Κεφάλαιο 4.

Παρεμβολή

- Η παρεμβολή είναι ένας τρόπος προσέγγισης συναρτήσεων με απλούστερες συναρτήσεις που έχουν διάφορες επιθυμητές ιδιότητες, όπως:

- Οι τιμές τους υπολογίζονται εύκολα, παραγωγίζονται και ολοκληρώνονται εύκολα. κλπ.

> Έστω f μια πραγματική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής και $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, του πεδίου ορισμού της, στα οποία είναι γνωστές οι τιμές της f

- Στην παρεμβολή La grange ητείται συνάρτηση φ από ένα προκαθορισμένο σύνολο συναρτήσεων τ.ω. η φ να παρεμβάλλεται στα σημεία $(x_i, f(x_i))$ $i=0,\ldots,n$

Δηλαδή να ισχύει

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad i=0,\ldots,n$$

Με άλλα λόγια ζητούμε το γράφημα της φ να διέρχεται από τα σημεία $(x_i, f(x_i))$, $i=0,\dots,n$

Στην παρεμβολή Hermite

ζητούμε επιπλέον οι τιμές παραγώγων της φ να συμπίπτουν με αντίστοιχες της f

Η παρεμβολή γίνεται συνήθως με πολυώνυμα, με κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις

ή με ρητές συναρτήσεις (πηλίκα πολυωνύμων)

Πολυωνυμική παρεμβολή

Θεώρημα | Πολυωνυμική παρεμβολή Lagrange

• Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά σημεία

Και $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Τότε, υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο P βαθμού το πολύ n (γράφουμε $P \in \mathbb{P}_n$) τ.ω

$$\circledast \quad P(x_i) = y_i, \quad i=0,\dots,n$$

Απόδειξη:

Γράφουμε το p στην μορφή

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

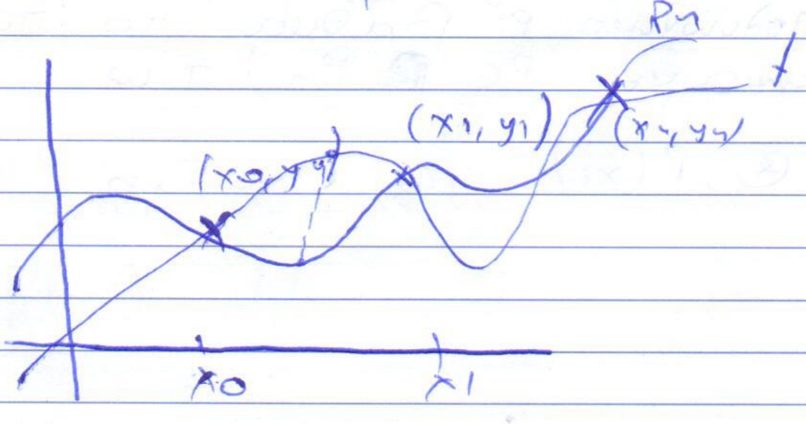
με άγνωστους συντελεστές $a_0, \dots, a_n$, οπότε το (*) είναι ένα γραμμικό σύστημα (ως προς τα $a_0, \dots, a_n$) με $n+1$ εξισώσεις και $n+1$ αγνώστους.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο πίνακας αυτού του συστήματος είναι αντιστρέψιμος. Το αντίστοιχο <u>ομογενές</u> γραμμικό σύστημα είναι:

$$q(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n, \quad q \in \mathbb{P}_n$$

Το q είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n με <u>n+1</u> ρίζες, οπότε μηδενίζεται ταυτοτικά.

<u>Συμπέρασμα</u>: το (*) έχει ακριβώς μια λύση.



Αν f είναι μια συνάρτηση και $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω

$$P(x_i) = \underset{= y_i}{f(x_i)}, \quad i=0,\dots,n$$

Τότε λέμε ότι το p παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $x_0,\dots,x_n$

Το p λέγεται πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_0,\dots,x_n$.

<u>Θεώρημα</u> (παράσταση του σφάλματος παρεμβολής)

Έστω $n \in \mathbb{N}_0$ $f \in C^{n+1}[a,b]$

$x_0,\dots,x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, και $P \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0,\dots,x_n$ δηλαδή

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i=0,\dots,n$$

Τότε ισχύει

$x \in [a,b]$ $\exists \xi \in (a,b)$

$$\overset{\xi(x)}{}$$

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)$$

Απόδειξη

- $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$, τότε η ζητούμενη παράσταση ισχύει για όλα τα f

- $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$
(σταθερό)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\phi(t) := \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

και

$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \underbrace{\frac{f(x) - p(x)}{\phi(x)}}_{\text{αριθμος}} \phi(t)$$

για $t \in [a,b]$

Έχουμε $\varphi \in C^{n+1}[a,b]$

Επίσης

$$\varphi(x_i) = \overbrace{f(x_i) - p(x_i)}^{0} - \frac{f(x) - p(x)}{\phi(x)} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\phi(x_i)}}$$

$= 0 \quad i = 0, \dots, n$

Επιπλέον $\varphi(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(x)-p(x)}{\cancel{\phi(x)}} \cancel{\phi}$

$= 0$

Συμπέρασμα: Η φ έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον $n+2$ ρίζες

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle: η φ' έχει στο (a,b) τουλάχιστον $n+1$ ρίζες.

η φ'' " " n "

η φ''' " " $n-1$ "

$\vdots$

η $\varphi^{(n+1)}$ " " Τουλ. 1 ρίζα "

Άρα υπάρχει $\xi \in (a,b)$

τ.ω $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$

Τώρα

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \cancel{p^{(n+1)}}^{\,0}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)} \cdot \underbrace{\phi^{(n+1)}(t)}_{(n+1)!}$$

$\phi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) = t^{n+1} + q_n(t) \Rightarrow \phi^{(n+1)}(t) = (n+1)! + 0$

Επομένως

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{f(x) - p(x)}{\phi(x)} (n+1)!$$

5/12/2017

<u>Παρεμβολή</u>

Θεώρημα (παράσταση του σφάλματος παρεμβολής)

Έστω $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{n+1}[a,b]$
$x_0, \dots x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά σημεία και $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

Τότε

$$\forall x \in [a,b] \ \exists \underbrace{\xi}^{=\xi(x)} \in (a,b)$$

$$\underbrace{f(x) - p(x)}_{\in \mathbb{P}_n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \underbrace{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}_{\in \mathbb{P}_{n+1}}$$

πόρισμα:

Για τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος ισχύει:

$$\underbrace{\max_{a\leq x\leq b} |f(x)-P(x)|}_{=\|f-p\|_\infty} \leq \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{\max_{a\leq x\leq b} |f^{(n+1)}(x)|}_{=\|f^{(n+1)}\|_\infty} \cdot \left(\max_{a\leq x\leq b} \left| \prod_{i=0}^{n} (x-x_i) \right| \right)$$

Παράσταση ή υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής.

a) Παράσταση σε μορφή Lagrange

Έστω $x_0,\dots,x_n$ ανά 2 διαφορετικά μεταξύ τους, για κάθε $i=0,\dots,n$ έστω $L_i \in P_n$ τ.ω

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{για } j=i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad j=0,\dots,n$$

Το L_i είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n και τα $x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ είναι ρίζες του. Άρα

$$L_i(x) = \overset{\in\mathbb{R}}{a_i} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x-x_j)$$

Το a_i δηλαδή προκύπτει από την σχέση $L_i(x_i)=1$, δηλαδή

$$a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j) = 1$$ αρα έχουμε

$$a_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

Συμπέρασμα:

$$\boxed{L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}$$

τα $L_0, \dots, L_n$ λέγονται πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_n$

Ισχυρισμός: Το πολυώνυμο $p \in \mathbb{P}_n$ παρεμβολής μιας συνάρτησης f στα $x_0, \dots, x_n$, δηλ.

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

γράφεται στην μορφή:

$$(*) \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot L_k(x)$$

Απόδειξη: Στο δεξιό μέλος έχουμε ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n. Η τιμή του στο x_i είναι

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot \underbrace{L_k(x_i)}_{\delta_{ki}} = f(x_i) \underbrace{L_i(x_i)}_{1} = f(x_i)$$

$i=0,\dots,n$

- δηλαδή στο δεξιό μέλος έχουμε ένα πολυώνυμο παρεμβολής της f αυτό συμπίπτει με το p, δηλαδή η $(*)$ ισχύει.

- Η $(*)$ λέγεται παράσταση του πολυώνυμου παρεμβολής της f σε μορφή Lagrange.

<u>Πλεονεκτήματα:</u> Η $(*)$ είναι απλούστατη και πολύ κατάλληλη για θεωρητικούς σκοπούς.

<u>Μειονεκτήματα:</u> 1) Υπολογισμός τιμών του p μέσω της $(*)$ είναι πολύ δαπανηρός.

2) Αν συμπεριλάβουμε μόνο ένα επιπλέον σημείο παρεμβολής x_{n+1}, αναγκαστικά πρέπει να υπολογίσουμε νέα (διαφορετικά) πολυώνυμα Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_{n+1}$

β) Παράσταση σε μορφή Νεύτωνα

Ζητείται $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

(+) $p(x_i) = y_i, \quad i=0, \dots, n$

Θέτουμε

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

Με αγνώστους συντελεστές $a_0, \dots, a_n$

Τότε: $p(x_0) = y_0 \rightsquigarrow a_0 = y_0$

$p(x_1) = y_1 \rightsquigarrow \underset{\substack{\| \\ y_0}}{a_0} + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \Rightarrow a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

<u>Σημείωση</u>: Με αυτόν τον τρόπο το (+) γράφεται ως γραμμικό σύστημα $n+1$ εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους με κάτω τριγωνικό πίνακα

Έτσι από τη πρώτη εξίσωση προκύπτει το a_0, από τη δεύτερη το a_1 (χρησιμοποιούν το a_0) κ.λ.π.

Πλεονεκτήματα:

1) Αν ξέρουμε το P σε μορφή του Νεύτωνα, μπορούμε να υπολογίσουμε τιμές του με το σχήμα του χόρνερ.

$$p(x) = a_0 + (x - x_0)\left(a_1 + (x - x_1)\left(a_2 + \ldots + (x - x_{n-1})\,a_n\right)\right)$$

2. Για κάθε κ, $0 \leq \kappa \leq n$ το πολυώνυμο $P_\kappa \in \mathbb{P}_\kappa$ που παράγεται απο τους πρώτους κ+1 όρους του p είναι τ.ω

$$P_\kappa(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, k$$

Συμπέρασμα: Παρεμβολή σε ένα επι πλέον σημείο x_{n+1} απαιτεί τον υπολογισμό ενός μόνο νέου συντελεστή a_{n+1}

Μειονεκτήματα: Δεν είναι κατάλληλο για θεωρητικούς σκοπούς.

9/5/2017

Παράσταση και υπολογισμός του πολυώνυμου παρεμβολής

$x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά 2 διαφορετικά

α) παράσταση σε μορφή Lagrange

Τα πολυώνυμα L_i,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$i=0,\ldots,n$ λέγονται πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \ldots, x_n$

Το $p \in \mathbb{P}_n$,

$p(x_i) = f(x_i)$, $i=0,\ldots,n$, γράφεται στη μορφή

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

β) παράσταση σε μορφή του Νεύτωνα

Θέτουμε:

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

Τότε:

$p(x_0) = y_0 \rightsquigarrow a_0 = y_0$

$p(x_1) = y_1 \rightsquigarrow a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Ενας τροπος υπολογισμου των συντελεστων a_i στο πολυωνυμο παρεμβολης σε μορφη του Νευτωνα ειναι με τις λεγομενες διαιρεμενες διαφορες

δ) Εστω $f \in C[a,b]$, $x_0, x_1, \dots \in [a,b]$ με $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$. Τοτε οριζουμε επαγωγικα ως προς i:

$$\Delta^0 (x_0)(f) = f(x_0)$$

$$\Delta^i (x_0, \dots, x_i) = \frac{\Delta^{i-1} (x_1, \dots, x_i) - \Delta^{i-1} (x_0, \dots, x_{i-1})}{x_i - x_0}$$

$i \geq 0$

Ο αριθμος $\Delta^i (x_0, \dots, x_i)(f)$ λεγεται διαιρεμενη διαφορα τάξης i της f ως προς τα σημεια $x_0, \dots, x_i$

Με αυτόν τον ~~τροπο~~ συμβολισμό και $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, οι συντελεστες a_i στην παράσταση του πολυωνυμου παρεμβολης σε μορφη νευτωνα δινεται απο τις σχεσεις:

$$a_i = \Delta^i (x_0, \dots, x_i)(f)$$
$$i = 0, \dots, n$$

δ) Παρεμβολή σε ένα σημείο κατά aitken - Neville

Ένας τρόπος υπολογισμού της τιμής του πολυωνύμου παρεμβολής σε ένα σημείο (που αποφεύγει τον υπολογισμό ολόκληρου του πολυωνύμου, δηλαδή των συντελεστών του) δίνεται από την μέθοδο Aitken-Neville

Βασική ιδέα: Έστω $P_1, P_2 \in \Pi_n$ τα πολυώνυμα παρεμβολής της f στα σημεία

$x_m, \dots, x_{m+n}$ και $x_{m+1}, \dots, x_{m+n+1}$

P_1 P_2

αντίστοιχα, τότε το πολυώνυμο $q \in \Pi_{n+1}$

$$q(x) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} P_1(x) & x_m - x \\ P_2(x) & x_{m+n+1} - x \end{vmatrix},$$

παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $x_m, \dots, x_{m+n+1}$

Βασιζόμενοι σε αυτήν την ιδιότητα και συμβολίζοντας με $p(x_i, \dots, x_{i+j}; \xi)$ την τιμή στο σημείο ξ του πολυωνύμου παρεμβολής της f στα σημεία $x_i, \dots, x_{i+j}$ οδηγούμαστε στον πίνακα των Aitken-Neville

$$y_i = f(x_i)$$

x_i	y_i	$p \in \mathbb{P}_1$	$p \in \mathbb{P}_2$	$p \in \mathbb{P}_3$	$\dots$
x_0	y_0				$x_0 - \xi$
x_1	y_1	$p(x_0, x_1; \xi)$			$x_1 - \xi$
x_2	y_2	$p(x_1, x_2; \xi)$	$\to p(x_0, x_1, x_2; \xi)$		$\vdots$
x_3	y_3	$p(x_2, x_3; \xi)$	$\to p(x_1, x_2, x_3; \xi)$	$\to p(x_0, x_1, x_2, x_3; \xi)$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$				

● Συμπεριφορά του πολυωνύμου παρεμβολής για μεγάλο n.

<u>Θεώρημα</u> (του Faber)

Για κάθε "πίνακα" σημείων παρεμβολής $x_{ni} \in [-1, 1]$, $i = 0, \dots, n$ δηλαδή

x_{00}

$x_{10} \quad x_{11}$

$x_{20} \quad x_{21} \quad x_{22}$

$\vdots$

(ανά 2 διαφορετικά μεταξύ τους σε κάθε γραμμή)

υπάρχει συνάρτηση $f \in C[-1, 1]$ τ.ω. αν $p_n \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_{n0}, \dots, x_{nn}$, ισχύει:

$$\limsup_{n \to \infty} \|f - p_n\|_\infty = \infty$$

$$\left(\|\varphi\|_\infty = \max_{-1 \le x \le 1} |\varphi(x)| \right)$$

<u>Συμπέρασμα</u> η παρεμβολή με πολυώνυμα μεγάλου βαθμού δεν είναι πρακτικά χρήσιμη.

<u>Παρεμβολή τύπου Hermite</u>

<u>Θεώρημα</u>: Έστω ότι έχω

$$m_0, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0, \quad N := m_0 + m_1 + \dots + m_n + n,$$

και $M := \max(m_0, \dots, m_n)$

Αν $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά 2 διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $f \in C^M[a,b]$ τότε το "πρόβλημα παρεμβολής τύπου Hermite",

$$(*) \begin{cases} \text{ζητείται } p \in \mathbb{P}_N \text{ τ.ω} \\ p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \quad i = 0, \dots, m_0, \\ p^{(i)}(x_1) = f^{(i)}(x_1), \quad i = 0, \dots, m_1, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ p^{(i)}(x_n) = f^{(i)}(x_n), \quad i = 0, \dots, m_n \end{cases}$$

λύνεται μονοσήμαντα.

Απόδειξη: το (*) γράφεται ως γραμμικό σύστημα.

Πλήθος αγνώστων: $N+1$ (οι συντελεστές $a_0, \dots, a_N$ του p)

Πλήθος εξισώσεων: $(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1)$

$$= \underbrace{m_0+m_1+\dots+m_n+n}_{N}+1$$

$$= N+1$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

Ομογενές σύστημα.

Ζητείται $q \in \mathbb{P}_N$ τ.ω. $\begin{cases} q^{(i)}(x_0)=0, & i=0,\dots,m_0 \\ \vdots \\ q^{(i)}(x_n)=0, & i=0,\dots,m_n \end{cases}$

Αυτό σημαίνει ότι το x_0 είναι ρίζα του q τάξης m_0+1, ..., το x_n είναι ρίζα του q τάξης m_n+1

Συνολικά το q έχει τουλάχιστον $(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1)$ ρίζες (μετρώντας και την πολλαπλότητα).

Επομένως $q=0$

Παράσταση σφάλματος παρεμβολής

Έστω $f \in C^{N+1}[a,b]$ Τότε

$\forall x \in [a,b] \ \exists \xi \in (a,b)$

$$f(x) - \underset{\in \mathbb{P}_N}{p(x)} = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x-x_0)^{m_0+1} \cdots (x-x_n)^{m_n+1}$$

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση παρεμβολής Hermite είναι για $m_0 = m_1 = \dots = m_n = 1$
Δηλαδή ζητείται $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ τ.ω.

$$(\ast\ast) \begin{cases} p(x_i) = f(x_i) \\ p'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, \dots, n \end{cases}$$

<u>Θεώρημα</u> (παράσταση του σφάλματος της παρεμβολής τύπου Hermite)

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά 2 διαφορετικά μεταξύ τους, και $f \in C^{2n+2}[a,b]$. Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ το πολυώνυμο που ικανοποιεί τους $(\ast\ast)$

Τότε, για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$$

<u>Απόδειξη</u> Για $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ η παράσταση ισχύει για κάθε $\xi \in (a,b)$

Έστω, λοιπόν, $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$

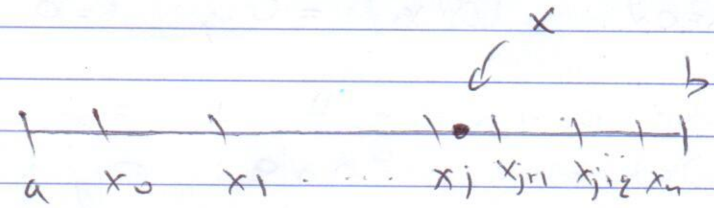
Υποθέτω χ.Π.Τ.Γ. ότι

$$x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n$$

Έστω ότι $x \in (x_j, x_{j+1})$, για

$$j = 0, \dots, n-1$$

(Οι περιπτώσεις $x < x_0$ και $x > x_n$) Αποδεικνύονται αντίστοιχα



Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\Psi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)^2$$

και

$$\psi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Psi(x)} \cdot \Psi(t)$$

προφανώς $\psi \in C^{2n+2}[a,b]$

Τώρα

$$\psi(x_i) = 0, \quad i=0,\dots,n$$

$$\psi(x) = 0$$

Επομένως η ψ έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον $n+2$ ρίζες. (~~Rolle~~)

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle η ψ' έχει ρίζες $\xi_0,\dots,\xi_n$,

$$x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \dots x_{j-1} < \xi_{j-1} < x_j$$

$$< \xi_j < x < \xi_{j+1} < x_{j+1} < \dots < \xi_n < x_n$$

Επιπλέον $\psi'(x_i) = 0, \quad i=0,\dots,n$

Συμπέρασμα: Η ψ' έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον $2n+2$ ρίζες.

Επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι η $\psi^{(2n+2)}$ έχει στο (a,b) τουλάχιστον μια ρίζα ξ

Τώρα $$\psi^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \cancelto{0}{p^{(2n+2)}(t)} - \frac{f(x)-p(x)}{\psi(x)} \underbrace{\psi^{(2n+2)}(t)}_{=(2n+2)!}$$

Επομένως $0 = \varphi^{(2n+2)}(\xi) = f^{(2n+2)}(\xi)$

$$- \frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)}(2n+2)!$$

$$\Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\Psi(x)$$

<u>Άσκηση 4.4.</u>

$p \in \mathbb{P}_3 \qquad p(x_i) = \ln(x_i),$

$x_i = i+1, \quad i = 0,1,2,3.$

$\varepsilon(x) := \ln x - p(x)$

<u>Ν.Δ.Ο</u>: Η $\varepsilon(x)$ έχει στο $[1,4]$ <u>ακριβώς</u> 4 ρίζες.

<u>Απόδειξη</u>:

$f(x) = \ln x, \quad x \in [1,4]$

$\forall x \in [1,4] \ \xi \in (1,4) \qquad \underbrace{f(x) - p(x)}_{\varepsilon} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$

$$\Rightarrow \varepsilon(x) = \underbrace{-\frac{1}{4!}\cdot\frac{6}{\xi^4}}_{\neq 0} \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Το δεξί μέλος μηδενίζεται μόνο στα σημεία 1, 2, 3, 4 άρα η f έχει σα ρίζες μόνο αυτές τις 4. (ακριβώς 4).

11/5/17

Παρεμβολή με splines

Έστω $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

ένας διαμερισμός ενός διαστήματος $[a,b]$.

Splines ως προς αυτόν τον διαμερισμό λέγονται γενικά συναρτήσεις που έχουν μια ορισμένη μορφή σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, είναι πχ πολυώνυμο του βαθμού το πολύ m σε κάθε υποδιάστημα

- Συχνά απαιτείται κάποια ομαλότητα των splines σε όλο το $[a,b]$
- Θα ασχοληθούμε πρώτα με μια ειδική περίπτωση που χρησιμοποιείται συχνά στις εφαρμογές.

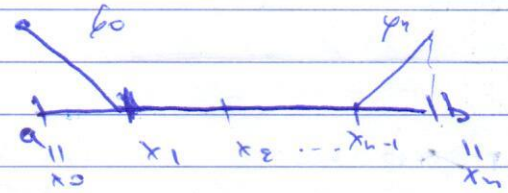
Ορισμός (ομαλή spline)

Έστω $[a,b]$ ένα διάστημα και Δ: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του. Έστω $m \in \mathbb{N}$ τα στοιχεία του γραμμικού χώρου.

$$S_m(\Delta) := \left\{ s \in C^{m-1}[a,b] : s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m \quad i = 0, \dots, n-1 \right\}$$

λέγονται (πολυωνυμικές) <u>ομαλές</u>

<u>Splines βαθμού m</u> (ως προς τον Δ)

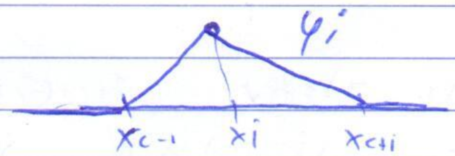


Κατά κανόνα στην πράξη χρησιμοποιούνται οι $S_1(\Delta)$ και $S_3(\Delta)$. Τις πρώτες τις λέμε γραμμικές και τις δεύτερες κυβικές.

<u>Παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις</u>

Έστω $\Delta: \ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$ και $S_1(\Delta)$ ο αντίστοιχος χώρος των splines βαθμού το πολύ 1 ως προς τον διαμερισμό Δ. Ορίζουμε τις συναρτήσεις φ_i $i=0,1,\dots,n$ ως εξής:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0} & \text{στο } [x_0,x_1] \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$



$$\varphi_i = \begin{cases} \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & , x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i} & , x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n-1$.

και $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0, & \text{Αλλού} \end{cases}$

προφανώς $\varphi_i \in S_1(\Delta)$.

Επίσης $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & j \neq i \end{cases}$

Ισχυρισμός: $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις.

Πράγματι

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} c_i \underbrace{\varphi_i(x_j)}_{\delta_{ij}} = 0$$

για $j = 0, \dots, n$

$$\Rightarrow c_j \underbrace{\varphi_j(x_j)}_{1} = 0 \Rightarrow c_j = 0, \quad j = 0, \dots, n$$

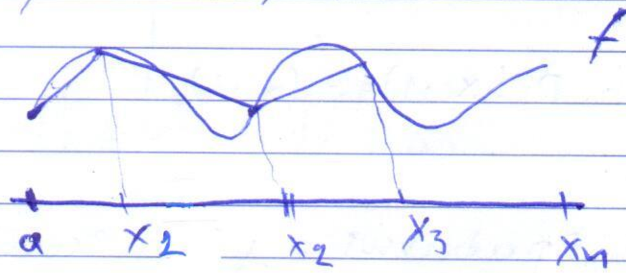
επι πλέον, καθε $s \in S_1(\Delta)$ γράφεται στην μορφή $s = \sum_{i=0}^{n} s(x_i)\varphi_i$

Συμπέρασμα: $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ είναι βάση του $S_1(\Delta)$

Παρεμβολή με στοιχεία του $S_1(\Delta)$

Έστω $f \in C[a,b]$

Τότε υπάρχει ακριβώς μια $s \in S(\Delta)$
τ.ω. $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$



Μάλιστα ισχύει

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(x_i) \cdot \varphi_i(x)$$

Θεώρημα (Εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις)

Έστω $f \in C^2[a,b]$
2 φορές παραγ.

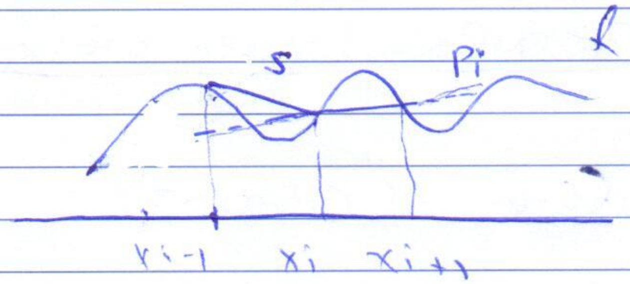
Δ: $a = x_0 < \dots < x_n = b$ ενας διαμερισμός του $[a,b]$, και $s \in S_1(\Delta)$ η παρεμβάλλουσα spline της f στους κόμβους $x_0, \dots, x_n$

Αν $h_i = x_i - x_{i-1}$ και $h := \max_{1 \le i \le n} h_i$,

τότε $$\|f - s\|_\infty \le \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$$

$\|\varphi\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |\varphi(x)|$

Απόδειξη



Έστω $p_i \in \mathbb{P}_1$ τ.ω.

$$\left.\begin{aligned} p_i(x_i) &= f(x_i) \\ p_i(x_{i+1}) &= f(x_{i+1}) \end{aligned}\right\}$$

Προφανώς, για κάθε $x \in [x_i, x_{i+1}]$ έχουμε $p_i(x) = s(x)$, οπότε

- $f(x) - s(x) = f(x) - p_i(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$
- Επίσης, σύμφωνα με την (4.2) του βιβλίου, έχουμε

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \ \exists \xi = \xi(x) \in (x_i, x_{i+1})$$

$$f(x) - p_i(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

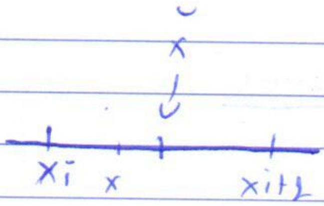
Συμπέρασμα: Για $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$f(x) - s(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Άρα

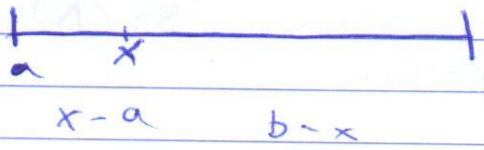
$$|f(x) - s(x)| \le \frac{1}{2} \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |(x - x_i)(x - x_{i+1})| \max_{x_i \le \xi \le x_{i+1}} |f''(\xi)|$$

$$\frac{h_{i+1}^2}{4} = \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |(x - x_i)(x_{i+1} - x)| \qquad \le \|f''\|_\infty$$



$$\Rightarrow \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x) - s(x)| \le \frac{\overset{\le h^2}{h_{i+1}^2}}{8} \|f''\|_\infty$$

$$\Rightarrow \max_{a \le x \le b} |f(x) - s(x)| \le \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$$



$$\varphi(x) = (x-a)(b-x) \qquad x \in [a,b]$$

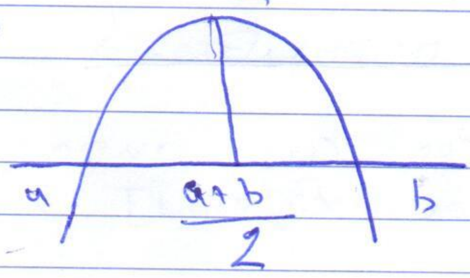
$$= -x^2 + (a+b)x - ab$$

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

$$\varphi'(x) = -2x + (a+b)$$

$$\varphi'(x) = 0 \iff x = \frac{a+b}{2}$$

Η φ λαμβάνει μέγιστο μόνο για $x = \frac{a+b}{2}$



Παρεμβολή με κυβικές Splines

Έστω $\Delta: a = x_0 < \dots < x_n = b$
διαμερισμός του $[a,b]$

Ο γραμμικός χώρος $S_3(\Delta)$ αποτελείται από τις συναρτήσεις που είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο $[a,b]$ και σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ 3.
Τα στοιχεία του $S_3(\Delta)$ λέγονται κυβικές splines.

Ερώτημα: Αν $f \in C[a,b]$, υπάρχει

$S \in S_3(\Delta)$ τ.ω.

(*) $S(x_i) = f(x_i), \quad i=0,\dots,n.$

Η (*) οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα.

Πλήθος των αγνώστων: $4n$

4 συντελεστές σε καθένα των n υποδιαστημάτων $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n-1$

Συνθήκες παρεμβολής: $2n$

δυο συνθήκες στα άκρα κάθε υποδιαστήματος $[x_i, x_{i+1}]$

(Εξασφαλίζουν και συνέχεια του s!)

Συνθήκες συνέχειας της s' στους ενδιάμεσους κόμβους

$x_1, \dots, x_{n-1}$: $n-1$

Συνθήκες συνέχειας της s''... : $n-1$

Πλήθος συνθηκών : $2n + (n-1) + (n-1) = 4n-2$

Απάντηση στο ερώτημα μας:

Για να υπάρχει μοναδική τέτοια s απαιτούνται 2 ακόμα συνθήκες.

<u>Θεώρημα</u> (παρεμβολή με κυβικές splines)

Έστω $f \in C^1[a,b]$ και Δ

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

ένας διαμερισμός του $[a,b]$
Τοτε υπάρχει ακριβώς μια $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω.

$$(*) \begin{cases} s(x_i) = f(x_i), & i = 0, \dots, n \\ s'(x_0) = f'(x_0) \\ s'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$

Το $(*)$ οδηγεί σε ένα τετραγωνικό γραμμικό σύστημα με πίνακα με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο.

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $f \in C^2[a,b]$ ....

$s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ $\quad s''(x_0) = f''(x_0)$

$s''(x_n) = f''(x_n)$

Ορισμός Οι $s \in S_3(\Delta)$
τ.ω. $s''(a) = s''(b) = 0$
λέγονται **φυσικές**
κυβικές splines.

Υπαρχει ακριβως μια **φυσική** κυβική
Splines τ.ω

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

Θεώρημα (εκτίμηση του σφάλματος
παρεμβολής με κυβικες
Splines)

Εστω $\Delta: \quad a = x_0 < \dots < x_n = b$

$$h := \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$$

Αν $f \in C^4[a,b]$ και $s \in S_3(\Delta)$
τ.ω.
$$\begin{cases} s(x_i) = f(x_i) \\ s'(x_i) = f'(x_0) \\ s'(x_i) = f'(x_n) \end{cases}$$

Τότε
$$\|f - s\|_\infty \le \frac{5}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

29/5/17

Άσκηση 4.5

$p \in \mathbb{P}_3 \quad p(i) = e^i \quad , i = 1, 2, 3, 4$

νδο $\forall x \in (2,3) \quad e^x > p(x)$

<u>Απόδειξη</u>

Το $p \in \mathbb{P}_3$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης $f(x) = e^x$ στα σημεία $1, \dots, 4$. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1

$$\forall x \in [1,4] \quad \exists \xi(x) \in (1,4) \quad \text{τ.ω}$$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Ιδιαίτερα

$\forall x \in (2,3) \qquad \forall \xi(x) \in (1,4)^2$

κατα μεγάλο το διάστημα

$$e^x - p(x) = \underbrace{\frac{e^{\xi(x)}}{4!}\overset{+}{}\,(x-1)\overset{+}{}(x-2)\overset{+}{}(x-3)\overset{-}{}(x-4)\overset{-}{}}_{>0}$$

$\Rightarrow e^x - p(x) > 0$

$\Rightarrow e^x > p(x)$

Άσκηση 4.6

$f \in C[a,b] \quad a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$

(ανα 2 διαφορετικά)

$p \in \mathbb{P}_n \quad p(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n$

P πολυώνυμο $\quad P(x_i) = f(x_i) \quad , i = 0, \dots, n$

νδο: $\quad P = p + r \cdot q \quad$ με q πολυώνυμο και $r(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)$

• Προφανώς $\quad P(x_i) = p(x_i) \quad , i = 0, \dots, n$

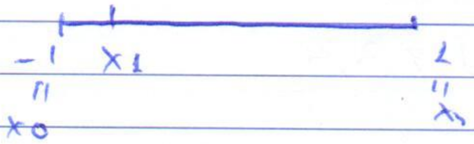
οπότε τα $x_0, \dots, x_n$ έχουν ρίζες $P - p$

Επομένως $\quad P(x) - p(x) = \underbrace{(x-x_0)\dots(x-x_n)}_{=r(x)} \cdot q(x)$

με q πολυώνυμο

Άσκηση 4.11

$n \in \mathbb{N}$, $\quad x_i = -1 + i\frac{2}{n}$, $\quad i = 0, \dots, n$



$f \in C[-1,1]$, $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

νδο • f άρτια $\rightarrow$ p άρτιο
• f περιττή $\rightarrow$ p περιττό

Απόδειξη

Αν x_i σημείο παρεμβολής τότε και το $-x_i$ είναι σημείο παρεμβολής.

f: άρτια: Θέτουμε $q(x) := p(-x)$, $x \in [-1,1]$

$(f(-x) = f(x))$

Τότε $q \in \mathbb{P}_n$ και

$$q(x_i) = p(-x_i) = f(-x_i) \overset{f \text{ άρτια}}{=} f(x_i) \quad i = 0, \dots, n$$

Συμπέρασμα: $q(x) = p(x)$, οπότε $p(-x) = p(x)$

f: περιττή $\quad (f(-x) = -f(x))$

$q(x) := -p(-x) \Rightarrow q \in \mathbb{P}_n$ και

$$q(x_i) = -\underset{f(-x_i)}{\underbrace{p(-x_i)}} = -f(-x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

Συμπέρασμα $q(x) = p(x)$, οπότε $-p(-x) = p(x)$
δηλ $p(-x) = -p(x)$

Άσκηση 4.15

$x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ ανά δύο διαφορ.

$f \in C^4[a,b]$ Δ

$+L$ $p \in \mathbb{P}_3$ τ.ω $p(x_i) = f(x_i)$ $i=0,1,2$

$p'(x_i) = f'(x_i)$

νδο $\forall x \in [a,b]$ $\exists\, \xi \in (a,b)$

$(*)$ $f(x) - p(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x$

Αποδ

- $x \in \{x_0, x_1, x_2\}$ τότε η $(*)$ ισχύει για όλα τα ξ

- $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, x_1, x_2\}$

Θέτουμε $\phi(t) = (t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$

και $\varphi(t) = f(t) - p(t) - \dfrac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\phi(t)$

όπως η f

Τότε, $\varphi \in C^4[a,b]$ και $t \in [a,b]$

$\varphi(x_i) = 0$, $i=0,1,2$

$\varphi(x) = 0$

Τότε υπάρχουν ξ_0, ξ_1, ξ_2 διαφορ. μεταξύ τους και x_0, x_1, x_2 τ.ω

$\varphi'(\xi_i) = 0$, $i=0,1,2$

Επι πλέον $\varphi'(x_1) = f'(x_1) - p'(x_1)$

$- \dfrac{f(x)-p(x)}{\phi(x)} \cdot \underbrace{\phi'(x_1)}_{=0} = 0$

Συμπέρασμα

η φ' έχει στο (a,b) τουλ 4 ρίζες
η φ'' — // — 3 ρίζες
η φ''' — // — 2 ρίζες
η $\varphi^{(4)}$ — // — 1 ρίζα ξ

Όμως

$$\varphi^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \cancel{p^{(4)}(t)}^{\,0} - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)} \underbrace{\phi^{(4)}(t)}_{= 4!}$$

οπότε: $\varphi^{4}(\xi) = 0 \Leftrightarrow f^{(4)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)} \cdot 4! = 0$

$$\Leftrightarrow f(x)-p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \phi(x)$$

Άσκηση 4.16

$f \in C^{5}[0,1]$

$p \in \mathbb{P}_4 \quad p^{(i)}(0) = f^{(i)}(0), \quad p^{(i)}(1) = f^{(i)}(1)$ για $i=0,1$

$p(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$

νδο $\forall x \in [0,1] \ \exists \xi \in (0,1)$

(*) $f(x) - p(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot x^{2}(x-\frac{1}{2})(x-1)^{2}$

• $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ τότε

η (*) ισχύει $\forall \xi$

• $x \in [0,1]$, $x \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Θέτουμε $\phi(t) = t^{2}(t-\frac{1}{2})(t-1)^{2}$

$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)} \phi(t)$

$t \in [0,1]$

Προφανώς, $\varphi \in C^5[a,b]$, επίσης

$$\phi(0)=\phi\left(\tfrac{1}{2}\right)=\varphi(x)=\varphi(1)=0$$

Άρα η φ μηδενίζεται σε τουλάχιστον 3 σημεία $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in (0,1)$

Επιπλέον, $\varphi'(0)=\varphi'(1)=0$

Συμπέρασμα

Η φ' έχει στο $[0,1]$ τουλαχ. 5 ρίζες
Η φ'' (0,1) 4 ρίζες
Η φ''' " 3 ρίζες
Η $\varphi^{(4)}$ " 2 ρίζες
Η $\varphi^{(5)}$ " 1 ρίζα ξ

Άρα $\varphi^{(5)}(\xi)=0$

Όμως

$$\varphi^{(5)}(t)=f^{(5)}(t)-\cancel{p^{(5)}(t)}^{\,0}-\frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\phi^{(5)}(t)$$

$$\Rightarrow \varphi^{(5)}(\xi)=f^{(5)}(\xi)-\frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}5!=0$$

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\cdot\phi(x)$$

16/5/2017

Κυβικές splines του Hermite

Ορισμός (κυβικές splines του Hermite)

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$
και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
ένας διαμερισμός του $[a,b]$

Συναρτήσεις $s \in C^1[a,b]$ → στις κυβικές splines είχαμε $s \in C^2[a,b]$

τ.ω.

$$s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3, \quad i=0,\dots,n-1$$

λέγονται κυβικές splines του Hermite ως προς τον διαμερισμό Δ.

Θεώρημα (παρεμβολή με κυβικές splines του Hermite)

Έστω $f \in C^1[a,b]$ και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
Τότε υπάρχει ακριβώς μια κυβική spline Hermite ως προς Δ, έστω s τ.ω.

$$s(x_i) = f(x_i), \quad s'(x_i) = f'(x_i)$$
$$i=0,\dots,n$$

Αν επιπλέον $f \in C^4[a,b]$
τότε ισχύει

φράγμα παρεμβολής

$$\| f - s \|_\infty \le \frac{1}{384} h^4 \| f^{(4)} \|_\infty$$

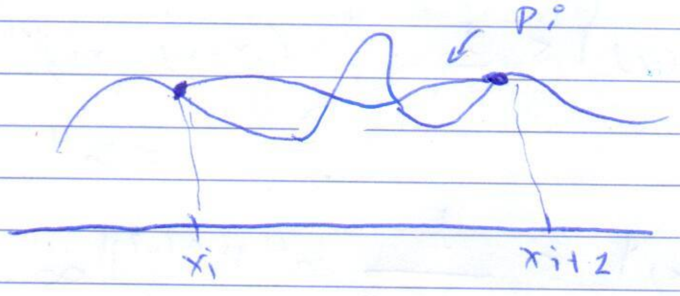
με $h = \max\limits_{0 \le i \le n-1} (x_{i+1} - x_i)$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.4 υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο $p_i \in \mathbb{P}_3$ τ.ω.

$$p_i(x_j) = f(x_j), \quad p_i'(x_j) = f'(x_j), \quad j = i, i+1$$

$\forall\, i = 0, \dots, n-1$



Τώρα η συνάρτηση $s\ [a,b] \to \mathbb{R}$,

$s(x) = p_i(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ είναι η μοναδική κυβική spline Hermite ως προς Δ που ικανοποιεί τις (*)

Εκτίμηση του σφάλματος

Για $x \in [x_i, x_{i+1}]$ έχουμε: $s(x) = p_i(x)$

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$, $\exists\, \xi = \xi(x) \in (x_i, x_{i+1})$

(4.16) βιβλίο
$$f(x) - p_i(x) = \frac{f^{4}(\xi(x))}{4!}(x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2$$

Επομένως, $f(x) - s(x) = f(x) - p_i(x) = \frac{1}{24}(x - x_i)^2 \cdot (x - x_{i+1})^2 \cdot f^4(\xi(x))$

Άρα (1)

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{24} \cdot \max\{(x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2\} \cdot \|f^{(4)}\|_\infty$$

$$\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \{(x - x_i)^2 (x_{i+1} - x)^2\} = \left\{\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |(x - x_i)(x_{i+1} - x)|\right\}^2$$

$$= \left(\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4} \right)^2 = \frac{(x_{i+1} - x_i)^4}{16}$$

Επομένως η (2) δίνει

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{16} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)^4}_{\leq h^4} \|f^{(4)}\|_\infty$$

$$\Rightarrow |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty .$$

Το δεξιό μέλος δεν εξαρτάται από το i, οπότε η ανισότητα ισχύει για κάθε x,

δηλαδή

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{384} \cdot h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

Άσκηση 4.18

Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$
$m \in \mathbb{N}$

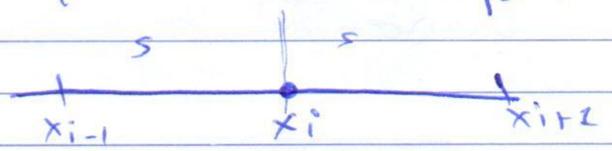
$$\Sigma_m(\Delta) = \left\{ s \in C^m[a,b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, \; i = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

νδο $s \in \Sigma_m(\Delta) \Rightarrow s|_{[a,b]} \in \mathbb{P}_m$

Απόδειξη

Αν αποδείξουμε ότι η s είναι το ίδιο πολυώνυμο σε 2 διαδοχικά υποδιαστήματα

$[x_{i-1}, x_i]$ και $[x_i, x_{i+1}]$ τότε επαγωγικά διαπιστώνουμε αμέσως ότι $s|_{[a,b]} \in \mathbb{P}_m$



- Αφού η s είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο x_i θα έχουμε

όριο από δεξιά

$$s^{(j)}(x_i-) = s^{(j)}(x_i+) \qquad j=0,\dots,m$$

όριο από αριστερά

Με ανάπτυγμα Taylor ως προς το σημείο x_i έχουμε: για $x \in [x_{i-1}, x_i]$,

(2) $$s(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i-)}{j!}(x-x_i)^j$$

για $x \in [x_i, x_{i+1}]$

(3) $$s(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i+)}{j!}(x-x_j)!$$

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι η s είναι το ίδιο πολυώνυμο στα διαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$ και $[x_i, x_{i+1}]$