Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

Άσκηση 3.1

- $U, W \in \mathbb{R}^{n,n}$ άνω τριγωνικοί $\Rightarrow$ UW άνω τριγωνικός
- $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ άνω τριγωνικός και αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ U^{-1} άνω τριγωνικός

(αντίστοιχα για κάτω τριγωνικούς)

Λύση

$(UW)_{ij}$ θέλουμε να αποδείξουμε $(UW)_{ij} = 0$ για $i>j$

$$(UW)_{ij} = U_{i1}W_{1j} + U_{i2}W_{2j} + \dots + U_{in}W_{nj}$$

$$= \underbrace{U_{i1}W_{1j}}_{=0} + \underbrace{U_{i2}W_{2j}}_{=0} + \dots + \underbrace{U_{i,i-1}W_{i-1,j}}_{=0} + U_{ii}W_{ij} + \dots + U_{in}W_{nj}$$

$$= U_{ii}\underbrace{W_{ij}}_{=0 \text{ γιατί } i>j} + \dots + U_{in}\underbrace{W_{nj}}_{=0,\, n>j} = 0$$

$\boxed{U \text{ άνω τριγωνικός} \Rightarrow U_{i1} = U_{i2} = \dots = U_{i,i-1} = 0}$

$\boxed{W \text{ άνω τριγωνικός}: W_{j+1,j} = \dots = W_{nj} = 0}$

(ii)

$(UW)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} U_{ik}W_{kj}$ αν $i>j$ τότε για κάθε k έχουμε $U_{ik}=0$ είτε $W_{kj}=0$, οπότε όλο το άθροισμα κάνει μηδέν. ∎

- U άνω τριγωνικός και αντιστρέψιμος $U^{-1} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$ με $\underline{Uu^i = e^i}$, $i=1,\dots,n$.

* τι σημαίνει ①

U^{-1} άνω τριγωνικός $\Leftrightarrow$ $u^i_j = 0$, για $j = i+1, \dots, n$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ 0 & & u_{ii} \cdots & u_{in} \\ & & & \vdots \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i_1 \\ u^i_2 \\ \vdots \\ u^i_i \\ u^i_{i+1} \\ \vdots \\ u^i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας με οπισθοδρόμηση παίρνουμε $u^i_n = 0$, $u^i_{n-1} = 0, \dots, u^i_{i+1} = 0$

∎

Άσκηση 3.3

$A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, A αντιστρέψιμος $\quad \bullet\ A^{-4}b \quad \bullet\ A^{-1}BA^{-1}b$

$b \in \mathbb{R}^n$

Λύση

• $x = A^{-4}\cdot b \Leftrightarrow A^4 x = b \Leftrightarrow A\cdot(A^3x) = b$

Λέω • $y = A^3x$ Λύνουμε το $A\cdot y = b$

• $A(A^2x) = y$ με $z = A^2x$ λύνουμε το $A\cdot z = y$

↑ γνωστό

• $A(\underbrace{Ax}_{w}) = z$ λύνουμε το $A\cdot w = z$ ← γνωστό

↑ γνωστό

• $A\cdot x = w$

↑ γνωστό

$A\cdot y = b \rightsquigarrow y = A^3x$

$A z = y \rightsquigarrow z = A^2x$

$A w = z \rightsquigarrow w = Ax$

$A x = w$

Λύνουμε 4 γραμμικά συστήματα με τον ίδιο πίνακα A.

■ $A^{-4}b$

$x = A^{-1}B\underbrace{(A^{-1}b)}_{y}$

$A^{-1}b = y \Leftrightarrow Ay = b \rightsquigarrow y$

$z = By$ πολ/σμός πίνακα επί διάνυσμα. Τότε, $x = A^{-1}z \rightsquigarrow A\cdot x = z \rightsquigarrow x$

Κόστος: επίλυση δύο γραμμικών συστημάτων με πίνακα A και πολ/σμός πίνακα επί διάνυσμα ■

Άσκηση 3.6

A_i, $i=1,\dots,n-1$, $A_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & a_{i+1,i} & \ddots & \\ 0 & & & \vdots & 0 & 1 \\ & & & a_{n,i} & & \end{pmatrix}$

ΝΔΟ

$A_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & -a_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & 0 & 1 \\ & & -a_{n,i} & & \end{pmatrix}$, $i<j$: νδο $A_iA_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ 0 & & a_{i+1,i} & 1 & \\ & & \vdots\ 0 & a_{j+1,j} & 1 \\ & & a_{n,i} & a_{n,j} & 0 \end{pmatrix}$

■ 10

Λύση

$A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\quad A\cdot B = A + B - I_n + \underbrace{(A - I_n)(B - I_n)}_{AB - A - B + I_n}$

Ισχυρισμός: Για $i \leq j$

$$(A_i - I_n)(A_j - I_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ 0 & & a_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & 0 \\ & & a_{n,i} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ 0 & & & 0 & \\ & & & a_{j+1,j} & 0 \\ & & & \vdots & \\ & & & a_{n,j} & \end{pmatrix}$$

$= 0$

Άρα, (για $i \leq j$) $A_i A_j = A_i + A_j - I_n$ ∎

Άσκηση 3.7

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος.

Υπόθεση: Η απαλοιφή Gauss για $Ax = b$ μπορεί να γίνει χωρίς εναλλαγές γραμμών.

Τότε $A = L\cdot U$

ΝΔΟ Αυτή η ανάλυση είναι μοναδική.

Απόδειξη

Έστω $A = L\cdot U = \tilde{L}\tilde{U}$. Τότε $LU = \tilde{L}\tilde{U} \Rightarrow \tilde{L}^{-1}LU = \tilde{U} \Rightarrow \boxed{\underbrace{\tilde{L}^{-1}L}_{\text{κάτω τριγωνικός}} = \tilde{U}U^{-1}}$ (*)

$\tilde{L}^{-1}$: κάτω τριγωνικός, L: κάτω τριγωνικός

Σύμφωνα με την άσκηση 3.1 στο αριστερό μέρος της (*) έχουμε έναν κάτω τριγωνικό πίνακα και στο δεξιό έναν άνω τριγωνικό πίνακα.

Συμπέρασμα, ο πίνακας είναι διαγώνιος, $D = \mathrm{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn})$

Άρα, $\tilde{L}^{-1}\cdot L = D$ και $\tilde{U}\cdot U^{-1} = D$

Από την πρώτη σχέση παίρνουμε $L = \tilde{L}\cdot D$, οπότε $\underset{1}{\underset{\parallel}{L_{ii}}} = (\tilde{L}D)_{ii} = \tilde{L}_{ii}\, d_{ii}$, $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow d_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$. Άρα, $D = I_n$.

Επομένως $\tilde{L}^{-1} \cdot L = I_n \Rightarrow L = \tilde{L} I_n = \tilde{L}$

$\tilde{U} \cdot \tilde{U}^{-1} = I_u \Rightarrow \tilde{U} = \underline{I_u \cdot U} = U$ ■

Άσκηση 3.10

Θεωρούμε ένα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ πίνακα

$$\delta_1 = a_{11},\ \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

τα $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ λέγονται κύριες ορίζουσες του A.

<u>Υπόθεση</u>: $\delta_i \neq 0,\ i = 1, \dots, n-1$

<u>ΝΔΟ</u>: Η απαλοιφή Gauss γίνεται χωρίς εναλλαγές γραμμών $(A = LU)$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε αυτή η συνθήκη είναι και αναγκαία.

<u>Απόδειξη</u>

Το πρώτο βήμα της απαλοιφής Gauss γίνεται χωρίς πρόβλημα γιατί $a_{11} \neq 0$.
Έστω ότι μπορούν να γίνουν $(i-1)$ βήματα χωρίς εναλλαγές γραμμών.

Έχουμε,
$$\det\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1i}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} \cdots & a_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & a_{ii}^{(i)} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

γιατί ο πίνακας στο αριστερό μέλος προκύπτει από τον πίνακα στο δεξιό μέλος με μετασχηματισμούς γραμμών (χωρίς εναλλαγή γραμμών)

Άρα, $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \dots, a_{ii}^{(i)} = \underset{\neq 0}{\delta_i} \Rightarrow a_{ii}^{(i)} \neq 0$

Άρα, το βήμα i μπορεί να γίνει χωρίς εναλλαγή γραμμών. ■

Άσκηση 3.11

$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n,n}$ με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο.

ΝΔΟ : Ο A είναι αντιστρέψιμος (χωρίς αποτέλεσμα του Gerschgorin)

$A=L\cdot U$

Απόδειξη

Θεωρούμε τον πίνακα $A_i=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{ii}\end{pmatrix}$ $i=1,\dots,n-1$

Αφού ο A έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, και οι $A_i, i=1,\dots,n-1$ έχουν αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, οπότε είναι αντιστρέψιμοι, δηλαδή οι ορίζουσες $\underbrace{\det A_i}_{\delta_i}\neq 0$ $i=1,\dots,n$

$\Rightarrow \delta_i\neq 0,\ i=1,\dots,n$

Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, ο A αναλύεται σε γινόμενο LU. ■ τομέρος

Έστω $Ax=0$. Τότε $(Ax)_i=0,\ i=1,\dots,n$ δηλαδή $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0 \Rightarrow a_{ii}x_i=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j$

$\Rightarrow |a_{ii}||x_i|\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|$. (*) (Θέλουμε να δείξουμε ότι το x είναι μηδέν)

Θεωρούμε ένα s τ.ω. $|x_s|=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$

Υπόθεση $x_j\neq 0$ (οπότε $x\neq 0$) Για $i=s$, η (*) δίνει $|a_{ss}|\cdot|x_s|\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n}|a_{sj}|\underbrace{|x_j|}_{\leq|x_s|}$

$\Rightarrow |a_{ss}|\cdot|x_s|\leq \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n}|a_{sj}|\right)|x_s|$

$\Rightarrow |a_{ss}|\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n}|a_{sj}|$ (Άτοπο).

Άσκηση 3.23

α) $1 < p, q < \infty$ τ.ω $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $\quad a, b \geq 0$

<u>ΝΔΟ</u>

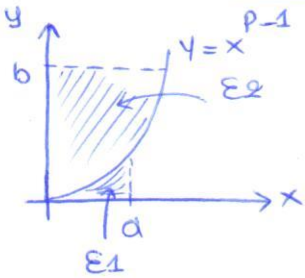
$$ab \leq \overset{E1}{\frac{a^p}{p}} + \overset{E2}{\frac{b^q}{q}}$$

Ανισότητα του Young

<u>Ειδική περίπτωση</u> $p = 2 \rightsquigarrow q = 2$

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \iff 2ab \leq a^2 + b^2 \iff (a-b)^2 \geq 0 \ \checkmark$$

Γεωμετρική ερμηνεία



$$E1 = \int_0^a x^{p-1}\,dx = \left[\frac{x^p}{p}\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{a^p}{p}$$

$$E2 = \int_0^b y^{\left(\frac{1}{p-1}\right)}\,dy = \int_0^b y^{q-1}\,dy = \frac{b^q}{q}$$

ισχυρίζομαι ότι $\frac{1}{p-1} = q-1$

Απόδειξη ισχυρισμού

$$\frac{1}{p-1} = q-1 \iff 1 = (p-1)(q-1) \iff \cancel{1} = p \cdot q - p - q + \cancel{1}$$

$$\iff p + q = p \cdot q \iff \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \ \checkmark \ \blacksquare$$

$\blacksquare$ α ερώτημα

β) $1 \leq p < \infty$, $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$

$x, y \in \mathbb{C}^n$

<u>ΝΔΟ</u> $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$

ανισότητα του Holder

- $p = 2 \rightsquigarrow q = 2$ ανισότητα Holder $\rightsquigarrow$ ανισότητα Cauchy-Schwartz.
- $x = 0$ ή $y = 0$ τετριμμένη
- <u>$p = 1$:</u>

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right) \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| \ \checkmark$$

• $\boxed{p>1}$ και $x \neq 0$ και $y \neq 0$

Ειδική περίπτωση: $\|x\|_p = 1$, $\|y\|_q = 1$

Έχουμε από την ανισότητα του Young

$$|x_i y_i| = |x_i|\,|y_i| \le \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \frac{1}{p}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}_{=(\|x\|_p)^p=1} + \frac{1}{q}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q}_{=(\|y\|_q)^q=1}$$

$$\le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le 1$$ του αλλάζω την μορφή $= \|x\|_p \cdot \|y\|_q$

■ειδική

Γενική περίπτωση

$x, y \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$\tilde{x} := \frac{1}{\|x\|_p} \cdot x \quad , \quad \tilde{y} := \frac{1}{\|y\|_q} \cdot y$$

Προφανώς, $\|\tilde{x}\|_p = 1$ και $\|\tilde{y}\|_q = 1$.

Σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση (ειδική περίπτωση) έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_i \tilde{y}_i| \le 1$$

Άρα, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{\|x\|_p} x_i \cdot \frac{1}{\|y\|_q} y_i \right| \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le 1$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$ ■γενική

Να θυμόμαστε τα ονόματα από τις ανισότητες και τι κάνει η κάθε μία.

γ) $p \geq 1$

<u>ΝΔΟ</u> $\|\cdot\|_p$ νόρμα στον $\mathbb{C}^n$

(Ν1), (Ν2) τετριμμένα

(Ν3) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$, $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ (<u>ανισότητα του Minkowski</u>)

• $1 < p < \infty$

$$\|x+y\|_p = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i+y_i|}_{\leq |x_i|+|y_i|} \cdot |x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1}$$

Holder

ίδιο

$$\leq \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} \left(|x_i+y_i|^{p-1} \right)^q \right)^{1/q} + \|y\|_p (\ldots)$$

ισχυρίζομαι ότι είναι ίσο με το p

$$\text{Άρα, } (\|x+y\|_p)^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{(p-1)\cdot q} \right)^{1/q}$$

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p \right)^{1/q}$$ (πρέπει να διώξουμε το q)

$$\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \quad \left(q = \frac{p}{p-1} \right)$$

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \Bigg(\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{\|x+y\|_p} \Bigg)^{p-1}$$

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p)(\|x+y\|_p)^{p-1}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad \blacksquare$$

<u>Απόδειξη ισχυρισμού</u>

$$p = (p-1)q \Leftrightarrow p = pq - q \Leftrightarrow p+q = pq \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \blacksquare$$

Συνέχεια ασκήσεις 3ου κεφαλαίου

Άσκηση 3.23

δ) Ανισότητα του Jensen:

∃ μία σταθερά (1) μπορώ να την βελτιώσω? ☺

$1 \le p < q \le \infty$, $x \in \mathbb{C}^n$ ΝΔΟ: $\|x\|_q \le \|x\|_p$

$\left(\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \right)$

$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

Απόδειξη

• Ισχυρισμός . $|x_i| \le \|x\|_p$, $i = 1, \dots, n$ (+)

$p = \infty$ ✓

$p < \infty$

$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \geq \left(|x_i|^p\right)^{1/p} = |x_i|$ ✓

Συμπέρασμα

$\underbrace{\max_{1 \le i \le n} |x_i|}_{\|x\|_\infty} \le \|x\|_p$ (ανισότητα του Jensen για $q = \infty$ ισχύει)

Έστω $q < \infty$. Τότε $|x_i|^q = |x_i|^p \cdot |x_i|^{q-p}$, $q-p > 0$

$\overset{(+)}{\longrightarrow} \le |x_i|^p (\|x\|_p)^{q-p}$ ∎

έχουμε, $|x_i|^q \le |x_i|^p (\|x\|_p)^{q-p}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^q \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p (\|x\|_p)^{q-p}$

$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q}_{=(\|x\|_q)^q} \le (\|x\|_p)^{q-p} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}_{=(\|x\|_p)^p}$

$\Rightarrow (\|x\|_q)^q \le \underbrace{(\|x\|_p)^{q-p} (\|x\|_p)^p}_{=\|x\|_p^q} \Rightarrow \|x\|_q \le \|x\|_p$ ✓ ∎

② απάντηση. Η ανισότητα είναι βέλτιστη

Για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ έχουμε, $\|x\|_p = \|x\|_q = 1$, δηλαδή η ② είναι βέλτιστη. ■

3 θα ήθελε να πει, 1 ήταν

Άσκηση 4.24

$\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$

Βέλτιστες σταθερές στις ανισότητες σύγκλισης.

Απόδειξη

- Ισχυρισμός

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty < \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

Αυτό ισχύει πράγματι και δεν βελτιώνεται σύμφωνα με την ανισότητα του Jensen.

είναι βέλτιστο;

α) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$

$\ulcorner$ $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \leq \|x\|_\infty + \dots + \|x\|_\infty = n \|x\|_\infty$

Για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα. ■ α

β) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$

$\ulcorner$ $(\|x\|_2)^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$

$\leq \|x\|_\infty^2 + \dots + \|x\|_\infty^2 = n \|x\|_\infty^2$

$\Rightarrow \|x\|_2 = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$

Για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ισχύει ως ισότητα ■ β δ) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\cdot\|x\|_2$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot|x_i| \underset{CS}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\cdot\|x\|_2$$

Για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ισχύει ως ισότητα ■

Ασκηση 3.31

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ υπάρχει φυσική νόρμα στον $\mathbb{R}^{2,2}$ τ.ω $\|A\| = 2,5$;

Λύση

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο p του A.

$$p(A) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda-1)^2 - 4 = (\lambda+1)^2 - 4$$

Ιδιοτιμές

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda + 1 = \pm 2 \rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$

φασματική ακτίνα:

$$\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) = \max(1,3) = 3$$

Αφού, $\|A\| < \rho(A)$ δεν υπάρχει τέτοια φυσική νόρμα ■

Ασκηση 3.32

α) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\|A\|_{max} = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$

$$\|A\|_E = \left(\sum_{j,i=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$ φυσικές νόρμες;

Λύση

α) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$

φασματική ακτίνα: $\rho(A) = 3$

Όμως $\|A\|_{max}=2$.

Άρα, $\|A\|_{max} < \rho(A)$, οπότε η $\|\cdot\|_{max}$ δεν είναι φυσική νόρμα

■ α, $\|A\|_{max}$

$\|I_n\|_E = \sqrt{n} \neq 1$ για $n \geq 2$ οπότε η $\|\cdot\|_E$ δεν είναι φυσική νόρμα.

■ α, $\|A\|_E$

β) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_E \cdot \|x\|_2$ (δηλαδή $\|A\|_2 \leq \|A\|_E$)

<u>Λύση</u>

Έχουμε, $$(\|Ax\|_2)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left((Ax)_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}_{=(Ax)_i}\Big)^2$$

$$\overset{CS}{\leq} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2}_{=(\|x\|_2)^2}$$

$$= \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}_{=(\|A\|_E)^2} \cdot (\|x\|_2)^2$$

δηλαδή, $(\|Ax\|_2)^2 \leq (\|A\|_E)^2 \cdot (\|x\|_2)^2 \Rightarrow \boxed{\|Ax\|_2 \leq \|A\|_E \cdot \|x\|_2}$

<u>Άσκηση 3.36</u>

$\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$

$\|\cdot\|$ αντίστοιχη φυσική νόρμα στον $\mathbb{R}^{n,n}$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\quad \|A\| < 1$

<u>ΝΔΟ</u>

ο $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος και $\dfrac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\|A\|}$

Απόδειξη

$(I_n - A)\cdot x = 0 \Leftrightarrow I_n \cdot x = A\cdot x \Leftrightarrow x = Ax \Rightarrow \|x\| = \|Ax\|$

$\Rightarrow \|x\| \le \|A\|\cdot\|x\|$

Για $x \neq 0$ αυτή η ανισότητα δίνει $1 \le \|A\|$ ΑΤΟΠΟ.
Άρα, $x = 0$, οπότε ο $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος. ∎

$(I_n - A)^{-1}(I_n - A) = I_n$

Άρα, $1 = \|(I_n - A)^{-1}\cdot(I_n - A)\| \le \|(I_n - A)^{-1}\|\,\|(I_n - A)\|$

$\le \|I_n\| + \|A\| = 1 + \|A\|$

$\Rightarrow 1 \le \|(I_n - A)^{-1}\|\cdot(1 + \|A\|)$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{1+\|A\|} \le \|(I_n - A)^{-1}\|}$ ∎ αριστερό μέλος ανισότητας

κάνουμε πράξεις

$1 = \|(I_n - A)^{-1}\cdot(I_n - A)\| = \|(I_n - A)^{-1}\cdot I_n - (I_n - A)^{-1}\cdot A\|$

$\ge \|(I_n - A)^{-1}\| - \|(I_n - A)^{-1}\cdot A\|$ $\le \|(I_n - A)^{-1}\|\cdot\|A\|$

$\ge \|(I_n - A)^{-1}\| - \|(I_n - A)^{-1}\|\cdot\|A\|$

Άρα,

$1 \ge \|(I_n - A)^{-1}\|\cdot(1 - \|A\|) \Rightarrow \boxed{\|(I_n - A)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1-\|A\|}}$ ∎ δεξιό μέλος ανισότητας.

Άσκηση 3.64

$Ax=b$ με $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -7/2\\ 1 & 1 & 7/4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

ΝΔΟ

Jacobi συγκλίνει, Gauss-Seidel γενικά αποκλίνει.

Απόδειξη

Jacobi:

Πίνακας επανάληψης: $G_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 2 & -7/2\\ 1 & 0 & 7/4\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$= -I_3 \cdot \begin{pmatrix}0 & 2 & -7/2\\ 1 & 0 & 7/4\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2 & 7/2\\ -1 & 0 & -7/4\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$p(\lambda) = \det(G_J - \lambda I_3) = \begin{vmatrix}-\lambda & -2 & 7/2\\ -1 & -\lambda & -7/4\\ -1 & -1 & -\lambda\end{vmatrix} = \overset{\text{πράξεις}}{\ldots} = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2}$

Φασματική ακτίνα:

$\rho(G_J) = 1/2$

Επειδή, $\rho(G_J) < 1$ συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$. ∎ Jacobi

Gauss-Seidel:

Πίνακας επανάληψης: $G_{GS} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 2 & -7/2\\ 0 & 0 & 7/4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$= -\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & -7/2\\ 0 & 0 & 7/4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0 & 2 & -7/2\\ 0 & -2 & 21/4\\ 0 & 0 & -\frac{7}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2 & 7/2\\ 0 & 2 & -21/4\\ 0 & 0 & 7/4\end{pmatrix}$$

τα βρίσκουμε εμείς

Ιδιοτιμές

$\lambda 1 = 0, \lambda 2 = 2, \lambda 3 = 7/4$. Ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός οπότε οι ιδιοτιμές είναι τα στοιχεία της διαγωνίου.

Φασματική ακτίνα:

$\rho(A) = 2 \rightsquigarrow \rho(A) > 1$ η μέθοδος γενικά αποκλίνει ■ Gauss-seidel

Άσκηση 3.65

$Ax = b$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ΝΔΟ: Gauss-seidel συγκλίνει
Jacobi γενικά αποκλίνει.

Απόδειξη

Gauss-seidel

Ο πίνακας επανάληψης: $G_{GS} = -(L+D)^{-1} U = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ είναι άνω τριγωνικός οπότε, ιδιοτιμές:
$\lambda 1 = 0, \lambda 2 = 1/2, \lambda 3 = 1/3$

Φασματική ακτίνα

$\rho(A) = 1/2 < 1 \rightarrow$ η μέθοδος συγκλίνει ■ Gauss-seidel

Jacobi:

πίνακας επανάληψης: $G_J = -D^{-1}(L+U) = -(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ -1 & 0 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

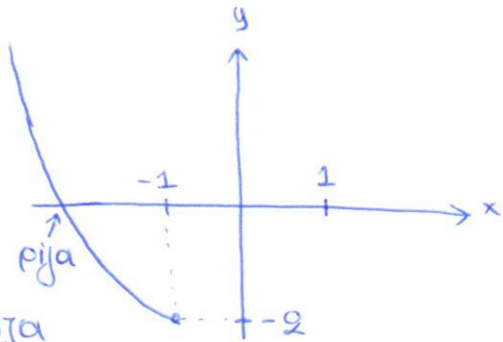
χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(\lambda) = \det(G_J - \lambda I_3) = \dots = -\lambda^3 + \frac{11}{6}\lambda - \frac{7}{6}$$

Παρατηρούμε ότι,

$$p(-1) = 1 - \frac{11}{6} - \frac{7}{6} = -2$$

Επίσης, $\lim_{\lambda \to -\infty} p(\lambda) = +\infty$



Συμπέρασμα, το p έχει ρίζα μικρότερη του -1. Άρα, υπάρχει ιδιοτιμή του πίνακα αυτού με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη του 1, οπότε $\rho(G_J) > 1$. Συμπέρασμα, η μέθοδος Jacobi γενικά αποκλίνει.