6ο Κεφάλαιο

6. Αριθμητική ολοκλήρωση

Θέμα: Αριθμητική προσέγγιση ολοκληρωμάτων $\int_a^b f(x)\,dx$ για "ομαλές" συναρτήσεις $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$.

Αν η F είναι μία παράγουσα της f (δηλαδή $F' = f$) τότε

$$(*) \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Υπάρχουν δύο δυσκολίες για τον υπολογισμό του $\int_a^b f(x)\,dx$ με τον $(*)$:

- Σπάνια είναι γνωστή μία F
- Ενδέχεται η F να είναι πολύπλοκη συνάρτηση, ακόμα και για απλές f. πχ για $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ οι αντίστοιχες F περιέχουν λογαρίθμους και τόξα εφαπτομένων. ▪

Στην αριθμητική ολοκλήρωση προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

με τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$① \quad Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_n \cdot f(x_n)$$

με κόμβους $x_0, \dots, x_n \in [\alpha, b]$ και βάρη $w_0, \dots, w_n \in \mathbb{R}$. ▪

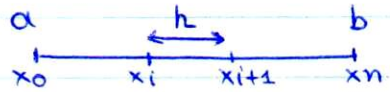
Θα μελετήσουμε δύο κατηγορίες τύπων αριθμητικής ολοκλήρωσης τους:

- τύπους των Newton-Cotes
- τύπους του Gauss ▪

· <u>Τύποι ολοκλήρωσης των Newton-Cotes</u>

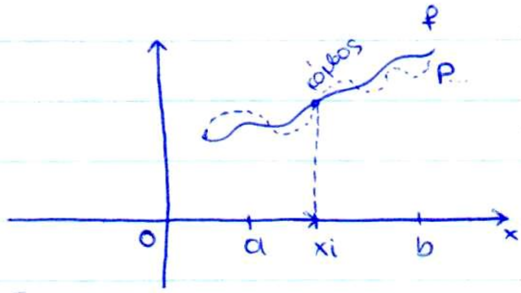
Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{n}$ και θεωρούμε τους κόμβους

$x_i := a + ih$, $i = 0, \dots, n$



Έστω $P_n \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής μιας συνάρτησης f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$ δηλαδή

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n$$



θέτουμε,

$$② \quad Q_{n+1}(f) := \int_a^b P_n(x)dx$$

<u>Παρατήρηση</u>

Αν $f \in \mathbb{P}_n$ τότε $P_n = f$, συνεπώς $Q_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)dx$. Με άλλα λόγια

Φτιάχνω το πολυώνυμο P. Αντί να βρω το ολοκλήρωμα της f, βρίσκω του P.

ο Q_{n+1} ολοκληρώνει <u>ακριβώς</u> πολυώνυμα βαθμού μέχρι και n.

Έστω $R_{n+1}(f)$ το σφάλμα ολοκλήρωσης, $R_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)dx - Q_{n+1}(f)$

Τότε,

$$\forall p \in \mathbb{P}_n, \ R_{n+1}(p) = 0 \quad ■$$

Θα αποδείξουμε ότι το $Q_{n+1}(f)$ της ② γράφεται στη μορφή ① με τα δεδομένα x_i και με κατάλληλα βάρη w_i.

<u>Απόδειξη</u>

Πράγματι, αν L_i,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad , i = 0, \dots, n$$

τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_n$, τότε το P_n γράφεται στη μορφή

③ $P_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i$ (παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Lagrange)

Άρα,

$$Q_{n+1}(f) = \int_{\alpha}^{b} P_n(x)\,dx \overset{③}{=} \int_{\alpha}^{b} \sum \left(f(x_i) L_i(x) \right) dx$$

σταθερά

$$= \sum_{i=0}^{n} \int_{\alpha}^{b} f(x_i) L_i(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_{\alpha}^{b} L_i(x)\,dx}_{= w_i}$$

Με $w_i = \int_{\alpha}^{b} L_i(x)\,dx$, $i=0,\dots,n$ παίρνουμε

$$Q_{n+1}(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

δηλαδή το $Q_{n+1}(f)$ είναι της μορφής ①.

Επόμενος στόχος: Υπολογισμός των $w_0,\dots,w_n$ με τρόπο "ανεξάρτητο" του διαστήματος $[\alpha,b]$. Έχουμε

$$w_i = \int_{\alpha}^{b} L_i(x)\,dx = \int_{\alpha}^{b} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx$$

Θέτω $x = \alpha + hs$

όταν $x=\alpha$
$\alpha=\alpha+hs$
$hs=0$
$s=0$
όταν $x=b$
$b=\alpha+hs$
$hs=b-\alpha$
$h \to$

$n \to$

$0 \to$

$$= \int \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\alpha+hs-(\alpha+jh)}{(\alpha+ih)-(\alpha+jh)}\, h \cdot ds$$

έχουμε $x_i=\alpha-i\cdot h$
φτάνω στο b
όταν το i είναι
n.

$$= h\int_{0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{h(s-j)}{h(i-j)}\,ds$$

$$= h\int_{0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{s-j}{i-j}\,ds$$

ορίζω $= \varphi_i(s)$

Ορίζουμε, $w_i^* := \int_0^n \varphi_i(s)\,ds$, $i=0,\dots,n$

Τα w_i^* είναι ανεξάρτητα του διαστήματος $[\alpha,b]$ και μπορώ να υπολογιστούν μία φορά. Κατόπιν, υπολογίζουμε τα w_i από τους τύπους

$$w_i = h\cdot w_i^* \ , \ i=0,\dots,n$$ ■ απόδειξη

<u>Συμπεριφορά των $Q_{n+1}(f)$ για $n\to\infty$</u>:

Έστω $f\in C[\alpha,b]$. Τότε, γενικά $Q_{n+1}(f) \overset{\text{δεν συγκλίνει}}{\not\to} \int_\alpha^b f(x)\,dx$, $n\to\infty$

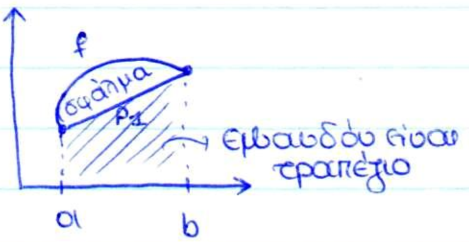
<u>Συμπέρασμα</u>: Από τους τύπους των Newton-Cotes χρήσιμο είναι μόνο εκείνοι με μικρό n. Αυτοί χρησιμοποιούνται στην πράξη ως εξής:

Διαιρούμε το διάστημα $[\alpha,b]$ σε υποδιαστήματα, κατά κανόνα ομοιόμορφα, και εφαρμόζουμε τον τύπο ολοκλήρωσης με το ίδιο σε καθένα υποδιάστημα. Με αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε στους λεγόμενους <u>σύνθετους</u> τύπους ολοκλήρωσης των Newton-Cotes.

<u>Ο τύπος του τραπεζίου</u> (απλός)

Ο τύπος ολοκλήρωσης των Newton-Cotes με <u>δύο κόμβους</u>, Q_2, λέγεται τύπος του τραπεζίου.

<u>Γεωμετρική Ερμηνεία</u>



$p_1 \in \mathbb{P}_1$, πολ/μο βαθμού 1.

$$Q_2(f) = \int_\alpha^b P_1(x)\,dx$$

Άρα, $\underbrace{Q_2(f) = \frac{b-\alpha}{2}\cdot[f(\alpha)+f(b)]}_{\text{εμβαδόν τραπεζίου, το κοιτάμε από το σχήμα πάνω.}}$ ■

Ερώτημα : τι μπορούμε να πούμε για το σφάλμα

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f)\ ;$$

§§ σημαντικό λήμμα §§

Λήμμα (παράσταση του σφάλματος του απλού τύπου του τραπεζίου)

σημαίνει 2 φορές παραγωγίσιμη

Έστω $f \in C^2[a,b]$. Τότε, υπάρχει ένα $\xi \in (a,b)$ τ.ω. το σφάλμα $R_2(f)$ να παριστάνεται στη μορφή $R_2(f) = -\dfrac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$ (*)

Απόδειξη

Έστω $p_1 \in \mathbb{P}_1$ τέτοιο ώστε $\begin{cases} p_1(a) = f(a) \\ p_1(b) = f(b) \end{cases}$. Τότε

- $Q_2(p_1) = Q_2(f)$ (+)
- $Q_2(p_1) = \int_a^b p_1(x)\,dx$ (++)

Άρα, $R_2(f) = \int_a^b f(x)dx - Q_2(f)$

$$\overset{(+)}{=} \int_a^b f(x)\,dx - Q_2(p_1)$$

$$\overset{(++)}{=} \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_1(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{R_2(f) = \int_a^b [f(x) - p_1(x)]\,dx}$$

Τώρα, ξέρουμε ότι για το σφάλμα παρεμβολής $f(x) - p_1(x)$ ισχύει:

$$\forall x \in [a,b]\ \exists \xi(x) \in (a,b) \quad f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2!} \cdot (x-a)(x-b).$$

Επομένως, $R_2(f) = \dfrac{1}{2!}\displaystyle\int_a^b \overset{\text{θετικό}}{(x-a)}\underbrace{\overset{\text{αρνητικό}}{(x-b)}}_{\text{άρα θα το κάνω θετικό}} f''(\xi(x))\,dx$

θέλω να το βγάλω έξω. να φροντίσω τα υπόλοιπα να μην αλλάξουν πρόσημο. θέλω να είναι όλα θετικά.

$$= -\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x) f''(\xi(x))\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad -2R_2(f) = \int_a^b \overbrace{(x-a)(b-x)}^{\geq 0} f''(\xi(x))\, dx$$

αν την κάνω μέγιστη το ολοκλ. θα μεγαλώσει
-"- -"- ελάχιστη -"- θα μικρύνει.

$$\Rightarrow \int_\alpha^b (x-a)(b-x) \underbrace{\min_{\alpha \leq \xi \leq b} f''(\xi)}_{=m}\, dx \leq -2R_2(f) \leq \int_\alpha^b (x-a)(b-x) \underbrace{\max_{a \leq \xi \leq b} f''(\xi)}_{=M}\, dx$$

δεν εξαρτάται από το x τώρα

$$\Rightarrow \quad m \underbrace{\int_\alpha^b (x-a)(b-x)\, dx}_{>0} \leq -2R_2(f) \leq M \int_a^b (x-a)(b-x)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad m \leq \frac{-2R_2(f)}{\int_a^b (x-a)(b-x)\, dx} \leq M$$

Η συνέχεια της f'' και το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής δίνουν

$$\frac{-2R_2(f)}{\int_a^b (x-a)(b-x)} = f''(\xi) \quad \text{για κάποιο } \xi \in (\alpha, b).$$

το υπολογίζουμε και βρίσκουμε

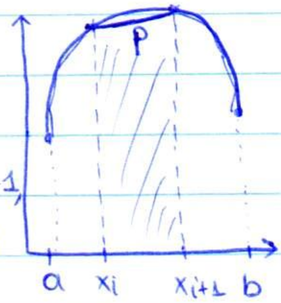
Συνεπώς, $R_2(f) = -\frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x-a)(b-x)\, dx = \frac{(b-a)^3}{6}$

Οπότε, $R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$ ■ απόδειξη.

■ ουσιαστικά τέλος ερωτήματος.

Σύνθετος τύπος του τραπεζίου

Έστω $n\in\mathbb{N}$, $h=\frac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$, $i=0,\dots,n$ ο ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με "βήμα" h.



Εφαρμόζοντας τον απλό τύπο του τραπεζίου σε κάθε υποδιάστημα $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n-1$ και αθροίζουμε τα αποτελέσματα. Έτσι προκύπτει ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου Q^T_{n+1},

$$Q^T_{n+1}(f)=\frac{\overbrace{x_1-x_0}^{=h}}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+\frac{\overbrace{x_2-x_1}^{=h}}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$$

$$+\dots+\frac{\overbrace{x_n-x_{n-1}}^{=h}}{2}\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$$=\frac{h}{2}\left[(f(x_0)+f(x_1))+(f(x_1)+f(x_2))+\dots+(f(x_{n-1})+f(x_n))\right]$$

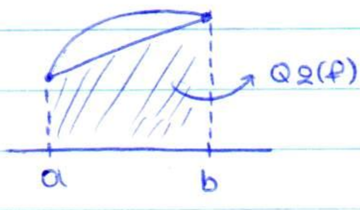
$$=h\cdot\left[\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+\dots+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right]$$

12/5/2016

Τύπος του τραπεζίου

Απλός

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx Q_2(f)=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$



Παράσταση του σφάλματος

$$R_2(f)=\int_a^b f(x)\,dx-Q_2(f)$$

Αν $f\in C^2[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τ.ω. $R_2(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$ (*)

Σύνθετος τύπος του τραπεζίου

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$,

$x_i = a + ih \quad , i = 0, 1, \ldots, n$.

Εφαρμόζουμε τον απλό τύπο του τραπεζίου σε κάθε υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ και αθροίζουμε τα αποτελέσματα, οπότε προκύπτει

$$Q^T_{n+1}(f) = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

Σφάλμα

$$R^T_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)dx - Q^T_{n+1}(f)$$

Πρόταση (παράσταση του σφάλματος του σύνθετου τύπου του τραπεζίου)
Έστω $f \in C^2[a,b]$ και Q^T_{n+1} ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου ως προς τον ομοιόμορφο διαμερισμό $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$ με βήμα $h = \frac{b-a}{n}$, του $[a,b]$. Τότε $\exists \xi \in (a,b)$ $R^T_{n+1}(f) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)$

Απόδειξη

$$R^T_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)dx - Q^T_{n+1}(f)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n} \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]\right]}_{\text{σφάλμα του τύπου (απλού) του τραπεζίου στο διάστημα } [x_{i-1},x_i]}$$

$$\circledast \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{(x_i-x_{i-1})^3}{12} f''(\xi_i)\right] \quad \text{με } \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i)$$

θα το αποδείξουμε

$$= -\frac{h^3}{12} n \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = f''(\xi) \text{ με } \xi \in (a,b)$$

$n \cdot h = b-a$ εξήγηση

$$= -\frac{n\, h^3}{12} f''(\xi) = -\frac{\overset{b-a}{\overset{\parallel}{n \cdot h}} \cdot h^2 f''(\xi)}{12} = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)$$

Αλλά,

$$n \cdot \min_{a\le x\le b} f''(x) \le \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \le \sum_{i=1}^{n} \max_{a\le x\le b} f''(x) = n \cdot \max_{a\le x\le b} f''(x)$$

$\Rightarrow$

$$\min_{a\le x\le b} f''(x) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \le \max_{a\le x\le b} f''(x)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = f''(\xi)$ ∎ πρόταση

$$R_{n+1}^{T}(f) = -\frac{(b-a)}{12} \cdot h^2 f''(\xi) \Rightarrow |R_{n+1}^{T}(f)| = \frac{b-a}{12} h^2 \cdot |f''(\xi)|$$

$$\Rightarrow |R_{n+1}^{T}(f)| \le \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \max_{a\le x\le b}|f''(\xi)| = C \cdot h^2 \to 0, \; h\to 0$$

↳ σταθερά

Η τάξη σύγκλισης είναι (τουλάχιστον) δύο ∎ τάξη σύγκλισης τουλάχ. 2

Ο τύπος του Simpson

Ο τύπος των Newton-Cotes με τρεις κόμβους Q3 λέγεται τύπος του Simpson και είναι:

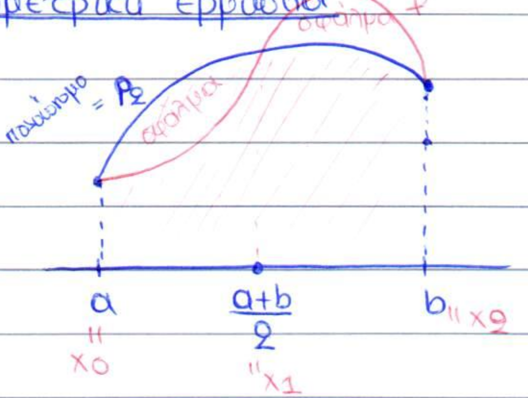
$$Q3(f) = \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right]$$

(πως το γράφουμε διαφορετικά)

Θέτουμε $h = \frac{b-a}{2}$, $x_i = a + ih$, $i = 0,1,2$ και γράφουμε τον τύπο του Simpson στη μορφή

$$Q3(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

Γεωμετρική ερμηνεία



Ερώτημα:

Μέχρι ποιού βαθμού πολυώνυμα ολοκληρώνει ο Q3 ακριβώς?

Απάντηση

• Προφανώς (από την κατασκευή)

$$\forall p \in \mathbb{P}_2 \quad \int_a^b f(x)\,dx = Q3(p)$$

αλλά ολοκλ. και μέχρι ακριβώς 3ου βαθμού. Όχι αυστηρ. απόδειξη.

Ισχυρισμός : Ο Q3 ολοκληρώνει πολυώνυμα και τρίτου βαθμού ακριβώς.

Απόδειξη

1ος τρόπος Θέτουμε $q_3(x) = x^3$

Έχουμε, $\int_a^b q_3(x)\,dx - Q3(q_3) = \ldots$ κάνουμε πράξεις ... $= 0$

1ος τρόπος
Δεν μας απασχολεί αυτός ο τρόπος

2ος τρόπος

$$q_3(x) = x^3 = \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}_{p(x)} + q(x) \quad \text{με } q \in \mathbb{P}_2$$

Άρα, $q_3 = p + q$.
Επομένως,

$$R_3(q_3) = \int_a^b q_3(x)\,dx - Q3(q_3)$$

$$= \int_a^b p(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,dx - \left[Q3(p) + Q3(q)\right]$$

$$= \left[\int_a^b p(x)\,dx - Q3(p)\right] + \underbrace{\left[\int_a^b q(x)\,dx - Q3(q)\right]}_{=0 \text{ γιατί } q \in \mathbb{P}_2}$$

$$= \cancel{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 dx} - \frac{b-a}{6}\left[p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) + p(b)\right]$$

0 περιττή συνάρτηση ως προς το $\frac{a+b}{2}$

$p(a) = \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3$, $\quad p\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, $\quad p(b) = \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3$

$$= -\frac{b-a}{6}\left[\left(\frac{a-b}{2}\right)^3 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^3\right] = 0$$

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = -\left(\frac{\alpha-b}{2}\right)^3$$

Ο λόγος που ολοκληρώνει ο Q3 πολυώνυμα ακριβώς τρίτου βαθμού είναι η συμμετρία του ως προς το $\frac{\alpha+b}{2}$.

$\blacksquare$ ισχυρισμού αλλά και ολόκληρου του ερωτήματος.

<u>Σφάλμα</u>

$$R_3(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_3(f)$$

<u>Λήμμα</u> (παράσταση του σφάλματος του απλού τύπου του Simpson)

Έστω $f \in C^4[a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω $R_3(f) = \frac{-(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi)$ (*)

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $P_3 \in \mathbb{P}_3$ τ.ω $P_3(a) = f(a)$, $P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $P_3(b) = f(b)$

Ζητάμε και $P_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

- $Q_3(f) = Q_3(P_3)$
- $Q_3(P_3) = \int_a^b P_3(x)\,dx$

Άρα, $R_3(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \overbrace{Q_3(f)}^{Q_3(P_3)} = \int_a^b f(x)\,dx - Q_3(P_3)$

$$= \int_\alpha^b f(x)\,dx - \int_\alpha^b P_3(x)\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - P_3(x)]\,dx$$

$$R_3(f) = \int_a^b [f(x) - p_3(x)]\,dx$$

Για το σφάλμα παρεμβολής $f(x) - p_3(x)$ έχουμε:

$$\forall x \in [\alpha, b] \quad \exists\, \xi(x) \in (\alpha, b)$$

Άσκηση 4.15

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-a)\left(x - \frac{\alpha+b}{2}\right)^2 (x-b)$$

Άρα,

$$R_3(f) = \int_a^b \frac{1}{4!} \underbrace{(x-a)\left(x - \frac{\alpha+b}{2}\right)^2}_{\geq 0} \underbrace{(x-b)}_{\leq 0} f^{(4)}(\xi(x))\,dx$$

$$= -\frac{1}{4!}\int_a^b \underbrace{(x-a)\left(x - \frac{\alpha+b}{2}\right)^2 (b-x)}_{\geq 0} f^{(4)}(\xi(x))\,dx$$

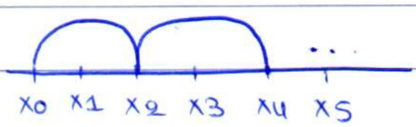
απαιτά του εξήγηση με το μέγιστο, ελάχιστο, ενδιάμεση τιμή. Το έχουμε κάνει σε μια απόδειξη ξ!

$$\stackrel{\downarrow}{=} -\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_\alpha^b (x-a)\left(x - \frac{\alpha+b}{2}\right)^2 (b-x)\,dx \quad = \frac{(b-a)^3}{2^3 \cdot 15}$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi)$$ ■ λάμμα

Σύνθετος τύπος του Simpson

Έστω $n \in \mathbb{N}$ άρτιος, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$. Εφαρμόζουμε τον απλό τύπο του Simpson στα υποδιαστήματα $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_n]$ και αθροίζουμε τα αποτελέσματα οπότε προκύπτει ο σύνθετος τύπος του Simpson Q^S_{n+1}



$$Q^{S}_{n+1}(f) = \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots$$

$$\dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]$$

Σφάλμα:

$$R^{S}_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q^{S}_{n+1}(f)$$

Πρόταση (παράσταση του σφάλματος του σύνθετου τύπου του Simpson)
άρτιος
Έστω $f \in C^4[\alpha,b]$, $n \in \mathbb{N}$ και Q^{S}_{n+1} ο σύνθετος τύπος του Simpson ως προς τον ομοιόμορφο διαμερισμό $x_i = \alpha + ih$, $i=0,\dots,n$ του $[\alpha,b]$ με βήμα $h = \frac{b-\alpha}{n}$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (\alpha,b)$ τ.ω $R^{S}_{n+1}(f) = -\frac{b-\alpha}{180} h^4 \cdot f^{(4)}(\xi)$.

Απόδειξη

Το $R^{S}_{n+1}(f)$ είναι το άθροισμα των σφαλμάτων του απλού τύπου του Simpson σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα ~~[illegible]~~ $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, $i = 1,\dots,\frac{n}{2}$.

Επομένως, σύμφωνα με την ⊛ απολήμμα έχουμε

$$R^{S}_{n+1}(f) = \sum_{i=1}^{n/2}\left[\frac{-(x_{2i}-x_{2i-2})^5}{2^4\cdot 180} \cdot f^{(4)}(\xi_i)\right] \quad \text{με } \xi_i \in (x_{2i-2}, x_{2i}).$$

Όμως, το $x_{2i} - x_{2i-2} = 2h$ οπότε

$$R^{S}_{n+1}(f) = -\sum_{i=1}^{n/2} \frac{(2h)^5}{2^4 \cdot 180} \cdot f^{(4)}(\xi_i)$$

$$= -h^5 \sum_{i=1}^{n/2} \frac{2^{\cancel{5}}}{\cancel{2^4}\,180} f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{2h^5}{180} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i)$$

θέλω να το γράψω σαν τιμή σε ένα σημείο

$$= -\frac{2h^5}{180}\,\frac{n}{2}\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i)\right) = f^{(4)}(\xi)$$

= κάνει την τιμή της ~~μέγιστης~~ παραγώγου σε ένα σημείο. θέλει και αυτό εξήγηση με μέγιστο και ελάχιστο.

$$= -\frac{\cancel{2}h\cdot h^4}{180}\cdot\frac{n}{\cancel{2}}\cdot f^{(4)}(\xi) = -\frac{\overbrace{n\cdot h}^{=b-a}\cdot h^4}{180}\cdot f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)}{180}\cdot h^4\cdot f^{(4)}(\xi) \blacksquare$$

πρόταση.

πάει πολύ πιο γρήγορα στο 0 από ότι προηγουμένως.

<u>17/5/2016</u>

Τύποι ολοκλήρωσης του Gauss

Έστω $[\alpha,b]$ ένα διάστημα και $w:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ μία <u>συνάρτηση βάρους</u>, δηλαδή τω

$$w(x)\geq 0 \quad \forall x\in[\alpha,b]$$

$$0<\int_\alpha^b w(x)\,dx<\infty$$

Προσεγγίζουμε ολοκληρώματα της μορφής $I(f) = \int_\alpha^b w(x)f(x)\,dx$ με τύπους ολοκλήρωσης της μορφής

$$(*)\quad Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

<u>Ζητούμενο</u>: Να προσδιοριστούν τα $\overbrace{x_1,\dots,x_n}^{\text{κόμβοι}}$ και $\overbrace{w_1,\dots,w_n}^{\text{βάρη}}$ έτσι ώστε ο Q_n να <u>ολοκληρώνει ακριβώς</u> πολυώνυμα του μέγιστου δυνατού βαθμού.

Ισχυρισμος

Δεν υπάρχει τύπος Q_n που να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n$.

Απόδειξη

Πράγματι, για το πολυώνυμο

$$p(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2\cdots(x-x_n)^2,$$ είναι βαθμού $2n$,

$Q_n(p) = 0$ και

$$I(p) = \int_a^b w(x)p(x)\,dx$$

$$= \int_\alpha^b \underbrace{w(x)(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2}_{\geq 0}\,dx > 0$$

Επομένως,

$$I_n(p) \neq Q_n(p).$$

Θα δούμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συγκεκριμένη συνάρτηση βάρους w, υπάρχει ακριβώς ένας τύπος Q_n της μορφής ⊛ που ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$.
Αυτοί οι τύποι λέγονται τύποι του Gauss. ■ισχυρισμός

Παρατήρηση (ορθογώνια πολυώνυμα)
Για κάθε συνάρτηση βάρους $w: [\alpha,b] \to \mathbb{R}$, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα πολυώνυμα P_n βαθμού ακριβώς n, με μέγιστο βαθμό συντελεστή ή τη μονάδα (γράφουμε $P_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$),

τ.ω

$$\int_a^b w(x)\, p_n(x)\, r_{n-1}(x)\, dx = 0 \quad , \forall r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$$

Οι ρίζες x, $x_1, \dots, x_n$ του P_n είναι απλές και ανήκουν στο διάστημα (a,b).

Τα πολυώνυμα $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n \in \mathbb{N}$, λέγονται ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w. παρατήρηση.

Θεώρημα (Ύπαρξη και μοναδικότητα των τύπων ολοκλήρωσης του Gauss)

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση βάρους και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n \in \mathbb{N}$, τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w. τότε

α) Με κόμβους $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ τις ρίζες του P_n, υπάρχουν μοναδικά ορισμένα βάρη $w_1, \dots, w_n$ τ.ω ο τύπος $Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$, να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$, δηλαδή $\forall p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ $\int_a^b w(x)p(x)\,dx = Q_n(p)$.

Τα $w_1, \dots, w_n$ είναι θετικά.

β) Αν ένας τύπος $Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$, τότε τα $x_1, \dots, x_n$ είναι ρίζες του P_n.

(θέλω να φτιάξω βάρη που να ολοκλ. ακριβώς τορ και να είναι ανεξ. του p)

Απόδειξη

α) Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ τ.ω $q(x_i) = p(x_i)$ $i = 1, \dots, n$. (Δηλαδή το q είναι το πολυώνυμο παρεμβολής του p στα σημεία $x_1, \dots, x_n$).

Τότε το $(p-q)(x_i)=0 \quad , i=1,\dots,n$.

Επομένως,

$$\underbrace{p(x)-q(x)}_{\in \mathbb{P}_{2n-1} \text{ βαθμού}} = \overbrace{\underbrace{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}_{\in \mathbb{P}_n \text{ (βαθμού } n)}}^{=P_n(x)} \cdot r_{n-1}(x)$$

με $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ βαθμού

Επομένως,

$$\int_a^b w(x)\cdot p(x)\,dx = \int_a^b w(x)\cdot\left[q(x) + P_n(x)\cdot r_{n-1}(x)\right]dx$$

$$= \int_a^b w(x)\,q(x)\,dx + \int_a^b \cancel{w(x)\cdot P_n(x)\cdot r_{n-1}(x)}\,dx$$

0 (από την παρατήρηση για τα ορθογώνια πολυώνυμα)

$$= \int_a^b w(x)\,q(x)\,dx \iff \int_a^b w(x)\,\underset{\in \mathbb{P}_{2n-1}}{p(x)}\,dx = \int_a^b w(x)\,\underset{\in \mathbb{P}_{n-1}}{q(x)}\,dx$$

#

Έστω $L_1,\dots,L_n$ τα πολυώνυμα Lagrange ως προς τα $x_1,\dots,x_n$, δηλαδή

$$L_i(x)=\prod_{j=1}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad i=1,\dots,n$$

Τότε,

$$q(x)=\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\,L_i(x) \text{ , οπότε}$$

$$\int_a^b w(x)\,p(x)\,dx = \int_a^b w(x)\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\,L_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left[\int_a^b w(x)\,L_i(x)\,dx\right]}_{=:w_i}p(x_i)$$

μένει να δω ότι είναι μοναδικά + θετικά (**)

Τα w_i είναι ανεξάρτητα του p και έχουμε

① $$\int_a^b w(x)\,p(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} w_i\,p(x_i) \quad \forall\, p\in\mathbb{P}_{2n-1}$$

(** απόδειξη)

Έστω $w_1, \dots, w_n$ τ.ω ② $\int_a^b w(x)p(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i' p(x_i) \quad \forall p \in \mathbb{P}_{2n-1}$

Επιλέγουμε, $p(x) = (L_i(x))^2$. Προφανώς $p \in \mathbb{P}_{2n-2}$

Επομένως, σύμφωνα με την ①,

$$\int_a^b w(x)(L_i(x))^2 = w_i,$$

και από την ②

$$\int_a^b w(x)\,(L_i(x))^2 = w_i' \quad \blacksquare(**)$$

<u>Συμπέρασμα</u>, $w_i' = w_i$, $i = 1, \dots, n$ και $w_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. ■ αξίωμα

β)

Έστω $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. θέτουμε $p(x) := (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).\, r_{n-1}(x)$

τότε $Q_n(P) = 0$, και $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Επομένως, $\int_a^b w(x)\underbrace{(x-x_1)\dots(x-x_n)}_{= q_n(x),\ q_n \in \hat{\mathbb{P}}_n} r_{n-1}(x)dx$
$= 0 \quad \forall r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$.

Λόγω της μοναδικότητας του P_n, θα έχουμε ότι το $P_n = q_n$,

οπότε τα $x_1, \dots, x_n$ είναι ρίζες του P_n. ■ βεβαίωμα

■ θεώρημα

Θεώρημα (παράσταση του σφάλματος τύπου του Gauss)
Έστω $[\alpha,b] \subset \mathbb{R}$, $w:[\alpha,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους, και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n \in \mathbb{N}$, τα ως προς w ορθογώνια πολυώνυμα. Αν Q_n είναι ο τύπος του Gauss ως προς w με n κόμβους, και $f \in C^{2n}[\alpha,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,b)$ τ.ω $\int_{\alpha}^{b} w(x) f(x)\,dx - Q_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{\alpha}^{b} w(x)[p_n(x)]^2\,dx$

(Δεν απαιτείται ομαλότητα της w!)

Απόδειξη
Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ τ.ω

$$\left.\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i) \\ p'(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned}\right\} i=1,\dots,n$$

Τότε, $Q_n(f) = Q_n(p)$

$$Q_n(p) = \int_{\alpha}^{b} w(x)\,p(x)\,dx$$

Επομένως,
$$\int_{\alpha}^{b} w(x) f(x)\,dx - Q_n(f) =$$
$$\int_{\alpha}^{b} w(x) f(x)\,dx - Q_n(p) =$$
$$\int_{\alpha}^{b} w(x) f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{b} w(x)\,p(x)\,dx$$

Οπότε,
$$\int_{\alpha}^{b} w(x) f(x)\,dx - Q_n(f) = \int_{\alpha}^{b} w(x)[f(x)-p(x)]\,dx$$

όμως,

$$\forall x \in [a,b] \quad \exists\, \xi(x) \in (a,b) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!} \underbrace{(x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2}_{= [P_n(x)]^2}$$

επομένως, $\displaystyle\int_a^b w(x) f(x)\,dx - Q_n(f) =$

$$\int_\alpha^b \underbrace{w(x)[P_n(x)]^2}_{\geq 0} \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!}\,dx$$

θα το βγάλουμε με το μέγιστο, το ελάχιστο και μετά εφαρμόζω το θεωρ. της ενδιάμεσης τιμής (πρέπει να το κάνουμε αναλυτικά εμείς)

$$= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_\alpha^b w(x) [P_n(x)]^2\,dx$$