

Μετρικές & Επιδόσεις

Κεφάλαιο 6

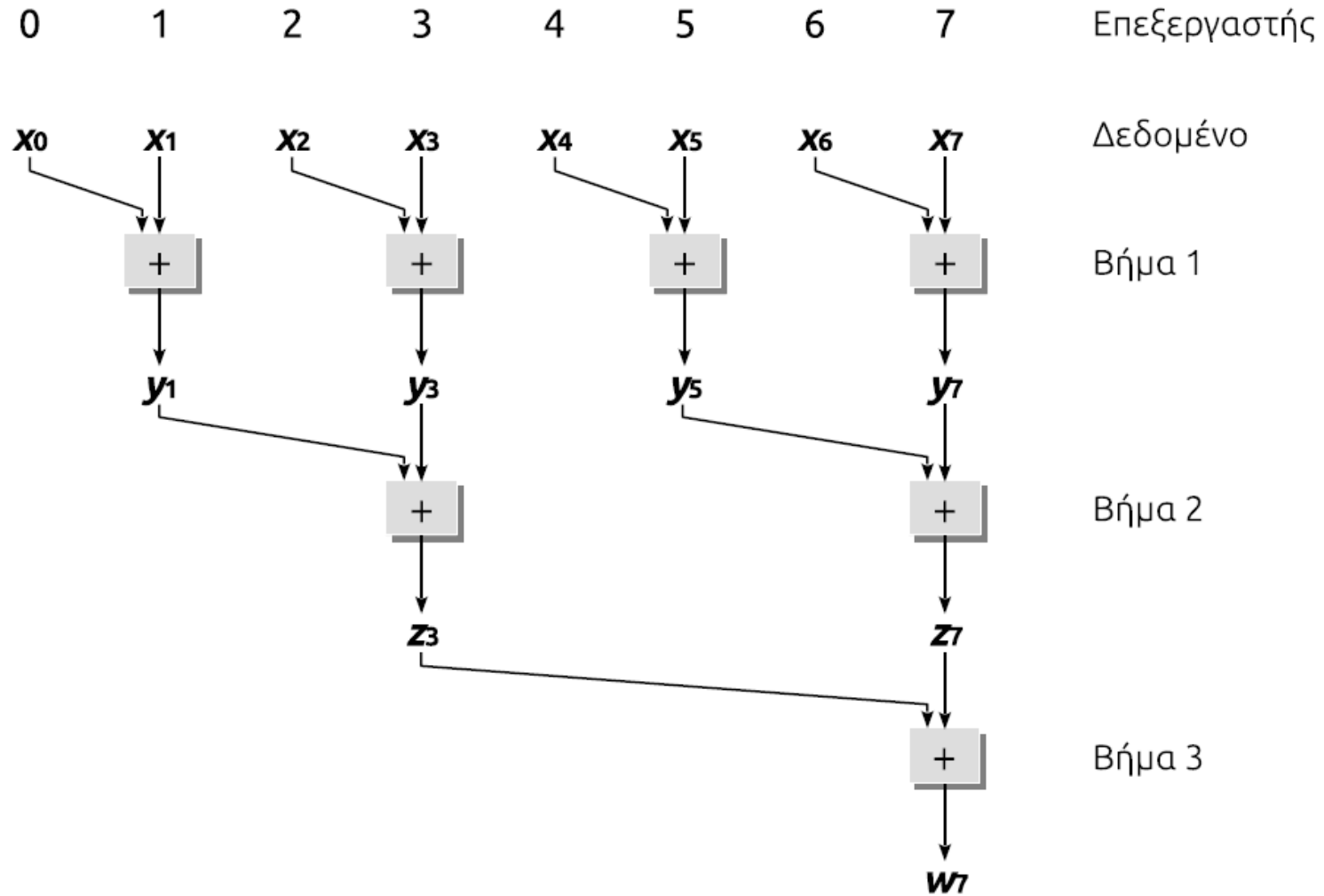


- ❖ Σειριακός χρόνος εκτέλεσης:
 - T_1 (για τον καλύτερο σειριακό αλγόριθμο)
- ❖ Παράλληλος χρόνος εκτέλεσης:
 - T_n (με n επεξεργαστές)

Επιτάχυνση (speedup):

$$S_n = \frac{T_1}{T_n}$$

Παράδειγμα: πρόσθεση αριθμών



Παράδειγμα: ανάλυση

- ❖ Κατά το βήμα j κάθε επεξεργαστής i , όπου:

$$i = \{1 \times 2^{j-1} - 1, 3 \times 2^{j-1} - 1, 5 \times 2^{j-1} - 1, \dots\},$$

στέλνει τον αριθμό που διαθέτει, στον επεξεργαστή:

$$i + 2^{j-1}.$$

- ❖ Σε κάθε βήμα, οι αριθμοί μειώνονται κατά το $\frac{1}{2}$, άρα:

$$T_n = \Theta(\log n)$$

- ❖ Σειριακός αλγόριθμος για το ίδιο πρόβλημα απαιτεί $T_1 = \Theta(n)$ βήματα. Επομένως,

$$S_n = \Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

- ❖ Με n επεξεργαστές, στην καλύτερη περίπτωση θα χρειαστούμε το $1/n$ του χρόνου, επομένως το πολύ γραμμική (ιδεώδης) επιτάχυνση:

$$S_n \leq n$$

- ❖ Έχει, όμως παρατηρηθεί *υπεργραμμική* (superlinear) επιτάχυνση, όπου $S_n > n$ (!)

- ❖ Κυριότεροι λόγοι:

- Το μέγεθος του συστήματος (π.χ. μνήμη) επηρεάζει την ταχύτητα
- Η τυχαία φύση του αλγορίθμου

- ❖ Η επιτάχυνση δεν μας λέει τίποτε για το πόσο καλά χρησιμοποιούμε το σύστημα
 - (π.χ. επιτάχυνση 10 με 1000 CPUs δεν είναι και τόσο καλό)

Αποδοτικότητα

$$e_n = \frac{S_n}{n} = \frac{T_1}{nT_n}$$

$$(e_n \leq 1)$$

- ❖ Αν $S_n = n$ ή ισοδύναμα $e_n = 1$ (100%), το πρόγραμμα ονομάζονται εντελώς παραλληλοποιήσιμο.
- ❖ Στο παράδειγμά μας, $S_n = \Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$ και άρα $e_n = \Theta\left(\frac{1}{\log n}\right)$

Κόστος

$$c_n = nT_n$$

$$(c_1 = T_1)$$

- ❖ Δείχνει *αθροιστικά* πόσος χρόνος αφιερώθηκε από όλους τους επεξεργαστές
- ❖ Στην ιδεώδη περίπτωση, πρέπει να αφιερωθεί τόσος χρόνος όσο απαιτεί και η σειριακή έκδοση αλλά στην πράξη για διάφορους λόγους χρειαζόμαστε παραπάνω χρόνο
- ❖ Ένα πρόγραμμα θα έχει **βέλτιστο κόστος** όταν το κόστος του διαιρούμενο με το σειριακό κόστος είναι σταθερός αριθμός:

$$\frac{c_n}{T_1} = \Theta(1)$$

- ❖ Σημαντικός χρόνος που πάει χαμένος και δεν εμφανίζεται στη σειριακή εκτέλεση είναι ο χρόνος που σπαταλιέται σε επικοινωνίες / αλληλεπίδραση μεταξύ των επεξεργαστών:
 - για πολυεπεξεργαστές κοινής μνήμης: αμοιβαίος αποκλεισμός και συγχρονισμός
 - για πολυεπεξεργαστές κατανεμημένης μνήμης: αποστολή / λήψη μηνυμάτων

Παράδειγμα: πρόσθεση αριθμών σε γραμμικό γράφο

Υπενθύμιση:

στο βήμα j αν ο επεξεργαστής i συμμετέχει πρέπει να στείλει τον αριθμό του στον επεξεργαστή $i+2^{j-1}$

- ❖ Οι επεξεργαστές i και $i+2^{j-1}$ πόσο απέχουν στον γραμμικό γράφο;
Απάντηση: 2^{j-1} ακμές. Άρα:

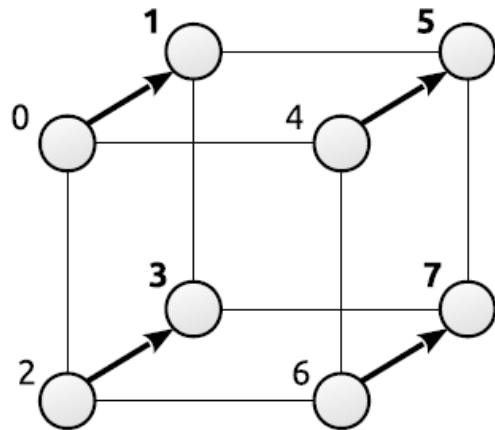
$$T_n = \sum_{j=1}^{\log n} (1 + 2^{j-1})$$

- ❖ το οποίο δίνει:

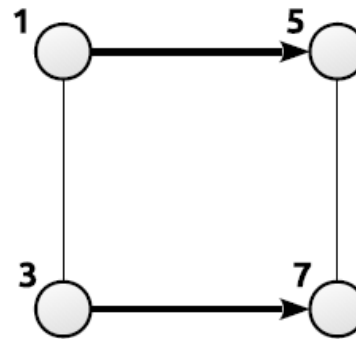
$$T_n = n + \log n - 1$$

- ❖ Προσέξτε ότι $T_n > T_1 = n - 1$ (!!)

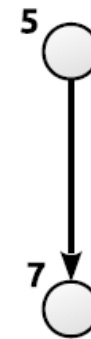
Παράδειγμα: πρόσθεση αριθμών σε υπερκύβο



Βήμα 1



Βήμα 2



Βήμα 3

- ❖ Σε κάθε βήμα, οι επεξεργαστές i και $i+2^{j-1}$ είναι γειτονικοί.
- ❖ Άρα έχουν απόσταση 1 και επομένως, σε κάθε βήμα θέλουμε 1 χρονική μονάδα για επικοινωνία και 1 για υπολογισμό:

$$T_n = 2 \log n$$

Λίγοι επεξεργαστές – αύξηση κόκκου παραλληλίας

- ❖ Συνήθως οι αλγόριθμοι σχεδιάζονται χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το μέγεθος του συστήματος που θα φιλοξενήσει το πρόγραμμα.
 - Γίνεται η υπόθεση ότι για οποιοδήποτε μέγεθος προβλήματος / εισόδου (N) θα διαθέτουμε όσους επεξεργαστές επιθυμούμε ή «μας βολεύει»
 - Για μέγεθος εισόδου N (π.χ. πρόσθεση N αριθμών) συνήθως υποθέτουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον N επεξεργαστές
 - Όταν φτάσουμε στην πράξη, όμως, διαθέτουμε συνήθως πολύ λιγότερους ($n < N$)! Πρέπει να ξανασχεδιάσουμε τον αλγόριθμο;
 - ❖ Απάντηση: Όχι, υπάρχει απλός τρόπος να το αποφύγουμε.
- ❖ Ας υποθέσουμε ότι μέγεθος εισόδου = N και σχεδιάσαμε τον αλγόριθμό μας για N επεξεργαστές ενώ στην πράξη διαθέτουμε μόνο $n < N$ επεξεργαστές.
 - Οι N είναι οι **εικονικοί επεξεργαστές**.
 - Οι n είναι οι **πραγματικοί επεξεργαστές**.
- ❖ Μέθοδος: κάθε **πραγματικός επεξεργαστής** αναλαμβάνει την εξομοίωση N/n **εικονικών** (αύξηση κόκκου παραλληλίας)

❖ Αναμενόμενος χρόνος εκτέλεσης:

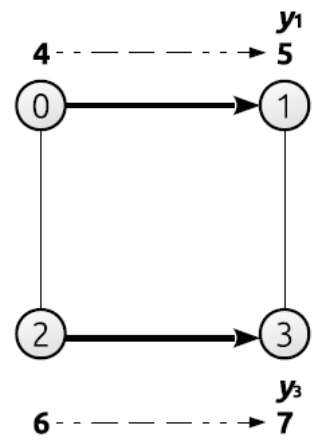
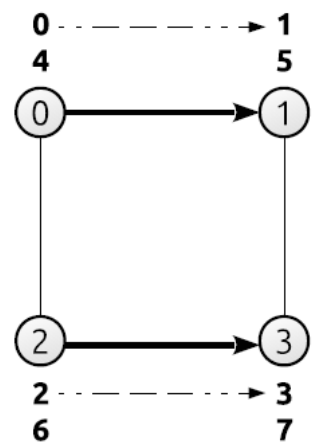
- Χρόνοι υπολογισμών αυξημένοι κατά N/n το πολύ
- Χρόνοι επικοινωνίας αυξημένοι κατά N/n το πολύ, άρα:

$$T_n = \Theta\left(\frac{N}{n}T_N\right)$$

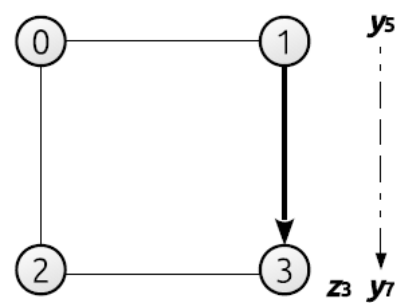
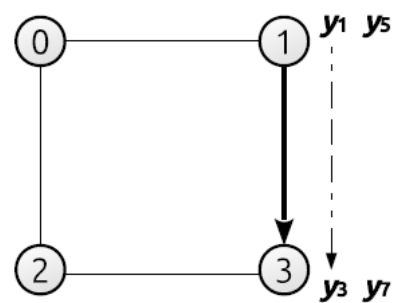
$$c_n = nT_n = n\Theta\left(\frac{N}{n}T_N\right) = \Theta(NT_N) = \Theta(c_N).$$

- Συμπέρασμα: δεν μειώνεται η αποδοτικότητα και δεν αυξάνει το κόστος

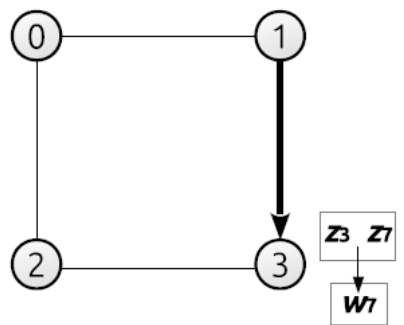
Παράδειγμα: πρόσθεση σε υπερκύβο με κυκλική ανάθεση



1ο βήμα του αλγορίθμου
(2 πραγματικά βήματα)



2ο βήμα του αλγορίθμου
(2 πραγματικά βήματα)



3ο βήμα του αλγορίθμου
(μόνο πρόσθεση)



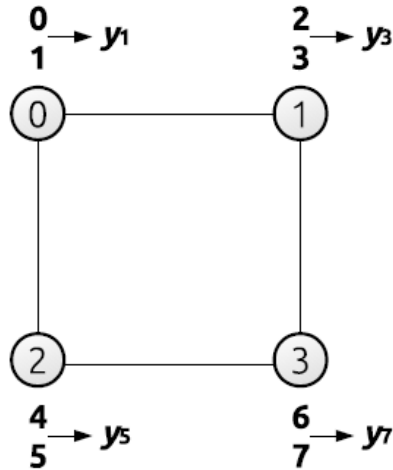
Παράδειγμα: ανάλυση

- ❖ Για τα πρώτα $\log n$ βήματα του αρχικού αλγόριθμου, κάθε επεξεργαστής κάνει τη δουλειά N/n εικονικών, άρα
 - χρόνος εκτέλεσης: $\Theta((N/n) \log n)$
- ❖ Για τα υπόλοιπα, όλοι οι αριθμοί έχουν μαζευτεί σε έναν επεξεργαστή
 - Άρα χρόνος: $\Theta(N/n)$
- ❖ Συνολικά:
 - $T_n = \Theta((N/n) \log n)$.
- ❖ Κόστος
 - $c_n = nT_n = \Theta(N \log n)$,

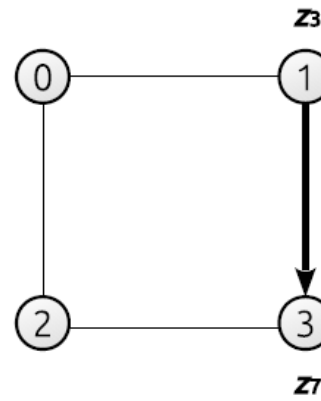
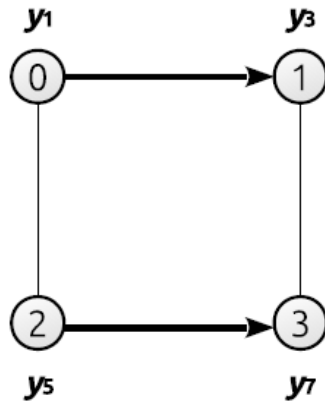
το οποίο δεν είναι βέλτιστο, όπως συνέβαινε και στον αρχικό αλγόριθμο.

- ❖ Με αυτό που κάναμε, ουσιαστικά *αυξήσαμε τον κόκκο παραλληλίας*
 - Κάθε επεξεργαστής εκτελεί περισσότερα πράγματα πλέον
 - Ταυτόχρονα όμως, κάποιες επικοινωνίες πλέον δεν χρειάζεται να γίνουν και έτσι κερδίζουμε κάποιο χρόνο
- ❖ Πώς;
 - Περιμέναμε ότι ο χρόνος θα ήταν $\Theta((N/n)T_n) = \Theta((N/n) \underline{\log N})$.
 - Όμως είδαμε ότι βγήκε μικρότερος $T_n = \Theta((N/n) \underline{\log n})$.
- ❖ Η αύξηση του κόκκου στην πράξη μειώνει τις επικοινωνίες
 - Έτσι, μπορεί να μειωθεί και το κόστος, και μάλιστα να γίνει βέλτιστο!

❖ Αλλαγή της ανάθεσης: τμηματική αντί κυκλικής



1η φάση
(μόνο τοπικές προσθέσεις)



2η φάση
(αλγόριθμος σε 2-κύβο)

Παράδειγμα: ανάλυση

- ❖ Στα πρώτα βήματα προσθέσεις τοπικές
 - Θα μείνει 1 αριθμός σε κάθε πραγματικό επεξεργαστή
 - $\Theta(N/n)$
- ❖ Στη συνέχεια αλγόριθμος για n αριθμούς
 - $\Theta(\log n)$
- ❖ Συνολικά, ο απαιτούμενος χρόνος θα διαμορφωθεί ως:
 - $T_n = \Theta(N/n) + \Theta(\log n) = \Theta(N/n + \log n)$.
- ❖ Κόστος
 - $c_n = nT_n = \Theta(N + n \log n)$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Όσο ο όρος N επικρατεί, δηλαδή $N = \Omega(n \log n)$, το κόστος είναι $c_n = \Theta(N)$ – δηλαδή βέλτιστο!

Είναι «άχρηστοι» χρόνοι που δεν εμφανίζονται στη σειριακή εκτέλεση

➤ Λόγω επικοινωνιών (T_{comm})

- ✧ Στο άθροισμα στον υπερκύβο κάθε βήμα του αλγόριθμου είχε και 1 χρονική μονάδα επικοινωνίας, με $\log n$ μονάδες συνολικά. Άρα σε όλο τον υπερκύβο, ο χρόνος που αφιερώθηκε σε επικοινωνίες ήταν

$$T_{\text{comm}} = n \log n$$

➤ Λόγω ανισοκατανομής φόρτου (T_{idle})

- ✧ Στο άθροισμα των αριθμών, ξεχνώντας τις επικοινωνίες, υπάρχουν $\log n$ βήματα υπολογισμών. Συνολικά οι επεξεργαστές αφιέρωσαν χρόνο $n T_n = n \log n$. Όμως, έγιναν ακριβώς $n-1$ προσθέσεις και άρα τα υπόλοιπα $T_{\text{idle}} = n \log n - n + 1$ βήματα χάθηκαν λόγω ανισοκατανομής.

$$T_{ovh} = T_{comm} + T_{idle}.$$

❖ Για καθαρούς υπολογισμούς αφιερώθηκε χρόνος:

$$W_n = nT_n - T_{ovh}$$

❖ Όμως $W_n = T_1$. Επομένως, $T_1 = nT_n - T_{ovh}$, που δίνει:

$$T_n = \frac{T_1 + T_{ovh}}{n}$$
$$S_n = \frac{T_1}{T_n} = n \frac{1}{1 + T_{ovh}/T_1}$$
$$e_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{1 + T_{ovh}/T_1}$$
$$c_n = nT_n = T_1 + T_{ovh}$$

$$c_n = nT_n = T_1 + T_{ovh}$$

- ❖ Αν το πρόγραμμά μας απαιτείται να έχει βέλτιστο κόστος, θα πρέπει:

$$\frac{c_n}{T_1} = 1 + \frac{T_{ovh}}{T_1} = \Theta(1)$$

που σημαίνει ότι για ένα πρόγραμμα με βέλτιστο κόστος, θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{T_{ovh}}{T_1} = \Theta(1)$$

Παράδειγμα στον υπερκύβο

- ❖ Είδαμε ήδη ότι στον υπερκύβο χρειαζόμαστε χρόνο $T_n = 2\log n$, πράγμα που σημαίνει ότι θα πρέπει:

$$T_{\text{ovh}} = nT_n - (n - 1) = 2n\log n - n + 1,$$

αφού γνωρίζουμε ότι απαιτούνται συνολικά $T_1 = n - 1$ προσθέσεις.

- ❖ Παρατηρούμε ότι:

$$T_{\text{ovh}} / T_1 = \Theta(n\log n) / \Theta(n) = \Theta(\log n).$$

- ❖ Ο αλγόριθμος δεν έχει βέλτιστο κόστος

«Νόμοι» και κλιμακωσιμότητα

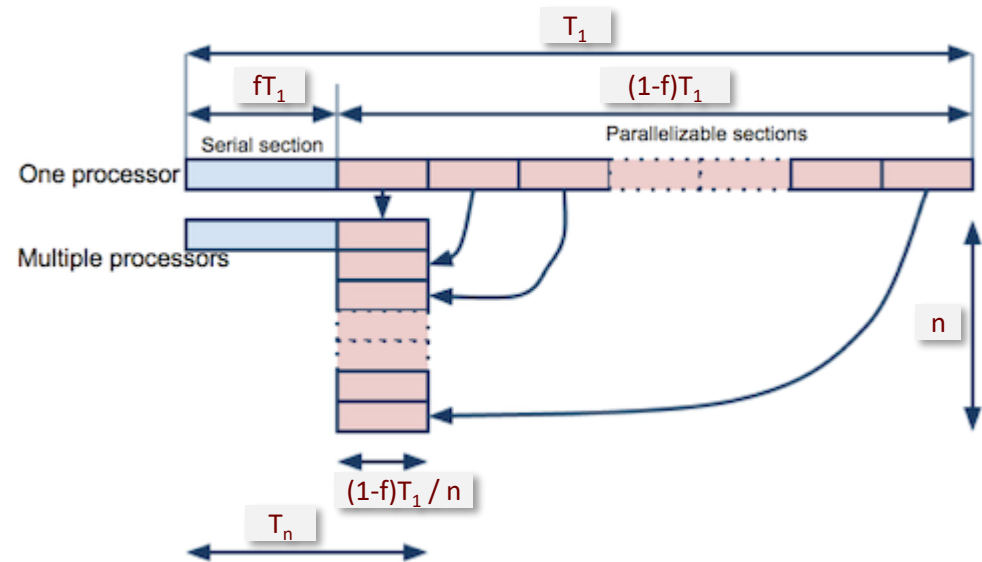


MYE 023

Ο νόμος του Amdahl

❖ Έστω ότι διαθέτουμε n επεξεργαστές και ότι το πρόγραμμά μας έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Ένα ποσοστό f των εντολών μπορεί να εκτελεστεί μόνο σειριακά.
- Το υπόλοιπο ποσοστό $(1-f)$ των εντολών είναι εντελώς παραλληλοποιήσιμο.



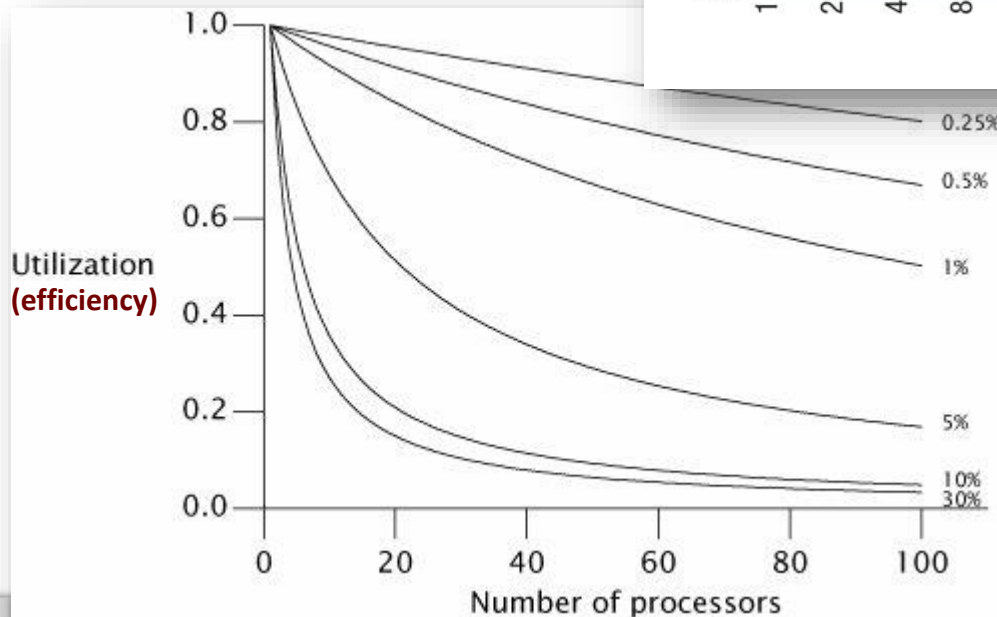
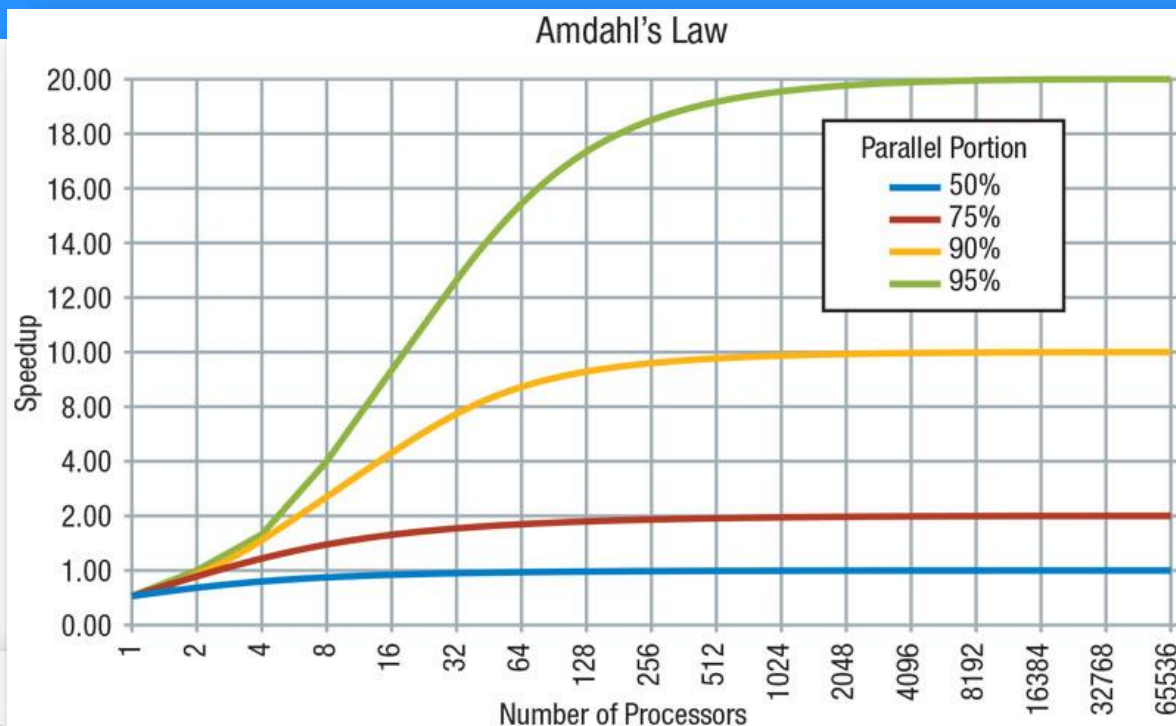
❖ Τότε:

$$T_n = fT_1 + (1-f)\frac{T_1}{n}$$

$$S_n = \frac{T_1}{T_n} = \frac{n}{nf + (1-f)} \leq \frac{1}{f}$$

Ο νόμος του Amdahl γραφικά

- ❖ 1967
- ❖ Αρνητικός «νόμος»!



Ο νόμος του Gustafson

- ❖ Έστω ότι διαθέτουμε n επεξεργαστές οι οποίοι εκτελούν ένα πρόγραμμα παράλληλα με τα εξής χαρακτηριστικά:
 - Ένα ποσοστό f' των εντολών εκτελείται μόνο του, σειριακά, από έναν μόνο επεξεργαστή.
 - Το υπόλοιπο ποσοστό $(1-f')$ των εντολών εκτελείται εντελώς παράλληλα.
 - Ποια είναι η επιτάχυνση;

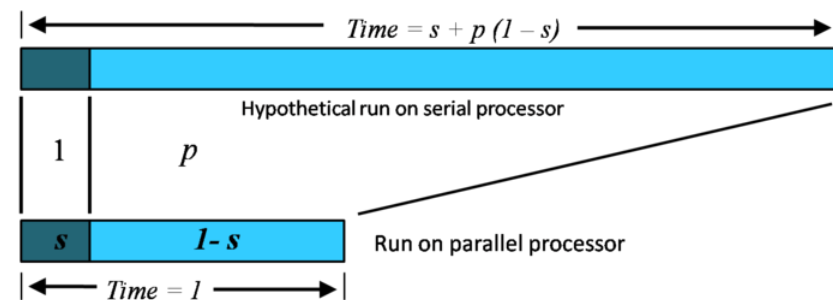
❖ Απάντηση:

Αν κατά την εκτέλεση του παράλληλου προγράμματος τα f' βήματα ήταν το ποσοστό του σειριακού κομματιού και το υπόλοιπο $1 - f'$ εκτελέστηκε παράλληλα από τους n επεξεργαστές, τότε σε έναν σειριακό υπολογιστή θα χρειαζόμασταν χρόνο:

$$T_1 = f' T_n + (1 - f') n T_n$$

❖ Επομένως:

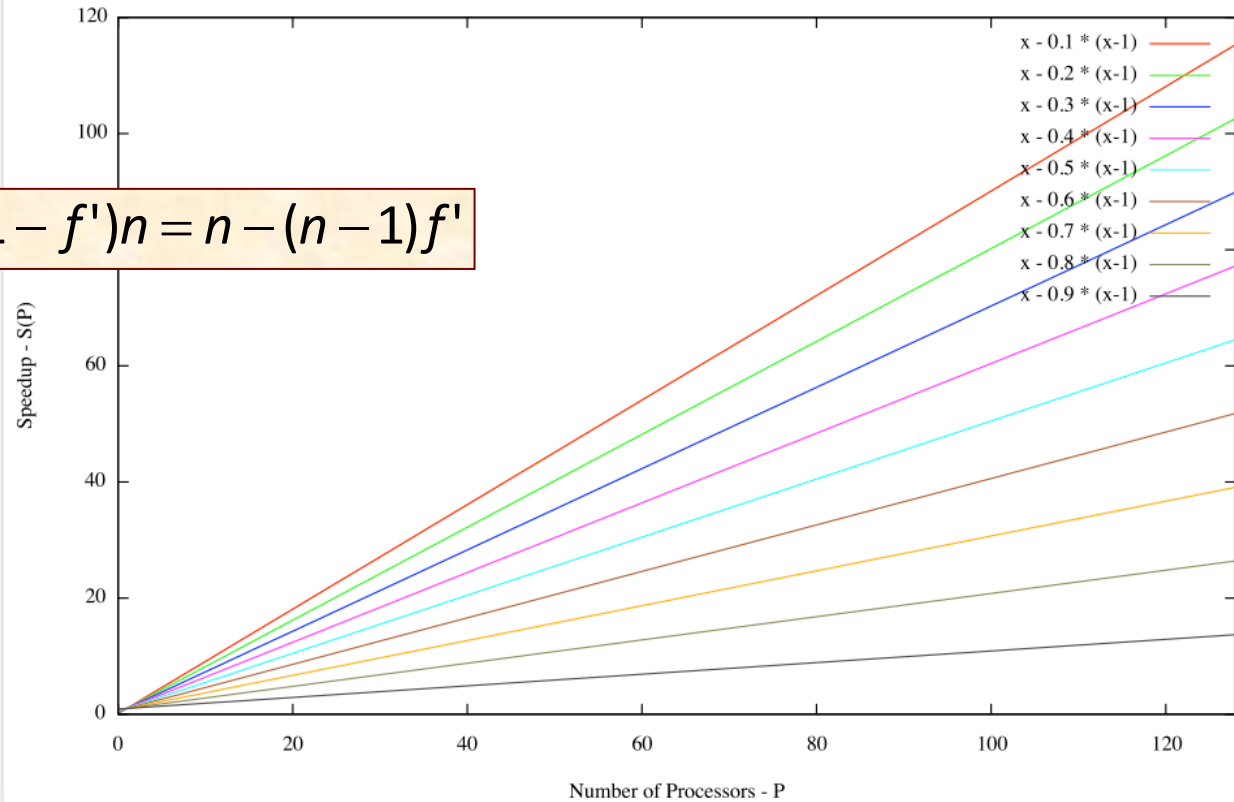
$$S_n = f' + (1 - f') n = n - (n - 1) f'$$



Ο νόμος του Gustafson γραφικά

Gustafson's Law: $S(P) = P - a \cdot (P-1)$

$$S_n = f' + (1 - f')n = n - (n - 1)f'$$



- ❖ Μπορούμε να επιτύχουμε μεγάλη επιτάχυνση και κατά συνέπεια αποδοτικότητα (ανάλογα βέβαια με την τιμή του f').
 - Ακόμα και αν $f' = 50\%$, πετυχαίνουμε επιτάχυνση $> n/2$!
- ❖ Ο νόμος του Amdahl συνεχίζει να ισχύει (!!??).

Σημαντική παρατήρηση

- ❖ Πολλές φορές ενδιαφερόμαστε, με αύξηση των επεξεργαστών, μέσα στον ίδιο χρόνο να εκτελέσουμε το πρόγραμμά μας με μεγαλύτερη ακρίβεια
=> *μεγαλύτερο πρόβλημα*
 - Π.χ. πρόγνωση καιρού
- ❖ Πρέπει επομένως να λαμβάνουμε υπόψη μας και το μέγεθος εισόδου του προβλήματος (N) λοιπόν
- ❖ Ορθότερη διατύπωση των μέχρι τώρα σχέσεων:

$$S_n(N) = \frac{T_1(N)}{T_n(N)}$$

$$e_n(N) = \frac{S_n(N)}{n} = \frac{T_1(N)}{nT_n(N)}$$

$$c_n(N) = nT_n(N)$$

$$S_n(N) = \frac{n}{nf(N) + (1 - f(N))} \leq \frac{1}{f(N)} \quad (\text{Amdahl})$$

$$S_n(N) = n - (n - 1)f'(N) \quad (\text{Gustafson})$$

Κλιμακωμένη επιτάχυνση

$$S_n(N) = \frac{n}{nf(N) + (1-f(N))} \leq \frac{1}{f(N)} \Rightarrow e_n(N) \leq \frac{1}{nf(N)} \quad (\text{Amdahl})$$

- ❖ Σωστός ο νόμος του Amdahl: όντως, αν το πρόβλημα παραμείνει ίδιο (N), όσο αυξάνει ο αριθμός των επεξεργαστών (n) σίγουρα θα μειώνεται και η αποδοτικότητα
 - Π.χ. πρόσθεση $N = 100$ αριθμών σε $n = 100000$ cores έχει σχεδόν μηδενική αποδοτικότητα
- ❖ Τι γίνεται όμως αν **ΜΕΓΑΛΩΣΩ** το πρόβλημα (N) όταν μου δοθούν παραπάνω επεξεργαστές (n), π.χ. για βελτίωση πρόγνωσης καιρού;
 - Συνήθως η αύξηση («κλιμάκωση») του N οδηγεί σε βελτιωμένη παράλληλη εκτέλεση (το σειριακό κομμάτι δεν αλλάζει πολύ, αυξάνει κυρίως το παραλληλοποιήσιμο) και άρα μικραίνει το ποσοστό f του Amdahl, ενώ αυξάνει το ποσοστό f' του Gustafson.

$$S_n(N) = n - (n-1)f'(N) \quad (\text{Gustafson})$$

- ❖ *Gustafson*: μπορούμε να επιτύχουμε οποιαδήποτε επιτάχυνση και κατά συνέπεια οποιαδήποτε αποδοτικότητα 'ρυθμίζοντας' κατάλληλα το $f'(N)$.
 - Η ρύθμιση αυτή φυσικά γίνεται μέσω του N , δηλαδή βρίσκοντας το κατάλληλο μέγεθος εισόδου το οποίο επιφέρει το επιθυμητό αποτέλεσμα.
 - Έτσι αν αυξηθεί ο αριθμός των επεξεργαστών (γίνει 'κλιμάκωση' προς τα πάνω, του n) πρέπει να γίνει κλιμάκωση και του προβλήματος (N) προκειμένου να επιτευχθεί η απαιτούμενη επιτάχυνση.
 - Για το λόγο αυτό η σχέση αναφέρεται και ως *κλιμακωμένη επιτάχυνση (scaled speedup)*.

- ❖ **κλιμάκωση** (προς τα πάνω / κάτω) – scaling
 - Αύξηση / μείωση κάποιου χαρακτηριστικού (π.χ. # CPUs)
- ❖ **Κλιμακωσιμότητα ή ικανότητα κλιμάκωσης (scalability)**
 - Ικανότητα να διατηρείται κάποια ιδιότητα σταθερή όταν κλιμακώνεται κάποια άλλη
- ❖ **Συστήματα (αλγόριθμος + αρχιτεκτονική) ικανά κλιμάκωσης (scalable systems)**
 - Ένα παράλληλο σύστημα (αλγόριθμος + αρχιτεκτονική) είναι ικανό κλιμάκωσης αν για κάθε κλιμάκωση του αριθμού επεξεργαστών υπάρχει κλιμάκωση του μεγέθους εισόδου έτσι ώστε η αποδοτικότητα να παραμένει σταθερή.

Παράδειγμα στον υπερκύβο

- ❖ Πρώτη μέθοδος (κυκλική ανάθεση εικονικών επεξεργαστών)
 - Χρόνος εκτέλεσης $T_n = \Theta((N/n)\log n)$,
 - Αποδοτικότητα $e_n = \Theta(1/\log n)$.
- ❖ Αν αυξηθεί ο αριθμός των επεξεργαστών, η αποδοτικότητα θα μειωθεί, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε αύξηση στο μέγεθος εισόδου. *Το σύστημα αυτό ΔΕΝ είναι ικανό κλιμάκωσης.*

- ❖ Δεύτερη μέθοδος (τμηματική ανάθεση)
 - Χρόνος εκτέλεσης $T_n = \Theta(N/n + \log n)$
 - Αποδοτικότητα $e_n = \Theta(N / (N + n\log n))$.
 - Όσο ο όρος N επικρατεί στον παρανομαστή, δηλαδή $N = \Omega(n\log n)$, η αποδοτικότητα είναι: $e_n = \Theta(1)$.
- ❖ Επομένως, για κάθε αριθμό επεξεργαστών (n), υπάρχει ένα μέγεθος εισόδου (N) έτσι ώστε η αποδοτικότητα να παραμένει σταθερή. *Αυτό το σύστημα έχει ικανότητα κλιμάκωσης.*

- ❖ Χαμηλή ικανότητα κλιμάκωσης (poorly scalable):
 - μικρή αύξηση των επεξεργαστών απαιτεί μεγάλη αύξηση στο μέγεθος εισόδου του προβλήματος προκειμένου να διατηρηθεί σταθερή η αποδοτικότητα.
- ❖ Υψηλή ικανότητα κλιμάκωσης (highly scalable)
 - μικρή αύξηση των επεξεργαστών απαιτεί και μικρή αύξηση στο μέγεθος εισόδου.



- ❖ Τα συστήματα που είναι ικανά κλιμάκωσης, μπορούν πάντα να γίνουν βέλτιστου κόστους με κατάλληλη επιλογή των n και N , αφού
 - σταθερή αποδοτικότητα σημαίνει σταθερός λόγος T_1 / nT_n ,
 - που αντίστοιχα σημαίνει σταθερός λόγος T_1 / c_n , δηλαδή βέλτιστο κόστος.

