Το Πρόβλημα Χρωματισμού Μονοπατιών σε Δέντρο

Χ. Νομικός, Ε. Ζάχος, Ε. Μάρκου

Περίληψη

Θα παρουσιάσουμε μερικά αποτελέσματα για το πρόβλημα του χρωματισμού μονοπατιών σε δέντρο με ελάχιστο αριθμό χρωμάτων, έτσι ώστε μονοπάτια που περνούν από την ίδια ακμή να έχουν διαφορετικά χρώματα. Αποδεικνύουμε ότι το παραπάνω πρόβλημα είναι NP-complete και παρουσιάζουμε έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο ο οποίος χρωματίζει τα μονοπάτια σε πολυωνυμικό χρόνο χρησιμοποιώντας το πολύ $\frac{3OPT}{2}$ χρώματα.

1 Εισαγωγή

Το κλασικό πρόβλημα χρωματισμού κόμβων ενός γράφου συνίσταται στην ανάθεση χρωμάτων, έτσι ώστε δύο γειτονικοί κόμβοι να έχουν διαφορετικά χρώματα. Στο πρόβλημα Χρωματισμού Μονοπατιών (Path Coloring problem, PC), δίνεται ένας μη-κατευθυνόμενος γράφος $G(V, E)$ και ένα σύνολο μονοπατιών P. Το ζητούμενο είναι να χρωματίσουμε όλα τα μονοπάτια, χρησιμοποιώντας ελάχιστο αριθμό χρωμάτων έτσι ώστε οποιαδήποτε δύο μονοπάτια που περνούν από την ίδια ακμή να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Το πρόβλημα αυτό το συναντάμε π.χ. στα οπτικά δίκτυα: Δίνεται μία τοπολογία δικτύου και ένα σύνολο διαδρομών που ικανοποιούν κάποια αιτήματα επικοινωνίας. Ο σκοπός είναι να δώσουμε σε κάθε αίτημα μία συχνότητα έτσι ώστε δύο οποιαδήποτε αιτήματα που ικανοποιούνται από δύο διαδρομές οι οποίες περνούν από την ίδια ακμή να έχουν διαφορετικές συχνότητες και ο ολικός αριθμός συχνοτήτων που χρησιμοποιείται να είναι ελάχιστος. Αυτό το πρόβλημα είναι ακριβώς το PC αν σκεφτούμε τις συχνότητες σαν χρώματα.

Το PC είναι NP-complete ακόμα και αν περιοριστούμε σε απλές τοπολογίες γράφων όπως είναι τα δέντρα και οι δακτύλιοι. Για αυτές τις τοπολογίες έχουν προταθεί διάφοροι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι που πετυχαίνουν κάποιο πολλαπλάσιο του αριθμού χρωμάτων της βέλτιστης λύσης (σταθερό προσεγγιστικό παράγοντα) [1, 3, 4]. Ειδικά για την τοπολογία δέντρου το πρόβλημα του χρωματισμού των μονοπατιών ανάγεται στο πρόβλημα χρωματισμού κόμβων μιας ειδικής οικογένειας γράφων [10, 11, 12]. Βέβαια, το πρόβλημα του χρωματισμού των κόμβων ενός γράφου έχει αποδειχτεί [5] ότι γενικά δεν προσεγγίζεται (εκτός φυσικά αν $P = NP$). Όμως οι ιδιότητες που έχουν οι γράφοι της ειδικής οικογένειας γράφων που προκύπτουν από τις επικαλύψεις μονοπατιών σε δέντρα εξασφαλίζουν την ύπαρξη προσεγγιστικού αλγορίθμου. Το πρόβλημα έχει επίσης μελετηθεί και για κατευθυνόμενους γράφους [2].

Εστω $G = (V, E)$, P ένα στιγμιότυπο του προβλήματος. Θα συμβολίζουμε με n το πλήθος των κορυφών του G ($n = |V|$), με m το πλήθος των ακμών του G ($m = |E|$), με p το πλήθος των μονοπατιών ($p = |P|$) και με L το συνολικό μήκος των μονοπατιών. Το γράφημα G υποθέτουμε ότι είναι συνεκτικό, αλλιώς το πρόβλημα μπορεί να λυθεί χωριστά για κάθε συνεκτική συνιστώσα του G (μονοπάτια σε διαφορετικές συνιστώσες δεν επικαλύπτονται και άρα μπορούν να χρωματιστούν ανεξάρτητα) οπότε $m \geq n - 1$.

Η αναπαράσταση του στιγμιότυπου έχει μήκος $\Omega(m+L)$, αφού περιέχει απαρίθμηση των ακμών και των μονοπατιών. Δεν χρειάζεται χωριστή απαρίθμηση των κορυφών διότι οι κορυφές εμφανίζονται στην αναπαράσταση του στιγμιότυπου μόνο εάν είναι άκρα μίας ακμής. Ειδικότερα, για την περίπτωση του δέντρου, μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε μονοπάτι παραθέτοντας μόνο τα άκρα του και συνεπώς το μήκος της εισόδου θα είναι $\Omega(m+p)$.

Φορτίο μιας ακμής του γραφήματος G ονομάζουμε το πλήθος των μονοπατιών που περνούν από αυτή την ακμή. Φορτίο k του στιγμιότυπου ονομάζεται το μέγιστο των φορτίων όλων των ακμών του γραφήματος. Το k είναι ένα κάτω φράγμα για τον αριθμό των χρωμάτων σε οποιονδήποτε χρωματισμό: Υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή από την οποία περνούν k μονοπάτια, τα οποία θα πρέπει να χρωματιστούν υποχρεωτικά με k διαφορετικά χρώματα. Επομένως σε περιπτώσεις προσεγγιστικών αλγορίθμων αν μία λύση χρησιμοποιεί ak χρώματα τότε διαφέρει από τη βέλτιστη το πολύ κατά έναν παράγοντα a.

Το φορτίο k ενός στιγμιότυπου μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο γραμμικό ως προς το μέγεθος της εισόδου. Συνεπώς, χωρίς βλάβη της γενικότητας, στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι το k δίνεται σαν μέρος της εισόδου.

Στο πρόβλημα χρωματισμού μονοπατιών παίρνουμε σαν είσοδο ένα σύνολο μονοπατιών, καθένα από τα οποία περιγράφεται σαν ακολουθία κορυφών. Αν θέλουμε το σύνολο να περιέχει δύο ίδια μονοπάτια, η παραπάνω περιγραφή δεν αρκεί. Σε αυτή τη περίπτωση διακρίνουμε τις δύο ίδιες ακολουθίες κορυφών με ένα δείκτη π.χ. $<1,4>_1, <1,4>_2$.

Στην ανάλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε ένα αποτέλεσμα για ένα άλλο πρόβλημα χρωματισμού. Στο πρόβλημα Χρωματισμού των Ακμών (Edge Coloring problem, EC), ο σκοπός είναι να χρωματίσουμε τις ακμές ενός δεδομένου γράφου G (πιθανώς με πολλαπλές ακμές) χρησιμοποιώντας τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων, έτσι ώστε δύο ακμές που προσπίπτουν στον ίδιο κόμβο να έχουν διαφορετικά χρώματα. Ο ελάχιστος αυτός αριθμός χρωμάτων ονομάζεται χρωματικός δείκτης. Το πρόβλημα αυτό είναι NP-complete [6, 8, 9].

2 Χρωματισμός Μονοπατιών σε Αστέρι

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη του προβλήματος χρωματισμού μονοπατιών σε δέντρα, εξετάζουμε το πρόβλημα σε αστέρια, που αποτελούν ειδική κατηγορία δέντρων. Αστέρι είναι δέντρο όπου ακριβώς μία κορυφή έχει βαθμό $d>1$ (δηλαδή δέντρο με διάμετρο 2).

Θεώρημα. Το πρόβλημα STAR-PC (ακριβέστερα το πρόβλημα απόφασης που αντιστοιχεί) είναι NP-complete.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε [6, 8, 9] ότι δεδομένου ενός γραφήματος με βαθμό d είναι NP-complete πρόβλημα να αποφασίσουμε αν ο χρωματικός του δείκτης είναι d ή $d+1$. Θα ανάγουμε το παραπάνω πρόβλημα στο STAR-PC.

Εστω ένα γράφημα (V,E) με βαθμό d. Θα κατασκευάσουμε ένα γράφημα (V',E'), ένα σύνολο μονοπατιών P και ένα αριθμό c, έτσι ώστε τα μονοπάτια του P να χρωματίζονται με c χρώματα αν και μόνο αν ο χρωματικός δείκτης του (V,E) είναι d.

Το γράφημα (V',E') είναι ένα αστέρι με $|V|+1$ κορυφές. Η κορυφή 0 έχει βαθμό $|V|$. Σε κάθε κορυφή $v_i \in V$ αντιστοιχεί μία ακμή $<0,i> \in E'$. Το σύνολο μονοπατιών είναι $P=\{(i,0,j) | <v_i,v_j> \in E\}$ δηλαδή για κάθε ακμή e του αρχικού γραφήματος υπάρχει ένα μονοπάτι στο P που περνάει από τις δύο ακμές του αστεριού που αντιστοιχούν στα άκρα της e. Τέλος επιλέγουμε $c=d$.

Εστω ότι μπορούμε να χρωματίσουμε τα μονοπάτια του P με d χρώματα. Τότε μπορούμε να χρωματίσουμε τις ακμές του E με d χρώματα, δίνοντας σε κάθε ακμή το χρώμα του αντίστοιχου μονοπατιού. Δύο μονοπάτια χρησιμοποιούν την ίδια ακμή αν και μόνο αν οι αντίστοιχες ακμές στο αρχικό γράφημα προσπίπτουν σε μία κοινή κορυφή. Αρα αν δύο μονοπάτια σε ένα χρωματισμό έχουν το ίδιο χρώμα, οι αντίστοιχες ακμές μπορούν επίσης να έχουν το ίδιο χρώμα.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την παρατήρηση ότι η κατασκευή των (V', E'), P, c γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο. ∎

Πόρισμα. Το πρόβλημα TREE-PC είναι NP-complete.

Το παραπάνω θεώρημα μας οδηγεί στη αναζήτηση προσεγγιστικών αλγορίθμων για το STAR-PC.

Για την προσεγγιστική επίλυση του STAR-PC χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του σχήματος 1.

Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί την αντίστροφη αναγωγή από αυτή του θεωρήματος. Η μόνη διαφορά είναι ότι η ύπαρξη πολλών ίδιων μονοπατιών μπορεί να οδηγήσει σε κατασκευή πολυγραφήματος. η αναγωγή χρησιμοποιείται μόνο για το χρωματισμό μονοπατιών μήκους 2. Τα μονοπάτια μήκους 1 χρωματίζονται στη συνέχεια.

Input: $\mathsf{m, P, k}$
$\mathsf{P_1}$:= { Paths in P with length 1 }
$\mathsf{P_2}$:= { Paths in P with length 2 }

$\mathsf{V} := \{\mathsf{v_1, v_2, ..., v_m}\}$
$\mathsf{E} := \{< \mathsf{v_i, v_j} >_\kappa |(\mathsf{i}, 0, \mathsf{j})_\kappa \in \mathsf{P_2}\}$

Color multigraph (V, E)
C := set of colors used for (V, E)
If $\mathsf{k} > |\mathsf{C}|$ then add $\mathsf{k} - |\mathsf{C}|$ new colors to C

For every edge i of the star
        $\mathsf{C_i} := \mathsf{C}$

For every path $\mathsf{p} = (\mathsf{i}, 0, \mathsf{j})_\kappa \in \mathsf{P_2}$
    Begin
        Color p with the color c of edge $< \mathsf{i, j} >_\kappa \in \mathsf{E}$
        Delete c from $\mathsf{C_i}$ and $\mathsf{C_j}$
    End
For every path $\mathsf{p} = (0, \mathsf{i})_\kappa \in \mathsf{P_1}$
    Begin
        Color p with a color $\mathsf{c} \in \mathsf{C_i}$
        Delete c from $\mathsf{C_i}$
    End

Σχήμα 1: Προσεγγιστικός αλγόριθμος για το STAR-PC

Θεώρημα. Ο παραπάνω αλγόριθμος λύνει προσεγγιστικά το πρόβλημα STAR-PC με παράγοντα προσέγγισης ίσο με τον παράγοντα προσέγγισης του αλγορίθμου που χρησιμοποιούμε για το χρωματισμό των ακμών του πολυγραφήματος και έχει πολυπλοκότητα $O(p^2 logplogk)$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι ο παράγοντας προσέγγισης είναι ίσος με τον παράγοντα προσέγγισης του αλγορίθμου για τον χρωματισμό ακμών πολυγραφήματος. Από την κατασκευή του πολυγραφήματος προκύπτει ότι δύο μονοπάτια μήκους 2 στο P επικαλύπτονται αν και μόνο αν οι αντίστοιχες ακμές του πολυγραφήματος (V, E) έχουν κοινή κορυφή. Συνεπώς δύο μονοπάτια μήκους 2 που επικαλύπτονται δεν παίρνουν ποτέ το ίδιο χρώμα. Επίσης τα μονοπάτια μήκους 1 χρωματίζονται με χρώματα που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί από κανένα άλλο μονοπάτι που περνάει από την ίδια ακμή.

Εστω ότι ο αλγόριθμος για χρωματισμό πολυγραφήματος λύνει το πρόβλημα με παράγοντα προσέγγισης . Εστω OPT και OPT_2 ο ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτείται για χρωματισμό των μονοπατιών του P και του P_2 αντίστοιχα (προφανώς $OPT \geq OPT_2$). Θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί το πολύ OPT χρώματα. Αν $k \geq |C|$ τότε ο αλγόριθμος χρωματίζει όλα τα μονοπάτια με k χρώματα. Σ' αυτή την περίπτωση η λύση είναι βέλτιστη αφού $OPT \geq k$. Για την άλλη περίπτωση, δηλαδή αν $|C| > k$: Το OPT_2 είναι ο χρωματικός δείκτης του (V, E) επειδή από ένα χρωματισμό ακμών του (V, E) παίρνουμε ένα χρωματισμό των μονοπατιών του P με ίδιο αριθμό χρωμάτων και αντίστροφα. Αρα $|C| \leq OPT_2 \leq aOPT$.

Τώρα θα δείξουμε ότι η πολυπλοκότητα είναι $O(p^2 logplogk)$.

Ο χωρισμός του P σε P_1 και P_2, η κατασκευή του (V, E) και η ανάθεση των χρωμάτων στα μονοπάτια θέλει χρόνο $O(p)$. Η αρχικοποίηση των C_i θέλει χρόνο $O(mk)$. Ο προσθετέος km στη χειρότερη περίπτωση μπορεί να γίνει (p^2) όπως για παράδειγμα αν θέλουμε να χρωματίσουμε το σύνολο μονοπατιών $P = \{(1,0,2),(1,0,3),...(1,0,n),(0,1),(0,2),...(0,n)\}$ στο αστέρι με $n+1$ κορυφές όπου έχουμε $m = n, k = n, p = 2n-1$. Χρησιμοποιούμε έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο για το χρωματισμό των ακμών ενός πολυγραφήματος (πρβλ [7, 13]). Αν ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος είναι OPT, τότε ο αλγόριθμος χρωματίζει τις ακμές με $\lceil \frac{3OPT}{2} \rceil$ χρώματα. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(|E|^2 log|E|log|d|)$. Συνεπώς η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου για το STAR-PC είναι $O(p + km + p^2 logplogk) = O(p^2 logplogk)$. ∎

3 Χρωματισμός μονοπατιών σε Δέντρο

Οπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα το πρόβλημα TREE-PC είναι υπολογιστικά δύσκολο. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο για το TREE-PC που στηρίζεται στον προσεγγιστικό αλγόριθμο για το STAR-PC.

Ονομάζουμε εσωτερικές κορυφές ενός δέντρου τις κορυφές με βαθμό > 1. Ενα δέντρο είναι αστέρι αν και μόνο αν έχει μόνο μία εσωτερική κορυφή.

Παρατήρηση. Εάν ένα δέντρο έχει περισσότερες από μία εσωτερικές κορυφές τότε κάθε εσωτερική κορυφή v έχει κάποια γειτονική εσωτερική κορυφή u. Και μάλιστα όλες οι εσωτερικές κορυφές αποτελούν υποδέντρο του αρχικού δέντρου.

Δίνουμε πρώτα ορισμένες γενικές ιδέες για το χρωματισμό των μονοπατιών. Θέλουμε να χρωματίσουμε ένα σύνολο μονοπατιών P σε ένα δέντρο $T = (V, E)$ με περισσότερες από μία εσωτερικές κορυφές (όχι αστέρι). Εστω δύο γειτονικές εσωτερικές κορυφές v_1, v_2. Αν αφαιρέσουμε την ακμή $< v_1, v_2 >$, το χωρίζεται σε δύο συνεκτικές συνιστώσες (δέντρα) (V_1, E_1) και (V_2, E_2), με $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$. Εστω $T_1 = ((V_1 \cup \{v_2\}, E_1 \cup \{< v_1, v_2 >\}), T_2 = ((V_2 \cup \{v_1\}, E_2 \cup \{< v_1, v_2 >\})$ τα δέντρα που προκύπτουν αν στις συνεκτικές συνιστώσες του $T- < v_1, v_2 >$ προσθέσουμε την ακμή $< v_1, v_2 >$ (και φυσικά την κορυφή που λείπει).

Για κάθε μονοπάτι του P στο δέντρο θεωρούμε το αντίστοιχο υπομονοπάτι περιορισμένο στο δέντρο T_1. Ονομάζουμε P_1 το σύνολο αυτών των υπομονοπατιών και P_2 το αντίστοιχο σύνολο υπομονοπατιών για το T_2.

Εστω ότι έχουν χρωματιστεί τα μονοπάτια στο P_1 και στο P_2. Οι χρωματισμοί μπορούν να συνδυαστούν ώστε να δώσουν ένα χρωματισμό για τα μονοπάτια του P. Το μόνο πρόβλημα που μπορεί να εμφανιστεί λόγω των δύο επιμέρους χρωματισμών είναι ότι ένα μονοπάτι που περνά από την ακμή $< v_1, v_2 >$ είναι δυνατό να έχει δύο διαφορετικά χρώματα. Όμως ο χρωματισμός είναι στην πραγματικότητα απλώς μια διαμέριση του P σε σύνολα μονοπατιών και το ποιο συγκεκριμένο χρώμα θα χρησιμοποιηθεί για κάθε σύνολο είναι χωρίς σημασία. Μπορούμε να αγνοήσουμε την ανάθεση χρωμάτων στα μονοπάτια του T_2. Κρατώντας μόνο τη διαμέριση σε σύνολα μη επικαλυπτόμενων μονοπατιών κάνουμε μια μετάθεση των χρωμάτων του T_2, έτσι ώστε τα μονοπάτια του T που περνούν από την $< v_1, v_2 >$ να χρωματιστούν μονοσήμαντα.

Με βάση αυτήν την ιδέα σχεδιάζουμε τον αλγόριθμο του σχήματος 2. Το δέντρο T_1 αρχικά είναι αστέρι, και σε κάθε βήμα οι εσωτερικές κορυφές του αυξάνονται κατά μία. Το T_2 σε κάθε βήμα είναι ένα γειτονικό στο T_1 αστέρι η κεντρική κορυφή του οποίου ενώνεται με κάποια κορυφή του T_1. Το T_1 που χρησιμοποιείται σε ένα βήμα είναι η 'ένωση' των T_1 και T_2 του προηγούμενου βήματος. Ο αλγόριθμος σταματάει όταν το T_1 γίνει ίσο με το T. Τα μονοπάτια που περνούν από το T_1 έχουν αποκτήσει το τελικό τους χρώμα. Τα μονοπάτια που περνούν από το T_2 χρωματίζονται με τον αλγόριθμο για το STAR-PC με ένα 'τοπικό' χρώμα και στη συνέχεια με μετάθεση των χρωμάτων αποκτούν το τελικό τους χρώμα.

Τεχνική περιγραφή:

Αρχικά για κάθε κορυφή v φτιάχνεται μία λίστα με όλες τις γειτονικές κορυφές και για κάθε εσωτερική κορυφή μία λίστα με όλα τα μονοπάτια που περνούν από αυτή την κορυφή. Για κάθε μονοπάτι κρατάμε την προηγούμενη και την επόμενη κορυφή της v στο μονοπάτι (ή nil αν η v είναι άκρο του μονοπατιού). Επίσης υπολογίζεται ο βαθμός κάθε κορυφής. Οι δύο λίστες περιέχουν όλες τις πληροφορίες που χρειάζονται για το χρωματισμό των μονοπατιών στο αστέρι με κέντρο την κορυφή v.

Το δέντρο T_1 επεκτείνεται με αναζήτηση κατά πλάτος, με τη βοήθεια της ουράς Q και του πίνακα F. Η κατασκευή του στιγμιότυπου του STAR-PC μπορεί να γίνει πολύ εύκολα με τη βοήθεια των στοιχείων που έχουμε κρατήσει. Ο χρωματισμός του αστεριού γίνεται με τον αλγόριθμο του σχήματος 1.

Τέλος η μετάθεση χρωμάτων γίνεται με τον αλγόριθμο του σχήματος 3. Για κάθε χρώμα c που έχει χρησιμοποιηθεί στο αστέρι με κέντρο την κορυφή v φτιάχνουμε μία λίστα με όλα τα μονοπάτια που έχουν χρώμα c. Σε κάθε λίστα υπάρχει το πολύ ένα μονοπάτι που έχει ήδη χρωματιστεί, καθώς κάθε τέτοιο μονοπάτι περνάει από την ακμή που ενώνει την v με το ήδη χρωματισμένο υποδέντρο. Εξετάζουμε τις λίστες μία προς μία. Αν η λίστα δεν περιέχει μονοπάτι που έχει ήδη χρωματιστεί ή αν το τοπικό χρώμα συμφωνεί με το χρώμα του χρωματισμένου μονοπατιού τότε δεν αλλάζουμε τίποτα. Σε αντίθετη περίπτωση υπάρχουν τρεις εκδοχές.

i) Αν το χρωματισμένο μονοπάτι έχει χρώμα που έχει ανατεθεί σε λίστα που έχουμε εξετάσει, τότε εναλλάσσουμε τα χρώματα στις δύο λίστες. Σ' αυτή την περίπτωση η δεύτερη λίστα δεν περιέχει κανένα χρωματισμένο μονοπάτι.

ii) Αν το χρωματισμένο μονοπάτι έχει χρώμα που έχει ανατεθεί σε λίστα που δεν έχουμε εξετάσει εναλλάσσουμε τα χρώματα στις δύο λίστες και συνεχίζουμε εξετάζοντας τη δεύτερη λίστα.

iii) Αν το χρωματισμένο μονοπάτι έχει χρώμα που δεν έχει χρησιμοποιηθεί τοπικά τότε χρωματίζουμε όλα τα μονοπάτια της λίστας με το χρώμα του.

Με την παραπάνω διαδικασία ένα τοπικό χρώμα που ταυτίζεται με το μόνιμο δεν αλλάζει. Επειδή κοιτάμε όλες τις λίστες στο τέλος της διαδικασίας όλα τα τοπικά χρώματα συμφωνούν με τα μόνιμα χρώματα.

```
Input V, E, P, k

For every vertex v ∈ V
      Begin
            A_v := The list of vertices that are adjacent to v
            D_v := Degree of v
            S_v := The list of paths passing through v
            F_v := false
      End

v := 1
While D_v < 2 do
          Increase v
Initialize queue Q with vertex v
F(v) := true

While queue Q is not empty do
      Begin
            v := next vertex in queue
            If D_v > 1 then
                 Begin
                       For every vertex u in list A_v
                             If F(u) = false then
                                  Begin
                                        Insert u in list Q
                                        F(u) := true
                                  End
                       Construct the star instance with center v from A_v, S_v
                       Color every path i in star with a color Local(i) ∈ {1, 2, ...}
                       Fix colors Local(i) to agree with Color(i)
                 End
      End
```

Σχήμα 2: Προσεγγιστικός αλγόριθμος χρωματισμού δέντρου

```
Input P, Color, Local, X, S_v

For every color c from 1 to X do
      R_c := nil
For every triple (i, w, z) in S_v
      If Color(i) ≠ nil then
           Insert path i in the begining of list R_c
      Else
           Insert path i in the end of list R_c
c := 1
While c <= X do
      Begin
            i := the path in the begining of list R_c
            If color(i) = nil or color(i) = c
                     Increase c
            Else if color(i) ≤ X
                 Begin
                     Swap R_c and R_color(i)
                     If color(i) < c then
                          Increase c
                 End
            Else
                 Begin
                     For every path j in list R_c
                           Color(j) := Color(i)
                     S_c := nil
                     Increase c
                 End
      End
For every c from 1 to
      If S_c ≠ nil then
           Begin
                 i := the path in the begining of list R_c
                 For every path j in list R_c
                          Color(j) := Color(i)
           End
```

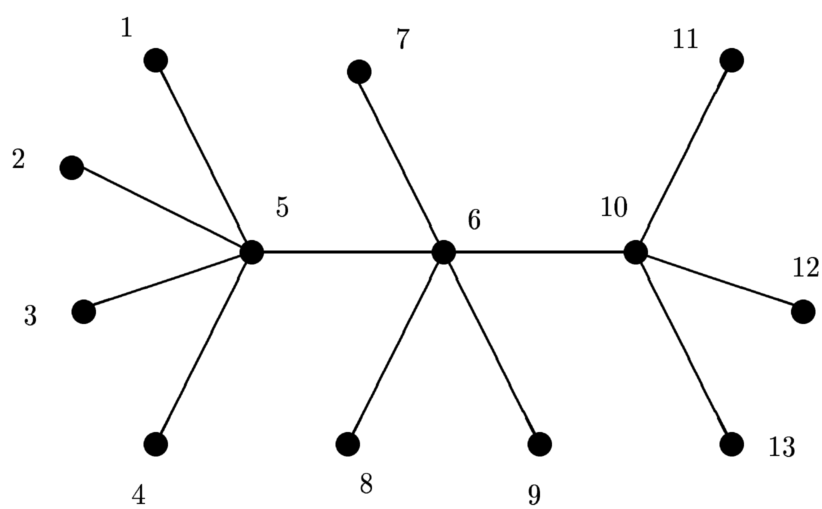
Σχήμα 3: Αλγόριθμος μετάθεσης χρωμάτων

Θεώρημα. Ο αλγόριθμος του σχήματος χρωματίζει τα μονοπάτια σε ένα δέντρο έτσι ώστε μονοπάτια που χρησιμοποιούν την ίδια ακμή να έχουν διαφορετικά χρώματα. Ο παράγοντας προσέγγισης είναι ίσος με τον παράγοντα προσέγγισης του αλγορίθμου STAR-PC που χρησιμοποιούμε. Έχει πολυπλοκότητα $O(np^2 logplogk)$.

Απόδειξη. Οι δύο πρώτες προτάσεις προκύπτουν από τα προλεχθέντα και τυπικά αποδεικνύονται με επαγωγή στον αριθμό των εσωτερικών κορυφών.

Ώς προς την πολυπλοκότητα: Ολες οι λειτουργίες εκτός από το χρωματισμό των μονοπατιών στα αστέρια χρειάζονται για κάθε κορυφή χρόνο γραμμικό ως προς τον αριθμό των μονοπατιών που περνούν από την κορυφή αυτή. Αρα ο συνολικός χρόνος που χρειάζονται είναι $O(L)$ όπου L το άθροισμα των μηκών όλων των μονοπατιών. Η επίλυση του στιγμιότυπου του STAR-PC για μία κορυφή v από την οποία περνούν p_v μονοπάτια και έχει φορτίο k_v είναι $O(p_v^2 logp_v logk_v)$. Αρα ο συνολικός χρόνος για τους χρωματισμούς αστεριών είναι $O(np^2 logplogk)$. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την παρατήρηση ότι $L < np$. ∎

Παράδειγμα: Εστω το δέντρο (V, E) με $V = \{1, ..., 13\}$ και $= \{<1,5>, <2,5>, <3,5>, <4,5>, <5,6>, <6,7>, <6,8>, <6,9>, <6,10>, <10,11>, <10,12>, <10,13>\}$ (σχήμα 4) και τα μονοπάτια $p_1 = (2,5,6,10,12), p_2 = (7,6,8), p_3 = (1,5,6,9)$, $p_4 = (1,5,6,10), p_5 = (2,5,4), p_6 = (1,5,3), p_7 = (12,10,13)$, $p_8 = (8,6,10,11), p_9 = (7,6,10,12), p_{10} = (4,5), p_{11} = (9,6,5), p_{12} = (4,5,6)$ Το φορτίο του στιγμιότυπου είναι $k = 5$. Το δέντρο έχει τρεις εσωτερικές κορυφές τις 5,6 και 10.



Σχήμα 4

Η πρώτη εσωτερική κορυφή είναι η 5 και από αυτήν ξεκινάμε την αναζήτηση κατά πλάτος και το χρωματισμό.

Χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό αλγόριθμο για το STAR-PC τα μονοπάτια p_1, p_3, p_4, p_5, p_6, p_{10}, p_{11}, p_{12} χρωματίζονται τοπικά με τα χρώματα $1,4,5,3,2,1,3,2$ αντίστοιχα. Επειδή πριν από αυτό το βήμα δεν υπήρχαν χρωματισμένα μονοπάτια, αυτά είναι και τα τελικά χρώματα των παραπάνω μονοπατιών.

Η επόμενη εσωτερική κορυφή που βρίσκουμε με αναζήτηση κατά πλάτος είναι η 6.

Χρησιμοποιώντας πάλι τον αλγόριθμο για το STAR-PC, χρωματίζουμε τα μονοπάτια p_1, p_2, p_3, p_4, p_8, p_9, p_{11}, p_{12} που περνούν από την κορυφή 6 με τα χρώματα $4,1,2,5,2,3,1,3$ αντίστοιχα. Ο σχηματισμός των λιστών R_i φαίνεται στον πίνακα 1. Η προσθήκη ενός χρωματισμένου μονοπατιού σε μία λίστα γίνεται στην αρχή της. Η λίστα στην οποία εισάγεται το μονοπάτι p καθορίζεται από το τοπικό του χρώμα $local(p)$.

Μονοπάτι p	Local(p)	Color(p)	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
			nil	nil	nil	nil	nil
p_1	4	1	nil	nil	nil	p_1	nil
p_2	1	nil	p_2	nil	nil	p_1	nil
p_3	2	4	p_2	p_3	nil	p_1	nil
p_4	5	5	p_2	p_3	nil	p_1	p_4
p_8	2	nil	p_2	$p_3->p_8$	nil	p_1	p_4
p_9	3	nil	p_2	$p_3->p_8$	p_9	p_1	p_4
p_{11}	1	3	$p_{11}->p_2$	$p_3->p_8$	p_9	p_1	p_4
p_{12}	3	2	$p_{11}->p_2$	$p_3->p_8$	$p_{12}->p_9$	p_1	p_4

Πίνακας 1

Οι λίστες μετατίθενται όπως φαίνεται στον πίνακα 2.

Count	Χρώμα του πρώτου μονοπατιού στην R_{Count}	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
		$p_{11}->p_2$	$p_3->p_8$	$p_{12}->p_9$	p_1	p_4
1	3	$p_{12}->p_9$	$p_3->p_8$	$p_{11}->p_2$	p_1	p_4
1	2	$p_3->p_8$	$p_{12}->p_9$	$p_{11}->p_2$	p_1	p_4
1	4	p_1	$p_{12}->p_9$	$p_{11}->p_2$	$p_3->p_8$	p_4
1	1	p_1	$p_{12}->p_9$	$p_{11}->p_2$	$p_3->p_8$	p_4
2	2	p_1	$p_{12}->p_9$	$p_{11}->p_2$	$p_3->p_8$	p_4
3	3	p_1	$p_{12}->p_9$	$p_{11}->p_2$	$p_3->p_8$	p_4
4	4	p_1	$p_{12}->p_9$	$p_{11}->p_2$	$p_3->p_8$	p_4
5	5	p_1	$p_{12}->p_9$	$p_{11}->p_2$	$p_3->p_8$	p_4
6						

Πίνακας 2

Μετά τη μετάθεση των χρωμάτων τα μονοπάτια p_2, p_8, p_9 αποκτούν τελικό χρώμα $3, 4, 2$ αντίστοιχα

Η τελευταία εσωτερική κορυφή που βρίσκουμε είναι η 10.

Τα μονοπάτια p_1, p_4, p_7, p_8, p_9 χρωματίζονται τοπικά με τα χρώματα $2, 1, 1, 4, 3$ αντίστοιχα. Το μόνο μονοπάτι που δεν έχει πάρει τελικό χρώμα είναι το p_7, το οποίο χρωματίζεται με το χρώμα 5 (δηλαδή με το χρώμα του p_4).

Στον πίνακα 3 φαίνεται το χρώμα κάθε μονοπατιού καθώς και το βήμα στο οποίο το απέκτησε.

Μονοπάτι	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}
Χρώμα	1	3	4	5	3	2	5	4	2	1	3	2
Βήμα	1	2	1	1	1	1	3	2	2	1	1	1

Πίνακας 3

4 Ανοιχτά Προβλήματα

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι να δώσουμε έναν πλήρη χαρακτηρισμό για τις οικογένειες των γράφων στις οποίες ο χρωματισμός των μονοπατιών γίνεται με καλούς προσεγγιστικούς αλγόριθμους καθώς και για εκείνες για τις οποίες μπορεί να βρεθεί βέλτιστη λύση σε πολυωνυμικό χρόνο.

Για τις τοπολογίες δέντρων οι προσεγγιστικοί παράγοντες ίσως να βελτιώνονται, ιδίως αν δώσουμε περαιτέρω περιορισμούς για τα μονοπάτια.

Αναφορές

[1] M.Garey, D.Johnson, G.Miller and C.Papadimitriou. The Complexity of Coloring Circular Arcs and Chords. SIAM J. Alg. Disc. Math.,Vol 1, No 2, 1980, 216-227.

[2] M.Mihail, C.Kaklamanis and S.Rao. Efficient Access to Optical Bandwidth. Proceedings FOCS, 1995.

[3] P.Raghavan and E.Upfal. Efficient Routing in All-Optical Networks. Proc. ACM Symposium On the Theory of Computing STOC 1993, 134-143.

[4] A.Tucker. Coloring a Family of Circular Arcs. SIAM Journal of Applied Mathematics Vol 29, 3, 1975, 493-502.

[5] C.Lund and M.Yannakakis. On the Hardness of Approximating Minimization Problems Proc. ACM Symposium On the Theory of Computing STOC 1993, 286-293.

[6] I.Holyer. The NP-completeness of edge coloring. SIAM J. Comput. 10 (1981) 718-720.

[7] C.E.Shannon. A theorem on coloring the lines of a network, J. Math. Phys. 28 (1949) 148-151.

[8] C.Berge. Graphs and Hypergraphs, North-Holland, Amsterdam, (1973).

[9] V.G.Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph, Diskret. Analiz. 3 (1964) 25-30.

[10] M.C.Golumbic and R.E.Jamison. The edge intersection graphs of paths in a tree, J. Combin. Theory Ser. B, to appear.

[11] M.C.Golumbic and R.E.Jamison. Edge and vertex intersection of paths in trees, Discrete Math. 55 (1985) 151-159.

[12] R. Tarjan. Decomposition by clique separators, Discrete Math. 55 (1985) 221-232.

[13] Χ. Νομικός. Χρωματισμοί μονοπατιών σε γραφήματα, Διδακτορική διατριβή ΕΜΠ (1997).