από την αλγεβρική έκφραση.
2. Παίρνουμε τους μεγιστόρους από τον πίνακα αλήθειας.

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
F &= xy + x'z = (xy + x')(xy + z) = (x + x')(y + x')(x + z)(y + z) \\
&= (x' + y)(x + z)(y + z) = (x' + y + zz')(x + z + yy')(y + z + xx') \\
&= (x' + y + z)(x' + y + z')(x + y + z)(x + y' + z)(x + y + z)(x' + y + z) \\
&= (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z') = \\
&= M_0 M_2 M_4 M_5 = \Pi(0, 2, 4, 5)
\end{aligned}
$$

Μετατροπή μεταξύ Κανονικών Μορφών

Βήματα μετατροπής από άθροισμα ελαχιστόρων σε γινόμενο μεγιστόρων:

1. Εκφράζω την F σε άθροισμα ελαχιστόρων. Έστω $F(A,B,C)=\Sigma(1,4,5,6,7)$.
2. Βρίσκω την $F'=\Sigma(0,2,3)=m_0+m_2+m_3$.
3. Βρίσκω την F'' ως εξής: $F''=(m_0+m_2+m_3)'= m_0'm_2'm_3'=M_0M_2M_3=\Pi(0,2,3)$

Πίνακας Αληθείας για την $F = xy + x'z$

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Μεγιστόροι

Ελαχιστόροι

$F(x,y,z)=\Sigma(1,3,6,7)$

$F(x,y,z)=\Pi(0,2,4,5)$

Εναλλάσσουμε τα σύμβολα Σ και Π και χρησιμοποιούμε εκείνους τους δείκτες που λείπουν από την αρχική μορφή.

Πρότυπες Μορφές

Πρότυπες μορφές: Οι συναρτήσεις όπου οι όροι μπορούν να περιέχουν λιγότερους από n παράγοντες.

Άθροισμα γινομένων: μια έκφραση Boole που περιέχει όρους ΚΑΙ που ονομάζονται γινόμενα με έναν ή περισσότερους παράγοντες ο κάθε ένας. «Άθροισμα» λέμε το λογικό Η όλων αυτών των γινομένων.

Παράδειγμα:

$$F_1 = y' + xy + x'yz'$$

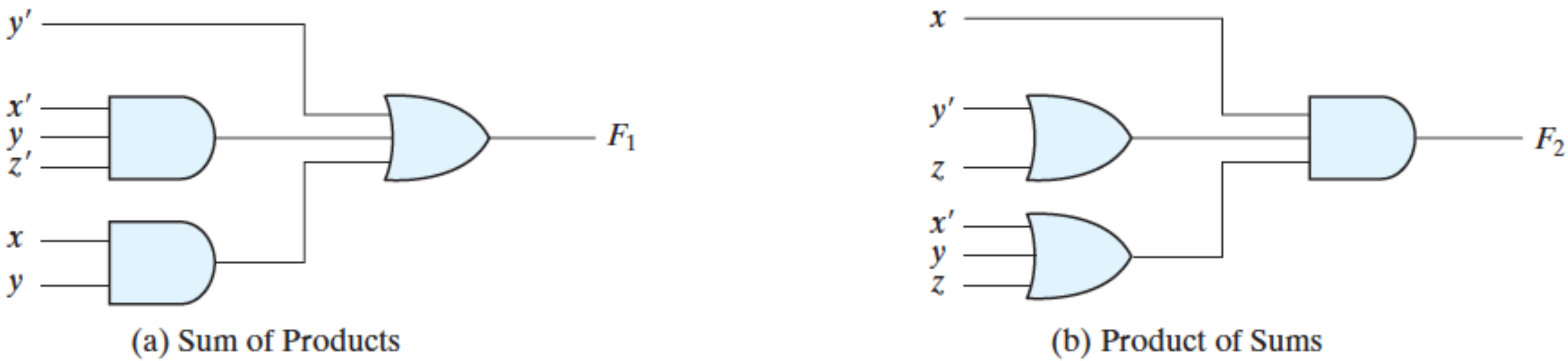
Γινόμενο Αθροισμάτων: μια έκφραση Boole που περιέχει όρους Η που ονομάζονται αθροίσματα. Κάθε άθροισμα περιέχει έναν ή περισσότερους παράγοντες. Το γινόμενο αποτελεί το λογικό ΚΑΙ των αθροισμάτων.

Παράδειγμα:

$$F_2 = x(y' + z)(x' + y + z' + w)$$

Υλοποίηση Δύο Επιπέδων

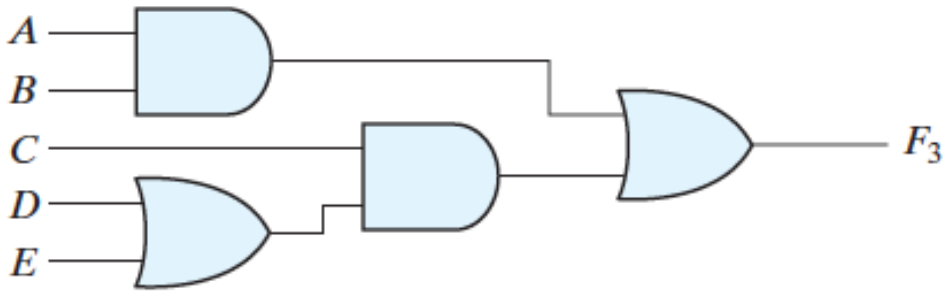
Οι συναρτήσεις σε πρότυπη μορφή υλοποιούνται σε δύο επίπεδα λογικής



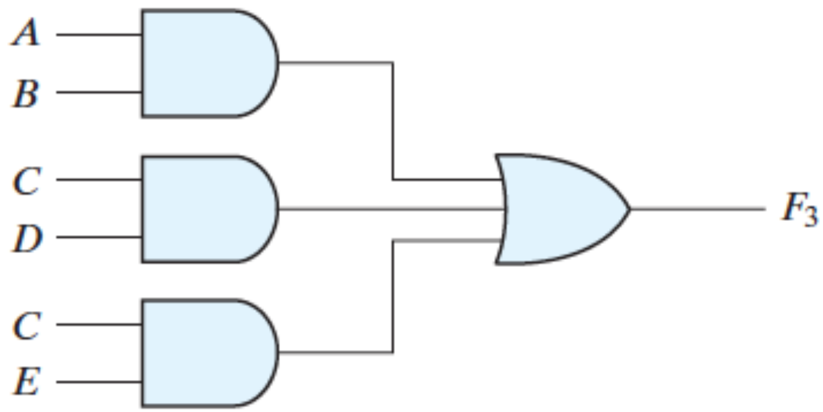
Η απλοποίηση κυκλωμάτων δύο επιπέδων αποτελεί έναν από τους βασικότερους στόχους της Ψηφιακής Σχεδίασης

Υλοποίηση Πολλαπλών Επιπέδων

Η διεπίπεδη υλοποίηση δεν είναι η φθηνότερη καθώς δεν εκμεταλλεύεται κοινούς παράγοντες



(a) $AB + C(D + E)$



(b) $AB + CD + CE$

Το κόστος ενός κυκλώματος σε υλικό εξαρτάται από τον αριθμό των πυλών και τον αριθμό των εισόδων τους.

Άλλες Λογικές Πράξεις

Για μία συνάρτηση n μεταβλητών έχουμε 2^n πιθανούς συνδυασμούς και άρα 2^n πιθανές εξόδους 0 ή 1. Άρα έχουμε 2^{2n} πιθανούς συνδυασμούς των εξόδων και ισάριθμες πιθανές συναρτήσεις.

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Σύμβολο τελεστή			$\cdot$	$/$		$/$		$\oplus$	$+$	$\downarrow$	$\odot$	$'$	$\subset$	$'$	$\supset$	$\uparrow$	

Κατηγορίες Συναρτήσεων:

1. Δυο σταθερές 0, 1.
2. Τέσσερις unary συμπληρώματος/μεταφοράς.
3. Δέκα συναρτήσεις με δυαδικούς τελεστές.

Άλλες Λογικές Πράξεις

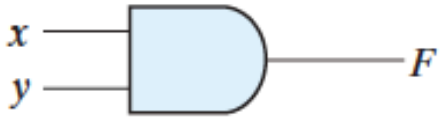
Εκφράσεις Boole για τις 16 συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Συναρτήσεις Boole	Σύμβολο τελεστή	Όνομα	Σχόλια
$F_0 = 0$		Ουδέτερη	Δυαδική σταθερά 0
$F_1 = xy$	$x \cdot y$	ΚΑΙ (AND)	x ΚΑΙ y
$F_2 = xy'$	x/y	Αποτροπή	x αλλά όχι y
$F_3 = x$		Μεταφορά	x
$F_4 = x'y$	y/x	Αποτροπή	y αλλά όχι x
$F_5 = y$		Μεταφορά	y
$F_6 = xy' + x'y$	$x \oplus y$	Αποκλειστικό- Ή	x Ή y αλλά όχι και τα δύο
$F_7 = x + y$	$x + y$	Ή (OR)	x Ή y
$F_8 = (x + y)'$	$x \downarrow y$	ΟΥΤΕ (NOR)	ΟΧΙ- Ή
$F_9 = xy + x'y'$	$x \odot y$	Ισοδυναμία*	x ίσον y
$F_{10} = y'$	y'	Συμπλήρωμα	ΟΧΙ y
$F_{11} = x + y'$	$x \subset y$	Συνεπαγωγή	Αν y τότε x
$F_{12} = x'$	x'	Συμπλήρωμα	ΟΧΙ x
$F_{13} = x' + y$	$x \supset y$	Συνεπαγωγή	Αν x τότε y
$F_{14} = (xy)'$	$x \uparrow y$	NAND (ΟΧΙ-ΚΑΙ)	ΟΧΙ-ΚΑΙ
$F_{15} = 1$		Ταυτότητα	Δυαδική σταθερά 1

* Η ισοδυναμία ("equivalence") λέγεται επίσης και "ισότητα" ("equality"), "σύμπτωση" ("coincidence") ή "αποκλειστικό-ΟΥΤΕ" ("exclusive NOR").

Ψηφιακές Λογικές Πύλες

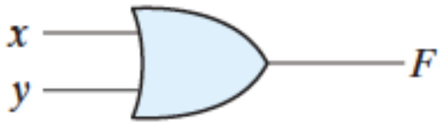
AND



$F = x \cdot y$

x	y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

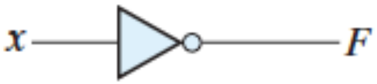
OR



$F = x + y$

x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Inverter



$F = x'$

x	F
0	1
1	0

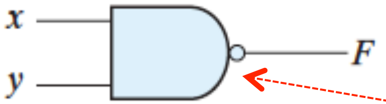
Buffer

$F = x$

x	F
0	0
1	1

Ψηφιακές Λογικές Πύλες

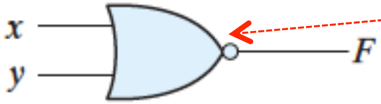
NAND



$F = (xy)'$

x	y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

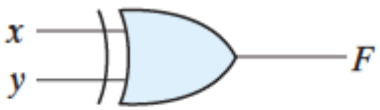
NOR



$F = (x + y)'$

x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

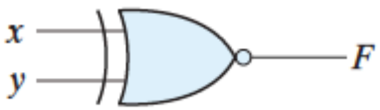
Exclusive-OR (XOR)



$$F = xy' + x'y = x \oplus y$$

x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exclusive-NOR or equivalence



$$F = xy + x'y' = (x \oplus y)'$$

x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Η φυσσαλίδα δείχνει συμπλήρωση

Επέκταση σε περισσότερες Εισόδους

Οι πύλες εκτός από τους αντιστροφείς και τους απομονωτές μπορούν να επεκταθούν σε περισσότερες από δύο εισόδους. Βασική προϋπόθεση η λογική πράξη να είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

Οι πράξεις ΚΑΙ και Η είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές, αφού

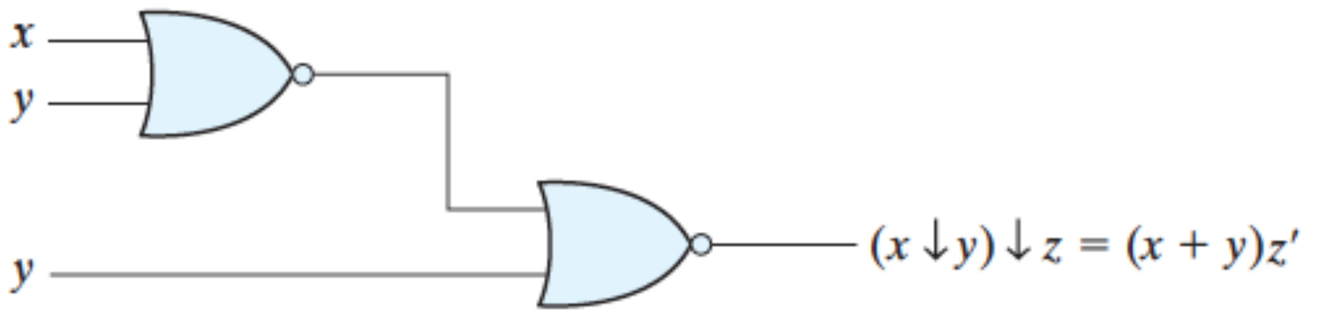
$$x + y = y + x$$

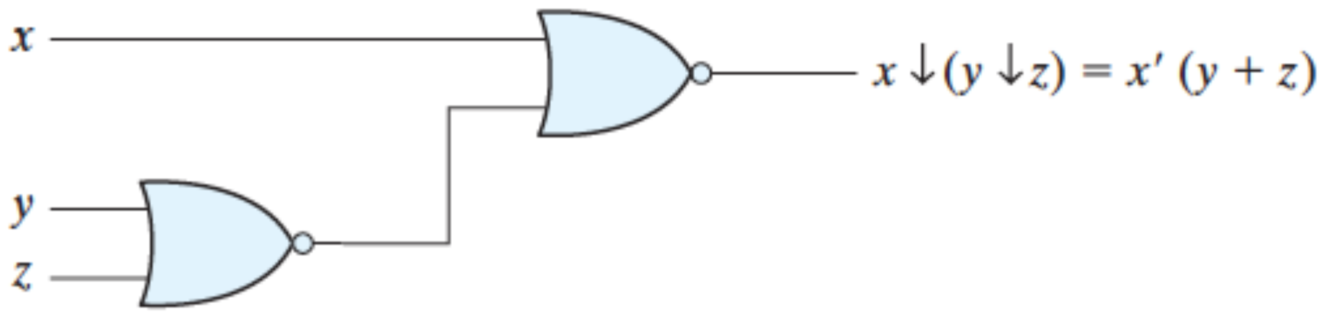
$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$$

επομένως οι πύλες ΚΑΙ και Η μπορούν να επεκταθούν σε περισσότερες από δύο εισόδους.

Επέκταση σε περισσότερες Εισόδους

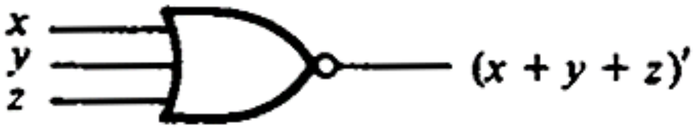
Οι πράξεις ΌΧΙ-ΚΑΙ και ΟΥΤΕ είναι αντιμεταθετικές αλλά όχι προσεταιριστικές.





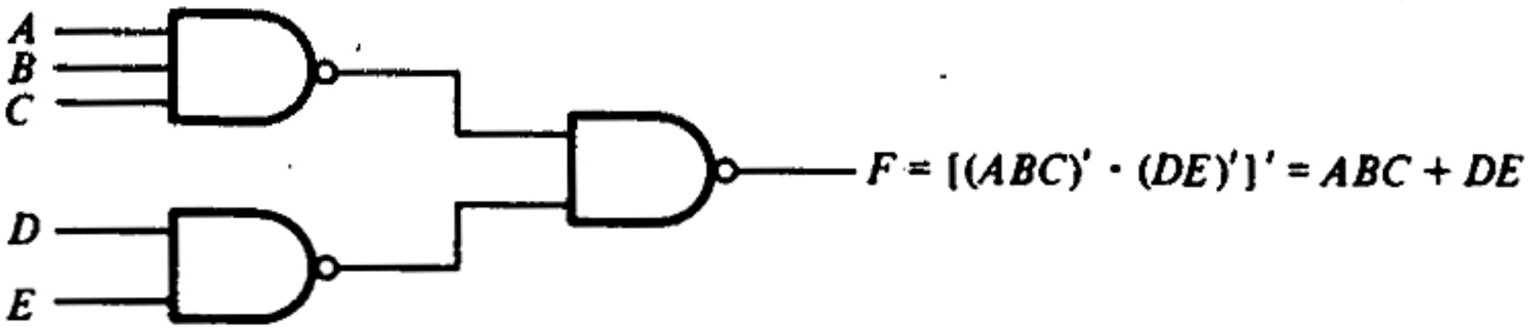
Επέκταση σε περισσότερες Εισόδους

Για αυτό τις ορίζουμε ως: $x\downarrow y\downarrow z=(x+y+z)'$, $x\uparrow y\uparrow z=(xyz)'$



(α) Πύλη ΟΥΤΕ (NOR)
τριών εισόδων

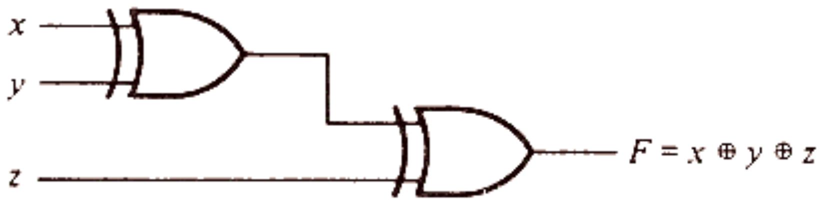
(β) Πύλη ΟΧΙ-ΚΑΙ (NAND)
τριών εισόδων



(γ) Πύλες ΟΧΙ-ΚΑΙ σε σειρά

Επέκταση σε περισσότερες Εισόδους

Οι πράξεις Αποκλειστικό-Η και ισοδυναμίας είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές.



(α) Χρησιμοποιώντας πύλες δύο-εισόδων

(β) Μία πύλη τριών εισόδων

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

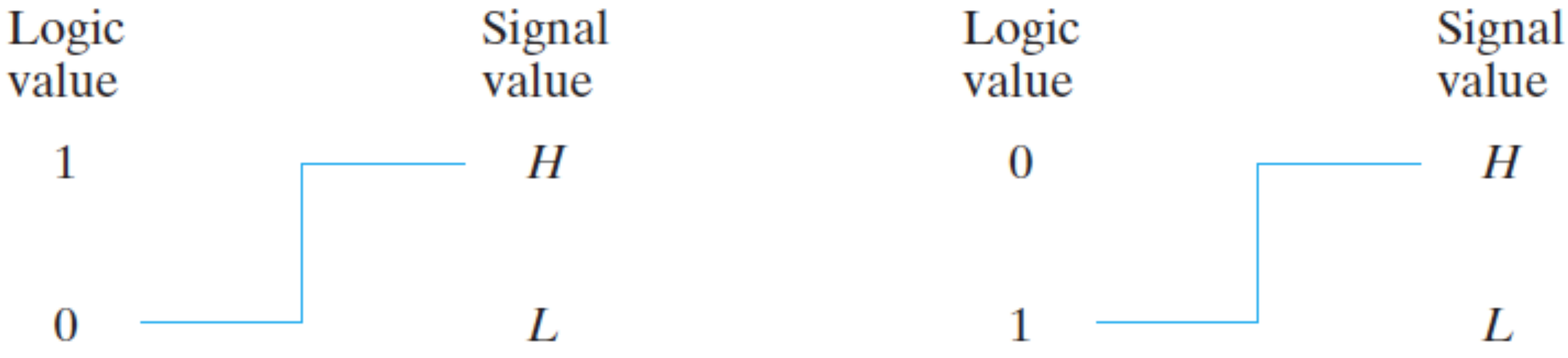
(γ) Πίνακας αλήθειας

Η συνάρτηση Αποκλειστικό-Η είναι περιττή συνάρτηση, δηλαδή ισούται με 1 εάν οι μεταβλητές εισόδου έχουν περιττό αριθμό άσσων.

Η συνάρτηση ισοδυναμίας είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή ισούται με 1 εάν οι μεταβλητές εισόδου έχουν άρτιο αριθμό άσσων.

Θετική – Αρνητική Λογική

Η αναπαράσταση των λογικών τιμών χρησιμοποιώντας ηλεκτρικά δυναμικά καθορίζει τον τύπο της λογικής



(a) Positive logic (b) Negative logic

Ολοκληρωμένα Κυκλώματα

ICs $\left\{ \begin{array}{l} \text{Συλλογή από πύλες διασυνδεδεμένες στο κύκλωμα} \\ \text{Κεραμικό ή πλαστικό περίβλημα} \\ \text{Ακροδέκτες (pins)} \end{array} \right.$

Επίπεδα Ολοκλήρωσης

Μικρής Κλίμακας	**SSI**:	10 πύλες / chip
Μεσαίας Κλίμακας	**MSI**:	10-1000 πύλες / chip
Μεγάλης Κλίμακας	**LSI**:	μερικές χιλιάδες πύλες / chip
Πολύ Μεγάλης Κλίμακας	**VLSI**:	>1.000.000 πύλες / chip

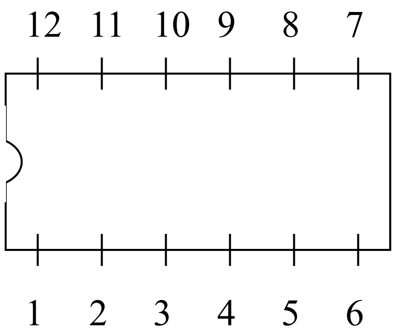
Ολοκληρωμένα Κυκλώματα

Οικογένειες ICs

- TTL Transistor-Transistor Logic: Πρότυπη Λογική Οικογ.
- ECL Emitter-Coupled Logic: Υψηλή Ταχύτητα Λειτουργίας.
- MOS Metal Oxide Semiconductor: Υψηλή Πυκνότητα.
- CMOS Complementary MOS: Χαμηλή Κατανάλωση.

Χαρακτηριστικά

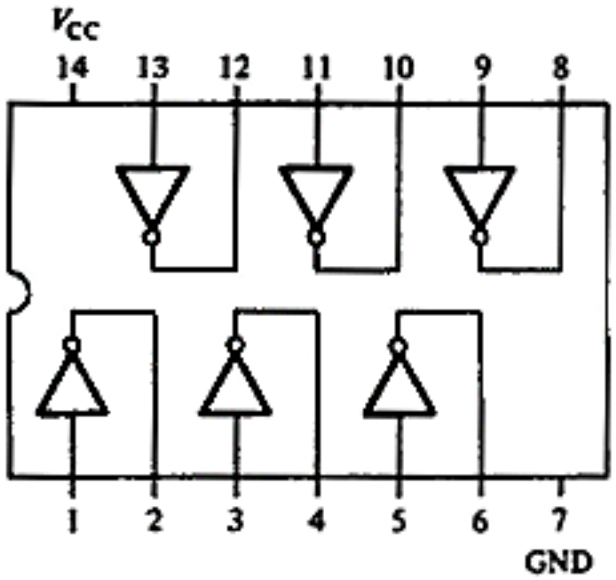
- Ικανότητα Οδήγησης
- Κατανάλωση Ισχύος
- Καθυστέρηση Διάδοσης
- Περιθώριο Θορύβου



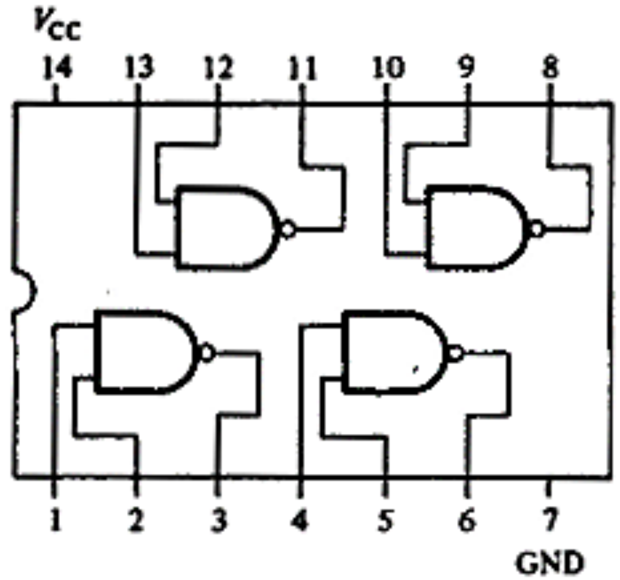
Ολοκληρωμένα Κυκλώματα

TTL 5400: Πλατιά ζώνη θερμοκρασιών (Στρατιωτική Χρήση)

TTL 7400: Βιομηχανικές εφαρμογές



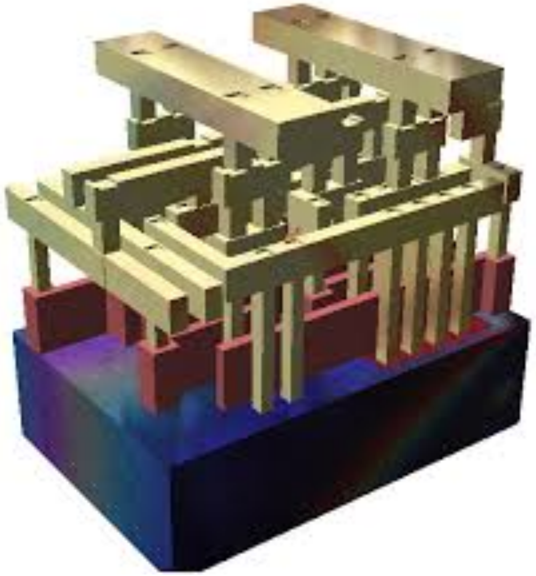
7404: έξι αντιστροφείς



7400: τέσσερις πύλες ΟΧΙ-ΚΑΙ 2-εισόδων

Σχεδίαση με χρήση Η/Υ

Τα ολοκληρωμένα κυκλώματα κατασκευάζονται με οπτική προβολή σχεδίου σε πυρίτιο και χημική επεξεργασία για απομόνωση συγκεκριμένων περιοχών.



Επίτευξη μεγεθών κάτω των 100nm

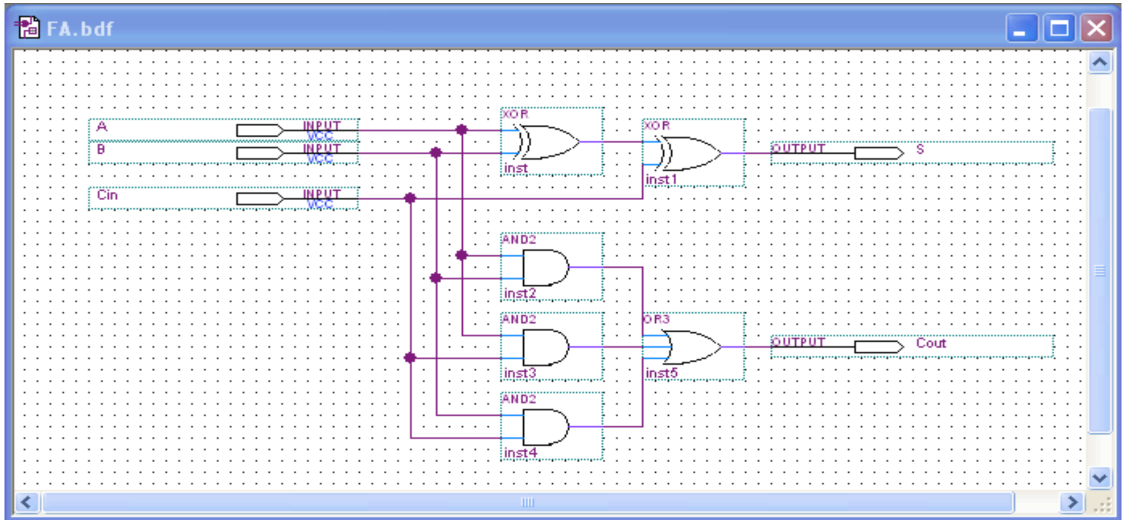
↓

Εκατομμύρια πύλες χωρούν σε μία επιφάνεια 1 mm^2

↓

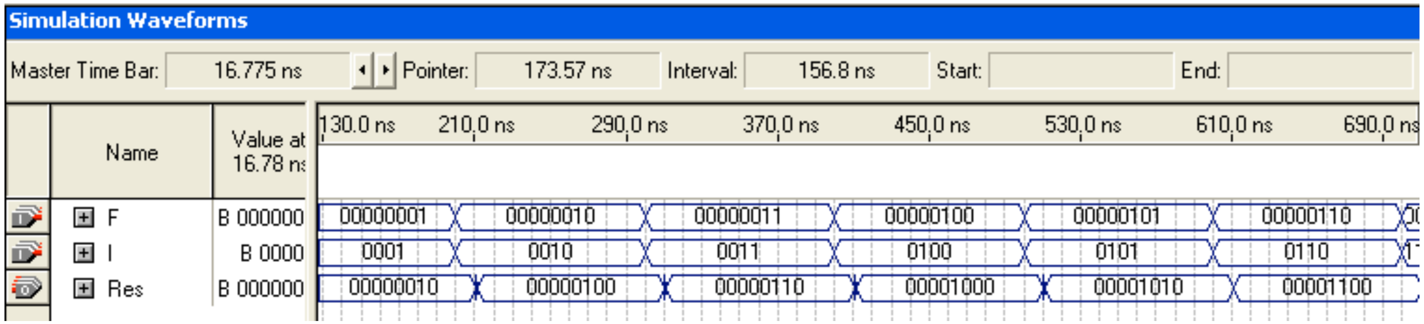
Αυτοματοποίηση της σχεδίασης: από την εισαγωγή της σχεδίασης μέχρι την κατασκευή σε πυρίτιο ή σε FPGAs

Σχεδίαση με σχηματικό



Σημαντική επιτάχυνση σχεδίασης και επαλήθευσης

Για μεγάλες σχεδιάσεις δεν είναι αρκετή



Σχεδίαση με HDL

```
library ieee;
use ieee.std_logic_1164.all;

ENTITY MUX16_1 is port(
        D : in std_logic_vector (0 to 15);
        SEL:in  std_logic_vector (3 downto 0);
        F: out std_logic);
END MUX16_1;

ARCHITECTURE RTL OF MUX16_1 IS
COMPONENT MUX4_1
    port(
        D : in std_logic_vector (0 to 3);
        SEL:in  std_logic_vector (1 downto 0);
        Y: out std_logic);
END COMPONENT;


    SIGNAL Y : STD_LOGIC_VECTOR (3 downto 0);
BEGIN

u0: MUX4_1 port map(D=>D(0 to 3), SEL=>Sel(1 downto 0), Y=>Y(0));
u1: MUX4_1 port map(D=>D(4 to 7), SEL=>Sel(1 downto 0), Y=>Y(1));
u2: MUX4_1 port map(D=>D(8 to 11), SEL=>Sel(1 downto 0), Y=>Y(2));
u3: MUX4_1 port map(D=>D(12 to 15), SEL=>Sel(1 downto 0), Y=>Y(3));
u4: MUX4_1 port map(D=>Y, SEL=>Sel(3 downto 2), Y=>F);

END RTL;
```

Ο σχεδιαστής περιγράφει, ο Η/Υ σχεδιάζει

Δυνατότητα αξιόπιστης σχεδίασης χιλιάδων πυλών σε λίγα δευτερόλεπτα

VHDL Verilog