20/5/14

Αριθμητική Ολοκλήρωση

$f \in C[a,b]$

Ζητούμενο: $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ «αριθμό ψάχνουμε»

Αν F είναι μία παράγουσα της f, δηλ. $F' = f$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Προβλήματα:

- Η F είναι σπάνια γνωστή
- Είναι δυνατόν η f να είναι απλή και η F πολύπλοκη συνάρτηση

  πχ. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$

Προσεγγίζουμε το $\int_a^b f(x)\,dx$ με

$$\underbrace{Q_{n+1}(f)}_{\text{«}n+1\text{ όροι}} = w_0 f(x_0) + \dots + w_n f(x_n)$$

$x_i \in [a,b]$ κόμβοι

w_i βάρη

Q_{n+1} τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης με $n+1$ κόμβους

· Τύπος των Newton - Cotes

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$x_i := a + ih, \quad i = 0, \dots, n,$ // ομοιόμορφως διαμερ.
// δύο διαδοχικά απέχουν
// κατά h

με $h := \frac{b-a}{n}$

Έστω $f \in C[a,b]$ και $p_n \in \mathbb{P}_n$ τω
$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$

Θέτουμε

$$Q_{n+1}(f) := \int_a^b p_n(x)\,dx$$

$f \in \mathbb{P}_n \Rightarrow p_n = f$

Συμπέρασμα:

$\forall f \in \mathbb{P}_n \quad Q_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$

δηλ. με $R_{n+1}(f) := \int_a^b f(x)\,dx - Q_{n+1}(f),$

έχουμε

$\forall p \in \mathbb{P}_n \quad R_{n+1}(p) = 0$

Ο τύπος Q_{n+1}
ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και n

Θέλουμε να γράψουμε τον $Q_{n+1}(f)$ στη μορφή

$$Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_n f(x_n)$$

Έστω $L_i(x)$,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

$i = 0, \dots, n$, τα πολυώνυμα Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_n$. Τότε

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

Άρα

$$Q_{n+1}(f) = \int_a^b P_n(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b L_i(x)\, dx}_{= w_i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

Τώρα

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx$$

$x := \alpha + hs$ // το s δεν είναι ακέραιοι // αλλά πραγματικό s

$$h \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(\cancel{\alpha}+hs)-(\cancel{\alpha}+jh)}{(\cancel{\alpha}+ih)-(\cancel{\alpha}+jh)}\,ds$$

// σταθ => έξω από το ολοκλ.

$$= h \int_0^n \underbrace{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{s-j}{i-j}}_{\varphi_i(s)}\,ds$$

$$= h \underbrace{\int_0^n \varphi_i(s)\,ds}_{w_i^*}$$

Τα w_i^* είναι ανεξάρτητα του διαστήματος $[\alpha, b]$

Μάθημα

Παραδ. 23-5

Ώρες: 11-13 Αμφιθ.

Υπολογίζουμε μία φορά τα $w_0^*, w_1^*, \ldots, w_n^*$

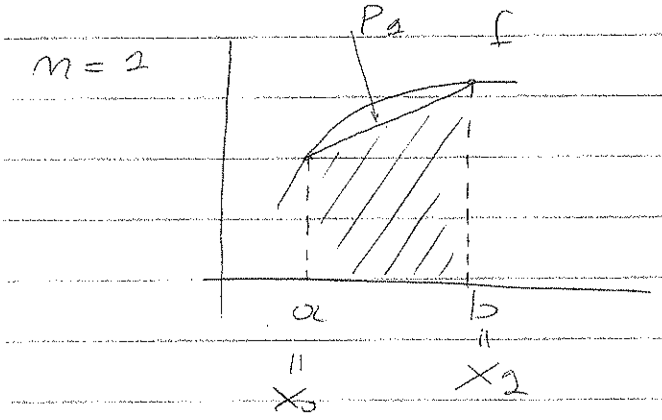
και στη συνέχεια, για οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$, βρίσκουμε τα w_i από τον τύπο

$$w_i = h\, w_i^*$$

Γενικά, δεν ισχύει ότι

$$Q_{n+1}(f) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx, \quad n \to \infty.$$

Συμπέρασμα: Χρήσιμοι είναι οι τύποι των Newton-Cotes μόνο για μικρό n.



Τύπος του τραπεζίου

$$Q_2(f) = \frac{\overset{\text{ύψος}}{b-a}}{\underset{\text{ημιάθροισμα}}{2}}\left[\underbrace{f(a)+f(b)}_{\text{βάσεις}}\right]$$

Τι μπορούμε να πούμε για το σφάλμα

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f)$$

// πρώτου βαθ. το πολυώνυμο ⇒ 2

Ισχυρισμός: Έστω $f \in C^2[a,b]$

Τότε, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

// υπενθύμιση // το πολ. παρεμβ.

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{Q_2(f)}_{= Q_2(P_1)} \qquad \begin{cases} P_1 \in \mathbb{P}_1 \\ P_1(a) = f(a) \\ P_1(b) = f(b) \end{cases}$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b P_1(x)\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - p_1(x)]\,dx \qquad \Bigg| \quad \forall x \in [a,b] \;\; \exists \xi(x) \in (a,b)$$

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(x-b)$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\, f''(\xi(x))\,dx$$

// για θετικό για να μην είναι μη θετ.

$$= -\frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{(x-a)(b-x)}_{\geq 0} f''(\xi(x))\,dx \qquad \Bigg| \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)\varphi(\xi) = \varphi(\xi)\int_a^b dx$$

$$\Rightarrow -2R_2(f) = \int_a^b \underbrace{(x-a)(b-x)}_{\geq 0} f''(\xi(x))\,dx$$

// ολοκληρ. // μέσης τιμής // ολοκλ.

$$\int_a^b (x-a)(b-x) \min_{a \leq \xi \leq b} f''(\xi)\,dx = m \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx \leq \int_a^b \underbrace{(x-a)(b-x)}_{\geq 0} f''(\xi(x))\,dx$$

// επειδή το ισχύει τα ↓ // Πάω το μεγαλύτερο ή ελάχιστο // μεγαλώνει το ολοκλ.

$$\leq \int_a^b (x-a)(b-x) \max_{a \leq \xi \leq b} f''(\xi)\,dx$$

$$\leq M \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx \qquad \max_{a \leq \xi \leq b} f''(\xi) = M$$

6

$$m \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx \le -2R_2(f)$$
$$\le M \underbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx}_{>0}$$

$\Rightarrow$

$$m \le \frac{-2R_2(f)}{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx} \le M$$

// Θ. ενδιάμεσης τιμής //

Σύμφωνα με το Θ της ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\frac{-2R_2(f)}{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx} = f''(\xi)$$

Άρα

$$R_2(f) = -\frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx$$

$$\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx = \frac{(b-a)^3}{6}$$

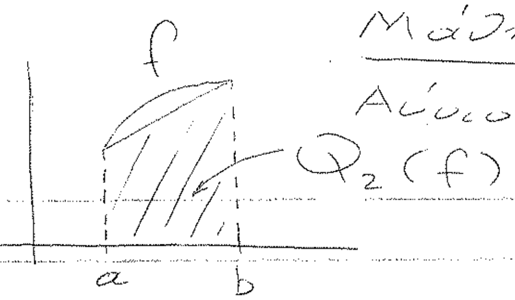
$$= -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

$\rightarrow$

Μάθημα

Αύριο: 11-13

22/5/14



(Απλός)

Τύπος του τραπεζίου

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx Q_2(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f)$$ το σφάλμα σε κάθε διαστηματάκι

$\forall f \in C^2[a,b] \;\exists \xi \in (a,b)$

(*) $$R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

Σύνθετος τύπος του τραπεζίου

$n \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{n}$, $x_i := a + ih$, $i = 0, \dots, n$

Ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα h.

Εφαρμόζουμε τον (απλό) τύπο του τραπεζίου σε καθένα των υποδιαστημάτων $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, και αθροίζουμε τα αποτελέσματα.

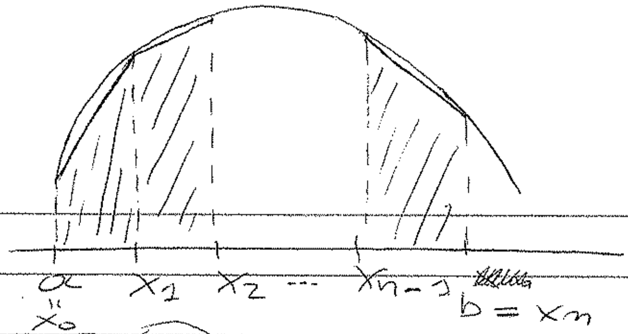
Έτσι προκύπτει ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου Q^T_{n+1}, με

$$Q^T_{n+1}(f) = \overbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]}^{\text{πρώτο διάστημα}}$$

$$+ \frac{h}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right] + \dots$$

$$+ \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

δηλαδή



$$Q^T_{n+1}(f) = h\left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots\right.$$

$$\left. + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)\right]$$

$$R^T_{n+1}(f) := \int_a^b f(x)\,dx - Q^T_{n+1}(f)$$

Τί μπορούμε να πούμε για το σφάλμα $R^T_{n+1}(f)$;

Έστω $f \in C^2[a,b]$. Το σφάλμα του σύνθετου τύπου του τραπεζίου είναι το άθροισμα των σφαλμάτων του απλού τύπου του τραπεζίου στα υποδιαστήματα $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. Σύμφωνα με την $\circledast$ έχουμε

$$R^T_{n+1}(f) = -\frac{(\overbrace{x_1-x_0}^{h})^3}{12} f''(\xi_1) - \frac{(\overbrace{x_2-x_1}^{h})^3}{12} f''(\xi_2)$$

$$- \dots - \frac{(\overbrace{x_n-x_{n-1}}^{h})^3}{12} f''(\xi_n)$$

$\xi_1 \in (x_0, x_1)$ $\quad \xi_2 \in (x_1, x_2)$ $\quad \xi_n \in (x_{n-1}, x_n)$

$$\Rightarrow R^T_{n+1}(f) = -\frac{h^3}{12}\left[f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_n)\right]$$

$$= -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

$$\min_{a\le x\le b} f''(x) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \max_{a\le x\le b} f''(x) = \max_{a\le x\le b} f''(x)$$

$$= -\frac{h^3}{12}\, n \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}_{= f''(\xi)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \xi \in (a,b) \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = f''(\xi)$$

Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

$$= -\frac{h^2}{12}\, \underbrace{n\cdot h}_{b-a}\, f''(\xi)$$

$$= -\frac{b-a}{12}\, h^2 f''(\xi)$$

Άρα $\forall f \in C^2[a,b] \ \exists\, \xi \in (a,b)$

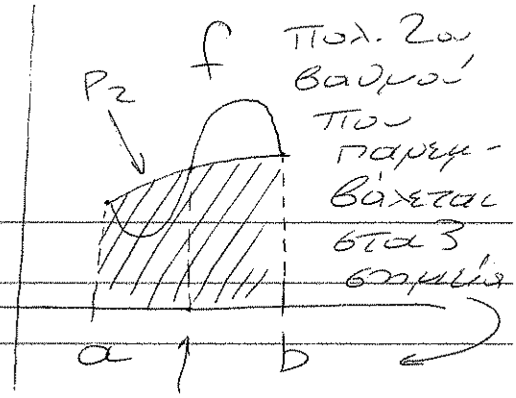
$$R^{T}_{n+1}(f) = -\frac{b-a}{12}\, h^2 f''(\xi)$$

Επομένως

$$\left|R^{T}_{n+1}(f)\right| \le \underbrace{\frac{b-a}{12}\, h^2 \max_{a\le \xi\le b}\left|f''(\xi)\right|}_{=C}$$

το σφάλμα είναι δεύτερης τάξης

Ο τύπος του Simpson



$$Q_3(f) = \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{2}, \quad x_i := a + ih, \quad i = 0, 1, 2.$$

το άθρ. των βαρών 6 $\Rightarrow 2h$

$$Q_3(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

το ολοκλ. των βαρών το μήκος του διαστ.

Σφάλμα

$$R_3(f) := \int_a^b f(x)\,dx - Q_3(f)$$

Παράσταση;

Από την κατασκευή του τύπου προκύπτει ότι αυτός ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι και δευτέρου βαθμού,

$$\forall p \in \mathbb{P}_2 \quad R_3(p) = 0$$

$1, x, x^2$

τα ολοκληρώνει ακριβώς και τους γραμ. τους συνδυασμούς $\Rightarrow$ πολ. 2ου βαθμού

// για να εξηγήσω
// μία ανακρ.
// από ένα γινόμενο
// δύο πρέπει από που, μένει να μην αλλάζει τι προσημο.

$$q_3(x) := x^3$$

$$R_3(q_3) = \int_a^b x^3\,dx - \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{3}a^3 + \frac{4}{3}(a+b)^3 + \frac{1}{3}b^3\right]$$

$$= \ldots = 0$$

$$q_3(x) = \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}_{= p(x)} + q(x) \quad \mu\varepsilon \; q \in \mathbb{P}_2$$

επειδή
είναι δευτέρου
βαθμού.

$$R_3(q_3) = R_3(p) + \cancel{R_3(q)}^{0}$$

$$= \int_a^b \left(\cancel{x - \frac{a+b}{2}}^{0}\right)^3 dx$$

// είναι συμ.
// εαν να ολοκληρώνω
// το x^3 από το $-\frac{a+b}{2}$ μέχρι το $\frac{a+b}{2}$

$$- \cancel{Q_3(p)}^{0}$$ // μηδενίζεται στο $\frac{a+b}{2}$

// όλοι οι ~~μέχρι~~ άρτιου βαθμού => παίρνουν [illegible]
// τύποι
// και του περιττού βαθμού.

(2/2)

<u>Λήμμα</u> (Παράσταση του σφάλματος του απλού τύπου του Simpson)

Έστω $f \in C^4[a,b]$. Τότε $\exists\, \xi \in (a,b)$ $$R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi)$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $p_3 \in \mathbb{P}_3$ τ.ω.

$p_3(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, 2$

$p_3'(x_1) = f'(x_1)$

// ανάμεσα στα
// a και b
// μόνο γνήσια στη μέση αυτό αλλάζει. Για αυτό ζω,
// αν
// για να βρω
// την επιθυμητή
// απάντηση.

Τότε
$\forall x \in [a,b]$ $\exists\, \xi(x) \in (a,b)$

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$$

(Άσκηση 4.15)

$$Q_3(p_3) = \leftarrow p_3(x_i) = f(x_i), \quad i=0,1,2,$$

$$R_3(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_3(f)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{Q_3(p_3)}_{= \int_a^b p_3(x)\,dx}$$

ίσο με το ολοκλ. του p_3 καθώς ολοκληρ. μέχρι και 3ου βαθμού πολυων. ακριβώς ο τύπος.

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_3(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left[f(x) - p_3(x) \right] dx$$

$$= \frac{1}{4!} \int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) \cdot f^{(4)}(\xi(x))\,dx$$

$$= -\frac{1}{4!} \int_a^b \underbrace{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (b-x)}_{\geq 0} f^{(4)}(\xi(x))\,dx$$

// για το
// ξανακάνω
// όπως στην
// προηγούμενη
// φορά

$$= -\frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \underbrace{\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (b-x)\,dx}_{= \frac{(b-a)^5}{2^3 \cdot 15}}$$

$$= -\frac{1}{2^4 \cdot 180} (b-a)^5 f^{(4)}(\xi)$$

Σύνθετος τύπος του Simpson

Έστω $n \in \mathbb{N}$ άρτιος, $h := \frac{b-a}{n}$, $x_i := a + ih$, $i = 0, \dots, n$. Εφαρμόζουμε τον απλό τύπο του Simpson στα υποδιαστήματα $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, …, $[x_{n-2}, x_n]$, και αθροίζουμε τα αποτελέσματα. Έτσι προκύπτει ο σύνθετος τύπος του Simpson.

$Q_{n+1}^{S}(f)$,

1 στην αρχή και στο τέλος και μετά 4, 2, 4, 2

$$Q_{n+1}^{S}(f) = \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]$$

$$R_{n+1}^{S}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_{n+1}^{S}(f)$$

$$= -\frac{(\overbrace{x_2 - x_0}^{2h})^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi_1) - \frac{(\overbrace{x_4 - x_2}^{2h})^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi_2)$$

$\xi_1 \in (x_0, x_2)$

επειδή εφαρμόζω τον τύπο

$$- \dots - \frac{(\overbrace{x_n - x_{n-2}}^{2h})^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi_{n/2})$$

$\xi_2 \in (x_2, x_4)$ $\quad \xi_{n/2} \in (x_{n-2}, x_n)$

|| γι' αυτό και εμφάνιση

|| το 2^4 για να φύγουν έπειτα

$$= -\frac{\cancel{2}^{\cancel{5}} \cdot h^5}{\cancel{2^4} \cdot 1\cancel{80}_{90}} \left[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2) + \dots + f^{(4)}(\xi_{n/2}) \right]$$

$$= -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) \qquad \left(\frac{1}{m} \text{ m } \lambda_i = \frac{1}{m}, \; i = 1, \dots, m \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n/2\ (m)} f^{(4)}(\xi_i) \leq \max_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x) \\ \min_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x) \leq \\ \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) \; \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) = f^{(4)}(\xi) \end{array} \right.$$

$$= -\frac{h^5}{90} \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) \right)$$

$$= -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

τέτοιο της τάξης

Άσκηση 6.3

$n \in \mathbb{N}, \; \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής για το ΘΕΤ. (την θέλω)

$x_1, \dots, x_n \in [a,b]$

και αν τα λ_i έχουν την ιδιότητα
$\sum_{i=1} \lambda_i = 1$ τότε λέγονται κυρτοί

<u>ΝΔΟ</u>

$$\exists \xi \in [a,b] \quad \underbrace{\lambda_1 \varphi(x_1) + \quad + \lambda_n \varphi(x_n)}_{\text{κυρτός συνδυασμός των } \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)} = \varphi(\xi)$$

$$\min_{a \le x \le b} \varphi(x) \le$$

$$\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \le \qquad (\lambda_i \ge 0)$$

$$\lambda_1 \max_x \varphi(x) + \dots + \lambda_n \max_x \varphi(x)$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}_{= 1} \max_{a \le x \le b} \varphi(x)$$

$$= \max_{a \le x \le b} \varphi(x)$$

Θεώρημα
ενδιάμεσης
τιμής

$$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b] \quad \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) = \varphi(\xi)$$

23/5/14

Άσκηση 6.4

$\varphi : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$x_1, \dots, x_n \in [\alpha, b]$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ομόσημοι

αν αποδ. αυτό η πρώτη είναι ειδική περίπτωση

ΝΔΟ: $\exists \, \xi \in [\alpha, b]$ $\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \varphi(\xi)$

1η Περίπτωση $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \min_{x} \varphi(x) \le \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \le \lambda_1 \max_{\alpha \le x \le b} \varphi(x) + \dots + \lambda_n \max_{\alpha \le x \le b} \varphi(x) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \max_{\alpha \le x \le b} \varphi(x)$$

Χ.π.γ. $\lambda_1 + \dots + \lambda_n > 0$

Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα,

$$\min_{\alpha \le x \le b} \varphi(x) \le \frac{\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \le \max_{\alpha \le x \le b} \varphi(x)$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής

$$\frac{\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = \varphi(\xi),$$

δηλ. $\lambda_1 \varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(x_n) =$
$= (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\, \varphi(\xi)$

2η Περίπτωση: $\lambda_i \leq 0$

Ανάγεται στην προηγούμενη πολλαπλασιάζοντας με -1.

Άσκηση 6.8

Q_n^T, Q_m^S

-1 ——— 1

$$f(x) = \frac{x^6}{30} - x^2$$

ΝΔΟ

$$Q_n^T(f) \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq Q_m^S(f).$$

$$R_{n+1}^T = -\frac{b-\alpha}{12} h^2 f''(\xi)$$

$$R_{n+1}^S = -\frac{b-\alpha}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

Άρα

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_n^T(f) = -\frac{2}{12}\left(\frac{2}{n-1}\right)^2 f''(\xi)$$

αυτό καθορίζω το πρόσ.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_m^{S}(f) = -\frac{2}{180}\left(\frac{2}{m-2}\right)^4 \underline{f^{(4)}(\theta)}$$

με $\xi, \theta \in (-1,1)$

$f'(x) = \frac{x^5}{5} - 2x$

$f''(x) = x^4 - 2$

$f'''(x) = 4x^3$

$f^{(4)}(x) = 12x^2$

Άρα

$f''(\xi) = \xi^4 - 2 < 0$

$f^{(4)}(\theta) = 12\theta^2 \geq 0$

Άρα

- $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_n^{T}(f) \geq 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geq Q_n^{T}(f)$

- $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_m^{S}(f) \leq 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq Q_m^{S}(f)$

<u>Άσκηση 6.9</u>

$Q \quad [a,b]$

$K(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$

ΝΔΟ: Υπάρχει το πολύ ένας ~~φυσικός αριθμός~~ $k \in \mathbb{N}_0$ τ.ω

$$\exists C_k \in \mathbb{R} \ \forall f \in C^k[a,b] \ \exists \xi \in (a,b)$$

(*) $$R(f) = C_k f^{(k)}(\xi)$$

1η Περίπτωση: Έστω $C_k \neq 0$

$$f \in \mathbb{P}_{k-1} \overset{(*)}{\Longrightarrow} R(f) = 0$$

$$f(x) = x^k \overset{(*)}{\Longrightarrow} R(f) = C_k k! \neq 0$$

Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο για ένα k. Έστω ότι ισχύει για $k = k_1$ και $k = k_2$ με $k_2 > k_1$.

Τότε: $f(x) = x^{k_1}$ Από τη σχέση με $k = k_1$ παίρνουμε $R(f) \neq 0$, ενώ από τη δεύτερη ότι $R(f) = 0$, άτοπο.

2η Περίπτωση: $C_k = 0$

Τότε
$$\forall f \in C^k[a,b] \quad R(f) = 0,$$
ιδιαίτερως για καθε πολυώνυμο p,

$R(p) = 0$

$Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_n f(x_n)$

$p(x) = (x-x_0)^2 \dots (x-x_n)^2$

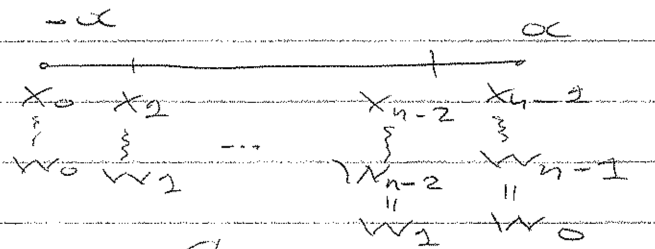
Τότε $Q_{n+1}(p) = 0$ και

$\int_a^b (x-x_0)^2 \dots (x-x_n)^2 \, dx > 0$,

άρα $R(p) \neq 0$

<u>Άσκηση 6.10</u>

$[-\alpha, \alpha]$



Q_n τύπος των Newton-Cotes

$Q_n(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_{n-1} f(x_{n-1})$

° x_i, x_j τ.ω. $x_i = -x_j$

<u>ΝΔΟ</u>: $w_i = w_j$

(Δηλαδή οι τύποι είναι <u>συμμετρικοί</u>!)

<u>Απόδειξη</u> Ξέρουμε ότι

(*) $\forall p \in \mathbb{P}_{n-1} \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} p(x) \, dx = Q_n(p)$

Για τα Πολυώνυμα Lagrange L_i και L_j,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n-1} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \frac{x - x_k}{x_j - x_k},$$

η (*) δίνει

$$w_i = \int_{-\alpha}^{\alpha} L_i(x)\,dx, \quad w_j = \int_{-\alpha}^{\alpha} L_j(x)\,dx$$

Τώρα

$$w_i = \int_{-\alpha}^{\alpha} L_i(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n-1} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}\,dx$$

"x_i και x_j συμμετρ.

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \frac{x + x_k}{x_i + x_k}\,dx$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \frac{x + x_k}{-x_j + x_k}\,dx \overset{t=-x}{=} -\int_{\alpha}^{-\alpha} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \frac{-t + x_k}{-x_j + x_k}\,dt =$$

μετασχηματισμού

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \frac{t - x_k}{x_j - x_k}\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} L_j(t)\,dt = w_j$$

να διορθώσω

$\left(\frac{a+h}{2}\right)^3$ [illegible] (2/2)

Άσκηση 6.10

$[-\alpha, \alpha]$

Q_n τύπος των Newton-Cotes

$Q_n(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_{n-1} f(x_{n-1})$

- x_i, x_j τ.ω. $x_i = -x_j$

ΝΔΟ: $w_i = w_j$

$R_3(x^3) = \int_a^b x^3 \, dx -$ τουλάχιστον

$$- \frac{b-\alpha}{6} \left[\alpha^3 + 4\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)^3 + b^3 \right] =$$

$= \dots = 0$

Άσκηση 6.11

[illegible]

$Q_n \quad [-\alpha, \alpha]$

ΝΔΟ: $\varphi : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ περιττή

τότε $R(\varphi) = 0$

Απόδειξη

- $\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(x) \, dx = 0$

$$\int_{0}^{\alpha} \varphi(x)\,dx \underset{t=-x}{=} -\int_{0}^{-\alpha} \varphi(t)\,dt = \int_{-\alpha}^{0} \underset{-\varphi(t)}{\underset{\parallel}{\varphi(-t)}}\,dt$$

$$= -\int_{-\alpha}^{0} \varphi(t)\,dt = -\int_{-\alpha}^{0} \varphi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\alpha}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} \varphi(x)\,dx}_{\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(x)\,dx} = 0$$

- $\varphi(0) = 0$

- $Q_n(f) = w_1 \varphi(x_1) + w_2 \varphi(x_2) + \dots +$

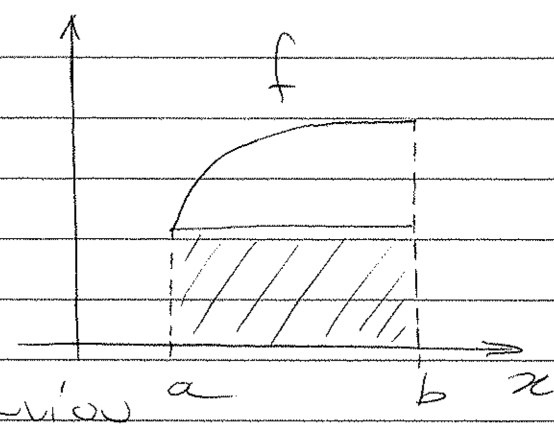
$$\underset{w_2}{\underset{\parallel}{w_{n-1}}}\,\underset{\varphi(-x_2)}{\varphi(x_{n-1})} + \underset{w_1}{\underset{\parallel}{w_n}}\,\underset{\varphi(-x_1)}{\varphi(x_n)}$$

$$= \sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} w_i \big[\underbrace{\varphi(x_i) + \varphi(-x_i)}_{\overset{\parallel}{0}} \big] = 0$$

Άσκηση 1.13

$Q(f) = (b-\alpha) f(\alpha)$

$f \in C[\alpha, b]$



αριστερός τύπος του ορθογωνίου

$$R(f) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx - Q(f)$$

α) $\forall p \in \mathbb{P}_0 \quad R(p) = 0$

α) $p(x) = \gamma \qquad \gamma \in \mathbb{R}$

$$R(p) = \int_a^b \gamma \, dx - (b-a)\gamma$$

$$= (b-a)\gamma - (b-a)\gamma = 0$$

όσων
// πρώτου βαθμού ακριβής παράγωγος +2
// τάξη //

β) $\forall f \in C^2[a,b] \quad \exists \xi \in (a,b)$

$$R(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$$

β) $R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{(b-a) f(a)}_{\int_a^b f(a)\,dx}$

$$= \int_a^b [f(x) - f(a)]\,dx$$ // πρώτου βήμα Taylor // θεώρημα της μέσης τιμής)

$$= \int_a^b f'(\xi(x)) \underbrace{(x-a)}_{\geq 0} \, dx$$ διατηρεί το πρόσημό του

$$\Rightarrow \min_{a \leq \xi \leq b} f'(\xi) \int_a^b (x-a)\,dx \leq R(f) \leq \max_{a \leq \xi \leq b} f'(\xi) \int_a^b (x-a)\,dx$$

$$\int_a^b (x-a)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \min_{a \le \xi \le b} f'(\xi) \le \frac{R(f)}{\frac{(b-a)^2}{2}} \le \max_{a \le \xi \le b} f'(\xi)$$

$$\Longrightarrow \frac{R(f)}{\frac{(b-a)^2}{2}} = f'(\xi) \rightarrow R(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$$

Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

γ) $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i := a + ih$, $i = 0, \ldots, n$

<u>ΝΔΟ</u>

$\forall f \in C^1[a,b]$ $\exists \xi \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{2} h f'(\xi)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - hf(x_i)\right]}_{\frac{h^2}{2} f'(\xi_i)} \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

Τρίτη, Τετάρτη και Παρασκευή
12 - 14

$$= \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)$$

$$= \frac{h^2}{2}\, n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) \right)$$ πρέπει να το αποδείξω

$$\overset{\shortparallel}{f'(\xi)}$$

$$= \frac{b-a}{2}\, h f'(\xi)$$

27/5/14

Τύποι ολοκλήρωσης του Gauss

$w: [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση βάρους

- $w(x) \geq 0, \quad x \in [\alpha, b]$

- $0 < \int_\alpha^b w(x)\,dx < \infty$

Προσεγγίζουμε το:

$$I(f) := \int_\alpha^b w(x) f(x)\,dx$$

με τύπους ολοκλήρωσης της μορφής:

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \quad (*)$$

Πρόβλημα: Προσδιορισμός των κόμβων x_i και των βαρών w_i έτσι ώστε ο Q_n να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα του μέγιστου δυνατού βαθμού.

Ισχυρισμός: Κανένας τύπος της μορφής $(*)$ δεν ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι και βαθμού $2n$.

$p(x) = (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \ldots (x-x_n)^2$

$p \in \mathbb{P}_{2n}$

- $Q_n(p) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ Q_n(p) = 0 \\ \cdot\ \int_a^b w(x)p(x)\,dx > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b w(x)p(x)\,dx \neq Q_n(p)$$

<u>Ορθογώνια Πολυώνυμα:</u>

$$\hat{\mathbb{P}}_n := \{ p \in \mathbb{P}_n : p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \}$$

Υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$ τω

$$\int_a^b w(x)\,p_n(x)\,r_{n-1}(x)\,dx = 0 \quad \forall r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$$

Τα πολυώνυμα $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ που έχουν αυτή την ιδιότητα λέγονται ορθογώνια πολυώνυμα ως προς τη συνάρτηση w

<u>Βασική Ιδιότητα:</u> Οι ρίζες $x_1, \dots, x_n$ του p_n είναι <u>απλές</u> και βρίσκονται στο διάστημα (a,b)

<u>Θεώρημα</u> (Ύπαρξη και μοναδικότητα τύπων ολοκλήρωσης του Gauss)

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση βάρους και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w.

<u>Τότε:</u>

α) Με κόμβους $x_1 < \dots < x_n$ τις ρίζες του p_n, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα βάρη $w_1, \dots, w_n$ τω ο τύπος Q_n,

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

να ολοκληρώνει πολυώνυμα μέχρι βαθμού $2n-1$ ακριβώς, δηλ.

$$\forall p \in \mathbb{P}_{2n-1} \quad \int_a^b w(x)p(x)dx = Q_n(p).$$

Επιπλέον τα βάρη w_i είναι θετικά.

β) Αν ένας τύπος με κόμβους $x_1, \dots, x_n$ και βάρη $w_1, \dots, w_n$ ολοκληρώνει πολυώνυμα μέχρι βαθμού $2n-1$ ακριβώς, τότε οι κόμβοι $x_1, \dots, x_n$ είναι ρίζες του P_n.

Απόδειξη

α) Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Θεωρούμε

το πολυώνυμο $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ παρεμβολής του p στα $x_1, \dots, x_n$, δηλ.

$$q \in \mathbb{P}_{n-1} \quad q(x_i) = p(x_i),\ i = 1, \dots, n$$

Τότε:

$$p(x) - q(x) = \underbrace{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{P_n(x)} r_{n-1}(x)$$

με $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Άρα

$$\int_a^b w(x)p(x)\,dx = \int_a^b w(x)\left[q(x) + p_n(x) r_{n-1}(x)\right]dx$$

$$= \int_a^b w(x) q(x)\,dx + \overbrace{\int_a^b w(x)\, \cancel{p_n(x)\, r_{n-1}(x)}\,dx}^{0}$$

Άρα

$$\int_a^b w(x) \underbrace{p(x)}_{\in \mathbb{P}_{2n-1}}\,dx = \int_a^b w(x) \underbrace{q(x)}_{\in \mathbb{P}_{n-1}}\,dx$$

Έστω $L_1, \ldots, L_n \in \mathbb{P}_{n-1}$ τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_1, \ldots, x_n$, δηλ.

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Τότε

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) L_i(x)$$

Επομένως,

$$\int_a^b w(x) p(x)\,dx = \int_a^b w(x) q(x)\,dx$$

$$= \int_a^b w(x) \sum_{i=1}^{n} p(x_i) L_i(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b w(x) L_i(x)\,dx \right)}_{w_i :=} p(x_i)$$

(ανεξ. του p.)

Έστω $w_1', \dots, w_n'$ βάρη τ.ω. για τον τύπο $Q_n'(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i' f(x_i)$

να ισχύει $\forall\, p \in \mathbb{P}_{2n-1}$

$$\int_a^b w(x) p(x) dx = Q_n'(p)$$

Τότε $L_j^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$, οπότε

$$\underbrace{Q_n(L_j^2)}_{w_j} = \int_a^b w(x) (L_j(x))^2 dx = \underbrace{Q_n'(L_j^2)}_{w_j'} > 0$$

(2/2)

β) Έστω $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Θέτουμε

$p(x) := (x-x_1)\dots(x-x_n)\, r_{n-1}(x)$.

Προφανώς $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ και $Q_n(p) = 0$

Επομένως $\forall\, r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$

$$\int_a^b w(x) \underbrace{(x-x_1)\dots(x-x_n)}_{\tilde{p}(x)} r_{n-1}(x) dx = 0$$

Αφού τα ορθογώνια πολυώνυμα είναι μονοσήμαντα ορισμένα, θα έχουμε

$\tilde{p}_n = p_n$, άρα τα $x_1, \dots, x_n$ είναι ρίζες του p_n.

Θεώρημα (Παράσταση του σφάλματος τύπων ολοκλήρωσης του Gauss)

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $w:[a,b] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση βάρους, και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w.
Αν Q_n είναι ο τύπος ολοκλήρωσης του Gauss ως προς w με n κόμβους, τότε για κάθε $f \in C^{2n}[a,b]$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx - Q_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x)\left[p_n(x)\right]^2 dx$$

Απόδειξη

Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ τ.ω.

$$\left.\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i) \\ p'(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned}\right\} i = 1,\dots,n$$

Τότε

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx - \underset{\substack{\parallel \\ Q_n(p) \\ \parallel \\ \int_a^b w(x)p(x)\,dx}}{Q_n(f)}$$

$$= \int_a^b w(x)[f(x) - p(x)]\,dx$$

Από την παρεμβολή Hermite ξέρουμε ότι

$\forall x \in [a,b]\ \exists \xi(x) \in (a,b)$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2$$

$$\prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 = [p_n(x)]^2$$

Επομένως

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b \underbrace{w(x)[p_n(x)]^2}_{\geq 0} f^{(2n)}(\xi(x))\,dx$$

$$= \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \int_a^b w(x)[p_n(x)]^2\,dx$$

$$\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 f^{(2n)}(\xi(x))\,dx \leq$$

$$\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 \max_{a \leq y \leq b} f^{(2n)}(y)\,dx$$

$$= \max_{a \le y \le b} f^{(2n)}(y) \int_a^b w(x)\left[p_n(x)\right]^2 dx$$

και

$$\int_a^b w(x)\left[p_n(x)\right]^2 f^{(2n)}(\xi(x))\, dx \geq$$

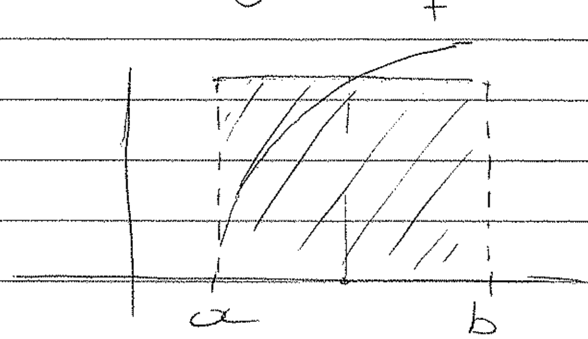
$$\min_{a \le y \le b} f^{(2n)}(y) \underbrace{\int_a^b w(x)\left[p_n(x)\right]^2 dx}_{>0}$$

$$\Rightarrow \min_{a \le y \le b} f^{(2n)}(y) \le \frac{\int_a^b w(x)\left[p_n(x)\right]^2 f^{(2n)}(\xi(x))\, dx}{\int_a^b w(x)\left[p_n(x)\right]^2 dx} \le \max_{a \le y \le b} f^{(2n)}(y)$$

$$= f^{(2n)}(\xi)$$

με $\xi \in (a,b)$

Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής



Άσκηση 6.14

$$Q(f) = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

τύπος του μέσου

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$$

α) ΝΔΟ:

$$\forall p \in \mathbb{P}_1 \quad R(p) = 0$$

(τύπος του Gauss)

α) $p(x) = \gamma x + \delta, \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b p(x)\,dx = \dots = \gamma \frac{b^2 - a^2}{2} + \delta(b-a)$$

$$Q(p) = (b-a)\left[\gamma \frac{a+b}{2} + \delta\right]$$

Τότε

$$\int_a^b p(x)\,dx = Q(p)$$

28/5/14

Άσκηση 6.14

$Q(f) := (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$R(f) := \int_a^b f(x)dx - Q(f)$

α) $\forall p \in \mathbb{P}_1, \quad R(p) = 0$

β) $\forall f \in C^2[a,b] \quad \exists \xi \in (a,b)$

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

• Έστω $p \in \mathbb{P}_1$ τω

$$\left.\begin{aligned} p\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ p'\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}\right\}$$

Τότε, από την παράσταση του σφάλματος παρεμβολής Hermite ξέρουμε ότι

(*) $\forall x \in [a,b] \quad \exists \xi(x) \in (a,b)$

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

Taylor:

$$\underbrace{f(x) - p(x)}_{\varphi(x)} = \cancel{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - p\left(\frac{a+b}{2}\right)} + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\cancel{\left[f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - p'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\left[f''(\xi(x)) - \cancel{p''(\xi(x))}\right]$$

$$\int_a^b p(x)\,dx \overset{p \in \mathbb{P}_1}{=} Q(p) = p\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Επομένως

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - p(x)]\,dx =$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}_{\geq 0} f''(\xi(x))\,dx$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi) \underbrace{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx}$$

$$= \frac{1}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \Bigg|_{x=a}^{x=b}$$

$$= \frac{2}{3}\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12}$$

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{= \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx}$$

$$= \int_a^b \left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi(x)) \right] dx$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \underbrace{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx}_{=0} +$$

$$\frac{1}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi(x))\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi(x)) = \ldots$$

γ) $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$,

$i = 0, \ldots, n$

ΝΔΟ

$\forall f \in C^2[a,b] \; \exists \xi \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi)$$

γ) $$\int_a^b f(x)\,dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \overset{x_{i+1}-x_i}{h}\, f\Big(\underset{\frac{x_i + x_{i+1}}{2}}{\underset{\parallel}{x_i + \frac{h}{2}}} \Big) \right]}_{\parallel}$$

$$\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{24} f''(\xi_i) \quad \text{με } \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{24} f''(\xi_i)$$

$$= \frac{h^3}{24} n \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \right)}_{\parallel}$$

$$f''(\xi)$$ Πρέπει να το αποδείξω

$$= \frac{h^2}{24} \overset{b-a}{\overset{\parallel}{(nh)}} f''(\xi)$$

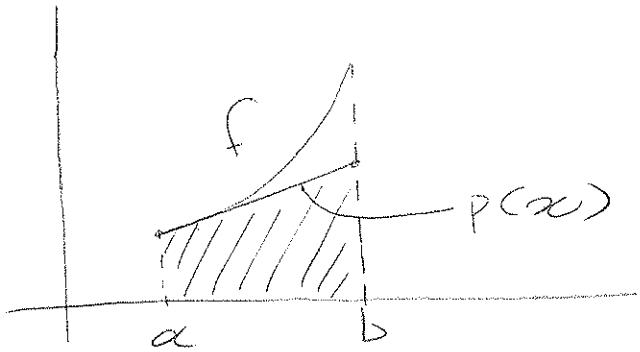
$$= \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi)$$

Άσκηση 6.15

$$Q(f) = b-a\; f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a)$$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x-a) f'(a)}_{=:p(x)} + \frac{(x-a)^2}{2} f''(\xi_x)$$

$\int_a^b p(x)\,dx = \dots = Q(f)$ | $R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$



α) $\forall p \in \mathbb{P}_1 \quad R(p) = 0$

• $p(x) = \gamma x + \delta$ πράξεις

β) ΝΔΟ:

$\forall f \in C^2[a,b] \quad \exists \xi \in (a,b)$

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{6} f''(\xi)$$

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{Q(f)}_{= \int_a^b [f(a) + (x-a) f'(a)]\,dx}$$

$$= \int_a^b \underbrace{[f(x) - f(a) - (x-a) f'(a)]}_{= \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(\xi(x))}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \underbrace{(x-a)^2}_{\geq 0} f''(\xi(x))\,dx$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x-a)^2\,dx = \frac{(b-a)^3}{6} f''(\xi)$$

"Άλλος" τρόπος $p \in \mathbb{P}_1$ $\quad p(\alpha) = f(\alpha)$

$p'(\alpha) = f'(\alpha)$

Τότε

$$R(f) = \int_\alpha^b f(x)\,dx - \underset{\underset{\int_\alpha^b p(x)\,dx}{\shortparallel}}{\underset{Q(p)}{\underset{\shortparallel}{Q(f)}}}$$

$$= \int_\alpha^b [f(x) - p(x)]\,dx$$

$$\underset{\text{Taylor}}{=} \int_\alpha^b \Big\{ \cancel{f(\alpha)} - \cancel{p(\alpha)} + (x-\alpha)\cancel{[f'(\alpha) - p'(\alpha)]} + \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 \Big[f''(\xi(x)) - \cancel{p''(\xi(x))} \Big] \Big\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^b (x-\alpha)^2 f''(\xi(x))\,dx$$

γ) $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-\alpha}{n}$, $x_i = \alpha + ih$, $i = 0, \dots, n$

ΝΔΟ: $\forall f \in C^2[\alpha, b] \ \exists \xi \in (\alpha, b)$

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} \left[h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) \right] = \frac{b-\alpha}{6} h^2 f''(\xi)$$

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\parallel} - \sum_{i=0}^{n-1} \left[h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) \right]$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \left(h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) \right) \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{6} f''(\xi_i) \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

$$= \frac{h^3}{6} n \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \right)}_{= f''(\xi)}$$

$$= \frac{h^2}{6} \overbrace{nh}^{b-a} f''(\xi)$$

$$= \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi)$$