Προγραμματισμός συστημάτων κοινόχρηστης μνήμης (Ι)

Νήματα POSIX

ΜΥΕ023

Παράλληλα Συστήματα & Προγραμματισμός

«Οντότητες» εκτέλεσης κώδικα

- Σειριακό πρόγραμμα για υπολογισμό του π = 3.141592…

```
#define N 512
float pi = 0.0, W = 1.0/N;

int main() {
  int i;
  for (i = 0; i < N; i++)
    pi += 4*W / (1 + (i+0.5)*(i+0.5)*W*W);
  printf("π = %f\n", pi);
  return 0;
}
```

- Όταν φορτωθεί και εκτελείται το πρόγραμμα γίνεται **διεργασία (process)**.
- Κάθε διεργασία εκτελείται σε έναν επεξεργαστή
  - Το λειτουργικό σύστημα φροντίζει για αυτό

Διεργασίες & νήματα

- Μία διεργασία αποτελείται (κατ' ελάχιστο) από δεδομένα, κώδικα (εντολές), μία στοίβα (stack) και έναν μετρητή προγράμματος (program counter)
  - Ο μετρητής προγράμματος (PC):
    - δείχνει στην επόμενη εντολή του κώδικα που θα εκτελεστεί
  - Η στοίβα χρειάζεται για:
    - αποθήκευση των τοπικών μεταβλητών (τα «δεδομένα» της διεργασίας που είπαμε παραπάνω είναι οι global μεταβλητές)

```
#define N 512
float pi = 0.0, W = 1.0/N;

int main() {
  int i;
  for (i = 0; i < N; i++)
    pi += 4*W / (1 + (i+0.5)*(i+0.5)*W*W);
  printf("π = %f\n", pi);
  return 0;
}
```

- Ο συνδυασμός PC + στοίβα λέγεται **νήμα εκτέλεσης (thread)**
  - Δηλαδή η διεργασία αποτελείται από (global) δεδομένα, από κώδικα και από ένα νήμα εκτέλεσης που περνάει από τις εντολές του κώδικα
  - Το νήμα είναι αυτό που εκτελείται όταν λέμε ότι εκτελείται η διεργασία!
  - Το νήμα αυτό λέγεται *αρχικό νήμα* της διεργασίας

Διεργασίες & νήματα

- Μία διεργασία μπορεί να δημιουργήσει κι άλλα πολλά νήματα εκτέλεσης:
  - Δημιουργώντας τίποτε άλλο εκτός από πολλές στοίβες και PCs
  - Όλα θα τρέχουν εντολές από τον *ίδιο* κώδικα (δεν δημιουργείται άλλο αντίγραφό του) και τέλος
  - Όλα θα έχουν τα *ίδια* global δεδομένα! Δηλαδή οι καθολικές μεταβλητές της διεργασίας είναι ΑΥΤΟΜΑΤΩΣ ΚΟΙΝΕΣ μεταξύ των νημάτων της.
  - Στην κάθε στοίβα το κάθε νήμα θα έχει τις δικές του τοπικές μεταβλητές
  - Κάθε νήμα εκτελείται σε έναν επεξεργαστή
    - Το λειτουργικό σύστημα φροντίζει για αυτό (εκτός από μερικές περιπτώσεις)

Παράλληλα προγράμματα

- Επομένως, για να εκμεταλλευτούμε πολλαπλούς επεξεργαστές, έχουμε δύο βασικές τεχνικές:
  - **Πολλαπλές διεργασίες**
    - Η διεργασία μας «γεννά» κι άλλες διεργασίες και κάθε μία εκτελείται στον δικό της επεξεργαστή (π.χ. fork())
  - **Πολλαπλά νήματα σε μία διεργασία**
    - Το αρχικό νήμα εκτέλεσης «γεννά» κι άλλα νήματα και κάθε ένα εκτελείται στον δικό του επεξεργαστή

- Υπάρχουν διαφορές σε ταχύτητα δημιουργίας, απαιτήσεις σε πόρους (π.χ. μνήμη) κλπ αλλά η πιο σημαντική διαφορά είναι ότι:
  - Ανάμεσα στις πολλαπλές διεργασίες *ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ καμία κοινή μεταβλητή*. Πρέπει να δημιουργηθούν «με το χέρι», ενώ μεταξύ των πολλαπλών νημάτων όλες οι global μεταβλητές είναι κοινές είτε το θέλουμε είτε όχι.

Shared address space / shared variables

- Τι χρειάζεται κανείς για να προγραμματίσει σε αυτό το μοντέλο:
  - Οντότητες εκτέλεσης (νήματα, διεργασίες)
    - Δημιουργία, διαχείριση
  - Κοινές μεταβλητές μεταξύ των οντοτήτων
    - Ορισμός μεταβλητών (τι είναι κοινό και πως ορίζεται)
    - Τις διαβάζουν και τις τροποποιούν όλες οι διεργασίες
  - Αμοιβαίος αποκλεισμός
    - Π.χ. κλειδαριές
  - Συγχρονισμός
    - Π.χ. κλήσεις φραγής (barrier calls)

Γιατί αμοιβαίος αποκλεισμός;

Αρχικά η κοινή μεταβλητή A είναι ίση με το 0

Νήμα T1	Νήμα T2
`A = A+1;`	`A = A-1;`

- Λεπτομέρεια εκτέλεσης της εντολής A = A±1 σε έναν επεξεργαστή:
  - **α.** Ο επεξεργαστής μεταφέρει από τη μνήμη την τιμή της A
  - **β.** Αυξάνει/μειώνει κατά 1
  - **γ.** Αποθηκεύει στη μνήμη την νέα τιμή.

Χρονική στιγμή	Τι κάνει ο επεξεργαστής 1	Τι κάνει ο επεξεργαστής 2
t	α	-
t+1	β	α
t+2	γ	β
t+3	-	γ
A = -1		

Χρονική στιγμή	Τι κάνει ο επεξεργαστής 1	Τι κάνει ο επεξεργαστής 2
t	-	α
t+1	α	β
t+2	β	γ
t+3	**γ**	
A = 1		

Χρονική στιγμή	Εντολή που εκτελεί ο επεξεργαστής 1	Εντολή που εκτελεί ο επεξεργαστής 2
t	-	α
t+1	-	β
t+2	-	γ
t+3	**α**	
t+4	**β**	
t+5	**γ**	
A = 0		

Δημιουργία οντοτήτων εκτέλεσης – fork() για διεργασίες

```
        ...
(α)     x = fork();
(β)     if (x == 0)          /* παιδί *
(γ)       κώδικας Α;
(δ)     else                 /* γονέας
(ε)       κώδικας Β;
(η)     κώδικας Γ;
        ...
```

```
int x = 2;

int main() {
  int y = 0;

  y = 1;
  if (fork())
    x = x+y;
  else
    x = x-y;
  printf("%d\n", x);
  return 0;
}

Τι θα τυπωθεί;
```

```
void function() {
  fork();
  fork();
  fork();
}

Πόσες θα φτιαχτούν;
```

Δημιουργία διεργασιών

- Αντιγράφονται τα πάντα:
  - Καθολικές μεταβλητές
  - Σωρός (ότι έχει γίνει malloc())
  - Ο κώδικας της διεργασίας (ίσως να μη χρειαστεί αυτή η αντιγραφή)
  - Στοίβα (στην κατάσταση που βρίσκεται εκείνη τη στιγμή)
  - Καταχωρητές (π.χ. program counter)
    - Άρα, η διεργασία παιδί εκτελεί αμέσως μετά το fork()
    - Άρα, τίποτε κοινό οι διεργασίες μεταξύ τους
- Ιδιαίτερα χρονοβόρο
  - Με τεχνικές όπως το copy-on-write μπορεί το ΛΣ να μην αντιγράψει τα πάντα (π.χ. τις καθολικές μεταβλητές) παρά μόνο όταν χρειαστεί (δηλαδή πότε??), γλιτώνοντας κάποιον χρόνο

Δημιουργία οντοτήτων εκτέλεσης – νήματα (posix)

- Διαφορετική λογική στα νήματα
  - Δεν δημιουργείται αντίγραφο από τίποτε
  - Δεν ξεκινάει η εκτέλεση του νήματος από το σημείο δημιουργίας του
  - Το νήμα θα εκτελέσει μια συνάρτηση που θα του δοθεί και θα τερματίσει

```
capitalize(char *strings[100]) {
  pthread_create(&thrid, NULL, capfunc, (void*) string[5]);
  ...
}

void *capfunc(void *str) {
  ...
}
```

Μετάφραση προγραμμάτων με νήματα

- Πάντα
  - `#include <pthread.h>`

- Μετάφραση:

  `gcc -pthread <file.c>`

  - Παλαιότερα:

    `gcc <file.c> -D_REENTRANT -lpthread`

Δημιουργία νημάτων

pthread_create(&thrid, attributes, function_to_call, function_parameter);

- Η συνάρτηση του νήματος παίρνει πάντα μόνο ένα όρισμα
- Το νήμα «ζει» μέχρι να τελειώσει (επιστρέψει) η συνάρτηση.
  - Φυσικά η συνάρτηση αυτή μπορεί να καλεί κι άλλες συναρτήσεις
  - Μόλις επιστρέψει το νήμα καταστρέφεται
- Ο γονέας (αρχικό νήμα), αφού δημιουργήσει το νήμα *συνεχίζει κανονικά την εκτέλεσή του*

```
int main() {
  pthread_create(&thrid, NULL, func, NULL);
  pthread_create(&thrid, NULL, func, NULL);
  pthread_create(&thrid, NULL, func, NULL);

                                  Πόσα θα φτιαχτούν;
```

```
void capitalize(char *strings[100]) {
  for (i = 0; i < 100; i++)
    pthread_create(&thrid, NULL, capfunc, (void*) string[i]);
  ...
}
```

Πώς μπορώ να περάσω > 1 παραμέτρους;

```
struct manyparams { int x; int y; double z; };
void *threadfunc(void *ptr);

int main() {
  struct manyparams myargs;
  ...                                /* Pass a pointer to the structure */
  pthread_create(&thrid, NULL, threadfunc, (void*) &myargs);
  ...
}

void *threadfunc(void *ptr) {
  struct manyparams *s = ptr;    /* Cast the pointer */
  ...
  s->x += s->y;
  ...
}
```

Τερματισμός νήματος

- Δύο τρόποι:
  - είτε επιστρέφει από τη συνάρτηση που του δόθηκε να εκτελέσει
  - είτε καλεί την **pthread_exit(&returnvalue)** και τερματίζει αμέσως
    - σε οποιοδήποτε σημείο.

- Τιμή επιστροφής:
  - είτε αυτό που γίνεται return από τη συνάρτηση του νήματος είτε το όρισμα της `pthread_exit()`.
  - και στις δύο περιπτώσεις, είναι δείκτης στην τιμή αυτή (void *).

Αναμονή τερματισμού νήματος: pthread_join()

```
void *thrfunc(void *x) {
  int id = (int) x;
  printf("Hi! I am thread %d\n", id);
  return (NULL);
}
```

```
int main() {
  pthread_t tids[5];
  int i;

  for (i = 0; i < 5 i++)
    pthread_create(&tids[i], NULL, thrfunc, (void*) i);
  for (i = 0; i < 5; i++)
    pthread_join(tids[i], NULL);
  printf("All threads done.\n");
  return 0;
}
```

Το cast αυτό θέλει πολύ προσοχή!!

Παράδειγμα παράλληλης εκτέλεσης

```
#include <pthread.h>
char *strings[10];                  /* 10 pointers to strings (shared) */

void *capitalize(void *str) {
  ...                               /* Capitalize all letters */
}

int main() {
  int       i;
  pthread_t thrid[10];

  read_strings(strings);            /* Get the strings somehow */
  for (i = 1; i < 10; i++)          /* Create 9 threads to process them */
    pthread_create(&thrid[i], NULL, capitalize, (void *) string[i]);
  capitalize((void *) string[0]);   /* Participate, too! */
  ...
  for (i = 1; i < 10; i++)          /* Wait for the 9 threads to finish */
    pthread_join(thrid[i], NULL);
  ...
}
```

Αμοιβαίος αποκλεισμός - κλειδαριές

- Από τους διάφορους τρόπους για αμοιβαίο αποκλεισμό, ο συχνότερα χρησιμοποιούμενος είναι οι κλειδαριές (**locks**).
- Η κλειδαριά είναι είτε *ανοιχτή* είτε *κλειδωμένη*.
- Όταν ένα νήμα κλειδώσει την κλειδαριά, οποιοδήποτε άλλο νήμα προσπαθήσει να την κλειδώσει θα αποτύχει και θα αναγκαστεί να περιμένει.
  - Όταν το νήμα ολοκληρώσει τη δουλειά του, ξεκλειδώνει την κλειδαριά και ένα από τα νήματα που περιμένουν θα κατορθώσει να την κλειδώσει.
- Επομένως, μία κρίσιμη περιοχή του προγράμματος μπορεί να προστατευθεί (αμοιβαίος αποκλεισμός) με μία κλειδαριά:

```
...
lock(kleidaria);
<critical section>
unlock(kleidaria);
...
```

Κλειδαριές στα pthreads: *mutexes*

```
int main() {
  pthread_mutex_t mymutex;

  pthread_mutex_init(&mymutex, NULL);
  pthread_mutex_lock(&mymutex);
    ...                                  /* Κρίσιμη περιοχή */
  pthread_mutex_unlock(&mymutex);
  ...
}
```

- Αντί για `pthread_mutex_init()`, μπορούμε να κάνουμε και ***στατική*** αρχικοποίηση (αρχικοποίηση χρειάζεται πάντα):

```
pthread_mutex_t mymutex = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;
```

2 νήματα συνεργάζονται για τον μέσο όρο

```
int             A[10];          /* I want to calculate the average value */
double          avg = 0.0;      /* shared variable to hold the result */
pthread_mutex_t mx = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;

void *threadfunc1(void *arg) {
  int i, q1 = 0;

  for (i = 0; i < 5; i++)
    q1 += A[i];
  pthread_mutex_lock(&mx);
  avg = avg + (q1 / 10.0);      /* critical section */
  pthread_mutex_unlock(&mx);
  ...
}

void *threadfunc2(void *arg) {
  int i, q2 = 0;

  for (i = 5; i < 10; i++)
    q2 += A[i];
  pthread_mutex_lock(&mx);
  avg = avg + (q2 / 10.0);      /* critical section */
  pthread_mutex_unlock(&mx);
  printf("avg = %lf\n", avg);   /* show result */
  ...
}
```

Συγχρονισμός!

- *Race conditions*: συνθήκες συναγωνισμού, όπου το τελικό αποτέλεσμα εξαρτάται από τις σχετικές ταχύτητες των νημάτων

- Οι οντότητες εκτέλεσης πρέπει μερικές φορές να *συγχρονίζονται*.
  - Θα πρέπει να περιμένουν μέχρι να συμβεί κάποιο γεγονός

- Συνήθεις μηχανισμοί στα νήματα:
  - Μεταβλητές συνθήκης (***condition variables***) – ο βασικός μηχανισμός
  - φράγματα (***barriers***) – ο απλούστερος / δημοφιλέστερος μηχανισμός
  - κάποιο νήμα που καλεί μία συνάρτηση φράγματος, μπλοκάρει και περιμένει όλα τα υπόλοιπα νήματα να φτάσουν στο φράγμα *πριν προχωρήσει παρακάτω*.
  - Μόλις φτάσει και το τελευταίο, «ξεμπλοκάρουν» όλα και συνεχίζουν την εκτέλεσή τους.
  - pthread_barrier_wait()
    - Δεν είναι μέρος του «κλασικού» στάνταρ. Αποτελεί επέκταση. Για να χρησιμοποιηθεί στα συστήματα που το υποστηρίζουν, πρέπει στον κώδικα να μπει #define _XOPEN_SOURCE 600

Μεταβλητές συνθήκης

- Ο βασικός μηχανισμός συγχρονισμού στα νήματα POSIX.
- Ένα νήμα θα περιμένει σε μια μεταβλητή συνθήκης έως ότου η μεταβλητή το ενημερώσει ότι μπορεί να συνεχίσει
  - Κάποιο άλλο νήμα σηματοδοτεί τη μεταβλητή συνθήκης, επιτρέποντας άλλα νήματα να συνεχίσουν
  - Κάθε μεταβλητή συνθήκης, ως διαμοιραζόμενο δεδομένο, συσχετίζεται και με ένα συγκεκριμένο mutex
- Με τις μεταβλητές συνθήκης αποφεύγεται ο συνεχής έλεγχος (busy waiting) της κατάστασης των δεδομένων
  - Ένα νήμα που τροποποιεί την τιμή των δεδομένων ειδοποιεί τα ενδιαφερόμενα μέσω μιας μεταβλητής συνθήκης
- Παράδειγμα: Σχήμα παραγωγού – καταναλωτή με χρήση ουράς δεδομένων
  - Το νήμα-καταναλωτής εξάγει και επεξεργάζεται στοιχεία της ουράς εφόσον αυτή δεν είναι άδεια, διαφορετικά μπλοκάρει
  - Το νήματα-παραγωγός προσθέτει στοιχεία στην ουρά και ειδοποιεί με τη μεταβλητή συνθήκης το νήμα – καταναλωτή που περιμένει

Χρήση

- Στατική αρχικοποίηση:
  - **`pthread_cond_t condition = PTHREAD_COND_INITIALIZER;`**
- Δυναμική αρχικοποίηση:
  - **`pthread_cond_init(&condition);`**
- Μια μεταβλητή συνθήκης συσχετίζεται πάντοτε με ένα mutex
- Αναμονή με:

  `pthread_cond_wait(&condition, &mutex);`
  - Το νήμα αναστέλλει την εκτέλεση του μέχρι να σηματοδοτηθεί η μεταβλητή συνθήκης
  - Το νήμα πρέπει να έχει ήδη κλειδώσει το συσχετιζόμενο mutex
  - Το νήμα αναστέλλεται ενώ το mutex ξεκλειδώνεται αυτόματα ώστε να επιτραπεί η χρήση του από άλλα νήματα
  - Όταν το νήμα ενεργοποιηθεί με την ειδοποίηση του μέσω της μεταβλητής συνθήκης, αυτόματα το mutex είναι κλειδωμένο από το ίδιο

Σηματοδότηση

```
pthread_cond_signal(&condition);
pthread_cond_broadcast(&condition);
```

- Με την pthread_cond_signal ένα νήμα ειδοποιεί κάποιο άλλο νήμα που περιμένει σε κάποια μεταβλητή συνθήκης
- Με την pthread_cond_broadcast, ένα νήμα ειδοποιεί όλα τα νήματα που περιμένουν σε κάποια μεταβλητή συνθήκης
- Το νήμα που πρόκειται να σηματοδοτήσει μια μεταβλητή συνθήκης συνήθως έχει κλειδώσει το mutex που συσχετίζεται με αυτή. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να ελευθερώσει το mutex ώστε να συνεχιστεί η εκτέλεση της pthread_cond_wait

Διαδικασία

- Υπάρχει κάποια συνθήκη ή κάποιο γεγονός που θέλουμε να ελέγξουμε (έστω π.χ. εάν count >= N).
  - Απαιτείται μία condition variable (cond) και μια κλειδαριά (mut)
- Ο έλεγχος του γεγονότος γίνεται μόνο αφού πρώτα το νήμα κλειδώσει το mut.
  - Αν το γεγονός/συνθήκη ισχύει (π.χ. count >= N) τότε
    - Το νήμα ξεκλειδώνει το mut και
    - Συνεχίζει την εκτέλεσή του
- Αν το γεγονός/συνθήκη δεν ισχύει τότε
  - Το νήμα αναστέλλεται καλώντας την pthread_cond_wait(&cond,&mut)
    - το mut ξεκλειδώνεται αυτόματα από το σύστημα
- Κάποιο άλλο νήμα θα καλέσει την pthread_cond_signal(&cond) όταν η συνθήκη γίνει αληθής
  - Το πρώτο νήμα ξυπνάει από την αναμονή έχοντας το mutex αυτόματα κλειδωμένο και εκτελεί τη δουλειά του
  - Το νήμα ξεκλειδώνει το mutex όταν έχει ολοκληρώσει

Παράδειγμα 2 νημάτων που συγχρονίζονται με μετ. συνθ.

```
pthread_cond_t  condvar = PTHREAD_COND_INITIALIZER;
pthread_mutex_t lock = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;
int             flag;
```

```
void *threadA(void *arg) {
  ...
  pthread_mutex_lock(&lock);
  while (flag != TRUE) /* waiting for flag to become true */
    pthread_cond_wait(&condvar, &lock);
  pthread_mutex_unlock(&lock);
  ...
}
```

```
void *threadB(void *arg) {
  ...
  pthread_mutex_lock(&lock);
  flag = TRUE;
  pthread_cond_signal(&condvar);
  pthread_mutex_unlock(&lock);
  ...
}
```

Παράδειγμα αναμονής 1 νήματος

```
/* N threads call this */
void *producers(void *arg) {
  ...
  pthread_mutex_lock(&lock);
  count++;
  if (count == N)
    pthread_cond_signal(&condvar);
  pthread_mutex_unlock(&lock);
  ...
}

void *consumer(void *arg) {
  ...
  pthread_mutex_lock(&lock);
  while (count < N)
    pthread_cond_wait(&condvar,&lock);
  pthread_mutex_unlock(&lock);
  ...
}
```

Παράδειγμα αναμονής Ν νημάτων

```
void *producer(void *arg) {
  ...
  pthread_mutex_lock(&lock);
  count++;
  if (count == N)
    pthread_cond_broadcast(&condvar);
  pthread_mutex_unlock(&lock);
  ...
}

/* N threads call this */
void *consumers(void *arg) {
  ...
  pthread_mutex_lock(&lock);
  while (count < N)
    pthread_cond_wait(&condvar,&lock);
  pthread_mutex_unlock(&lock);
  ...
}
```

Ορθός τρόπος χρήσης

```
/* THREAD A
 * Wait for the flag to become TRUE
 */
pthread_mutex_lock(&lock);
  while (flag == FALSE)
     pthread_cond_wait(&condvar, &lock);
pthread_mutex_unlock(&lock);
```

```
/* THREAD B
 */
if (something_happens) {
  pthread_mutex_lock(&lock);
    flag = TRUE;
    pthread_cond_signal(&condvar);
  pthread_mutex_unlock(&lock);
}
```

- Γιατί η κλειδαριά;
  - Διότι το pthread_cond_signal() είναι *memoryless*: *αν ένα signal σταλεί αλλά δεν υπάρχει κάποιο νήμα που κάνει wait(), τότε το σήμα χάνεται.*
    - Αν αμέσως μετά το while και πριν προλάβει να κάνει wait(), το νήμα Β κάνει singal(), τότε το σήμα θα χαθεί και το νήμα Α θα περιμένει για πάντα.
- Γιατί το while;
  - Διότι μπορεί μετά το flag = TRUE να ξύπνησε το νήμα Α, αλλά να πρόλαβε ένα άλλο νήμα να το έκανε πάλι FALSE. Επίσης μπορεί μερικές φορές κάποιο νήμα να ξυπνήσει από το wait() απρόσμενα,
    - οπότε πριν προχωρήσει θα πρέπει να ξαναελέγξει αν όντως το flag είναι TRUE.

Δεύτερος μηχανισμός: barriers

- Φράγματα (***barriers***) – ο απλούστερος / δημοφιλέστερος μηχανισμός
- Κάποιο νήμα που καλεί μία συνάρτηση φράγματος, μπλοκάρει και *περιμένει όλα τα υπόλοιπα νήματα να φτάσουν στο φράγμα* πριν προχωρήσει παρακάτω.
- Μόλις φτάσει και το τελευταίο, «ξεμπλοκάρουν» όλα και συνεχίζουν την εκτέλεσή τους.
- **pthread_barrier_wait()**
  - Δεν είναι μέρος του «κλασικού» στάνταρ. Αποτελεί επέκταση (τα λεγόμενα real-time extensions).
  - Για να χρησιμοποιηθεί στα συστήματα που το υποστηρίζουν, παλαιότερα έπρεπε στον κώδικα του χρήστη να μπει `#define _XOPEN_SOURCE 600`
  - Στα περισσότερα συστήματα παρέχεται πλέον εγγενώς.

Χρήση barriers

- Ορισμός:

  `pthread_barrier_t bar;`

- Δυναμική αρχικοποίηση:

  `pthread_barrier_init(&bar, NULL, N);`

  - Στην αρχικοποίηση δίνεται *το πλήθος των νημάτων (N)* που θα πρέπει να συγχρονίσει

- Αναμονή με:

  `pthread_barrier_wait(&bar);`

  - Το νήμα αναστέλλει την εκτέλεση του μέχρι τα υπόλοιπα N-1 νήματα να κάνουν την ίδια κλήση.

- Τον χρησιμοποιούμε όσες φορές θέλουμε χωρίς νέα αρχικοποίηση. Επίσης, νέα αρχικοποίηση με διαφορετικό N δεν επιτρέπεται!

  - Επομένως, αν θέλουμε να τον επαναχρησιμοποιήσουμε για να συγχρονίσουμε διαφορετικό πλήθος νημάτων, πρέπει πρώτα να τον «καταστρέψουμε» με:

    `pthread_barrier_destroy(&bar);`

    - Το νήμα αναστέλλει την εκτέλεση του μέχρι τα υπόλοιπα N-1 νήματα να κάνουν την ίδια κλήση.

2 νήματα συνεργάζονται για τον μέσο όρο ΣΩΣΤΑ!

```
int             A[10];          /* I want to calculate the average value */
double          avg = 0.0;      /* shared variable to hold the result */
pthread_mutex_t mx = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;
pthread_barrier_t bar;          /* Initialized in main() */

void *threadfunc1(void *arg) {
  int i, q1 = 0;

  for (i = 0; i < 5; i++)
    q1 += A[i];
  pthread_mutex_lock(&mx);
  avg = avg + (q1 / 10.0);      /* critical section */
  pthread_mutex_unlock(&mx);
  pthread_barrier_wait(&bar);
  ...
}

void *threadfunc2(void *arg) {
  int i, q2 = 0;

  for (i = 5; i < 10; i++)
    q2 += A[i];
  pthread_mutex_lock(&mx);
  avg = avg + (q2 / 10.0);      /* critical section */
  pthread_mutex_unlock(&mx);
  pthread_barrier_wait(&bar);
  printf("avg = %lf\n", avg);   /* show result */
  ...
}
```

Θέματα υλοποίησης αμοιβαίου αποκλεισμού /συγχρονισμού

- Όταν ένα νήμα βρει την κλειδαριά κλειδωμένη τι γίνεται;
  - **Λύση 1 (queue locks)**: το σύστημα το αποσύρει σε μία ουρά και το «κοιμίζει» μέχρι να ξεκλειδωθεί η κλειδαριά και να το «ξυπνήσει»
    - Ελευθερώνεται ένας πυρήνας / επεξεργαστής (ώστε να μπορεί να εκτελέσει άλλα χρήσιμα πράγματα)
    - Ευγενική / καλή / δίκαια συμπεριφορά
    - Χρονοβόρο! Απόσυρση-κοίμισμα-προετοιμασία-επαναφορά έχει κόστος διαχείρισης!
  - **Λύση 2 (spin locks)**: ενεργός αναμονή (busy waiting)
    - «Μονοπωλείται» ο πυρήνας σε ένα while loop (ενώ θα μπορούσε να εκτελέσει άλλα χρήσιμα πράγματα)
    - Κακή συμπεριφορά, αλλά ταχύτατο ☺
    - ***Το προτιμάμε, με την προϋπόθεση ότι οι κρίσιμες περιοχές είναι μικρές σε διάρκεια και ότι το σύστημα είναι «αφιερωμένο» στη δική μας εφαρμογή.***

- Αντίστοιχα και ο συγχρονισμός – μπορεί να υλοποιηθεί με ουρές αναμονής ή ενεργό αναμονή
- *Κλειδαριές + συγχρονισμός = βασικές αιτίες καθυστέρησης στην παράλληλη εκτέλεση*

… βάζοντάς τα όλα σε εφαρμογή

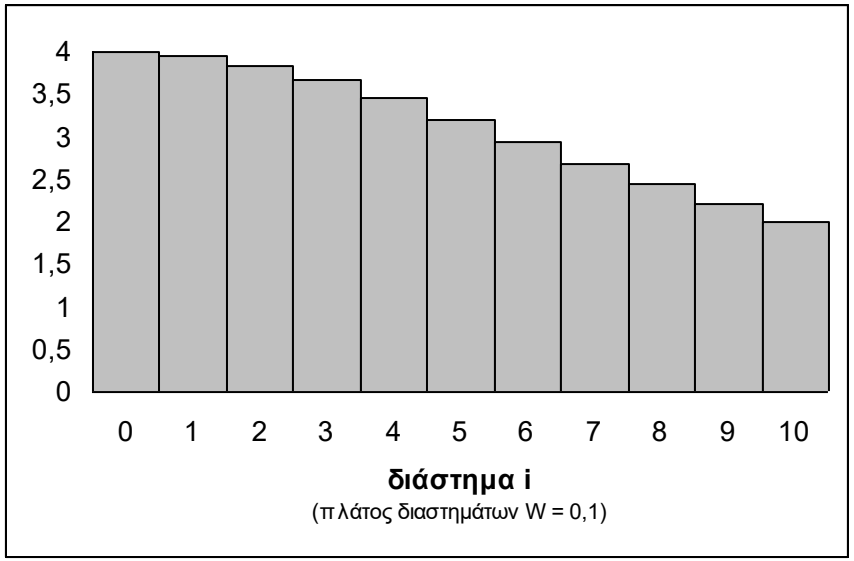
ΜΥΕ023

Παράλληλα Συστήματα & Προγραμματισμός

Υπολογισμός του π = 3,14...

- Αριθμητική ολοκλήρωση

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}$$



$$\approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{4W}{1+\left[(i+\frac{1}{2})W\right]^2}$$

```
#define N 1000000
double pi = 0.0, W = 1.0/N;

int main() {
  int i;
  for (i = 0; i < N; i++)
    pi += 4*W / (1 + (i+0.5)*(i+0.5)*W*W);
  printf("pi = %.10lf\n", pi);
  return 0;
}
```

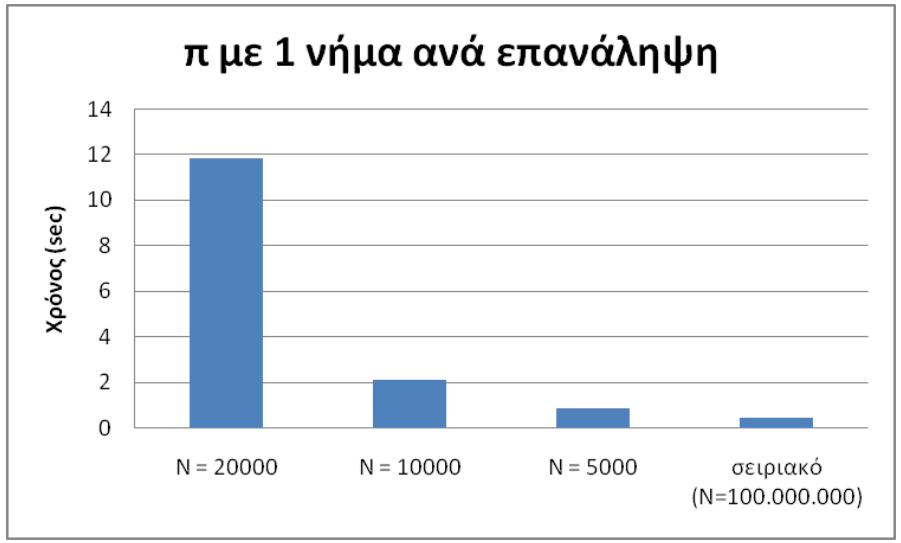
Υπολογισμός του π = 3,14... με 1 νήμα ανά επανάληψη

```
#define N 100000
double pi = 0.0, W = 1.0/N;

int main() {
  int i;
  for (i = 0; i < N; i++)
    pi += 4*W / (1 + (i+0.5)*(i+0.5)*W*W);
  printf("pi = %.10lf\n", pi);
  return 0;
}
```

```
/* 1 νήμα ανά επανάληψη */
#define N 100000
double pi = 0.0, W = 1.0/N;
pthread_mutex_t lock = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;

void *thrfunc(void *iter) {
  int i = (int) iter;
  pthread_mutex_lock(&lock);
   pi += 4*W / (1 + (i+0.5)*(i+0.5)*W*W);
  pthread_mutex_unlock(&lock);
}

int main() {
  int i;
  pthread_t tids[N];           /* Remember the tread ids */

  for (i = 0; i < N; i++)
    pthread_create(&tids[i], NULL, thrfunc, (void *) i);
  for (i = 0; i < N; i++)
    pthread_join(tids[i], NULL);
  printf("pi = %.10lf\n", pi);
  return 0;
}
```

Προβλήματα

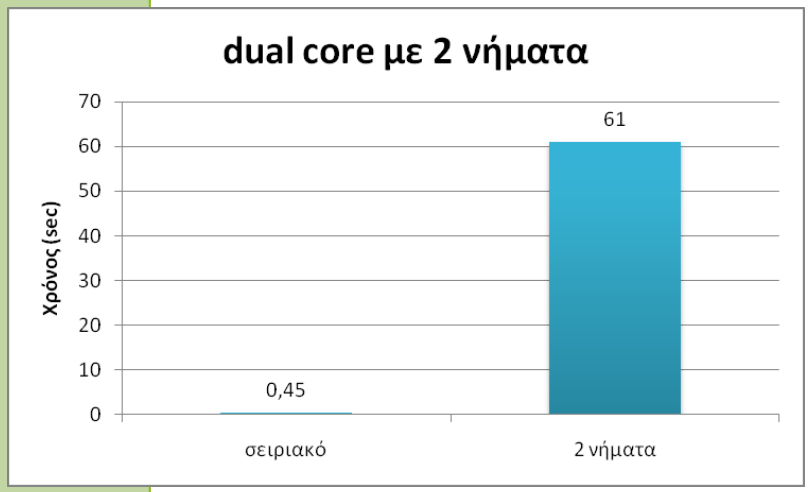
- Υπερβολικά πολλά νήματα (πολλά συστήματα δεν επιτρέπουν πάνω από λίγες χιλιάδες)
  - και επομένως υπερβολικά «λεπτόκοκκος» παραλληλισμός (fine grain)
- Ακόμα και αν επιτρέπονταν τόσα πολλά νήματα, ο συναγωνισμός για την κλειδαριά είναι τεράστιος.
- Αποτέλεσμα: αργή εκτέλεση και μόνο για μη ακριβή προσέγγιση του π.



- Μάθημα: ***η καλύτερη τακτική είναι συνήθως να δημιουργούμε τόσα νήματα όσοι είναι και οι επεξεργαστές του συστήματος***

Μοίρασμα της δουλειάς σε λίγα νήματα

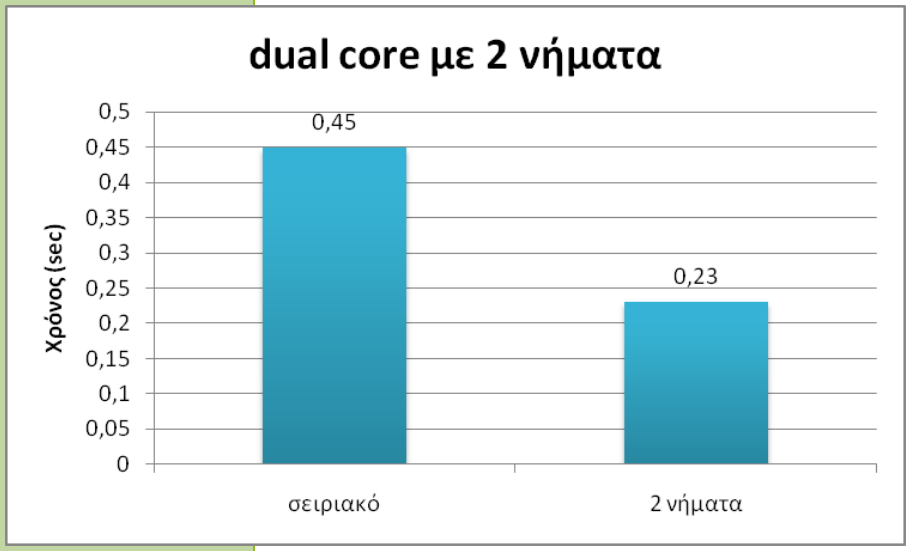
```
#define NPROCS 2          /* dual core */
#define N 10000000        /* Για ακρίβεια (ίδια με σειριακό) */
#define WORK N/NPROCS
double pi = 0.0, W = 1.0/N;
pthread_mutex_t lock = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;

void *thrfunc(void *iter) {
  int i, me = (int) iter;
  for (i = me*WORK; i < (me+1)*WORK; i++) {
    pthread_mutex_lock(&lock);
    pi += 4*W / (1 + (i+0.5)*(i+0.5)*W*W);
    pthread_mutex_unlock(&lock);
  }
}

int main() {
  int i;
  pthread_t tids[NPROCS];

  for (i = 0; i < NPROCS; i++)  /* νήματα = # επεξεργατών */
    pthread_create(&tids[i], NULL, thrfunc, (void *) i);
  for (i = 0; i < NPROCS; i++)
    pthread_join(tids[i], NULL);
  printf("pi = %.10lf\n", pi);
  return 0;
}
```



Τι πάει στραβά;

Λίγα νήματα – αποφυγή συναγωνισμού

```
#define NPROCS 2          /* dual core */
#define N 10000000        /* Για ακρίβεια (ίδια με σειριακό) */
#define WORK N/NPROCS
double pi = 0.0, W = 1.0/N;
pthread_mutex_t lock = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;

void *thrfunc(void *iter) {
  int    i, me = (int) iter;
  double mysum = 0.0;
  for (i = me*WORK; i < (me+1)*WORK; i++)
    mysum += 4*W / (1 + (i+0.5)*(i+0.5)*W*W);
  pthread_mutex_lock(&lock);
  pi += mysum;
  pthread_mutex_unlock(&lock);
}

int main() {
  int i;
  pthread_t tids[NPROCS];

  for (i = 0; i < NPROCS; i++)  /* νήματα = # επεξεργατών */
    pthread_create(&tids[i], NULL, thrfunc, (void *) i);
  for (i = 0; i < NPROCS; i++)
    pthread_join(tids[i], NULL);
  printf("pi = %.10lf\n", pi);
  return 0;
}
```



Δρομολόγηση επαναλήψεων με άλματα

```
#define NPROCS 2          /* dual core */
#define N 10000000        /* Για ακρίβεια (ίδια με σειριακό) */
#define WORK N/NPROCS
double pi = 0.0, W = 1.0/N;
pthread_mutex_t lock = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;

void *thrfunc(void *iter) {
  int    i, me = (int) iter;
  double mysum = 0.0;
  for (i = me*WORK; i < (me+1)*WORK; i++)
    mysum += 4*W / (1 + (i+0.5)*(i+0.5)*W*W);
  pthread_mutex_lock(&lock);
  pi += mysum;
  pthread_mutex_unlock(&lock);
}

int main() {
  int i;
  pthread_t tids[NPROCS];

  for (i = 0; i < NPROCS; i++)  /* νήματα = # επεξεργατών */
    pthread_create(&tids[i], NULL, thrfunc, (void *) i);
  for (i = 0; i < NPROCS; i++)
    pthread_join(tids[i], NULL);
  printf("pi = %.10lf\n", pi);
  return 0;
}
```

```
void *thrfunc(void *iter) {
  int    i, me = (int) iter;
  double mysum = 0.0;
  for (i = me; i < N; i += NPROC)
    mysum += 4*W / (1 + (i+0.5)*(i+0.5)*W*W);
  pthread_mutex_lock(&lock);
  pi += mysum;
  pthread_mutex_unlock(&lock);
}
```

Γνωστό και ως “loop splitting” (ατυχές)

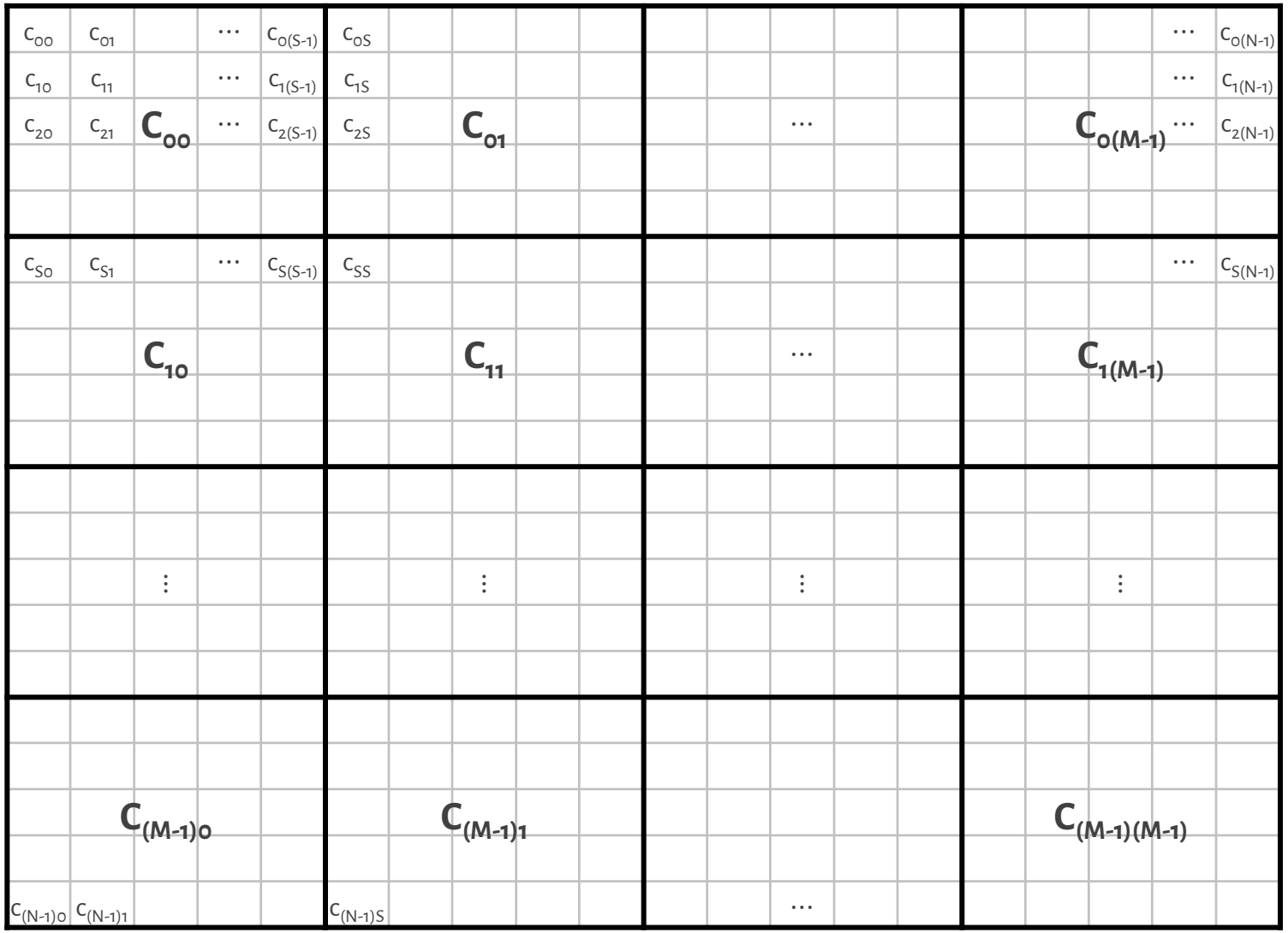
Πλεονεκτήματα / μειονεκτήματα;

Πίνακας επί πίνακα (τετραγωνικοί)

```
for (i = 0; i < N; i++) {
  for (j = 0; j < N; j++) {
    for (k = sum = 0; k < N; k++)
      sum += A[i][k]*B[k][j];
    C[i][j] = sum;
  }
}
```

- Παραλληλοποίηση:
  - Ενός βρόχου (i)
    - μοίρασμα των επαναλήψεων του πρώτου for σε νήματα
    - Δεν δουλεύει καλά πάντα, π.χ. τι γίνεται αν # επεξεργαστών > N ??
  - Δύο βρόχων (i και j)
    - *Checkerboard partitioning*: παραλληλοποίηση και των δύο βρόχων
    - *Μπορώ εναλλακτικά να παραλληλοποιήσω τον βρόχο j και k?*

Διαχωρισμός σκακιέρας

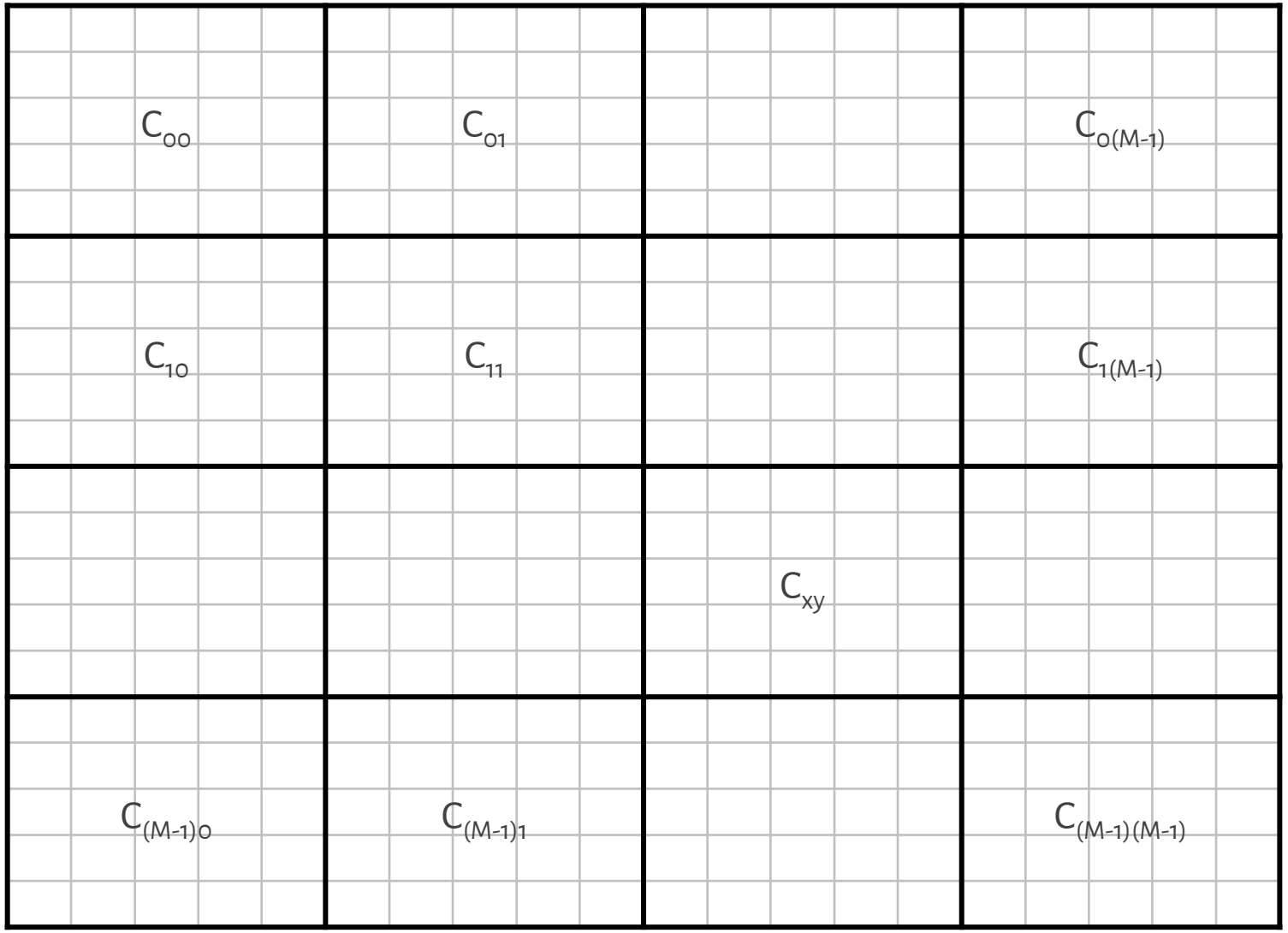


Υποπίνακες διάστασης S×S

Άρα M = N/S υποπίνακες οριζόντια / κάθετα:

M^2 υποπίνακες

Διαχωρισμός σκακιέρας – αρίθμηση υποπινάκων



Αν τους αριθμήσουμε από 0 έως M^2-1, ο i-οστός υποπίνακας είναι ο C_{xy} όπου:

$x = i / M$

$y = i \% M$

Διαχωρισμός σκακιέρας – το πρόγραμμα

```
#define N    1000     /* matrices 1000x1000 */
#define NTHR 25       /* # threads */
#define M    5        /* M*M submatrices in total */
#define S    N/M      /* size of each submatrix */
double  A[N][N], B[N][N], C[N][N];

void *checker(void *arg) {
  int    i, j, k, x, y, me = (int) arg;
  double sum;

  x = me / M;
  y = me % M;
  for (i = x*S; i < (x+1)*S; i++) {  /* calculate Cxy  */
    for (j = y*S; j < (y+1)*S; j++) {
      for (k = 0, sum = 0.0; k < N; k++)
        sum += A[i][k]*B[k][j];
      C[i][j] = sum;
    }
  }
}

int main() {
  int i;
  pthread_t thr[NTHR];

  for (i = 0; i < NTHR; i++)
    pthread_create(&thr[i], NULL, checker, (void *) i);
  for (i = 0; i < NTHR; i++)
    pthread_join(thr[i], NULL);
  show_result(C, N);
  return 0;
}
```

Δεν υπάρχει ανάγκη αμοιβαίου αποκλεισμού

Embarrassingly parallel

Πίνακας επί διάνυσμα – πιο απλό?

```
double A[N][N], v[N], res[N];

for (i = 0; i < N; i++) {
  res[i] = 0.0;
  for (j = 0; j < N; j++)
    res[i] += A[i][j]*v[j];
}
```

- Παραλληλοποίηση του βρόχου i, μοιράζοντας τις επαναλήψεις στα νήματα

Πίνακας επί διάνυσμα – παράλληλα (I)

```
int main() {
  int i;
  pthread_t tids[NPROCS];

  for (i = 0; i < NPROCS; i++)
    pthread_create(&tids[i], NULL, thrfunc, (void *) i);
  for (i = 0; i < NPROCS; i++)
    pthread_join(tids[i], NULL);
  return 0;
}
```

```
#define N      8000
#define NPROCS 8
#define RPT    N/NPROCS  /* "Rows Per Thread" */
double  A[N][N], v[N], res[N];

void *thrfunc(void *arg) {
  int    i, j, myid = (int) arg;

  for (i = myid*RPT; i < (myid+1)*RPT; i++) {
    res[i] = 0.0;
    for (j = 0; j < N; j++)
      res[i] += A[i][j]*v[j];
  }
}
```

- Καλός κώδικας, όταν NPROC < N.
  - Τι γίνεται όταν, όμως, έχουμε NPROC > N ?
- Η παραλληλοποίηση του βρόχου, τότε, δεν θα δουλεύει καλά.
  - Θα υπάρχουν διεργασίες που δεν κάνουν τίποτε!
  - παραλληλοποίηση και των δύο βρόχων (i και j) μαζί

Πίνακας επί διάνυσμα – παράλληλα (II)

```
#define N     100       /* vector size */
#define NPROC 200       /* #cores = #threads */
#define TPR   NPROC/N   /* threads-per-row */
double  A[N][N], v[N], res[N];
pthread_mutex_t lock = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;

void *matvec(void *arg) {
  int    i, j, me = (int) arg;
  double sum = 0.0;

  i = me / TPR;       /* my row */
  for (j = me % TPR; j < N; j += TPR)
    sum += A[i][j]*v[j];
  pthread_mutex_lock(&lock);
  res[i] += sum;
  pthread_mutex_unlock(&lock);
}
```

```
int main() {
  int i;
  pthread_t thr[NPROC];

  for (i = 0; i < N; i++)
    res[i] = 0.0;
  for (i = 0; i < NPROC; i++)
    pthread_create(&thr[i], NULL, matvec, (void *) i);
  for (i = 0; i < NPROC; i++)
    pthread_join(thr[i], NULL);
  show_result(res, N);
  return 0;
}
```

- Υποθέτουμε ότι το N διαιρεί το NPROC
- Απαιτείται, πλέον, αμοιβαίος αποκλεισμός.
- Προσοχή στην αρχικοποίηση του res[].

Παράλληλη αρχικοποίηση;;

Κάθε ομάδα νημάτων να αρχικοποιεί το δικό της res[i]

Π.χ. το πρώτο νήμα (me%TPR== 0) να κάνει res[i] = 0.0.

Υπάρχει κάποιο πρόβλημα;

Συγχρονισμός: σωστή παράλληλη αρχικοποίηση

```
#define N     100       /* vector size */
#define NPROC 200       /* #cores = #threads */
#define TPR   NPROC/N   /* threads-per-row */
double  A[N][N], v[N], res[N];
pthread_mutex_t lock = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;
pthread_barrier_t bar;

void *matvec(void *arg) {
  int    i, j, me = (int) arg;
  double sum = 0.0;

  i = me / TPR;         /* my row */
  if (me % TPR == 0)    /* i will initialize */
    res[i] = 0;
  pthread_barrier_wait(&bar);   /* make sure all wait here */
  for (j = me % TPR; j < N; j += TPR)
    sum += A[i][j]*v[j];
  pthread_mutex_lock(&lock);
  res[i] += sum;
  pthread_mutex_unlock(&lock);
}
```

```
int main() {
  int i;
  pthread_t thr[NPROC];

  pthread_barrier_init(&bar, NULL, NPROC);
  for (i = 0; i < NPROC; i++)
    pthread_create(&thr[i], NULL, matvec, (void *) i);
  for (i = 0; i < NPROC; i++)
    pthread_join(thr[i], NULL);
  show_result(res, N);
  return 0;
}
```

Όλα τα νήματα στον ίδιο barrier! ☹

Άλλη ιδέα;

Το πρώτο νήμα μιας ομάδας να δημιουργεί τα υπόλοιπα, αμέσως μετά την αρχικοποίηση
(άρα => παράλληλη δημιουργία νημάτων)

Δύο ακόμα θέματα με τα νήματα

- Πώς μπορώ να εξασφαλίσω ότι κάτι θα γίνει από μόνο ένα νήμα;
  - Π.χ. Έχουν ήδη δημιουργηθεί τα νήματα και θέλω να αρχικοποιήσω μία κοινή μεταβλητή.
- Πώς μπορώ να έχω ιδιωτικές global μεταβλητές στα νήματα;
  - Π.χ. Θέλω να έχω μία μεταβλητή global ώστε να μην την περνάω από συνάρτηση σε συνάρτηση, αλλά δεν θέλω να είναι κοινή μεταξύ των νημάτων.
  - “thread local storage” - TLS

pthread_once: Εκτέλεση μιας φοράς

```
pthread_once_t once_block = PTHREAD_ONCE_INIT
pthread_mutex_t mutex;

/* It is guaranteed that this will be called only once */
void routine(void) {
      pthread_mutex_init(&mutex, NULL);
}

/* Thread */
void *threadfunc(void *arg) {
      pthread_once(&once_block, routine);    /* Κλήση ρουτίνας */
      ...
}

int main() {
      pthread_create(&t, NULL, threadfunc, NULL);  /* Νέο νήμα */
      pthread_once(&once_block, routine);    /* Κλήση ρουτίνας */
      ...
}
```

pthread specifics: Ιδιωτικά (Καθολικά) Δεδομένα Νημάτων

- Τρόπος 1ος (εύκολος, γρήγορος, όμως δουλεύει μόνο με ορισμένους compilers και μόνο σε συγκεκριμένα λειτουργικά συστήματα κλπ)

```
__thread int x; /* Global, but each thread has its own copy of the variable */
```

- Τρόπος 2ος (POSIX, portable): thread-specifics

```
pthread_key_t key;

main() {
   ...
  pthread_key_create(&key, NULL);   /* Initialize the key -- should be done
  once! */
   pthread_create(&t, NULL, thread_routine, ...);

}

void *thread_routine(void *) {
  long *value;

  mydata = malloc(sizeof(long));      /* Allocate space */
  *mydata = ...;
  pthread_setspecific(key, value);    /* Store *my* data at this key */
  ...
  mydata = pthread_getspecific(key);  /* Get *my* data */
}
```

Δυναμική συμπεριφορά

- Η μέχρι τώρα διάσπαση σε «εργασίες» ήταν *στατική* δηλαδή είχαμε προκαθορίσει *ακριβώς* τι θα εκτελέσει το κάθε νήμα.
  - π.χ. στο π, ή ο διαχωρισμός σκακιέρας στον πολ/μο πινάκων
- Ως γνώμονα είχαμε την *ισοκατανομή φόρτου* ώστε όλα τα νήματα να εκτελέσουν παρόμοιο έργο και άρα να δουλέψουν για ίδιο χρονικό διάστημα (που είναι το ιδανικό).
- Τι γίνεται όμως αν κάποιοι επεξεργαστές
  - Είναι πιο αργοί από τους άλλους ή
  - Για το συγκεκριμένο διάστημα είναι περισσότερο φορτωμένοι από τους άλλους (διότι π.χ. εκτελούν και κάποια άλλη εφαρμογή)
- Σε αυτή την περίπτωση, η ισόποση διαμοίραση των εργασιών *ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΟΤΙ ΚΑΛΥΤΕΡΟ*!

Αυτοδρομολόγηση (self-scheduling)

- Εφαρμόζεται σε αυτές τις περιπτώσεις.
- Δυναμικά (δηλαδή κατά την ώρα της εκτέλεσης), τα πιο «αργά» νήματα θα εκτελέσουν λιγότερο έργο.

- Πώς;
  - Δεν προκαθορίζουμε τι θα εκτελέσει το κάθε νήμα
  - Χωρίζουμε τους υπολογισμούς σε «δουλειές» (tasks)
  - Αφήνουμε κάθε νήμα να ζητάει δουλειά να κάνει
  - Όσο πιο γρήγορα τελειώσει μία δουλειά, τόσες περισσότερες δουλειές θα πάρει να εκτελέσει

```
while (there-are-things-to-calculate)
{
   Task = get-the-next-task()
   execute(Task);
}
```

Αυτοδρομολόγηση – κώδικας

- Έστω ότι κάπως έχουμε χωρίσει τη δουλειά σε NTASK εργασίες, από 0 έως NTASK−1.
- Έστω ότι η t-οστή εργασία εκτελείται ως `taskexecute(t)`

```
int taskid = 0;     /* the next task id to execute */
pthread_mutex_t tlock = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;

void *thrfunc(void *arg) {
  int t;

  while (1) {       /* forever */
    pthread_mutex_lock(&tlock);
    t = taskid++;   /* get next task */
    pthread_mutex_unlock(&tlock);
    if (t >= NTASK)
      break;        /* all tasks done */
    taskexecute(t);
  }
}
```

Αυτοδρομολόγηση, συνέχεια

- Για οποιαδήποτε εφαρμογή, ΑΚΡΙΒΩΣ το ίδιο πρόγραμμα
- Αρκεί μόνο να θέσουμε το NTASK σε σωστή τιμή και να υλοποιήσουμε τη κατάλληλη `taskexecute()`
- Τα ταχύτερα νήματα «κλέβουν» τις πιο πολλές εργασίες και άρα καλύτερη κατανομή φόρτου
- Στη γενικότερη μορφή της, υπάρχει μία *ουρά* από εργασίες που πρέπει να εκτελεστούν.
  - Τα νήματα «τραβούν» εργασίες από την κεφαλή της ουράς
- Αν δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά στις ταχύτητες (π.χ. το σύστημα εκτελεί μόνο τη δική μας εφαρμογή), η αυτοδρομολόγηση δεν είναι πάντα ότι καλύτερο μιας και έχει συναγωνισμό για την κλειδαριά (ή την πρόσβαση στην ουρά), για κάθε εργασία.

Παράδειγμα: υπολογισμός του π με αυτοδρομο/ση

```
int taskid = 0;     /* the next task id to execute */
pthread_mutex_t tlock = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;

void *thrfunc(void *arg) {
  int t;

  while (1) {       /* forever */
    pthread_mutex_lock(&tlock);
    t = taskid++;   /* get next task */
    pthread_mutex_unlock(&tlock);
    if (t >= NTASK)
      break;        /* all tasks done */
    taskexecute(t);
  }
}
```

```
#define N 10000000      /* # iterations */
#define K 100           /* iterations per task */
#define NTASK N/K       /* total # tasks */
double pi = 0.0, W = 1.0/N;
pthread_mutex_t pilock = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;

void taskexecute(int t) {
  int    i;
  double mysum = 0.0;

  for (i = t*K; i < (t+1)*K; i++)
    mysum += 4*W / (1 + (i+0.5)*(i+0.5)*W*W);
  pthread_mutex_lock(&pilock);
  pi += mysum;
  pthread_mutex_unlock(&pilock);
}
```

Παράδειγμα: checkerboard + αυτοδρομολόγηση

```
int taskid = 0;     /* the next task id to execute */
pthread_mutex_t tlock = PTHREAD_MUTEX_INITIALIZER;

void *thrfunc(void *arg) {
  int t;

  while (1) {       /* forever */
    pthread_mutex_lock(&tlock);
    t = taskid++;   /* get next task */
    pthread_mutex_unlock(&tlock);
    if (t >= NTASK)
      break;        /* all tasks done */
    taskexecute(t);
  }
}
```

```
#define N 10000       /* μέγεθος πίνακα */
#define M 100         /* 100 x 100 υποπίνακες */
#define S N/M         /* μέγεθος υποπίνακα */
#define NTASK M*M     /* τόσοι υποπίνακες */

void taskexecute(int wid) {
  int    i, j, k, x, y;
  double sum;

  x = wid / M;
  y = wid % M;
  for (i = x*S; i < (x+1)*S; i++)  /* στοιχεία του Cxy */
    for (j = y*S; j < (y+1)*S; j++)
    {
      for (k = 0, sum = 0.0; k < N; k++)
        sum += A[i][k]*B[k][j];
      C[i][j] = sum;
    };
}
```