Ασκήσεις 6ου κεφαλαίου

Άσκηση 6.3

$n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ τ.ω $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

$\varphi : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$x_1, \dots, x_n \in [\alpha, b]$ τέτοιας μορφής λέγονται κυρτοί συνδυασμοί τιμών της φ.

ΝΔΟ

$\exists \xi \in (\alpha, b)$ $\lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) = \varphi(\xi)$

Απόδειξη

$\lambda_i \geq 0$

• $$\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \cdot \varphi(x_n) \leq \lambda_1 \max_{\alpha \leq x \leq b} \varphi(x) + \lambda_2 \max_{\alpha \leq x \leq b} \varphi(x) + \dots + \lambda_n \cdot \max_{\alpha \leq x \leq b} \varphi(x)$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}_{=1} \max_{\alpha \leq x \leq b} \varphi(x)$$

$$= \max_{\alpha \leq x \leq b} \varphi(x)$$

Αντίστοιχα: $\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \geq \min_{\alpha \leq x \leq b} \varphi(x)$

Άρα, $$\min_{\alpha \leq x \leq b} \varphi(x) \leq \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \leq \max_{\alpha \leq x \leq b} \varphi(x)$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής,

$\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) = \varphi(\xi)$ για κάποιο $\xi \in [\alpha, b]$ ∎

Άσκηση 6.4

γενική της 6.3

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ομόσημοι (και υπόλοιπα από 6.3)

ΝΔΟ

$\exists \xi \in [\alpha, b]$ $\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \varphi(\xi)$

Απόδειξη

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$

όπως προηγουμένως έχουμε,

(*)
$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \min_{a \leq x \leq b} \varphi(x) \leq \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \leq (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \max_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$$

- Στη περίπτωση $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, η ζητούμενη σχέση ισχύει για όλα τα ξ.

- Αν $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ και δεν είναι όλα μηδέν, τότε $\lambda_1 + \dots + \lambda_n > 0$

Διαιρώντας την (*) με $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ παίρνουμε,

$$\min_{a \leq x \leq b} \varphi(x) \leq \frac{\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \leq \max_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$$

$= \varphi(\xi)$ θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Συνεχίζουμε τις πράξεις και βρίσκουμε αυτό που θέλουμε ∎

Άσκηση 6.8

Q_n^T $\quad Q_m^S$ στο διάστημα $[-1,1]$

↑ τύπος τραπεζίου ↑ τύπος simpson

έχουμε, $f(x) = \dfrac{x^6}{30} - x^2$ $\qquad$ ΝΔΟ $\quad Q_n^T(f) \leq \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq Q_m^S(f)$

Απόδειξη

Γενικά, : $R_{n+1}^T(f) = -\dfrac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$

$$R_{m+1}^S(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\theta)$$

Άρα, στην προκειμένη περίπτωση έχουμε : $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_n^T(f) = \underbrace{-\frac{2}{12}\left(\frac{2}{n-1}\right)^2}_{\leq 0} \cdot \underbrace{f''(\xi)}_{\leq 0} \Rightarrow \geq 0$

τι μπορώ να πω για το πρόσημο;

και $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_m^S(f) = \underbrace{-\frac{2}{180}\left(\frac{2}{m-1}\right)^4}_{\leq 0} \underbrace{f^{(4)}(\theta)}_{\geq 0} \Rightarrow \leq 0$

όμως,

$$f'(x) = \frac{6x^5}{30} - 2x = \frac{x^5}{5} - 2x$$

$$f''(x) = \frac{5x^4}{5} - 2 = x^4 - 2 \le 0 \quad (\le -1 \text{ πιο συγκεκριμένα})$$

Άρα, $Q_n^T(f) \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$\cdot\ f^{(3)}(x) = 4x^3$

$\cdot\ f^{(4)}(x) = 12x^2 \ge 0$

Άρα, $Q_m^S(f) \ge \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. ■

Άσκηση 6.9

Q τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης σε ένα διάστημα $[a,b]$

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$$

ΝΔΟ

υπάρχει το πολύ ένας $k \in \mathbb{N}_0$ τ.ω. $\exists C_k \in \mathbb{R}\ \forall f \in C^k[a,b]\ \exists \xi \in [a,b]$

$$R(f) = C_k f^{(k)}(\xi) \quad (*)$$

Απόδειξη

Δύο παρατηρήσεις

• $C_k = 0$ τότε το σφάλμα για όλες τις συναρτήσεις που είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο $[a,b]$, θα ήταν μηδέν. Ιδιαίτερα, ο τύπος θα ολοκλήρωνε όλα τα πολυώνυμα ακριβώς. Αυτό όμως είναι αδύνατον, γιατί τέτοιοι τύποι δεν υπάρχουν. (άρα C_k δεν μπορεί να είναι μηδέν)

• $C_k \neq 0$ τότε για $p \in \mathbb{P}_{k-1}$ έχουμε ότι το $R(p) = 0$ ενώ για $p(x) = x^k$ έχουμε,

$$R(p) = C_k \cdot k! \neq 0$$

Συμπέρασμα, ο τύπος ολοκληρώνει ~~μέχρι~~ πολυώνυμα μέχρι και βαθμού $k-1$ ακριβώς, και όχι πολυώνυμα βαθμού k. Αυτό μπορεί να συμβεί το πολύ για ένα k. ■ Παρ/σας

Έστω $k, \ell \in \mathbb{N}_0$, $\ell > k$ και έστω ότι ισχύει η (*) και η

(**) $\exists\, c_\ell \ldots$

$$R(f) = c_\ell f^{(\ell)}(\xi).$$

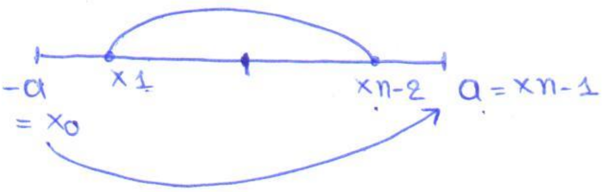
Για $f(x) = x^k$, η (*) δίνει $R(f) \neq 0$, και η (**) δίνει $R(f) = 0$, άτοπο ∎

Άσκηση 6.10

Q_n τύπος των Newton-Cotes σε ένα διάστημα $[-a,a]$ με n κόμβους.

$$Q_n(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \ldots + w_{n-1} f(x_{n-1})$$

Έστω x_i, x_j κόμβοι τ.ω. $x_i = -x_j$



ΝΔΟ: $w_i = w_j$ (οι τύποι αυτοί είναι συμμετρικοί π.χ. $[a,b]$ θα λέγαμε συμμετρικοί ως προς το μέσο)

Συμμετρία των τύπων των Newton-Cotes

Απόδειξη

$\forall p \in \mathbb{P}_{n-1}$ $\quad \int_{-a}^{a} p(x)\,dx = Q_n(p)$

Για τα πολυώνυμα του Lagrange L_i, L_j όπου $L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$ και $L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$

Έχουμε,

$$w_i = \int_{-a}^{a} L_i(x)\,dx \quad \text{και} \quad w_j = \int_{-a}^{a} L_j(x)\,dx.$$

Τώρα,

θέλω να πάω στο j, λόγω της συμμετρίας $x_i = -x_j$

$$w_i = \int_{-a}^{a} L_i(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}\,dx = \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{x+x_k}{x_i+x_k}\,dx = \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{x+x_k}{-x_j+x_k}\,dx$$

να το βάλω j

$t = -x$

$$= (-)\int_{a}^{-a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{-t+x_k}{-x_j+x_k}\,dt = \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{t-x_k}{x_j-x_k}\,dt = \int_{-a}^{a} L_j(t)\,dt = w_j \quad ∎$$

$dt = -dx$

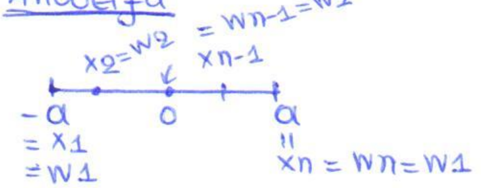
$-dt = dx$

Άσκηση 6.11

$[-a,a]$, Q_n Newton-Cotes

ΝΔΟ: Αν $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ περιττή (και ολοκληρώσιμη), τότε $R(f)=\int_{-a}^{a} f(x)\,dx - Q_n(f)=0$

Απόδειξη



Έστω $\varphi:[-a,a]\to\mathbb{R}$ περιττή & ολοκληρώσιμη. Τότε $\int_{-a}^{a}\varphi(x)\,dx=0$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $Q_n(\varphi)=0$

$$Q_n(f)=w_1 f(x_1)+\dots+w_n f(x_n)$$

$$-a=x_1<x_2<\dots<x_n=a$$

Από την προηγούμενη άσκηση ξέρουμε ότι αν x_i και $-x_i$ $(=x_j)$ είναι κόμβοι, τότε τα αντίστοιχα βάρη είναι ίσα, $w_i=w_j$

Επίσης, $\varphi(0)=0$. Επομένως, θα έχουμε ότι

$[n/2]$ ← (ακέραιο μέρος)

$$Q_n(f)=\sum_{i=1}^{[n/2]} w_i[\underbrace{\varphi(x_i)+\varphi(-x_i)}_{=0,\ \text{περιττή}}]=0$$

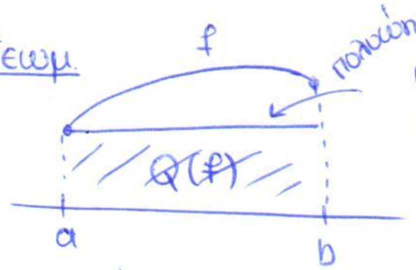
■ άσκηση

Άσκηση 6.13

Προσεγγίζω το $\int_a^b f(x)\,dx \approx \overbrace{(b-a)f(a)}^{Q(f)}$

Γεωμ.

πολυώνυμο σταθερό. $f(x)=f(a)$



Παίρνω την ευθεία από το a. αριστερός τύπος του ορθογωνίου επειδή ξεκινάω από το α που είναι αριστερά. Αντίστοιχα για τον δεξιό τύπο του ορθογωνίου.

$$R(f)=\int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$$

α) <u>ΝΔΟ</u> ο Q ολοκληρώνει σταθερές συναρτήσεις ακριβώς.

<u>Λύση</u>

$$f(x) = \gamma \quad \forall\, x \in [a,b]$$

ολοκλ. μέχρι πολυώνυμα μηδενικού βαθμού.

$$R(f) = \int_a^b \overset{=\gamma}{f(x)}\,dx - (b-a)\,f(a)$$

$$= (b-a)\gamma - (b-a)\gamma = 0$$

■ α ερώτημα

β) <u>ΝΔΟ</u>

$$\forall f \in C^1[a,b] \quad \exists\, \xi \in (a,b) \quad R(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$$

<u>Λύση</u>

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \overbrace{(b-a)f(a)}^{=\int_a^b f(a)\,dx}$$

$$= \int_a^b [f(x) - f(a)]\,dx$$

μπορούμε να το δούμε ως σφάλμα παρεμβολής

$$= \int_a^b \underbrace{(x-a)}_{\geq 0} f'(\xi(x))\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \min_{a \le \xi \le b} f'(\xi) \int_a^b (x-a)\,dx \le R(f) \le \max_{a \le \xi \le b} f'(\xi) \int_a^b (x-a)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \min_{a \le \xi \le b} f'(\xi) \le \frac{R(f)}{\int_a^b (x-a)\,dx} \le \max_{a \le \xi \le b} f'(\xi)$$

Έπεται από το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής ότι υπάρχει $\exists\, \xi \in (a,b)$ τ.ω

$$\frac{R(f)}{\int_a^b (x-a)\,dx} = f'(\xi)$$

Άρα, $R(f) = f'(\xi) \underbrace{\int_a^b (x-a)\,dx}_{= \left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b} = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$

■ β ερώτημα

γ) Σύνθετος τύπος του ορθογωνίου (θα τον βρούμε εμείς)

$n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ $\quad i = 0, \dots, n$

Εφαρμόζουμε σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ τον αριστερό τύπο του ορθογωνίου, $hf(x_i)$ και αθροίζουμε τα αποτελέσματα $h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

τι μπορούμε να πούμε για το σφάλμα;

$$\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\Big[\underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - hf(x_i)}_{\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} f'(\xi_i)}\Big] \qquad \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

$$= \frac{h^2}{2} n \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)} = \frac{n h}{2}\cdot h f'(\xi) = \frac{(b-a)}{2} h f'(\xi)$$ ξ γεράσταμα

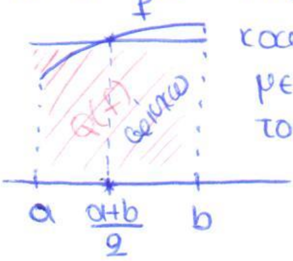
το έβαλα αναγκαστικά

$= f'(\xi)$ θα το αποδείξουμε εμείς με min, max θετ.

Άσκηση 6.14

$f \in C[a,b]$ $\qquad R(f) = \int_a^b f(x)dx - Q(f)$

$Q(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



και πολλαπλασιάζω την τιμή με το $(b-a)$. Τύπος του μέσου

α) $\forall p \in \mathbb{P}_1$ τότε $R(f) = 0$ (1 κόμβο έχω και είναι ο τύπος του Gauss)

Απόδειξη (α)

1ος τρόπος

$p(x) = \gamma x + \delta$

$$R(p) = \int_a^b (\gamma x + \delta)dx - Q(p) = \left[\gamma \frac{b^2 - a^2}{2} + \delta(b-a)\right] - (b-a)\left[\gamma\frac{a+b}{2} + \delta\right] = \text{κάνουμε}$$

πράξεις $= 0$ ∎ 1ος τρόπος

2ος τρόπος

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο τύπος ολοκληρώνει ακριβώς τα πολυώνυμα (μονώνυμα) $p(x)=1$ και $p(x)=x$

Απόδειξη

- $p(x)=1$, $R(p)=$ κάνουμε πράξεις $=0$
- $p(x)=x$, $R(p)=$ -//- -//- $=0$ ∎ 2ος τρόπος

∎ ακρώταμα

3) $\forall f\in C^2[a,b]$ $\exists \xi\in(a,b)$ τ.ω $R(f)=\frac{(b-a)^3}{24}\cdot f^{(2)}(\xi)$

Απόδειξη

1ος τρόπος

$p\in\mathbb{P}_1$. $p\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, υποθέτω και $p'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ } Hermite παρεμβολής.

Αναπτύσσοντας κατά Taylor τη συνάρτηση $f-p$ ως προς το σημείο $\frac{a+b}{2}$ έχουμε

$$f(x)-p(x)=\left[\cancel{f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-p\left(\tfrac{a+b}{2}\right)}\right]+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left[\cancel{f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-p'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\left[f''(\xi(x))-p''(\xi(x))\right]$$

Άρα, $R(f)=\int_a^b f(x)\,dx-\underbrace{Q(f)}_{=Q(p)}\ \overset{\text{θέλω να φύγει το Q.}}{=\!=}\ \int_a^b f(x)\,dx-\underbrace{Q(p)}_{=\int_a^b p(x)\,dx}=\int_a^b (f(x)-p(x))\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}_{\geq 0}\left[f''(\xi(x))\right]dx=\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=\frac{1}{2}f''(\xi)\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Bigg|_{x=a}^{x=b}$$

μπορώ να πάρω το μέγιστο, ελάχιστο, ΘΕΤ και βγαίνει έξω με την παράγω σε ένα σημείο.

$$=\frac{1}{6}f''(\xi)\left[\underbrace{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3}_{=2\left(\frac{b-a}{2}\right)^3\ \text{(κάνουμε πράξεις)}}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{2^{\cancel{3}2}}f''(\xi)$$

$$=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$ ∎ 1ος τρόπος

2ος τρόπος

$$R(f)=\int_a^b f(x)\,dx-\underbrace{Q(f)}_{=\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx}=\int_a^b\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]dx \;\underset{=\!=}{\text{αναπτ. taylor}}$$

$$=\int_a^b\left[\cancel{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}+\left(x-\frac{\alpha+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\alpha+b}{2}\right)^2 f''(\xi(x))-\cancel{f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)}\right]dx$$

περιττώς προς το μέσο=0

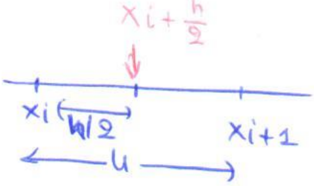
$$=\underbrace{\int_a^b\left(x-\frac{\alpha+b}{2}\right)}_{=0}\underbrace{f'\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)}_{\text{σταθερά}}dx+\frac{1}{2}\int_\alpha^b\underbrace{\left(x-\frac{\alpha+b}{2}\right)^2}_{\geq 0}f''(\xi(x))\,dx$$

= βγήκε το αποτέλεσμα που βρήκαμε πριν. ■ 2ος τρόπος

■(β) ερώτημα.

γ) $n\in\mathbb{N}$, $h=\frac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$ $\quad i=0,\dots,n$

ΝΔΟ: $\forall f\in C^2[\alpha,b]\ \exists\xi\in(\alpha,b)$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx-h\sum_{i=0}^{n-1}\left(x_i+\frac{h}{2}\right)=\frac{b-a}{24}h^2f''(\xi)$



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx\approx h f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$$

Απόδειξη

Έχουμε, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx-h\sum_{i=0}^{n-1}f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\,dx-h\sum_{i=0}^{n-1}f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\,dx-hf(x_i+h/2)\right]}_{=\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{24}f''(\xi_i)}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^3}{24}f''(\xi_i)$$

$$=\frac{h^3}{24}\,n\,\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\xi_i)$$

max, min, θετ $=f''(\xi)$

αυτό που κάναμε πριν αλλά τώρα στο διάστημα x_i, x_{i+1}, με $\xi_i\in(x_i,x_{i+1})$

$$=\frac{h^3}{24}\cdot n\cdot f''(\xi)=\frac{n\,h}{24}\cdot h^2f''(\xi)=\frac{(b-a)}{24}h^2f''(\xi)$$

■ (γ) ερώτημα

Άσκηση 6.15

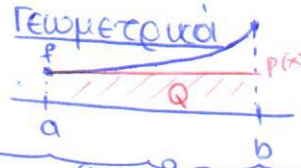
$f \in C^1[a,b]$, $Q(f) = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a)$

$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$

Θεωρώ, $p(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$ πολ/μο Taylor της f βαθμού το πολύ ένα ως προς το σημείο a.

$$\int_a^b p(x)\,dx = (b-a)f(a) + \int_a^b (x-a)f'(a)\,dx = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a)$$

Γεωμετρικά



α) ΝΔΟ: $\forall p \in \mathbb{P}_1$, $R(p) = 0$

Απόδειξη

$p(x) = \gamma x + \delta$

$$R(p) = \int_a^b (\gamma x + \delta)\,dx - \left[(b-a)(\gamma a + \delta) + \frac{(b-a)^2}{2}\cdot\gamma\right]$$

$$= \text{κάνουμε πράξεις} = \gamma\frac{b^2-a^2}{2} + \delta(b-a) - \left[(b-a)(\gamma a+\delta) + \frac{(b-a)^2}{2}\gamma\right]$$

$= \dots = 0$ ∎ (α) ερώτημα

β) ΝΔΟ

$\forall f \in C^2[a,b]$ $\exists \xi \in (a,b)$ τ.ω $R(f) = \frac{(b-a)^3}{6} f''(\xi)$

Απόδειξη

$p(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$ τότε $Q(f) = \int_a^b p(x)\,dx$

Άρα, $R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{Q(f)}_{=\int_a^b p(x)dx}$

$$= \int_a^b [f(x) - p(x)]\,dx \underset{\text{Taylor}}{=} \int_a^b \left[\cancel{f(a)} + \cancel{(x-a)f'(a)} + \frac{(x-a)^2}{2} f''(\xi(x)) - \cancel{f(a)} - \cancel{(x-a)f'(a)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{(x-a)^2}_{\geq 0} f''(\xi(x))\,dx = \frac{1}{2} f''(\xi)\int_a^b (x-a)^2\,dx = \frac{(b-a)^3}{6}\cdot f''(\xi)$$ ∎ (β) ερώτημα

max, min, θετ

γ) $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$ ΝΔΟ: $\forall f \in C^2[a,b]$ $\exists \xi \in (a,b)$ τ.ω

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}\left[h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right] = \frac{(b-a)}{6}\cdot h^2 \cdot f''(\xi)$$

Απόδειξη

Έχουμε, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}\left[h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right]$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}\left[h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \left[h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right]\right\}}_{= \text{σύμφωνα με το (β) ερώτημα} = \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{6} f''(\xi_i) \text{ με } \xi_i \in (x_i, x_{i+1})}$$

$$= \frac{h^3}{6} n \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)}_{= \text{max, min, θετ } (*) \; = f''(\xi)}$$

$$= \frac{n h}{6} \cdot h^2 \cdot f''(\xi) = \frac{(b-a)}{6} \cdot h^2 \cdot f''(\xi) \quad \blacksquare \text{ (γ) ερώτημα.}$$

(*)

$$\min_{a \le x \le b} f''(x) \le \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \le \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \max_{a \le x \le b} f''(x)$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \cdot \max_{a \le x \le b} f''(x) \quad \blacksquare$$