Άσκηση 4.4

$p \in \mathbb{P}_3$

$$p(x_i) = \ln(x_i),\ i=0,1,2,3,$$

$$\text{όπου } x_i = i+1,\ i=0,\dots,3$$

$$\varepsilon(x) := \ln x - p(x)\ ,\ x \in [1,4]$$

<u>Ν.Δ.Ο.</u> Η $\varepsilon(x)$ έχει στο $[1,4]$ ακριβώς 4 ρίζες

<u>Απόδειξη:</u>

Προφανώς,

$$\varepsilon(x_i) = 0,\ i=0,\dots,3$$

Δηλαδή,

$$\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = \varepsilon(3) = \varepsilon(4) = 0$$

Θέτουμε, $f(x) := \ln x\ ,\ x \in [1,4]$. Το p είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f, οπότε,

$$\forall\, x \in [1,4]\ \exists\, \xi \in (1,4)$$

$$\varepsilon(x) = \underbrace{\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}}\underbrace{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$= -\frac{6}{4\xi^4} \neq 0\ \ \forall \xi \in [1,4]$$

Επομένως, εκτός των σημείων 1, 2, 3, 4 η ε δεν έχει άλλες ρίζες.

Άσκηση 4.5

$p \in \mathbb{P}_3$

$p(i) = e^i \ , \ i = 1, 2, 3, 4$

Ν.Δ.Ο.

$$\forall x \in (2,3) \quad e^x > p(x)$$

Απόδειξη

Για το σφάλμα παρεμβολής $e^x - p(x)$ έχουμε,

$$\forall x \in (2,3) \ \forall \xi \in (1,4)$$

$$e^x - p(x) = \underbrace{\frac{e^{\xi}}{4!}}_{>0}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Άρα, $e^x - p(x) > 0 \Rightarrow e^x > p(x)$

Άσκηση 4.6.

$f \in C[a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$

$p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

$$p(x_i) = f(x_i), \; i = 0, \dots, n$$

Έστω P πολυώνυμο τ.ω.

$$P(x_i) = f(x_i), \; i = 0, \dots, n$$

<u>ΝΔΟ</u>: $P = p + rq$ με $r(x) := (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$

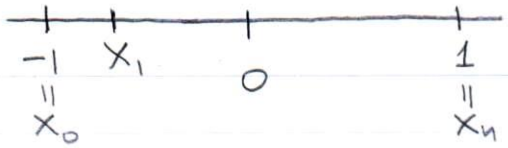
<u>Απόδειξη</u>: Το $P - p$ είναι πολυώνυμο και τα $x_0, \dots, x_n$ είναι ρίζες του.
Άρα,

$$P(x) - p(x) = \overbrace{(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}^{r(x)} \cdot q(x)$$

με q πολυώνυμο

Άσκηση 4.11

$n \in \mathbb{N}$, $x_i = -1 + i\frac{2}{n}$, $i = 0, \dots, n$



$f \in C[-1,1]$, $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω. $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

ΝΔΟ:

f περιττή $\Rightarrow p$ περιττό
f άρτια $\Rightarrow p$ άρτια.

Απόδειξη

f άρτια $\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in [-1,1]$

Αν x_i σημείο παρεμβολής, τότε και το $-x_i$ είναι επίσης σημείο παρεμβολής.

- Θέτουμε, $q(x) := p(-x) \quad \forall x \in [-1,1]$

Ιδιότητες του q: $q \in \mathbb{P}_n$ και

$$q(x_i) = p(-x_i) \underset{\substack{\text{το } -x_i \text{ είναι} \\ \text{σημείο παρεμβολής}}}{=} f(-x_i) \underset{f \text{ άρτια}}{=} f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

Άρα και το $q \in \mathbb{P}_n$ είναι πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_0, \dots, x_n$ οπότε αναγκαστικά συμπίπτει με το p.

Έχουμε,

$$\left.\begin{aligned} q(x) &= p(-x) \\ q(x) &= p(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow p(x) = p(-x)$$

$\forall x \in [-1,1]$, άρα το p είναι άρτιο

f περιττή $\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in [-1,1]$

Προφανώς $q \in \mathbb{P}_n$ και

$$q(x_i) = -p(-x_i) = -f(-x_i) = f(x_i), \; i=0,\dots,n$$

Άρα $q(x) = p(x)$

Επομένως έχουμε

$$-p(-x) = p(x) \iff p(-x) = -p(x) \quad \forall x \in [-1,1],$$

δηλαδή το p είναι περιττό.

Άσκηση 4.15

$x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά

$f \in C^4[a,b]$, $p \in \mathbb{P}_3$ τ.ω.

$$p(x_i) = f(x_i), \; i=0,1,2, \quad p'(x_1) = f'(x_1)$$

N.Δ.Ο. :

$\forall x \in [a,b] \;\; \exists \xi \in (a,b)$

(*)
$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

(Στα σημεία x_0 και x_2 έχουμε από μία συνθήκη παρεμβολής, ενώ στο σημείο x_1 έχουμε δύο συνθήκες παρεμβολής).

Απόδειξη:

- Για $x \in \{x_0, x_1, x_2\}$ η ⊛ ισχύει για κάθε $\xi \in (a,b)$
- Έστω $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, x_1, x_2\}$

Θέτουμε,
$$\phi(t) = (t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$$
και
$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\phi(t),$$
$$t \in [a,b]$$

Προφανώς $\varphi \in C^4[a,b]$

Επίσης,
$$\varphi(x_i) = 0,\ i=0,1,2,\ \varphi(x) = 0$$

Επομένως, η φ έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον 4 ρίζες.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle η φ' έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες, ξ_0, ξ_1, ξ_2, όλες διαφορετικές του x_1.

Όμως, $$\varphi'(x_1) = f'(x_1) - p'(x_1) - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\underbrace{\phi'(x_1)}_{=0} = 0$$

Συμπέρασμα,

Η φ' έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον 4 ρίζες.

Rolle

→ Η φ'' έχει στο (a,b) τουλάχιστον 3 ρίζες.

→ ⋮

→ Η $\varphi^{(4)}$ έχει στο (a,b) τουλάχιστον 1 ρίζα, έστω ξ.

Άρα,

- $\varphi^{(4)}(\xi)=0$

Αλλά, $$\varphi^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-\frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}4!$$

Από αυτές τις δύο σχέσεις έπεται ότι

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\Phi(x)$$ που είναι η ζητούμενη παράσταση.

Άσκηση 4.16

$f \in C^5[0,1]$, $p \in \mathbb{P}_4$ τ.ω.

$$p^{(i)}(0) = f^{(i)}(0)$$
$$p^{(i)}(1) = f^{(i)}(1) \quad , i = 0,1$$

και $p(1/2) = f(1/2)$

Ζητείται παράσταση του $f(x) - p(x)$ για $x \in [0,1]$.

Λύση:

$\forall x \in [0,1] \ \exists \xi = \xi(x) \in (0,1)$

$$(*) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^2 (x - 1/2)(x-1)^2$$

Για $x \in \{0, 1/2, 1\}$ η $(*)$ ισχύει για κάθε $\xi \in (0,1)$.

Έστω $x \in [0,1]$, $x \notin \{0, 1/2, 1\}$

Θέτουμε,
$$\phi(t) := t^2 (t - 1/2)(t-1)^2$$

και
$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\phi(x)} \phi(t) \quad , t \in [0,1]$$

Ιδιότητες της φ: $\varphi \in C^5[0,1]$

$$\varphi(0)=\varphi(1/2)=\varphi(1)=\varphi(x)=0$$

Συμπέρασμα: Υπάρχουν σημεία $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ τ.ω.

$$\varphi'(\xi_i)=0, \quad i=0,1,2.$$

Επίσης,

$$\varphi'(0)=\varphi'(1)=0$$

Η φ' έχει στο $[0,1]$ (τουλάχιστον) 5 ρίζες.

» φ'' » » $(0,1)$ » 4 »

⋮

Η $\varphi^{(5)}$ έχει στο $(0,1)$ (τουλάχιστον) μία ρίζα, έστω ξ.

Άρα $\varphi^{(5)}(\xi)=0$,

όμως $\varphi^{(5)}(t)=f^{(5)}(t)-\dfrac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\underbrace{\phi^{(5)}(t)}_{=5!}$

Επομένως, $f^{(5)}(\xi)-\dfrac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}5!=0 \Rightarrow f(x)-p(x)=$

$$=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\phi(x)$$

Άσκηση 4.18

$[a,b]$ $\quad \Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$

$m \in \mathbb{N}$, $\quad \Sigma_m(\Delta) := \left\{ s \in C^m[a,b] : s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, \ i=0,\ldots,n \right\}$

ΝΔΟ: $s \in \Sigma_m(\Delta) \Rightarrow s \in \mathbb{P}_m$ (στο $[a,b]$)

Απόδειξη

Έστω $i \in \{1,\ldots,n\}$. Τότε αναπτύσσοντας κατά Taylor έχουμε:

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i] \quad s(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i^-)}{j!}(x-x_i)^j$$

και

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \quad s(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i^+)}{j!}(x-x_i)^j$$

Σύμφωνα με την υπόθεση η s είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο x_i, οπότε

$$s^{(j)}(x_i^-) = s^{(j)}(x_i^+), \ j=0,\ldots,m$$

Άρα η s είναι το ίδιο πολυώνυμο στα διαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$ και $[x_i, x_{i+1}]$. Επαγωγικά βλέπουμε ότι η s είναι το ίδιο πολυώνυμο σε όλο το $[a,b]$.