Αριθμητική Ανάλυση 9/2/17

Περιεχόμενο μαθήματος

- Αριθμητική κινητής υποδιαστολής
  - └ Σφάλματα στρογγύλευσης.

  Οι πράξεις στους υπολογιστές γίνονται με πεπερασμένη ακρίβεια και αυτό έχει ως συνέπεια να εμφανίζονται σφάλματα στρογγύλευσης.

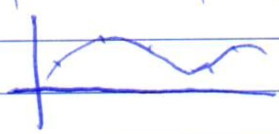
  Σχετικά θέματα:
  - └ Ευαισθησία προβλημάτων και αλγορίθμων σε τέτοια σφάλματα

- Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων.
  - └ Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ζητούνται ρίζες της f

- Γραμμικά συστήματα.
  - └ $\left.\begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ αντιστρέψιμος} \\ b \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\}$ ζητούμενο $x \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $Ax=b$

  Σχετικά θέματα:
  - └ Ευαισθησία

- Παρεμβολή
  - └ Ένας τρόπος προσέγγισης συναρτήσεων



- Αριθμητική Ολοκλήρωση
  - └ Έστω $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχής

  ζητούμενο $\int_a^b f(x)dx$

  $\left(F' = f \to \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\right)$ Δεν μπορούμε να το βρούμε εαν δεν είναι γνωστό.

  - └ $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$

1ο Παράδειγμα

$$I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{x-1}\, dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

n "μεγάλο"

Στόχος δεν είναι το αποτέλεσμα αλλά πόσο αποδοτικός είναι ο κάθε τρόπος.

Ιδιότητες: $I_n > 0$

$$0 < I_{n+1} < I_n \leq \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$$

φθίνουν με το πολύ τιμές

Η ακολουθία $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και μηδενική.

Αναδρομικός τύπος:

$$I_n = 1 - n I_{n-1} \quad , \quad n \geq 2$$

$$I_1 = \frac{1}{e}$$

1ος Αλγόριθμος

$\tilde{I}_1$ δεδομένος

$\tilde{I}_n = 1 - n \cdot \tilde{I}_{n-1} \cdot n \geq 2$

Ισχυρισμός: Αλγόριθμος "ασταθής"

$$I_n - \tilde{I}_n = -n \left(I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1} \right)$$

μεγάλη αλλοίωση στο αποτέλεσμα

1º κεφάλαιο

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής

Σφάλματα στρογγύλευσης.

Τα αποτελέσματα υπολογισμών με η/υ πρέπει να αντιμετωπίζονται με κριτική διάθεση

Ποιότητα αριθμητικών μεθόδων

- Απαιτούμενη μνήμη
- Απαιτούμενος χρόνος
- Ακρίβεια αποτελεσμάτων

(ανάλογα σχετικά με την εφαρμογή)

Οι πράξεις γίνονται με πεπερασμένη ακρίβεια και αυτό έχει ως συνέπεια να προκύπτουν σφάλματα στρογγύλευσης. Αλγόριθμοι με σφάλματα στρογγύλευσης λέγονται ασταθείς και είναι άχρηστοι. Αλγόριθμοι που δεν είναι ευαίσθητοι σε τέτοια σφάλματα λέγονται ευσταθείς.

1º Παράδειγμα $\quad I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx \;,\; n \in \mathbb{N}$

Ιδιότητες:

$$e^{x} \le 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$0 < I_{n+1} < I_n \le \int_0^1 x^n\,dx$$

$$x^{n+1} < x^n \quad \forall x \in (0,1)$$

. Αναδρομικός τύπος:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx = \int_0^1 x^n (e^{x-1})'\,dx$$

$$= \left[x^n \cdot e^{x-1}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (x^n)' e^{x-1}\,dx$$

$$\left(\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = \left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx\right)$$

$$= 1 - \int_0^1 n x^{n-1} \cdot e^{x-1} \, dx = 1 - n I_{n-1}$$

$$I_1 = 1 - \int_0^1 e^{x-1} \, dx = 1 - \left[e^{x-1}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-1})$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

10/9/2017

1º παράδειγμα: που είδαμε

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-n} \, dx, \; n \in \mathbb{N}$$

$I_{n \in \mathbb{N}}$ φθίνουσα και μηδενική

$$0 < I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{cases} I_n = 1 - n I_{n-1}, & n \geq 2 \\ I_1 = \frac{1}{e} \end{cases}$$

- 1ος Αλγόριθμος
  προσεγγίζουμε το I_1 με έναν $\tilde{I}_1$ $(\tilde{I}_1 \neq I_1)$ και υποθέτουμε ότι τα $\tilde{I}_n$ υπολογίζονται (ακριβώς) από αυτόν τον τύπο:

$$\begin{cases} \tilde{I}_n = 1 - n \cdot \tilde{I}_{n-1}, & n \geq 2 \\ \tilde{I}_1 = \text{δεδομένο} \end{cases}$$

- αλγόριθμος αυτός είναι ασταθής

Αιτιολόγηση της αστάθειας

Έχουμε $I_n - \tilde{I}_n = -n\,(I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1}),\ n \geq 2$

Επομένως, επαγωγικά έχουμε

(*) $I_n - \tilde{I}_n = (-1)^{n-1}\, n!\, (I_1 - \tilde{I}_1)$

$n=1$ $\quad I_1 - \tilde{I}_1 = I_1 - \tilde{I}_1$

$n \longrightarrow n+1$:

$$I_{n+1} - \tilde{I}_{n+1} \underset{(*)}{=} -(n+1)(I_n - \tilde{I}_n) = -(n+1)(-1)^{n-1}\, n!\,(I_1 - \tilde{I}_1)$$

$$= (-1)^n (n+1)!\,(I_1 - \tilde{I}_1)$$

$$= (-1)^{(n+1)-1}(n+1)!\,(I_1 - \tilde{I}_1)$$

δηλαδή η (*) ισχύει όπως και για $n+1$

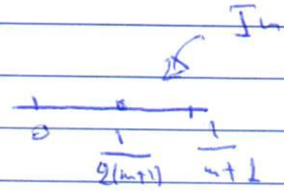
Συμπέρασμα $\quad |I_n - \tilde{I}_n| = n!\,|I_1 - \tilde{I}_1|$

αυξάνει ταχύτατα με το n, οπότε ο αλγόριθμος είναι ασταθής

2ος αλγόριθμος

Προσεγγίζουμε το I_m με έναν αριθμό $\tilde{I}_m$ (για οποιοδήποτε $\tilde{I}_m \in [0, \frac{1}{m+1}]$ ισχύει $|I_m - \tilde{I}_m| \leq \frac{1}{m+1}$

Βέλτιστη επιλογή $\tilde{I}_m = \frac{1}{2(m+1)}$



Υπολογίζουμε τα $\tilde{I}_{m-1}, \tilde{I}_{m-2}, \dots \tilde{I}_l$ αναδρομικά με τον τύπο:

$$\tilde{I}_{n-1} = \frac{1 - \tilde{I}_n}{n}, \quad n = m, m-1, \dots, l+1$$

Ο αλγόριθμος αυτός είναι <u>ευσταθής</u>.

Αιτιολόγηση της ευστάθειας:

$$I_{n-1}-\tilde{I}_{n-1} = -\frac{I_n-\tilde{I}_n}{n}, \quad n=m, m-1, m-2, \dots, 1$$

επαγωγικά έχουμε

$$I_n-\tilde{I}_n = (-1)^{m-n}\cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(m-1)\cdot m}\left(I_m-\tilde{I}_m\right), \quad \boxed{1\le n<m}$$

<u>Συμπέρασμα:</u>

$$|I_n-\tilde{I}_n| = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots m}\,|I_m-\tilde{I}_m|$$

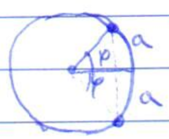
<u>2ο παράδειγμα:</u>

$$y_n = 2^n\cdot \sin\frac{\pi}{2^n}, \quad n\in \mathbb{N} \qquad \underline{\underline{y_1=2}}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Για $n\geq 2$, το $2y_n$ είναι η περίμετρος του κανονικού πολυγώνου με 2^n πλευρές που είναι εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο.

(μοναδιαίος)



$$\varphi=\frac{\pi}{2^n}, \quad a=\sin\frac{\pi}{2^n}$$

$$2\varphi = 2\frac{\pi}{2^n},$$

χωράνε 2^n φορές στον κύκλο

Συμπέρασμα: Το $2a$ είναι η πλευρά του κανονικού πολυγώνου με 2^n πλευρές που είναι εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο

Περίμετρος: $2^n\cdot 2a = 2\cdot 2^n\cdot \sin\frac{\pi}{2^n} = 2y_n$

Γεωμετρική ερμηνεία.
(Η (y_n) είναι γνήσια αύξουσα και συγκλίνει στο π.)

14/2/2017

<u>2º παράδειγμα</u>

$y_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$

y_1

<u>Ισχυρισμός</u> Η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο π

Απόδειξη

α) $y_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} = 2^n \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

$= 2^{n+1} \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = \underbrace{y_{n+1}}_{>0} \underbrace{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}_{1>} < y_{n+1}$

β) Ξέρουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Άρα για οποιοδήποτε $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{(ax)} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = 1$$

ή

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$$

Τώρα

$$y_n = \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} \longrightarrow \pi, \quad n \longrightarrow \infty$$

$$x_n = \frac{1}{2^n}$$

$$a = \pi$$

Αναδρομικός τύπος

$$y_{n+1} = 2^{n+1} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} =$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$= 2^{n+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

$$= 2^{n+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^n}}\right)}$$

$$\sin\frac{\pi}{2^n} = 2^{-n} \cdot y_n \quad \Big| = 2^{n+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\right)}$$

1ος Αλγόριθμος

$$\begin{cases} y_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\right)}, & n=1,2,3 \\ y_1 = 2 \end{cases}$$

Ο αλγόριθμος είναι ασταθής.

Αιτιολόγηση της αστάθειας:

εάν το y_n είναι προσέγγιση του π, τότε για αρκετά μεγάλο n, το $(2^{-n} \cdot y_n)^2$ είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Άρα οδηγούμαστε σε αφαίρεση σχεδόν σε αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών και σε αυτό οφείλεται η αστάθεια

9ος Αλγόριθμος

Έχουμε $\quad 1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\ ^{*}$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{\beta}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{\beta})(\sqrt{a}+\sqrt{\beta})}{\sqrt{a}+\sqrt{\beta}}=\frac{a-\beta}{\sqrt{a}+\sqrt{\beta}}\right)$$

$$* = \frac{\cancel{1}-[\cancel{1}-(2^{-n}y_n)^2]}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}$$

$$= \frac{(2^{-n}y_n)^2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}$$

Επομένως,
$$y_{n+1}=2^{n+1}\frac{2^{-n}y_n}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,y_n}{\sqrt{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}}.$$

$$\begin{cases} y_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2}{1+\sqrt{1-(2^{n}y_n)^2}}}\cdot y_n, \quad n=1,2 \\ y_1=2 \end{cases}$$

Ο αλγόριθμος αυτός είναι ευσταθής

° Παράσταση αριθμών ως προς οποιαδήποτε βάση °

Καθημερινή ζωή δεκαδικό σύστημα

Βάση: 10

Ψηφία: 0, 1, 2, ..., 9

Παράδειγμα: $3.14159 = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5}$

Γενικά: έστω $a_N, a_{N-1}, \ldots, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ είναι ψηφία του δεκαδικού συστήματος

Τότε:

$$(a_N a_{N-1} \ldots a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots)_{10}$$

$$=$$

$$a_N \cdot 10^N + a_{N-1} \cdot 10^{N-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

$$+$$

$$a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots$$

ακέραιο μέρος: $a_N a_{N-1} \ldots a_1 a_0$

είναι η τιμή του πολυωνύμου p,

$P(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

στο σημείο $\boxed{x = 10}$

Κλασματικό μέρος: $a_{-1}, a_{-2} \ldots$

Είναι η τιμή της δυναμοσειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} x^k, \text{ στο } \boxed{\text{σημείο } \frac{1}{10}}$$

Μη μοναδικότητα της παράστασης:

$$4.130 = 4.12\overline{9} = 4.129999\ldots$$

$$9\sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} = 9\cdot\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= 9\cdot\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

πχ το $\frac{1}{3} = 0,333\cdots$ επιτρέπεται

Γενικά $\boxed{(\beta-1)\sum_{i=1}^{\infty}\beta^{-i} = 1}$

$|\omega|<1$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\omega^{i} = \frac{1}{1-\omega}$$

Γενικότερα

$$\sum_{i=n_0}^{\infty}\omega^{i} = \frac{\omega^{n_0}}{1-\omega}$$

Υπόθεση που εξασφαλίζει μοναδικότητα:

$\forall k_0 \in \mathbb{N}\ \exists k > k_0$ τ.ω $a_k \neq 9$

<u>Σύστημα με βάση Β, $\beta \geq 2$</u>

<u>Βάση:</u> Β

<u>Ψηφία:</u> $0, 1, 2, \ldots, \beta-1$

Ποτέ σε ένα σύστημα δεν χρησιμοποιούμε μεγαλύτερα ή ίσα με την βάση σαν ψηφία

a_k ψηφία

$$\pm(a_N \ldots a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots)_\beta =$$

$$= \pm(a_N \cdot \beta^N + a_{N-1}\cdot\beta^{N-1} \ldots + a_{-1}\beta^{-1} + a_{-2}\beta^{-2} \ldots).$$

<u>Παράδειγμα:</u> $(100110.11)_2 =$

$$1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} =$$

$$(38.75)_{10}$$

i) Μετατροπή από ένα σύστημα με βάση β στο δεκαδικό.

α) <u>ακεραίων αριθμών.</u>

παράδειγμα: $(53473)_8$

$$= 5\cdot 8^4 + 3\cdot 8^3 + 4\cdot 8^2 + 7\cdot 8 + 3$$

$$= 3+8(7+8(4+8(3+8\cdot 5)))$$

Εκτελούμε τις πράξεις από τα "μέσα" προς τα "έξω".

◦ <u>Σχήμα του Horner.</u> (λιγότερες δυνατές πράξεις)

$$P(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + a_{N-2} x^{N-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \dots + x(a_{N-1} + x\cdot a_N))\dots)$$

$y \leftarrow a_N$

για $c = N-1, N-2, \dots, 0$ | Τότε $y = P(x)$
$y \leftarrow a_c + x\cdot y$ | $y \leftarrow a_i + x\cdot y$ (Flop)

Το σχήμα του Horner απαιτεί N Flop

β) <u>κλασματικών αριθμών</u> $x \to 0 < x < 1$

παράδειγμα: $(.11)_2 = 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = (0.75)_{10}$

ii) Μετατροπή από το δεκαδικό σε ένα σύστημα με βάση β

α) ακεραίων αριθμών
βασίζεται στον αλγόριθμο της διαίρεσης

<u>πχ</u> Μετατροπή το $(369)_{10}$ στο 8αδικό

$(369)_{10} = (\ldots a_2 a_1 a_0) = a_0 + 8(a_1 + 8(a_2 + \ldots))$

Το $a_0 \to 0 \leq a_0 \leq 7$

Άρα το a_0 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $369:8$ και το $a_1 + 8(a_2 + \ldots)$ είναι το πηλίκο αυτής της διαίρεσης.

$$\begin{array}{r|l} 369 & 8 \\ \hline 49 & 46 \\ 1 & \end{array}$$

Άρα $\boxed{a_0 = 1}$ και

$(46)_{10} = a_1 + 8(a_2 + \ldots)$

Επομένως το a_1 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $46:8$ και το $a_2 + \ldots$ είναι το πηλίκο

$$\begin{array}{r|l} 46 & 8 \\ \hline 6 & 5 \end{array}$$

Άρα το $a_1 = 6$ και $a_2 + 8(a_3 + \ldots) = 5$

$\Rightarrow a_2 = 5$ και $\cancel{a_3 = a_4 = \ldots = 0}$

Συμπέρασμα: $(369)_{10} = (561)_8$

Επαλήθευση

$(561)_8 = 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 1 = \ldots = 369$

(την παρασκευή ζωρο)

16/9/2017

ii) Μετατροπή από το δεκαδικό σε σύστημα με βάση το β

α) ακεραίων αριθμών

βασίζεται στον αλγόριθμο της διαίρεσης

β) κλασματικών αριθμών

Έστω $0<x<1$ στο δεκαδικό σύστημα μετατροπή του x σε σύστημα με βάση β

$$x=(a_{-1}, a_{-2}, \dots)_\beta = a_{-1}\beta^{-1} + a_{-2}\beta^{-2} + \dots$$

$$\beta x = a_{-1} + a_{-2}\cdot\beta^{-1} + \dots = (a_{-1}.\, a_{-2}\, a_{-3}\dots)_\beta$$

Συμπέρασμα το a_{-1} είναι το ακέραιο μέρος του βx

__Παράδειγμα:__ Μετατροπή του $x=(.372)_{10}$ στο δυαδικό

$$(.372) = (.a_{-1}\, a_{-2} \dots)_2$$

Έχουμε: $2x = 0.744$, άρα $a_{-1}=0$ και $\chi_1 = 0.744$

$2\chi_1 = 1.488$, άρα $a_{-2}=1$ και $\chi_2 = 0.488$
$2\chi_2 = 0.976$, άρα $a_{-3}=0$ και $\chi_3 = 0.976$
$2\chi_3 = 1.952$, άρα $a_{-4}=1$ και $\chi_4 = 0.952$

Επομένως $0.372_{10} = (0.0101\dots)$

Παρατήρηση: Κατα την μετατροπη απο ένα σύστημα σε άλλο οι ακέραιοι αριθμοί ~~...~~ παραμένουν ακέραιοι και οι κλασματικοί παραμενουν κλασματικοί. Το πλήθος των ψηφίων ενός κλασματικού αριθμού μπορεί απο πεπερασμένο να γίνει άπειρο ή αντίστροφα.

Παράδειγμα:

Ισχυρίζομαι: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{2^{4n+1}}\right)=\frac{1}{10}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{2^{4n+1}}\right)=$$

$$\left[\sum_{i=n_0}^{\infty}\omega^i=\frac{\omega^{n_0}}{1-\omega}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{2\cdot 2^{4n}}\right)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2^{4n}}=$$

$$\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4n}}=$$

$$\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^4}\right)^n=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2^4}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{10}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{2^{4n+1}}\right)=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{13}}+\dots$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{10}=2^{-4}+2^{-5}+2^{-8}+2^{-9}+2^{-12}+2^{-13}+\dots$$

$$\Longrightarrow (0.1)_{10}=(0.0001100110011\dots)_2$$

$$=(0.0\overline{0011})_2$$

Αριθμοί μηχανής

Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Σε ένα σύστημα με βάση β, ο x μπορεί να γραφεί στην μορφή.

(*) $x = \pm \, .d_1 d_2 \ldots \cdot \beta^e$ με $\underline{\underline{d_1 \neq 0}}$

και d_i ψηφία ως προς την βάση β και το e κατάλληλος εκθέτης.

$$\left[\begin{array}{l} 153181 = 0.153181 \cdot 10^3 \\ 0.00153181 = 0.153181 \cdot 10^{-2} \end{array}\right]$$

Η μορφή (*) λέγεται (κανονική) μορφή κινητής υποδιαστολής.

Το σύνολο των αριθμών μηχανής M και εξαρτάται απο 4 παραμέτρους $M = M(\beta, t, L, U)$. χαρακτηρίζεται απο τα:

- β = βαση αριθμητικού συστήματος
- t = ακρίβεια = πλήθος των ψηφίων του κλάσματος του αριθμού.
- $\left.\begin{array}{l} L = \text{κατω φραγμα} \\ U = \text{ανω φραγμα} \end{array}\right\}$ του εκθέτη e

δηλαδή $(L \leq e \leq U)$ με L,U ακέραιους και περίπου αντίθετοι $\underline{L \simeq -U}$

☒

Κάθε $x \in M$, $x \neq 0$ είναι της μορφής

(+) $x = \pm\, 0.d_1 d_2 \ldots d_t \cdot \beta^e$

με $d_1 \neq 0$ και $L \leq e \leq U$

Το μ αποτελείται απο το 0 και όλους τους αριθμούς αυτής της μορφής. (+)

- Το σύνολο μ είναι πεπερασμένο
- Το μέγιστο στοιχείο του Μ:

$x = .d_1 d_2 \ldots d_t \cdot \beta^U$

και $d_1 = d_2 = d_t = \beta - 1$

- Ελάχιστο θετικό στοιχείο του Μ:

$x = .d_1 d_2 \ldots d_t \cdot \beta^L$

$x = 1000 \ldots 0 \cdot \beta^L$

- Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών στοιχείων του Μ δεν είναι σταθερή.
- Το Μ δεν είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό:

δηλαδή $x, x^* \in M \not\Rightarrow x x^* \in M$

Παράδειγμα:

$\underbrace{100 \ldots 0\, \beta^L}_{\in M} \cdot 100 \ldots 0\, \beta^L \notin M$

Το Μ δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση:

Παράδειγμα: $\beta = 10$, $t = 5$

$1, 10^{-5} \in M$ — 5 ψηφία

$1 + 10^{-5} = 1.00001 \notin M$ — 6 ψηφία

Μας ενδιαφέρει το Μ να είναι όσο πιο <u>πυκνό</u> γίνεται και όσο πιο ευρύ γίνεται, δηλαδή να έχει:
μεγάλο t
μεγάλο διάστημα $[L, U]$

Προσέγγιση πραγματικών αριθμών με αριθμούς μηχανής

α) Αν $|x| > .d_1 d_2 \ldots d_t \cdot \beta^U$ με $d_i = \beta - 1$, $i = 1 \ldots t$

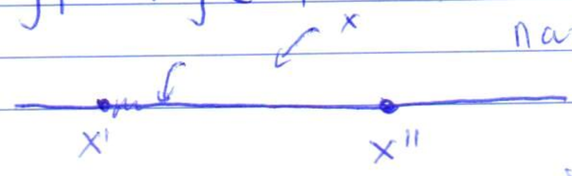
προκύπτει υπερχείλιση (overflow) και οι υπολογισμοί σταματούν.

β) Αν $0 < |x| < 0.100\ldots0 \cdot \beta^L$

προκύπτει υποχείλιση (underflow) (συνήθως ο x προσεγγίζεται με το μηδέν και οι υπολογισμοί συνεχίζονται.)

γ) Αν $.1 \cdot \beta^L \le |x| \le$ μέγιστο στοιχείο του Μ τότε ο x προσεγγίζεται με τον αριθμό $fl(x)$. <u>Συνήθως ισχύει</u>:

$$|x - fl(x)| \le |x - y| \quad \forall y \in M$$



Πάντα τον πιο μικρό εκτός από τον μέσο που δεν έχει σημασία.

I Ισχυρισμός: Τότε

$$\underbrace{\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right|}_{\text{σχετικό σφάλμα}} \leq \frac{1}{2}\cdot\beta^{1-t} \quad (\text{για } x\neq 0)$$

α) Αν $fl(x)=x$, τότε η (*) ισχύει προφανώς

β) Αν $x\notin M$, τότε υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί μηχανής x', x'' τ.ω $x'<x<x''$.
Τότε ισχύει $|fl(x)-x|\leq \frac{1}{2}|x'-x''|$,

οπότε $\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right|\leq\frac{|x'-x''|}{2|x|}$

Έστω ότι $x>0$ (για $x<0$, εντελώς ανάλογα)

$x = .d_1d_2..d_t d_{t+1}...\cdot\beta^e$

Άρα $x' = .d_1d_2..d_t\cdot\beta^e$

$x'' = (.d_1..d_t+\beta^{-t})\cdot\beta^e$

αυξησα το d_t κατα 1
πχ εαν ειναι 9 δεν
μπορει να γινει 10
διοτι δεν ειναι ψηφιο.

οπότε $x''-x' = \beta^e\cdot\beta^{-t} = \beta^{e-t}$ (Η διαφορά διαδοχικών αριθμών μηχανής δεν είναι σταθερή)

(για το σχετικό και όχι το απόλυτο σφάλμα)

Επομένως

$$\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right| \leq \left|\frac{\beta^{e-t}}{2x}\right|$$

Όμως $x \geq .1 \cdot \beta^{e} = \beta^{e-1}$

Άρα $$\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right| \leq \frac{1}{2}\frac{\beta^{e-t}}{\beta^{e-1}} = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

το σχετικό σφάλμα δεν εξαρτάται από τίποτα.

17/2/2017

Αριθμοί μηχανής

Το σύνολο $M = M(\beta, t, L, U)$ αποτελείται από το μηδέν και τους αριθμούς της μορφής.

$x = \pm .d_1 d_2 d \ldots d_t \beta^{e}$ με $d_1 \neq 0$ και $L \leq e \leq U$

Προσέγγιση με αριθμούς μηχανής

Αριθμοί x, στο εύρος των αριθμών μηχανής προσεγγίζονται με αριθμούς $fl(x) \in M$

Συνήθως ισχύει: $|x - fl(x)| \leq |x-y| \quad \forall y \in M$ (1)

εάν όντως

Τότε ισχύει: $\left|\frac{x-fl(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{2}\beta^{1-t}$ (2)

Στην (1) οδηγούμαστε με στρογγύλευση.

Παράδειγμα $\beta=10$, $t=5$

$$x = .a_1 a_2 \ldots a_5 a_6 \ldots 10^k$$

- Αν $a_6 \geq 5$, τότε $fl(x) = x'' =$
$$= (.a_1 a_2 \ldots a_5 + 10^{-5}) \cdot 10^k$$

- Αν $a_6 < 5$, τότε $fl(x) = x' =$
$$= .a_1 a_2 \ldots a_5 \cdot 10^k$$

- Στην περίπτωση που το $a_6 = 5$ και $a_i = 0$ για $i \geq 7$ τότε μπορούμε να επιλέξουμε είτε την x' είτε τον x''.

• Εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης ο

Αποκοπή

$$fl(x) = .a_1 a_2 \ldots a_5 \, 10^k$$

σε αυτήν την περίπτωση αντί για την (2) έχουμε την:

$$(3) \quad \left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| \leq \beta^{1-t}$$

Συμπέρασμα:

$$\left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| \leq u := \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \beta^{1-t} & \text{στρογγ.} \\ \beta^{1-t} & \text{αποκοπή} \end{cases}$$

Το u λέγεται σφάλμα στρογγύλευσης

Πράξεις

$* \in \{+, -, \times, :\}$

Εάν x, y , $x * y$ είναι μη μηδενικοί αριθμοί στο εύρος των αριθμών μηχανής

Υποθέτουμε ότι αντί για $x*y$ ο υπολογιστής μου δίνει $\tau = fl(fl(x) * fl(y))$

Παράδοξα: $\beta = 10$, $t = 5$, $U = -L = 10$

Στρογγύλευση

$a_1 = 1$, $a_2 = 3 \cdot 10^{-5}$
$a_3 = 3 \cdot 10^{-5}$ $(a_3 = a_2)$

$a_1, a_2, a_3 \in M$

Τότε: $fl(a_1 + a_2) = fl(1.00003)$
$= 1.0000 = 1$

όποτε:
$fl(fl(a_1 + a_2) + a_3) = 1$

Αλλά
$a_2 + a_3 = 6 \cdot 10^{-5} \in M$
οπότε
$fl(a_1 + (a_2 + a_3)) = fl(1.00006) = 1.0001$

Διαφορετικά αποτελέσματα!

Έχει σημασία η σειρά των πράξεων!!

Για κάθε $0 < |x| < \frac{1}{2}\beta^{1-t}$

έχουμε
$$fl(1 + fl(x)) = 1$$

$$\frac{1}{2}\beta^{1-t} = \text{έψιλον της μηχανής} = \text{μηδέν της μηχανής}$$

→ Επιρροή των σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς ←

x, y, $x * y$ μη μηδενικοί αριθμοί στο εύρος αριθμών μηχανής.

$$z = fl(fl(x) * fl(y))$$

Ερώτημα πως μπορούμε να εκτιμήσουμε το σχετικό σφάλμα:

$$\frac{fl(x) * fl(y) - x * y}{x * y}$$

Βοηθητικά αποτελέσματα

α) $$\left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| \leq u \Rightarrow fl(x) = x(1+\varepsilon)$$

με $\varepsilon = \varepsilon(x)$ τ.ω. $|\varepsilon| \leq u$

$$fl(x) = x(1+\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon = \frac{fl(x) - x}{x}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon| \leq u$$

β) Εάν ε_i, $1 \le i \le m$, τ.ω. $|\varepsilon_i| \le u$, $i=1,\dots,m$
Τότε ισχυρίζομαι ότι υπάρχει ε με $|\varepsilon| \le u$
τ.ω.

$$\prod_{i=1}^{m} (1+\varepsilon_i) = (1+\varepsilon)^m$$

Απόδειξη:
Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = (1+x)^m$, $x \in [-u, u]$

Αυτή είναι συνεχής συνάρτηση. Επίσης

$$\underset{\varphi(-u)}{\underset{\shortparallel}{(1-u)^m}} \le \prod_{i=1}^{m} (1+\varepsilon_i) \le \underset{\varphi(u)}{\underset{\shortparallel}{(1+u)^m}}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσης τιμής
υπάρχει $\varepsilon \in [-u, u]$ τ.ω.

$$\prod_{i=1}^{m} (1+\varepsilon_i) = \varphi(\varepsilon) = (1+\varepsilon)^m$$

Πολλαπλασιασμός:

$$z = fl\big(fl(x) \cdot fl(y)\big) = fl\big(x(1+\varepsilon_1)\, y(1+\varepsilon_2)\big)$$
$$= x(1+\varepsilon_1)\, y(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$$
$$= xy(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$$
$$= xy\,(1+\varepsilon)^3$$

με $|\varepsilon_i| \le u$, $|\varepsilon| \le u$

Επομένως $\left|\dfrac{z - x\cdot y}{xy}\right| = \left|\dfrac{-\cancel{xy} + \cancel{xy}(1+\varepsilon)^3}{\cancel{xy}}\right|$

$$= \left|(1+\varepsilon)^3 - 1\right| = \left|\cancel{1} + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - \cancel{1}\right| =$$

$= |3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3|$

$\leq 3u + \underbrace{3u^2 + u^3}_{O(u^2)}$

Αφού ισχύει $u << 1$, έχουμε

$u^2 << u$

Λέμε ότι το σχετικό σφάλμα στον πολλ/σμο είναι το πολύ $3u$.

β) Διαίρεση

$$z = fl\left(\frac{fl(x)}{fl(y)}\right) = fl\left(\frac{x(1+\varepsilon_1)}{y(1+\varepsilon_2)}\right)$$

$$= \frac{x(1+\varepsilon_1)}{y(1+\varepsilon_2)}(1+\varepsilon_3)$$

Θ $\frac{1}{1+\varepsilon_2} = 1+\delta \Rightarrow \delta = -\frac{\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}$

$$\Rightarrow |\delta| \leq \frac{|\varepsilon_2|}{1+\varepsilon_2} \leq \frac{u}{1-u}$$

$\left(\sum_{i=0}^{\infty} u^i = \frac{1}{1-u}\right)$ άρα

$$\frac{u}{1-u} = 1 + u + u^2 + \ldots = 1 + O(u)$$

Τελικά:

$$\left|\frac{z - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}\right| = \left|\frac{\cancel{\frac{x}{y}}(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)(1+\delta) - \cancel{\frac{x}{y}}\,1}{\cancel{\frac{x}{y}}}\right|$$

$$= |\underbrace{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)}_{(1+\varepsilon)^2}(1+\delta) - 1| =$$

$$= |(1+\varepsilon)^2(1+\delta) - 1|$$

$$= |2\varepsilon + \delta + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\delta + \delta\varepsilon^2|$$

$$\le 3u + O(u^2)$$

$$\downarrow$$

κρατομε το 3u, υπαρχει το πολύ 3u σφαλμα καθως το u^2 ειναι τοσο μικρο ωστε να θεωρηθει αμελητεο.

x) <u>Πρόσθεση - Αφαίρεση</u>

$$z = fl(fl(x) + fl(y))$$

$$= [x(1+\varepsilon_1) + y(1+\varepsilon_2)](1+\varepsilon_3)$$

$$= x\underbrace{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)}_{\substack{\| \\ (1+\varepsilon)^2}} + y\underbrace{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}_{\substack{\| \\ (1+\delta)^2}}$$

με $|\varepsilon| \le u$, $|\delta| \le u$

Άρα

$$z = x(1+\varepsilon)^2 + y(1+\delta)^2$$
$$= (x+y) + 2(\varepsilon x + \delta y) + x \cdot \varepsilon^2 + y \cdot \delta^2$$

$$\Rightarrow z \approx (x+y) + 2(\varepsilon x + \delta y)$$

Άρα $\dfrac{z - (x+y)}{x+y} \approx 2 \left| \dfrac{\varepsilon x + \delta y}{x+y} \right| \le \dfrac{|x| + |y|}{|x+y|} u$

1η περίπτωση: x,y ομόσημα

Τότε: $|x+y| = |x| + |y|$,

τότε:

$$\left| \frac{z-(x+y)}{x+y} \right| \leq 2u + O(u^2)$$

2η περίπτωση: x,y ετερόσημοι

Στην χειρότερη περίπτωση έχουμε $\varepsilon \approx -\delta$ και $|\varepsilon| \approx u$. Τότε:

$$\left| \frac{z-(x+y)}{x+y} \right| \simeq 2 \frac{|x-y|}{|x+y|} \cdot u$$

$$\frac{|\varepsilon x + \delta y|}{|x+y|} \approx \frac{|ux - uy|}{|x+y|} = \frac{|x-y|}{|x+y|} = \frac{|x-y|}{|x+y|} u$$

Αν τα x και y είναι περίπου αντίθετοι αριθμοί τότε το κλάσμα $\frac{|x-y|}{|x+y|}$ μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο

Συμπέρασμα: Τα σφάλματα στρογγύλευσης στην αφαίρεση ίσων αριθμών μπορούν να έχουν καταστροφική επιρροή.

Άρα η αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών πρέπει να αποφεύγεται.

Σημείωση: Η αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών Μηχανής γίνεται χωρίς πρόβλημα.

Παράδειγμα: $\beta = 10$, $t=5$, $u=-L=10$

<u>στρογγύλευση</u>.

$x = .45141708$, $y = -.45115944$

$x+y = .26764 \cdot 10^{-3}$ ΕΜ

$z = fl(fl(x)+fl(y)) = fl(.45147 - .45116)$

$= fl(0.00027)$ ενδειξη αφαίρεσης σχεδόν ίσων αριθμών

$\downarrow$

$.27000 \cdot 10^{-3}$

next μαθημα 2 μαρτίου.

9/3/2017

<u>Παράδειγμα</u>: $\beta=10$, $t=5$, $u=-L=10$,

στρογγύλευση

$x = .45142708$ *, $y = -.45115944$

$x+y = .26764 \cdot 10^{-3}$

$z = fl(fl(x)+fl(y))$

$= fl(.45143 - .45116)$

$= .00027 = .27000 \cdot 10^{-3}$

* ηταν λάθος <u>το 2</u>

Παραδείγματα αποφυγής της αφαίρεσης σχεδόν ίσων αριθμών.

1° x, y μεγάλοι θετικοί $x \simeq y$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$x = 7298$ $\quad$ $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

$y = 7297$ $\quad$ χάνεται ακρίβεια.

$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leftarrow$ δεν χάνεται ακρίβεια.

2° $f(x) = x - \sin x$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις τιμές της f για $|x|$ μικρό.

- Τα x και $\sin x$ είναι ομόσημοι
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, δηλαδή $\sin x \simeq x$ για $|x|$ μικρό
- Επομένως έχουμε αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών.

Ανάπτυγμα Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x) \quad \text{με} \quad |\varepsilon(x)| \leq \frac{1 \times 1^5}{120}$$

Άρα $f(x) = \cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)\right)$

$$= \frac{x^3}{6} - \varepsilon(x) \simeq \frac{x^3}{6}$$

Το $\frac{x^3}{6}$ υπολογίζεται χωρίς πρόβλημα.

Σφάλματα στον υπολογισμό αθροισμάτων.

Θα μελετήσουμε την επιρροή των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης, λόγω της αριθμητικής κινητής υποδιαστολής με περιορισμένη ακρίβεια, στον υπολογισμό αθροισμάτων.

<u>παράδειγμα</u> $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}, \; n \in \mathbb{N}$

Έχουμε $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, οπότε

το άθροισμα είναι <u>τηλεσκοπικό</u>,

$$S_n = 1 + \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \cancel{\dots} + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n+1}$$

(γι' αυτό λέγεται τηλεσκοπικός)

πχ

$$S_{9999} = 1.9999$$

Η $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και το όριο

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 2$$

<u>1ος Αλγόριθμος</u> Αθροίζουμε από τον πιο μεγάλο προς τον πιο μικρό όρο.
(όλοι οι όροι είναι θετικοί)

$$S'_0 = 1 \quad , \quad S'_k = S_{k-1} + \frac{1}{k(k+1)} \quad , k = 1, \dots, n$$

Με $\beta = 10$, $t = 10$ παίρνουμε

$$\tilde{S}'_{9999} = 1.999899972$$

<u>2ος Αλγόριθμος:</u> Αθροίζουμε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο.

$$T_0 = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$T_k = T_{k-1} + \frac{1}{(n-k)(n-k+1)}$$

$$T_n = T_{n-1} + 1$$

Προφανώς $\cancel{T_n} = T_S$ με $\beta = 10$, $t = 10$, παίρνουμε:

$$\tilde{T}_{9999} = 1.999900000$$

<u>Ερώτημα:</u> Γιατί με τον 2ο αλγόριθμο παίρνουμε καλύτερο αποτέλεσμα;

<u>Βοηθητικό αποτέλεσμα:</u>

Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in [-u, u]$
Τότε υπάρχει $\varepsilon_3 \in [-u, u]$ τ.ω.

(*) $$\lambda \cdot \varepsilon_1 + \mu \cdot \varepsilon_2 = (|\lambda| + |\mu|)\, \varepsilon_3$$

Αν $\lambda = \mu = 0$, η (*) ισχύει για οποιαδήποτε $\varepsilon_3 \in [-u, u]$. Διαφορετικά

↳

Θέτουμε:

$$\varepsilon_3 = \frac{\lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2}{|\lambda| + |\mu|}$$

Τότε ισχύει η $\circledast$, και

$\leq u$ (άνω φράγμα)

$$|\varepsilon_3| = \frac{|\lambda\varepsilon_1| + |\mu\varepsilon_2|}{|\lambda| + |\mu|} \leq \frac{|\lambda|\cdot|\varepsilon_1| + |\mu|\cdot|\varepsilon_2|}{|\lambda| + |\mu|}$$

$$\leq \frac{(\cancel{|\lambda| + |\mu|})u}{\cancel{|\lambda| + |\mu|}} = u$$

Πρόβλημα

Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_N \in M$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα

$$s_N = \sum_{i=1}^{N} a_i$$

Θεωρούμε τον αλγόριθμο $s_1 = a$, $s_k = s_{k-1} + a_k$,

$k = 2, \ldots, N$

Παίρνουμε τις προσεγγίσεις:

$$\tilde{s}_1 = a_1, \quad \tilde{s}_k = fl(\tilde{s}_{k-1} + a_k) \quad k = 2, \ldots, N$$

Έχουμε:

$$\tilde{s}_2 = fl(\tilde{s}_1 + a_2) = (\tilde{s}_1 + a_2)(1+\underset{\downarrow}{\overset{|\delta| \leq u}{\delta}}) = s_2(1+\delta)$$

$$= s_2 + s_2 \cdot \delta$$

$$= s_2 + |s_2| \cdot \varepsilon_2 \qquad \text{με } |\varepsilon_2| \leq u$$

παρόμοια:

$$\tilde{s}_3 = fl(\tilde{s}_2 + a_3) = (\tilde{s}_2 + a_3)(1+\delta')$$

$$= (s_2 + |s_2|\varepsilon_2 + a_3)(1+\delta')$$

$$= (s_3 + |s_2| \cdot \varepsilon_2)(1+\delta')$$

$$= s_3 + (|s_2| \cdot \varepsilon_2 + s_3 \cdot \delta') + |s_2| \cdot \varepsilon_2 \cdot \delta'$$

$$\Rightarrow \tilde{s}_3 \approx s_3 + |s_2| \cdot \varepsilon_2 + s_3 \cdot \delta'$$

$$\Rightarrow \tilde{s}_3 \simeq s_3 + (|s_2| + |s_3|)\varepsilon_3$$

Συνεχίζοντας εντελώς ανάλογα παίρνουμε

$$\tilde{s}_N \approx s_N + (|s_2| + |s_3| + \dots + |s_N|)\epsilon_N$$

με $|\varepsilon_N| \leq u$ και σφάλμα της τάξης $O(u^2)$

Με $\gamma_N = |s_2| + |s_3| + \dots + |s_N|$

Έχουμε $\tilde{s}_N \simeq s_N + \gamma_N \epsilon_N$

οπότε

$$\left|\frac{\tilde{S}_N - S_N}{S_N}\right| \simeq \frac{\gamma_N}{|S_N|}|\varepsilon_N| \leq \frac{\gamma_N}{|S_N|} u$$

Το $P_N = \frac{\gamma_N}{|S_N|}$ λέγεται συντελεστής μετάδοσης του σχετικού σφάλματος στρογγύλευσης για τον αλγόριθμο μου.

- P_N μεγάλο → ασταθής αλγόριθμος
- P_N μικρό → ευσταθής "

Το P_N είναι μεγάλο, εάν κάποιο από τα μερικά αθροίσματα S_n έχει απόλυτη τιμή πολύ μεγαλύτερη της απόλυτης τιμής του S_N

<u>παράδειγμα</u> προσέγγιση του e^x για $x >> 1$

Έχουμε $S_N(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{N-1}\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$

τότε $S_N(x) \simeq e^{-x}$ για μεγάλο N

Για $x = 100$ έχουμε $e^{-100} \simeq 0$, ενώ $S_1 = 1$, $S_2 = -99$, $S_3 = 4901$, $S_4 \simeq -161766$ κλπ

Ο υπολογισμός του $S_K(100)$ αποτυγχάνει παταγωδώς!

<u>Εναλλακτικά</u>

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ Το e^x για μεγάλο x προσεγγίζεται χωρίς πρόβλημα!

Ειδική περίπτωση: $a_i \geq 0$
$i = 1, \dots, N$

Τότε $\delta_N = S_2 + S_3 + \dots + S_N$

$$= (N-1)a_1 + (N-1)a_2 + (N-2)a_3$$
$$+ (N-3)a_4 + \dots + 1 \cdot a_N$$

Το δ_N παίρνει την μικρότερη τιμή του εάν

$$a_1, a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots \leq a_N$$

Αυτή είναι η καλύτερη επιλογή.

Χειρότερη επιλογή

$$a_1, a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots \geq a_N$$

Τότε το δ_N παίρνει τη μέγιστη τιμή του

Σημείωση

Κάθε άθροισμα με μη ομόσημους όρους γράφεται ως διαφορά αθροισμάτων με θετικούς όρους

Ευστάθεια αλγορίθμου

Ένας αλγόριθμος λέγεται ασταθής αν είναι ευαίσθητος σε σφάλματα στρογγυλευσης, δηλαδή αν μικρά σφάλματα που γίνονται κατά την παράσταση των αριθμών και τις πράξεις σε έναν υπολογιστή, είναι δυνατόν να επιφέρουν μεγάλες μεταβολές στο τελικό αποτέλεσμα.

Ένας αλγόριθμος λέγεται ευσταθής εάν δεν επηρεάζονται πολύ από τα σφάλματα στρογγύλευσης.

Παραδείγματα Υπολογισμός του

$$e^{-x} \text{ για μεγάλο } x > 0$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

ασταθής όπως είδαμε

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}$$

ευσταθής

Άλλα παραδείγματα:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx, \quad n = 1, 2 \qquad \begin{cases} I_1 = \frac{1}{e} \\ I_n = 1 - n I_{n-1}, \quad n = 2, 3 \end{cases}$$

- **Ασταθής**

Ξεκινώντας από ένα I_n και υπολογίζοντας προς τα πίσω το I_{n-1}, I_{n-2}.

- **Ευσταθής**

Προσέγγιση του π: $y_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}$, $n = 1, 2$

$$y_1 = 2$$

$$y_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - (2^{-n} y_n)^2}\right)} \qquad n = 1, 2 \dots$$

Ασταθής

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2}{1+\sqrt{1-(2^{?}y_n)^2}}} \end{cases} \quad n=1,2,\dots$$

Ευσταθής Αλγόριθμος.

Κατάσταση προβλημάτων

- Λέμε ότι ένα πρόβλημα έχει καλή κατάσταση εάν μικρές μεταβολές στα δεδομένα του έχουν ως συνέπεια μικρή μεταβολή της λύσης του.
- Λέμε οτι ένα πρόβλημα έχει κακή κατάσταση εάν μικρές μεταβολές στα δεδομένα του έχουν ως συνέπεια μεγάλη μεταβολή της λύσης του.

Παράδειγμα: $(x-2)^6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$

$$(x-2)^6 = 10^{-6} \qquad \text{(μεταβολή του 0)}$$

$$\Rightarrow x_k = 2 + \frac{1}{10} e^{\frac{2ik\pi}{6}} \qquad k=0,\dots,5$$

$$\Rightarrow |x_k - 2| = \frac{1}{10} \Big|\underbrace{e^{\frac{2ik\pi}{6}}}_{=1}\Big|$$

$$\Rightarrow |x_k - 2| = 10^{-1}, \qquad k=0,\dots,5$$

Απο 10^{-6} σε 10^{-1}.

Το πρόβλημα έχει κακή κατάσταση.

(Άσκηση 1.15)

πχ $(x-2)^6=0 \iff x-2=0$

καλή κατάσταση.

(μεταβολή + 2)

Άσκηση 1.15

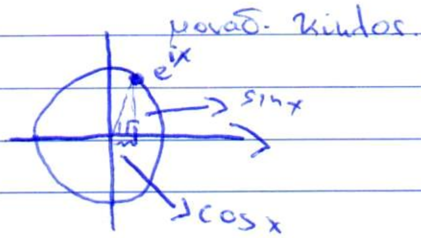
Οι ν-οστές ρίζες της μονάδας. Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ οι λύσεις της εξίσωσης $z^{\nu}=1$ είναι:

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{\nu}} \quad , k=0, \ldots, \nu-1$$

$$i=\sqrt{-1}$$

○ για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
(Νόμος του Euler)



$$e^{ix} = 1 \iff x = \lambda \cdot 2\pi$$
με $\lambda \in \mathbb{R}$

$x, y \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = e^{iy} \iff e^{i(x-y)} = 1 \iff$$

$$x-y = \lambda \cdot 2\pi \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Έχουμε

$$(z_k)^\nu = \left(e^{i \cdot \frac{2\pi k}{\nu}}\right)^\nu$$

$$= e^{i \cdot 2\pi k} = 1$$

Συμπέρασμα: Τα $z_0, \dots, z_{\nu-1}$ είναι ν-οστές ρίζες της μονάδας

Οι αριθμοί $\frac{2\pi \cdot 0}{\nu}, \frac{2\pi \cdot 1}{\nu}, \dots, \frac{2\pi(\nu-1)}{\nu}$

ανήκουν στο $[0, 2\pi]$
και είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.

Άρα τα $z_0, \dots, z_{\nu-1}$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους

Επειδή το $z^\nu - 1$ είναι πολυώνυμο βαθμού ν,
δεν έχει άλλες ρίζες πέραν των $z_0, \dots, z_{\nu-1}$

$\nu = 1$: $z_0 = 1$
$\nu = 2$: $z_0 = 1$, $z_1 = -1$

Για $\nu \geq 3$ έχουμε $z_0 = 1$ και τα $z_0, z_1, \dots, z_{\nu-1}$ είναι οι κορυφές του κανονικού ν-γώνου που είναι εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο

Εφαρμογή

$$(x-2)^6 = 10^{-6} \iff 10^6 (x-2)^6 = 1 \iff$$

$$[\underbrace{10(x-2)}_{z}]^{6} = 1 \iff$$

$10(x_k-2) = e^{i\frac{2\pi k}{6}}$, $k=0,\dots,5$

$\Leftrightarrow \quad x_k = 2 + \frac{1}{10} \cdot e^{i\frac{2\pi k}{6}} \quad k=0,\dots 5$

$|x_k - 2| = \frac{1}{10}$

Άσκηση 1.2

a) $1-\cos x$, $|x|$ μικρή

(χωρίς ανάπτυγμα Taylor)

$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ | $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
$= 1 - 2\sin^2 a$
$\Leftrightarrow 1-\cos(2a) = 2\sin^2 a$

β) $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

γ) $\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$

δ) $\sin(a+x) - \sin a = ?$ $|x|$ μικρή

$\left(\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2}\right)$

$\sin(a+x) - \sin a = 2\sin\frac{x}{2}\cos\left(a + \frac{x}{2}\right)$

Άσκηση 1.3

$x^2 - 2ax + \beta = 0 \qquad a, \beta > 0 \qquad a^2 >> \beta$

$x_1 = a + \sqrt{a^2 - \beta}$, $x_2 = a - \underbrace{\sqrt{a^2 - \beta}}_{\approx a}$

υπολογίζεται χωρίς πρόβλημα.

Αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών.

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$x_1, \dots x_n$ ρίζες

τότε το $p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$

$x_1 x_2 = \beta \Rightarrow x_2 = \dfrac{\beta}{x_1}$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{\beta}{a + \sqrt{a^2 - \beta}}$

$$x^2 - 2ax + \beta = (x - x_1)(x - x_2)$$
$$= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

Άσκηση 1.4

$$x^3 + 3px + 2q = 0$$

$p, q \in \mathbb{R}$, $p^3 + q^2 > 0$

α) Υπάρχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα ρ, και $\rho = u - v$

$$\text{με} \begin{cases} u = \left(\sqrt{p^3+q^2} - q\right)^{\frac{1}{3}} \\ v = \left(\sqrt{p^3+q^2} + q\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Τύπος του Cardano

για πολυώνυμα 5ου και πάνω δεν υπάρχει τύπος

$\boxed{\text{Κεφ. 2}}$

2. Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

- Δεδομένο: Μια πραγματική συνάρτηση f μιας πραγματικής μεταβλητής

- Ζητούμενο: Πραγματικές ρίζες x^* της f, δηλαδή $x^* \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x^*) = 0$

- Αριθμητικές μέθοδοι: Δίνουν μια ακολουθία προσεγγίσεων $x_0, x_1, x_2, \ldots$, η οποία υπό κατάλληλες προϋποθέσεις συγκλίνει στο x^*. Τότε για αρκετά μεγάλο N, επιλέγουμε ως προσέγγιση της x^* τη x_N (συνήθως με εμπειρικά κριτήρια)

Συμβολισμός: Αν I ένα διάστημα,

τότε $C(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ συνεχής} \}$

$C^n(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \,/\, f \ n \text{ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη} \}$

$n \in \mathbb{N}$

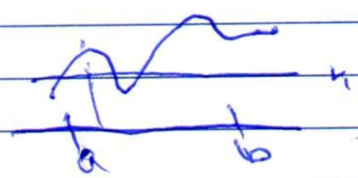
$C^n[a,b]$, $C^n(a,b]$ ...

Η μέθοδος της διχοτόμησης:

Είναι η απλούστερη αριθμητική μέθοδος, οικονομική σε κάθε βήμα, και συγκλίνει πάντα όταν μπορεί να εφαρμοστεί.

Η μέθοδος βασίζεται στο Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής:

Έστω $g \in C[a,b]$ και κ πραγματικός αριθμός ανάμεσα στους $g(a)$ και $g(b)$. Τότε υπάρχει $x \in [a,b]$ τ.ω $g(x) = \kappa$



$f \in C[a,b]$

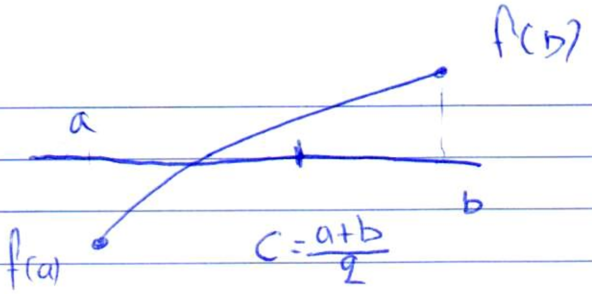
· Υπόθεση: $\text{sign} f(a) \neq \text{sgn} f(b)$

$$\text{sign}x = \begin{cases} 1 & \text{για } x>0 \\ 0 & \text{για } x=0 \\ -1 & \text{για } x<0 \end{cases}$$

1η περίπτωση $f(a)=0 \longrightarrow a$ ρίζα

2η " $f(b)=0 \longrightarrow b$ ρίζα

3η " (ενδιαφέρουσα): $f(a)f(b)<0$



α) $f(c) = 0$ τότε c ρίζα της f

β) $f(c) \neq 0$

Αν $f(a)f(c) < 0$, τότε υπάρχει ρίζα της f στο $[a, c]$
Αν $f(a)f(c) > 0$, (τότε $f(c)f(b) < 0$) οπότε θα υπάρχει ρίζα της f στο διάστημα $[c, b]$

Τα διαστήματα $[a, c]$ και $[c, b]$ έχουν μήκος το μισό του $[a, b]$

o Δεδομένα του αλγόριθμου: o

a, b f τ.ω το $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$, $f \in C[a, b]$ και $\varepsilon > 0$

(το ε λέγεται ανοχή σφάλματος) ή μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα

Αλγόριθμος της μεθόδου της διχοτόμησης

Υπολόγισε $f(a)$, $\delta = b - a$

1 $\delta \leftarrow \frac{\delta}{2}$

αν $\delta \leq \varepsilon$, τύπωσε a, b, έξοδος

διαφορετικά (δηλ. $\delta > \varepsilon$)

υπολόγισε το $c = \frac{a+b}{2}$, $f(c)$

τύπωσε $a, b, c, \delta, f(c)$

αν $f(c) = 0$, έξοδος.

διαφορετικά (δηλ. $f(c) \neq 0$):
αν $\operatorname{sgn} f(c) = \operatorname{sgn} f(a)$
$a \leftarrow c$, $f(a) \leftarrow f(c)$

διαφορετικά (δηλ. αν $\operatorname{sgn} f(c) \neq \operatorname{sgn} f(a)$):
$b \leftarrow c$

πήγαινε στο 1.

7/3/17

Πρακτικά ζητήματα:

για τον αλγόριθμο της μεθόδου της διχοτόμησης

1. Το ερώτημα "αν $sgn f(a) = sgn f(c)$"
δεν πρέπει να τίθεται στην μορφή
"αν $f(a) \cdot f(c) > 0$"
διότι μπορεί να οδηγήσει σε υπερχείλιση

2. Το μέσον $c = \frac{a+b}{2}$ του διαστήματος $[a,b]$ καλό είναι να υπολογίζεται ως $c = a + \frac{b-a}{2}$ γιατί μπορεί να οδηγήσει σε ένα σημείο έξω από το διάστημα $[a,b]$

Παράδειγμα: $\beta = 10$, $t = 2$

$L = -1 = 10$, αποκοπή.

$a = .61$, $b = .66$

$$fl(a+b) = fl(1.27) = 1.2$$

$$\Rightarrow c = \frac{fl(a+b)}{2} = 0.6 < a$$

Έχουμε βγει έξω από το διάστημα μας (η συνάρτηση δεν ορίζεται καν!)

3. Πολύ μικρή ανοχή σφάλματος ε μπορεί να οδηγήσει σε φαύλο κύκλο.

$$c = a + \frac{b-a}{2}$$

Εαν $fl(a+fl(\varepsilon)) = a$ τότε $c = a$

Πρόταση:

(Εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου της διχοτόμησης)

Εστω $f \in C[a,b]$, $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$

και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των προσεγγίσεων (δηλαδή των μέσων των διαδοχικών διαστημάτων) που παράγει η μέθοδος της διχοτόμησης. Τότε είτε για $x_N = x^*$ για κάποιο N

είτε για $x_n \to x^*$, $n \to \infty$

όπου $x^* \in (a,b)$ ρίζα της f (λύση της εξίσωσης $f(x)=0$)

Μάλιστα:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Απόδειξη: Θέτουμε $a_1 = a$ και $b_1 = b$ και συμβολίζουμε με $I_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots$ τα διαδοχικά διαστήματα που κατασκευάζει η μέθοδος της διχοτόμησης.

Προφανώς $I_{i+1} \subset I_i$ και επειδή σε κάθε I_i υπάρχει μια ρίζα της f, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια ρίζα x^* της f που ανήκει σε όλα τα I_i. Το πλήθος των I_i είναι πεπερασμένο, αν $x_N = x^*$ για κάποιο N, διαφορετικά είναι άπειρο.

Τώρα για κάθε n έχουμε $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$,

οπότε $|x^* - x_n| \leq \frac{b_n - b_a}{2}$

Επι πλέον

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \dots = \frac{\overset{b}{\overset{\parallel}{b_1}} - \overset{a}{\overset{\parallel}{a_1}}}{2^{n-1}}$$

Επομένως,

$$|x^* - x_n| \leq \frac{\frac{b-a}{2^{n-1}}}{2} = \frac{b-a}{2^n}$$

Έστω ότι θα θέλουμε να ισχύει $|x^* - x_n| \leq \varepsilon$ με δεδομένο ε. Αρκεί να ισχύει $\frac{b_n - a_n}{2} \leq \varepsilon$ ή $\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{\varepsilon} \leq 2^n \Rightarrow \log\frac{b-a}{\varepsilon} \leq n \log 2$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\log\frac{b-a}{\varepsilon}}{\log 2}$$

Μέθοδος της διχοτόμησης (πλεονεκτήματα)

1. Μπορεί να εφαρμοστεί υπο γενικές συνθήκες στην f, απαιτεί μόνο συνέχεια της f και αλλαγή προσήμου της f σε μια περιοχή μιας ρίζας της
2. Συγκλίνει πάντα, όταν μπορεί να εφαρμοστεί.
3. Απαιτεί μονο έναν υπολογισμό της f ανα βήμα
4. Μπορούμε να υπολογίσουμε εκ των προτέρων το πλήθος των βημάτων που εξασφαλίζουν την προσέγγιση με δεδομένη ακρίβεια.

Μειονεκτημα:

Η μέθοδος συγκλίνει πολύ αργά, με αποτέλεσμα το συνολικό κόστος να είναι υψηλό

Στην πράξη η μέθοδος της διχοτόμησης χρησιμοποιείται αρχικά για ένα χονδρικό εντοπισμό της λύσης.

Επαναληπτικές μέθοδοι

Ιδέα: γράφουμε την εξίσωση $f(x)=0$ ισοδύναμα στην μορφή $\varphi(x)=x$

Ορισμός (Σταθερό σημείο) ένα σημείο (x^*) του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης φ, λέγεται σταθερό σημείο της φ, αν $\varphi(x^*)=x^*$

Ξεκινώντας με μία αρχική προσέγγιση x_0 ενός σταθερού σημείου της φ, υπολογίζουμε προσεγγίσεις $x_1, x_2, \ldots$ ως εξής:

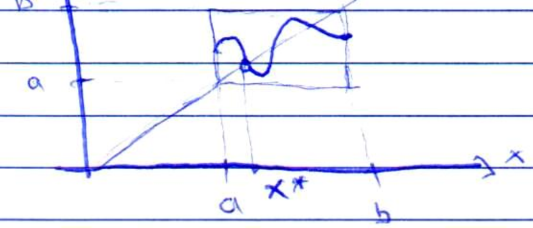
$$x_{n+1}=\varphi(x_n), \quad n=0,1,2,\ldots$$

Πρόταση (Ύπαρξη σταθερού σημείου)

Κάθε <u>συνεχής</u> συνάρτηση $\varphi:[a,b]\longrightarrow[a,b]$

Έχει στο $[a,b]$ (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο

Απόδειξη



Ισχυρισμός: ισχύει τουλ. μία από τις εξής τρεις συνθήκες:

∟ D

α) $\varphi(a)=a$

β) $\varphi(b)=b$

γ) $\varphi(a)>a$ και $\varphi(\beta)<\beta$

o Στις 2 πρώτες το a η το b αντίστοιχα, είναι σταθερό σημείο.

o Στην τρίτη περίπτωση ορίζουμε την συνάρτηση $g(x):=\varphi(x)-x,\quad x\in[a,b]$

Η g είναι συνεχής και
$$g(a)=\varphi(a)-a>0$$
$$g(b)=\varphi(b)-b<0$$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα της Ενδιάμεσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα x^* της g στο (a,b). Οπότε

$$g(x^*)=0 \Leftrightarrow \varphi(x^*)-x^*=0 \Leftrightarrow$$
$$\varphi(x^*)=x^*$$

δηλ. το x^* είναι σταθερό σημείο της φ.

<u>Ορισμός</u> (Συνθήκη του Lipschitz) Έστω $I\subset\mathbb{R}$ ένα διάστημα. Λέμε ότι μια συνάρτηση $\varphi: I\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί στο I τη <u>συνθήκη του Lipschitz</u>, (*)

αν $L\geq 0$ $\forall x,y\in I$ $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq L|x-y|$

(*) Στην περίπτωση που ισχύει με $L<1$, η φ λέγεται συστολή, στο I.

Παρατήρηση

α) Αν $\varphi \in C^1[a,b]$ τότε η φ ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz με $L = \max\limits_{a \le x \le b} |\varphi'(x)|$

Έστω $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$ τότε $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} = \varphi'(\xi)$

για κάποιο ξ μεταξύ x και y

Άρα $\left|\dfrac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}\right| = |\varphi'(\xi)|$

$\Rightarrow \left|\dfrac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}\right| \le \underbrace{\max\limits_{a \le \xi \le b} |\varphi'(\xi)|}$

Υπάρχει και δεν εξαρτάται από τα x και y

$\Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x - y|$

β) Αν η φ είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα που δεν είναι κλειστό τότε δεν ικανοποιεί αναγκαστικά την συνθήκη του Leipschitz

Παράδειγμα: $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0, 1]$

Τότε, για $x, y \in (0,1]$ $x \neq y$, έχουμε

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

Για $x \searrow 0$, $y \searrow 0$, έχουμε $\xi \searrow 0$, οπότε

$$\frac{1}{2\sqrt{\xi}} \longrightarrow \infty \text{, οπότε}$$

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{x-y} \right| \longrightarrow \infty \text{ καθώς } x,y \searrow 0.$$

9/3/17

Θεώρημα της συστολής

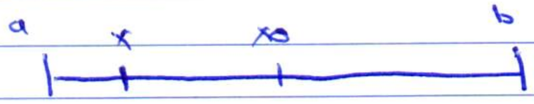
(ικανοποιεί την Liepschitz)

Έστω $\varphi\ [a,b] \longrightarrow [a,b]$ μια συστολή με σταθερά L $(L<1)$. Τότε η φ έχει στο $[a,b]$ ακριβώς ένα σταθερό σημείο x^*. Μάλιστα, για οποιοδήποτε στοιχείο $x_0 \in [a,b]$, η ακολουθία (x_n) $n \in \mathbb{N}_0$, $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$ είναι καλά ορισμένη συγκλίνει προς το x^* και για αυτά τα σφάλματα $x_n - x^*$ ισχύουν οι εκτιμήσεις:

1. $|x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*| \le L^n \max(x_0 - a, b - x_0)$

2. $|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-n} |x_1 - x_0|$

3. $|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$



Απόδειξη

Μοναδικότητα σταθερού σημείου:

Έστω $x^*, y^* \in [a,b]$, $x^* \neq y^*$,

σταθερά σημεία της φ

Τότε: $x^* - y^* = \varphi(x^*) - \varphi(y^*) \Rightarrow$

$$|x^* - y^*| = |\varphi(x^*) - \varphi(y^*)| \leq \underbrace{L}_{<1} \overbrace{|x^* - y^*|}^{\neq 0}$$

$$< |x^* - y^*|$$

Άτοπο

Ύπαρξη και (2): Η ύπαρξη σταθερού σημείου έπεται από την προηγούμενη Πρόταση

Τώρα $x_n - x^* = \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*) \Rightarrow$

$$|x_n - x^*| = \underbrace{|\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)|}_{\leq L|x_{n-1} - x^*|}$$

άρα (+) $|x_n - x^*| \leq L |x_{n-1} - x^*|$, $n \in \mathbb{N}$

Επαγωγικά:

(*) $|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*|$, $n \in \mathbb{N}$

<u>Για $n=1$</u> $|x_1 - x^*| \leq L|x_0 - x^*|$

Ισχύει σύμφωνα με την (+), επιλέγοντας $n=1$

<u>$n \longrightarrow n+1$:</u> $|x_{n+1} - x^*| \leq L|x_n - x^*| \leq L \cdot L^n |x_0 - X^*|$

(+) με $n+1$ απ' για n — Υπόθεση της επαγωγής

$\Rightarrow |x_{n+1} - x^*| \leq L^{n+1} |x_1 - x^*|$

δηλαδή ισχύει η (*) και για $n+1$.

• Ύπαρξη και (9).

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

$a_n \to a$, $n \to \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |a_n - a| \leq \varepsilon$

↳ ορισμός συγκλίνουσας ακολουθίας (χρειαζόμαστε το όριο)

Πως θα μπορούσαμε χωρίς αυτό;

<u>Ακολουθία Cauchy</u> (βασική ακολουθία)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N \ |a_n - a_m| \leq \varepsilon$

<u>Ισχυρισμός</u> Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ακολουθία cauchy

Έχουμε: $x_n - x_{n-1} = \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| = \underbrace{|\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})|}_{\leq L|x_{n-1} - x_{n-2}|}$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq L|x_{n-1} - x_{n-2}|$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq L^{n-1}|x_1 - x_0|$$

επαγωγικά

Επομένως, για $k \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$|x_{n+k} - x_n| = |(x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)|$$

$$\leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| \;\; (1) + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| \;\; (2) + \dots + |x_{n+1} - x_n| \;\; (3)$$

$$\left\{\begin{array}{l} (1) \leq L^{n+k-1}|x_1 - x_0| \\ (2) \leq L^{n+k-2}|x_1 - x_0| \\ \vdots \\ (3) \leq L^{n}|x_1 - x_0| \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow |x_{n+k} - x_n| \leq (L^{n+k} + L^{n+k-2} + \dots + L^n)|x_1 - x_0|$$

$$\Rightarrow |x_{n+k} - x_n| \leq L^n \underbrace{(L^{k-1} + L^{k-2} + \dots + 1)}_{\displaystyle \frac{1-L^k}{1-L}} |x_1 - x_0|$$

$\frac{1-L^k}{1-L}$ → γεωμετρική πρόοδος (x)

$$|x_{n+k} - x_n| \leq L^n \frac{1 - L^k}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

$$\Rightarrow |x_{n+k} - x_n| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|, \quad n \in \mathbb{N}, \; k \in \mathbb{N}$$

Το δεξιό μέλος τείνει στο μηδέν όταν $n \to \infty$, επομένως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι όντως ακολουθία Cauchy (συγκλίνει)

(x) $S_k = 1 + L + L^2 + \dots + L^{k-1}$

$L S_k = L + L^2 + \dots + L^{k-1} + L^k$

$L S_k - S_k = L^k - 1$

$$\Rightarrow S_k = \frac{L^k - 1}{L - 1} = \frac{1 - L^k}{1 - L}$$

Επομένως, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε ένα σημείο $x^* \in [a, b]$

Τότε

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1})$$

$$= \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(x^*)$$

συνέχεια της φ στο x^*

Τώρα

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|, \ k \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow \ k \to \infty$$

$$x^*$$

$$\Rightarrow |x^* - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| .$$

Απόδειξη της ③

Θέτουμε $y_0 = x_{n-1}$ και έχουμε

$$y_1 = \varphi(y_0) = \varphi(x_{n-1}) = x_n$$

Χρησιμοποιούμε τη ② για τα y_n (με $n=1$) και

$$|\underset{x_n}{\underset{\uparrow}{y_1}} - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|\underset{x_n}{\underset{\uparrow}{y_1}} - \underset{x_{n-1}}{\underset{\parallel}{y_0}}|$$

$$\Rightarrow |x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|$$

Παρατηρήσεις

α) Η ② είναι εκτίμηση a priori (εκ των προτέρων) ενώ η ③ είναι εκτίμηση a posteriori (εκ των υστέρων)

β) Τώρα, όπως είδαμε,

$$|x_n - x_{n-1}| \le L^{n-1} |x_1 - x_0| \quad \text{, οπότε}$$

$$\frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \le \frac{L}{1-L} L^{n-1} |x_1 - x_0|$$

$$= \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

Επομένως το φράγμα στην ③ είναι το πολύ όσο και το φράγμα στην ②.

Το πρώτο φράγμα στην ① δεν είναι πρακτικά χρήσιμο γιατί εξαρτάται από το <u>άγνωστο</u> x^*

Αλλά $x_1 - x_0 = (x_1 - x^*) + (x^* - x_0)$

$$\Rightarrow |x_1 - x_0| \le |x_1 - x^*| + |x_0 - x^*|$$

$$= \underbrace{|\varphi(x_0) - \varphi(x^*)|}_{\le L|x_0 - x^*|} + |x_0 - x^*|$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_0| \le (1+L) |x_0 - x^*|$$

Άρα το φράγμα στη ② είναι το πολύ κατά τον παράγοντα $\frac{1+L}{1-L}$ μεγαλύτερο του πρώτου φράγματος της ①

γ) Τι γίνεται για $L \geq 1$;

<u>Παράδειγμα</u> $\varphi(x) = -x$, $x \in [-1,1]$

Τότε $L = 1$

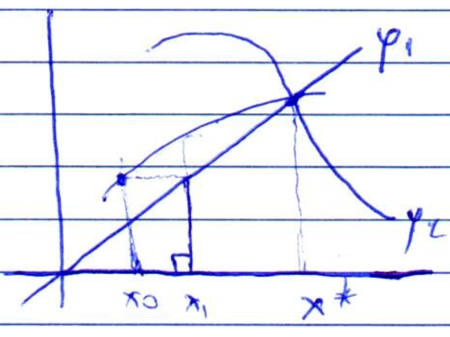
Μοναδικό σταθερό σημείο της φ είναι το $x^* = 0$

Έστω $x_0 \in [-1,1]$, $x_0 \neq 0$

Τότε η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $x_n = \varphi(x_{n-1})$ είναι:

$x_0, -x, x_0, -x, x_0, \ldots$

Άρα δεν συγκλίνει!



Ανάλογα με την κλίση κατευθυνόμαστε πιο κοντά στο x^* ή αντίστοιχα πιο μακριά

πχ $\varphi_1 \to$ κοντά
$\varphi_2 \to$ μακριά

Ορισμός: (Τάξη σύγκλισης ακολουθίας)

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια συγκλίνουσα ακολουθία και x^* το όριό της. Λέμε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά ή ότι η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον 1, αν υπάρχει $c<1$ και $N\in\mathbb{N}$ τ.ω.

$$|x_{n+1}-x^*| \leq c\,|x_n-x^*| \quad \forall n\geq N,$$

Λέμε ότι η τάξη είναι τουλάχιστον p, αν υπάρχει c_* τ.ω.

$$|x_{n+1}-x^*| \leq c\,|x_n-x^*|^p \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Ενδιαφέρουσα περίπτωση: $x_n \neq x^* \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Τότε $$|x_{n+1}-x^*| \leq c_*\,|x_n-x^*|^p \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}\right| \leq c_*$$

Άρα η τάξη ~~ακρίβειας~~ σύγκλισης είναι τουλάχιστον p, αν η ακολουθία $\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)}$ είναι φραγμένη

Ικανή συνθήκη: Υποθέτουμε ότι $\lim \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}=a$

Τότε η τάξη ~~ακρίβειας~~ σύγκλισης είναι τουλάχιστον p.

Μάλιστα: Αν $a\neq 0$, τότε η τάξη ακρίβειας είναι ακριβώς p.

10/3/2017

Άσκηση 1.4

$$x^3 + 3px + 2q = 0$$

$$p, q \in \mathbb{R} \qquad p^3 + q^2 > 0$$

α) Η εξίσωση έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα ρ. Η ρ δίνεται του cardano:

$$\rho = u - v \quad \text{με} \quad u = \left(\sqrt{p^3+q^2} - q\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$v = \left(\sqrt{p^3+q^2} + q\right)^{\frac{1}{3}}$$

Απόδειξη

$f(x) = x^3 + 3px + 2q$ συνεχής

{ Πως θα αποδείξω ότι υπάρχει πραγματική ρίζα; εάν δείξω ότι παίρνει αρνητικές και θετικές τιμές από το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει και το οσα ρίζα }

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$f(x) = x^3\left(1 + \frac{3p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right)$

$\downarrow$

1 για $x \to \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Άρα η f παίρνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές συμπεριλαμβανομένου την τιμή 0. (ΘΜΤ) δηλαδή τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

<u>Μοναδικότητα ρίζας:</u>

$$f'(x) = 3x^2 + 3p = 3(x^2 + p)$$

- $p \geq 0$: Τότε $f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

Επομένως η f είναι γνήσια αύξουσα

- $p < 0$: $f'(x) = 0 \iff x^2 + p = 0$

$$\iff x^2 = -p$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -\sqrt{-p} \\ x_2 = \sqrt{-p} \end{cases}$$

		$-\sqrt{-p}$		$\sqrt{-p}$	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

Έχουμε ότι το $f(-\sqrt{-p}) = p\sqrt{-p} - 3p\sqrt{-p} + 2q$

$$= 2(q - p\sqrt{-p})$$

οπότε

$$f(-\sqrt{-p}) \cdot f(\sqrt{-p}) = 4(q^2 + p^3) \quad > 0$$

1^{η} περίπτωση : $f(-\sqrt{-p}) > 0$

Τότε η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(-\infty, -\sqrt{-p})$ και στα διαστήματα $[-\sqrt{-p}, \sqrt{-p}]$ και $(\sqrt{-p}, \infty)$ δεν έχει ρίζα (παίρνει θετικές τιμές). Άρα η f έχει ακριβώς μια ρίζα

2^{η} περίπτωση : $f(-\sqrt{-p}) < 0$ τότε η f δεν έχει καμία ρίζα στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{-p})$ και $[-\sqrt{-p}, \sqrt{-p}]$ (παίρνει αρνητικές τιμές) και έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[\sqrt{-p}, \infty)$

Τώρα

$$f(\rho) = f(u-v) = (u-v)^3 + 3p(u-v) + 2q$$

$$= u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 3p(u-v) + 2q$$

$$= \underbrace{u^3 - v^3}_{= \cancel{-2q}} - 3uv(u-v) + 3p(u-v) \cancel{+2q}$$

$$= 3(p - uv)\cdot(u-v)$$

όμως

$$uv = \Big[\underbrace{(\sqrt{p^3+q^2} - q)(\sqrt{p^3+q^2} + q)}_{= p^3+q^2-q^2}\Big]^{\frac{1}{3}} = (p^3)^{\frac{1}{3}} = p$$

β) $p^3 \frac{q^3}{7} >> p^2 \longrightarrow$ ο τύπος του Cardano έχει πρόβλημα ευστάθειας

Τότε $u \approx \sqrt{\varphi} \approx v$

υπολογίζοντας το p από τον τύπο $p = u - v$ αφαιρούμε σχεδόν ίσους αριθμούς.

γ) $u^3 - v^3 = (u-v)(u^2 + u \cdot v + v^2)$

$$\Rightarrow p = u - v = \frac{u^3 - v^3}{u^2 + \underbrace{uv}_{p} + v^2}, \quad u^3 - v^3 \longrightarrow -2q$$

$$\Rightarrow p = -\frac{2q}{\underbrace{u^2 + p + v^2}_{>0}}$$

Ταχύτητα σύγκλισης ακολουθιών

Ορισμός (Τάξη σύγκλισης) Έστω $(x_n) \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία που συγκλίνει στο x^*. Λέμε ότι η ακολουθία συγκλίνει (τουλάχιστον) $\boxed{\text{γραμμικά}}$ ή ότι η τάξη σύγκλισης είναι (τουλάχιστον) $\boxed{\text{ένα}}$ εάν υπάρχει $c < 1$ και $k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*| \quad \forall n \geq N$

Λέμε ότι η τάξη σύγκλισης είναι (τουλάχιστον) p, $p>1$ αν υπάρχει $c>0$ τ.ω.

$$|x_{n+1}-x^*| \leq c\,|x_n-x^*|^p \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Για $p=2$ μιλάμε για τετραγωνική σύγκλιση
" $p=3$ " " κυβική "

ο Προσδιορισμός της Τάξης Σύγκλισης ο

Υποθέτω:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p} = a$$

Έστω $p>1$:

Τότε η τάξη σύγκλισης της ακολουθίας της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τουλάχιστον p

Πράγματι, αφού η $\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}$, συγκλίνει,

είναι φραγμένη. Επομένως, υπάρχει $c>0$ τ.ω.

$$\left|\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}\right| \leq c \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Τότε θα έχουμε

$$|x_{n+1}-x^*| \leq c\,|x_n-x^*|^p \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

δηλαδή η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον p.

· Αν $a \neq 0$, τότε η τάξη σύγκλισης είναι <u>ακριβώς p</u>

Πράγματι, αν η τάξη ήταν $p+\varepsilon$ (με $\varepsilon>0$),

θα : $|x_{n+1} - x^*| \le C_1 |x_n - x^*|^{p+\varepsilon}$

Τότε: $\left|\dfrac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p}\right| \le C_1 |x_n - x^*|^{\varepsilon}$

$$\Big\downarrow \; n \to \infty$$

$|a| \le C_1 \cdot 0 = 0 \rightarrow a = 0$ Άτοπο

Για $p=1$ ισχύουν ακριβώς τα ίδια υπό την προϋπόθεση ότι $|a|<1$

• <u>Θεώρημα της συστολής</u> •

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) \Rightarrow$$

$$|x_{n+1} - x^*| \le \underbrace{L}_{<1} |x_n - x^*| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Άρα η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον <u>1</u>

Έστω επιπλέον ότι $\varphi \in C^1[a,b]$

Τότε $x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi_n)(x_n - x^*)$
με ξ_n μεταξύ των x_n και x^*

Άρα $\dfrac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \varphi'(\xi_n)$

οπότε

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \varphi'(x^*)$$

όμως $|\varphi'(x^*)| \leq 1$

Αν $\varphi'(x^*) = 0$, τότε η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς 1

Συμπέρασμα: Αναγκαία συνθήκη για τάξη >1 είναι η: $\boxed{\varphi'(x^*) = 0}$

Η μέθοδος του Νεύτωνα :

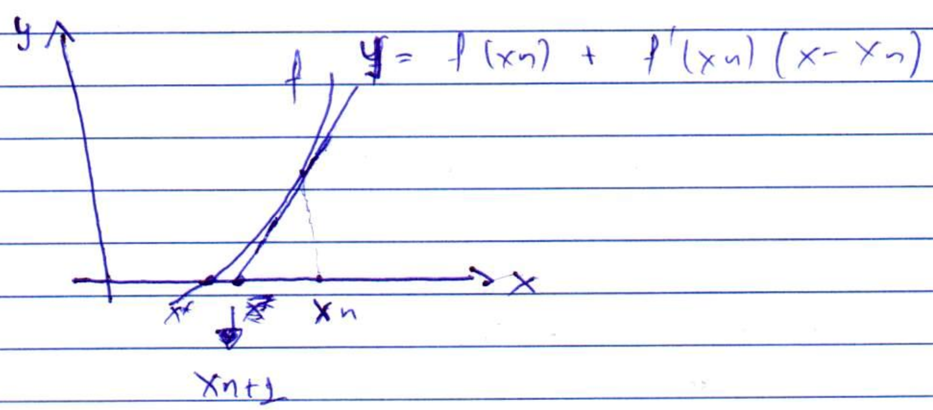
$f(x) = 0$ με f συνεχώς παραγωγίσιμη

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\underbrace{f'(x_n)}_{\neq 0}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Είναι μια επαναληπτική μέθοδος με συνάρτηση επανάληψης

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Γεωμετρικός τρόπος κατασκευής :



$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0 \Rightarrow$$

$$x - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow$$

$$\underset{x_{n+1}}{x} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Αναλυτικός τρόπος κατασκευής

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \underset{\text{που δεν έχει ρίζα}}{g(x)}\, f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \underbrace{\boxed{x + g(x) \cdot f(x)}}_{\varphi(x)}$$

Ιδιότητα της φ: $\varphi'(x) = 1 + g'(x) f(x) + g(x) \cdot f'(x)$

$$\Rightarrow \varphi'(x^*) = 1 + g'(x^*) \cdot \cancelto{0}{f(x^*)} + g(x^*) \cdot f'(x^*)$$

$$\Rightarrow \varphi'(x^*) = 0 \Leftrightarrow$$

$$g(x^*) = -\frac{1}{f'(x^*)}$$

Λογική επιλογή: $g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$

Τότε

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

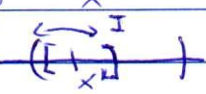
21/3/17

Η μέθοδος του Νεύτωνα

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Θεώρημα (τοπικά τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτονα)

Έστω x^* απλή ρίζα μιας συνάρτησης f. δηλαδή $f(x^*) = 0$ και $f'(x^*) \neq 0$, και έστω ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*



∴ Τότε υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I με μέσον το x^*, τ.ω. για κάθε $x_0 \in$ στο I η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x)=0$, συγκλίνει στο x^*

→ Μάλιστα ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

δηλαδή η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον δύο (μάλιστα είναι ακριβώς δύο, αν $f''(x^*) \neq 0$)

Απόδειξη

Με $\phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

η μέθοδος γράφεται στη μορφή

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

Η φ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^* και

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)\, f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Ιδιαίτερα: $\varphi'(x^*) = 0$

Επομένως, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I, με μέσον το x^*, τ.ω. $\max\limits_{x \in I} |\varphi'(x)| = L < 1$

Ιδιαίτερα, η φ είναι συστολή στο I, επιπλέον για $x \in I$ έχουμε:

$$\varphi(x) - x^* = \varphi(x) - \varphi(x^*) \Rightarrow$$

$$|\varphi(x) - x^*| = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| \leq L\,|x - x^*|$$

$$\Rightarrow |\varphi(x) - x^*| \leq |x - x^*|$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \in I$$

το x^* είναι μέσον του I (Άσκηση 9.19)

Ανακεφαλαιώνοντας

$\varphi: I \longrightarrow I$ και είναι συστολή

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής, για οποιοδήποτε $x_0 \in I$, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο της φ στο I, δηλ. στο x^*

Για την τάξη σύγκλισης:

Ανάπτυγμα Taylor:

$$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})$$

με ξ_{n1}, ξ_{n2} σημεία μεταξύ x_n και x^*

Επομένως,

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_2)} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} - x^* = \frac{(x_n - x^*)^2 f''(\xi_2) - \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})} \Rightarrow$$

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(\xi_2) - \frac{1}{2} f''(\xi_n)}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_2)} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(x^*) - \frac{1}{2} f''(x^*)}{f'(x^*)} = \frac{f''(x^*)}{2 f'(x^*)}$$

Ανακεφαλαιώνοντας

$\varphi : I \to I$ και είναι συστολή
Αρα, σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής, για οποιοδήποτε $x_0 \in I$, η ακολουθία $(x_n)_{n \in N_0}$ συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο της φ στο I, δηλ στο x^*

για την Τάξη σύγκλισης:

Ανάπτυγμα Taylor:

$$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})$$

με ξ_{n1}, ξ_{n2} σημεία μεταξύ x_n και x^*

Επομένως,

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_2)} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} - x^* = \frac{(x_n - x^*)^2 f''(\xi_2) - \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})} \Rightarrow$$

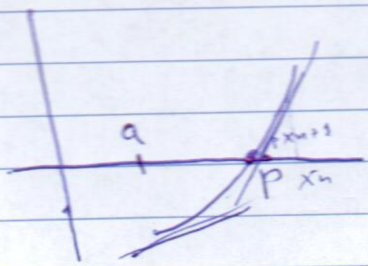
$$\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(\xi_2) - \frac{1}{2} f''(\xi_n)}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_2)} \Rightarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(x^*) - \frac{1}{2} f''(x^*)}{f'(x^*)} = \frac{f''(x^*)}{2 f'(x^*)}$$

Πρόταση ("ολική" σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τ.ω.

$f(a) < 0$ και $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ για $x \geq a$



Τότε η f έχει ακριβώς 1 ρίζα $p \in [a, \infty)$ για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση $x_0 \geq a$, η ακολουθία $(x_n)_{\in \mathbb{N}}$ που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ συγκλίνει στην p.

("με οποιαδήποτε προσέγγιση έρχεται πιο κοντά στην p εγκλωβίζοντας την")

Απόδειξη

→ Μοναδικότητα ρίζας: Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχει το πολύ μια ρίζα.

→ Υπαρξη ρίζας: $f(a) < 0$, f συνεχής, Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(b) >$ για κάποιο b

$$f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^2}{2} f''(\xi)}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow f(b) \geq f(a) + (b-a)\, f'(a)$

Αρκεί το b να είναι τ.ω.

$f(a) + (b-a) f'(a) > 0 \Leftrightarrow$

$(b-a) f'(a) > -f(a) \Leftrightarrow$

$b - a > -\dfrac{f(a)}{f'(a)} \Leftrightarrow$

$b > a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$

• $f(\xi) < 0$ για $\xi \in [a, p)$

$f(\xi) > 0$ για $\xi > p$

o $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow$

$\varphi'(x) = \dfrac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} > 0$

Συμπέρασμα: για $x \in [0, p)$ $\varphi'(x) < 0$

για $x > p$ $\varphi'(x) > 0$

$x_{n+1} - p = \varphi(x_n) - \varphi(p) \Rightarrow$

$x_{n+1} - p = \varphi'(\xi_n)(x_n - p)$

Αρα $x_n > p \longrightarrow x_{n+1} > p$

$x_n < p \longrightarrow x_{n+1} > p$

Συμπέρασμα: $x_n > p \quad \forall n \in \mathbb{N}$

o Έστω $x_n > p$

Τότε: $\underset{<0}{x_{n+1}} = x_n - \frac{\overset{>0}{f(x_n)}}{\underset{>0}{f'(x_n)}}$

$\Rightarrow x_{n+1} < x_n$

Συμπέρασμα: Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη από κάτω από το p.

Επομένως η ακολουθία αυτή συγκλίνει. Έστω y το όριο της. Έχουμε:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\downarrow$$

$$\cancel{y} = \cancel{y} - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0$$

$$\Rightarrow y = p$$

Ερώτημα: Τι συμβαίνει στην περίπτωση πολλαπλής ρίζας?

πχ $f(x) = x^2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^2}{2x_n} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$$

$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n x_0 \quad , n \in \mathbb{N}$

Άρα $x_n \longrightarrow x^* = 0 \, , \, n \to \infty$

Τάξη σύγκλισης:

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x_0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} x_0} = \frac{1}{2}$$

Τάξη σύγκλισης $= 1$

Γενική περίπτωση: Έστω x^* ρίζα μιας συνάρτησης f, τάξης $m \geq 2$, δηλαδή:

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$$

$$\text{και } f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

Για x_0 αρκετά κοντά στο x^*, η ακολουθία που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει στο x^*

Ερώτημα: Τάξης σύγκλισης;

$$\text{Taylor: } f(x_n) = \cancel{f(x^*)}^{0} + (x_n - x^*)\cancel{f'(x^*)}^{0} + \dots + \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!}\cancel{f^{(m-1)}}^{0} + \frac{(x_n - x^*)^{m}}{m!} f^{(m)}(\xi_{n1})$$

$$f'(x_n) = \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_{n2})$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στην $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

παίρνουμε:

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{f^{(n)}(\xi_{n1})}{m \cdot f^{(n)}(\xi_{n2})}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - \frac{1}{m} \neq 0$$

Άρα τάξη σύγκλισης $= 1$

// Παραλλαγή της μεθόδου.

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Τάξη $= 2$

23/3/2017

<u>Μέθοδος του Νεύτωνα.</u>

<u>Πλεονεκτήματα.</u> Για αρχική προσέγγιση x_0 κοντά σε μια ρίζα x^* μιας ομαλής συνάρτησης f συγκλίνει <u>ταχύτατα</u>, αν η x^* είναι <u>απλή</u> (η εάν τροποποιήσουμε κατάλληλα τη μέθοδο όταν γνωρίζουμε την πολλαπλότητα m της x^*)

→ Σε ειδικές περιπτώσεις συγκλίνει ολικά.

Μειονεκτήματα: Το διάστημα I στο οποίο πρέπει να ανήκει η αρχική προσέγγιση x_0 ώστε η μέθοδος να συγκλίνει δεν είναι γνωστό εκ των προτέρω και μπορεί να είναι πολύ μικρό.

Χρήση της μεθόδου στην πράξη

Εκτός από τις περιπτώσεις που η μέθοδος του Νεύτονα συγκλίνει ολικά, αυτή χρησιμοποιείται στην πράξη σε συνδυασμό με κάποια βραδύτερη μέθοδο, όπως η μέθοδος της διχοτόμησης. Πρώτα χρησιμοποιούμε την βραδύτερη μέθοδο για να προσδιορίσουμε μια αρκετά καλή προσέγγιση της ρίζας και μετά με αυτήν την προσέγγιση ως αρχική τιμή εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να επιταχύνουμε την σύγκλιση.

Μέθοδος της Τέμνουσας

Μέθοδος του Νεύτωνα

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

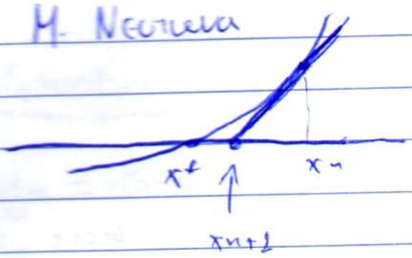
προσεγγίζοντας την $f'(x_n)$ με $\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

οδηγούμαστε στη μέθοδο της τέμνουσας

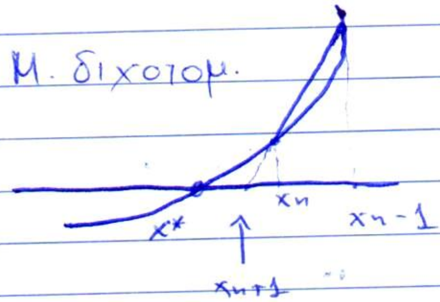
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

Η μέθοδος της τέμνουσας δεν μπορεί να γραφεί στην μορφή $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ με κατάλληλο φ, οπότε δεν είναι επαναληπτική μέθοδος. Απαιτεί 2 αρχικές προσεγγίσεις x_0 και x_1

Μ. Νεύτωνα



Μ. διχοτομ.



Κόστος ανά βήμα

Ένας υπολογισμός της f (δηλαδή υπολογισμός της $f(x_n)$ - η $f(x_{n-1})$ χρειάστηκε και στο προηγούμενο βήμα).

<u>Θεώρημα</u>: (τάξη σύγκλισης της μεθόδου της τέμνουσας)

Έστω x^* ρίζα μιας συνάρτησης f, και $(a,b) \subset \mathbb{R}$ με $x^* \in (a,b)$, $f \in C^2(a,b)$, $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) \neq 0$ τότε υπάρχει ένα διάστημα I που περιέχει το x^* τ.ω για $x_0, x \in I$, $x_0 \neq x$, η ακολουθία $(x_n) \in \mathbb{N}$ που δίνει η μέθοδος της τέμνουσας για την εξίσωση $f(x)=0$ συγκλίνει στο x^*. Η τάξη σύγκλισης είναι:

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$$

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x^2 = 1-x \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x - 1 = 0,\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

η $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = -\frac{2}{1-\sqrt{5}} = \dots = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Η μέθοδος της τέμνουσας χρησιμοποιείται στην πράξη συχνότερα από την μέθοδο του Νεύτωνα, επειδή απαιτεί γνώση μόνο της f και όχι της f'. Είναι βραδύτερη από τη μέθοδο του Νεύτωνα αλλά οικονομικότερη ανά βήμα.

<u>Υπόθεση</u>: Το κόστος υπολογισμού $f(x_n)$ και $f'(x_n)$ είναι το ίδιο

<u>Ισχυρισμός</u>: Η μέθοδος της τέμνουσας είναι συνολικά οικονομικότερη από τη μέθοδο του Νεύτωνα.

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω ότι η τάξη σύγκλισης μιας ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε ένα σημείο x^* είναι p.

<u>Ερώτημα</u>: Ποια είναι η τάξη της $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n = x_{2n}$, $n\in\mathbb{N}$

$$|x_{n+1} - x^*| \le C_1 |x_n - x^*|^p$$

$$|y_{n+1} - x^*| = |x_{2n+2} - x^*|$$

$$\le C_1 |x_{2n+1} - x^*|^p$$

$$\le C_1 \left(C_1 |x_{2n} - x^*|^p \right)^p$$

$$= C_1^{p+1} |\underbrace{x_{2n}}_{y_n} - x^*|^{p^2}$$

$$\Rightarrow |y_{n+1} - x^*| \le \underbrace{C_1^{p+1}}_{\tilde{C}} |y_n - x^*|^{p^2}$$

Άρα η τάξη είναι p^2

Τώρα $p^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2.62 > 2$

Συμπέρασμα: Η μέθοδος της τέμνουσας είναι σχετικά οικονομικότερη από τη μεθ. του Νεύτωνα.

Άσκηση 1.7

$y_n = n \sin \frac{\pi}{n}$

$Y_n = n \tan \frac{\pi}{n}$

$y_n = \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$

$Y_n = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$

$$\left.\begin{aligned} 2y_n &= 2\pi - \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ Y_n &= \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$2y_n + Y = 3\pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \Rightarrow$

$\frac{2y_n + Y_n}{3} = \pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$

Z_n (Προσέγγιση κατά Richardson)

Άσκηση 1.12

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\,dx \quad , n = 0,1,2,\ldots$$

α) Για $a>0$ η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα και μηδενική.

$$y_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+a}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n \cdot \overset{\leq 1}{x}}{x+a}\,dx$$

$$< \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\,dx = y_n$$

$\varphi(x) \geq f(x)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$

$$0 \leq y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\underbrace{x+a}_{\geq a}}\,dx$$

$$\leq \int_0^1 \frac{x^n}{a}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^1 x^n\,dx$$

$$0 \leq y_n \leq \frac{1}{(n+1)a} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow y_n \to 0$ για $n \to \infty$

β) $y_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} a^k \frac{(1+a)^{n-k} - a^{n-k}}{n-k} + (-a)^n \log \frac{1+a}{a}$

• $a >> 1$ •

Ευστάθεια?

• $y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a} dx = \int_a^{1+a} \frac{(z-a)^n}{z} dz$

$z = x + a$

• $P_n = \frac{|s_1| + |s_2| + \dots + |s_n|}{|s_n|}$

• Η $|y_n|$ είναι μικρή

• Για μεγάλο a, κάποιο από τους όρους:

$\binom{n}{k} a^k \frac{(1+a)^{n-k} - a^{n-k}}{n-k}$

είναι μεγάλο.

Άρα, αφού το τελικό αποτέλεσμα είναι μικρό, κάποιο από τα ενδιάμεσα αθροίσματα έχει μεγάλη απόλυτη τιμή. επομένως $\longrightarrow$ ασταθής.

γ) $y_{n-1} \rightsquigarrow y_n$

y_0 ; ευστάθεια;

$y_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{x+a} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+a} dx = \left[\log(x+a)\right]_{x=0}^{x=1}$

$= \log(a+1) - \log a = \log \frac{a+1}{a}$

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{a+n}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+a) - a x^{n-1}}{x+a}\,dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{n-1}\cancel{(x+a)}}{\cancel{x+a}}\,dx}_{=\frac{1}{n}} - \int_0^1 \frac{a x^{n-1}}{x+a}\,dx$$

$$= \frac{1}{n} - a \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+a}\,dx$$

$$= \frac{1}{n} - a \cdot y_{n-1}$$

$$\begin{cases} y_n = \frac{1}{n} - a y_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots \\ y_0 = \log \frac{a+1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_n = \frac{1}{n} - a \tilde{y}_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots \\ \tilde{y}_0 \end{cases}$$

ΤΟΤΕ $\quad y_n - \tilde{y}_n = -a(y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1})$

$$\Longrightarrow \quad y_n - \tilde{y}_n = (-a)^n (y_0 - \tilde{y}_0)$$

Επαγωγικά

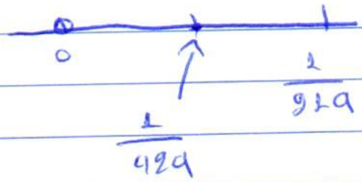
$$\Longrightarrow \quad |y_n - \tilde{y}_n| = a^n |y_0 - \tilde{y}_0|$$

Το a^n αυξάνει ταχύτατα με το n
άρα ο αλγόριθμος είναι αςταθής

δ) Ευσταθής αλγόριθμος για τον υπολογισμό του y_{10}.

$$y_n = \frac{1}{n} - a y_{n-1} \Rightarrow y_{n-1} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} - y_n\right)$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_{20} = 0 \\ \tilde{y}_{n-1} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} - \tilde{y}_n\right), \quad n = 20, 19, \dots, 11 \end{cases}$$



Άσκ. 1.13

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + (1-a)y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad a \in \mathbb{R}$$

Τι μπορώ να πω για την κατάσταση του προβλήματος;

μεταβολή δεδομένων του προβλήματος και κατά πόσο θα μεταβληθεί η λύση του (πχ συντελεστές)

→ για $a=0$, δεν υπάρχει λύση (χειρ. κατάσταση)

Έστω $a \neq 0$, θεωρούμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x} + \tilde{y} &= 1 + \varepsilon_1 \\ \tilde{x} + (1-a)\tilde{y} &= 0 + \varepsilon_2 \end{aligned}\right\}$$

Θέτουμε $u = \tilde{x} - x$ και $v = \tilde{y} - y$ και αφαιρούμε τις αντίστοιχες εξισώσεις, οπότε παίρνουμε

$$\left.\begin{aligned} u + v &= \varepsilon_1 \\ u + (1-a) u &= \varepsilon_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} u &= \varepsilon - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{a} \\ v &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{a} \end{aligned}\right\}$$

για $|a|$ μεγάλη, έχουμε $|u|$ και $|v|$ μικρά, οπότε η κατάσταση είναι καλή αντίθετα για $|a|$ μικρή, έχουμε $|u|$ και $|v|$ να είναι μεγάλα, οπότε η κατάσταση είναι κακή.

24/3/2017

Άσκηση 2.19

$p \geq 2$

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi(x^*) = x^*$

$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$

και $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$

$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad n \in \mathbb{N}_0$

ΝΔΟ για x_0 αρκετά κοντά στο x^*, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ συγκλίνει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(x^*) \quad (\neq 0)$$

$\Rightarrow$ τάξη σύγκλ. $= p$

$\varphi'(x^*) = 0 \Rightarrow$ Υπάρχει κλειστό διάστημα I, με μέσο το x^*, τ.ω.

$$\max_{x \in I} |\varphi'(x)| = L < 1$$

Επομένως η φ είναι συστολή στο I

Επίσης, για $x \in I$ έχουμε $\varphi(x) - x^* = \varphi(x) - \varphi(x^*)$

$$= (x - x^*)\varphi'(\xi)$$

με ξ μεταξύ x και x^*

Άρα

$$|\varphi(x) - x^*| = \underbrace{|\varphi'(\xi)|}_{\leq L \leq 1} |x - x^*| \leq |x - x^*|$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \in I$$

Συμπέρασμα: $\varphi : I \longrightarrow I$ και συστολή στο I

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα της συστολής η φ έχει στο I ένα σταθερό σημείο x^* και

$$x_n \longrightarrow x^*$$
$$n \longrightarrow \infty$$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \underset{\text{Taylor}}{=} \varphi(x^*) + (x_n - x^*)\cancel{\varphi'(x^*)}^{\,0} + \dots + \frac{(x_n - x^*)^{p-1}}{(p-1)!}\cancel{\varphi^{(p-1)}(x^*)}^{\,0}$$

$$+ \frac{(x_n - x^*)^p}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n)$$

με ξ_n μεταξύ x_n και x^*

Εφαρμογή

$$x_{n+1} = (x_n)^2 - 2x_n + 2, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$x_0 \in \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$$

$$x^* = 1 \quad \text{τάξη σύγκλισης}$$

$$\varphi(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$\varphi'(x) = 2x - 2 \longrightarrow \varphi'(1) = 0$$

$$\varphi''(x) = 2 \longrightarrow \varphi''(1) = 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow p = 2$$

Άσκηση 2.4

$$f : [1, \sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^3$$

νδο $x_n \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad n \longrightarrow \infty$

- f συνεχής
- $f(-1) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 < 0, \quad f(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^3 > 0$

o Η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε μια ρίζα της f στο $([-1, \sqrt{2}])$

: αλλά η μοναδική ρίζα της f είναι $x^* = \frac{1}{2}$, οπότε

$$x_n \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad n \longrightarrow \infty$$

Άσκηση 2.7

$$\varphi : [a,b] \longrightarrow [a,b], \quad \varphi \in C^1[a,b],$$

$$\max_{a \le x \le b} |\varphi'(x)| < 1$$

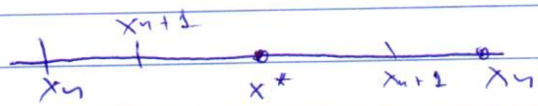
$x^* \in [a,b]$ σταθερό σημείο της φ

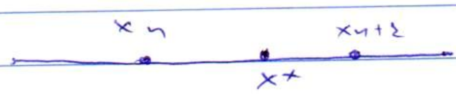
$x_0 \in [a,b], \quad x_0 = x^*$

$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}$

α) Αν για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει $\varphi'(x) > 0$, νδο η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει, μονότονα στο x^*

β) Αν για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει $\varphi'(x) < 0$, νδο το x^* περιέχεται μεταξύ x_{i-1} και x_i για κάθε i

α) 

β) 

Η ύπαρξη, η μοναδικότητα του x^* και το γεγονός ότι $\underset{n \to \infty}{x_n \longrightarrow x^*}$ έπονται από το θεώρημα της συστολής.

Τώρα

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi_n)(x_n - x^*)$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} (x_{n+1} - x^*)(x_n - x^*) = \varphi'(\xi_n)(x_n - x^*)^2$$

(*)

α) $\rightsquigarrow$ $(x_{n+1} - x^*)(x_n - x^*) > 0 \Rightarrow$

Τα $x_n - x^*$ και $x_{n+1} - x^*$ είναι ομόσημα, επίσης $|x_{n+1} - x^*| = \underbrace{|\varphi'(\xi_n)|}_{<1} \underbrace{|x_n - x^*|}_{\neq 0} < |x_n - x^*|$

β) (*) $\rightsquigarrow$ $(x_{n+1} - x^*)(x_n - x^*) < 0$

Το x_n^* περιέχεται μεταξύ x_n & x_{n+1}

- $x_n = \frac{1}{n} + x^*$ γνήσια φθίνουσα, συγκλίνει στο x^*
- $x_n = -\frac{1}{n} + x^*$ " αύξουσα, "
- $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + x^*$ ασύρεσα

Άσκηση 9.8 $x_0 \in [0,1]$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{\frac{x_n}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Νδο

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^* \in [0,1]$$

Απόδειξη

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$$

$$(x_{n+1} = \varphi(x_n))$$

- $\varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}$

$$\Rightarrow |\varphi'(x)| = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{e^{\frac{x}{2}}}_{\nearrow \text{ αύξουσα}} \leq \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{4} < 1$$

$\Rightarrow \max\limits_{0 \le x \le 1} |\varphi'(x)| \le \frac{\sqrt{e}}{4} < 1$

$\Rightarrow$ η φ είναι συστολή στο $[0,1]$

Ισχυρισμός: $\varphi[0,1] \longrightarrow [0,1]$

Αφού η φ είναι αύξουσα, για $0 \le x \le 1$ ισχύει

$$\underbrace{\varphi(0)}_{=\frac{1}{2}} \le \varphi(x) \le \underbrace{\varphi(1)}_{=\frac{\sqrt{e}}{2}<1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le \varphi(x) \le \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$0 \le \varphi(x) \le 1$$

Αρα $\varphi(x) \in [0,1]$

Σύμφωνα με το Θεώρημα της συστολής η φ έχει στο $[0,1]$ ακριβώς ένα σταθερό σημείο x^* και $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^*$

Άσκηση 2.9

$x_0 \in [0,1]$

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n})$$

νδο $x_n \to x^* \in [0,1]$ για $n \to \infty$

Απόδειξη

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}(2 + x - e^x) \qquad x \in [0,1]$$

$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(1-e^x) \leq 0$ για $x \in [0,1]$

$\Rightarrow$ Η φ είναι φθίνουσα

για $x \in [0,1]$ έχουμε

$$\varphi(1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(0)$$

$$0 \leq \frac{3-e}{3} = \varphi(1) \qquad \varphi(0) = \frac{1}{3} \leq 1$$

$\Rightarrow \forall x \in [0,1] \quad 0 \leq \varphi(x) \leq 1$

Άρα $\varphi : [0,1] \to [0,1]$

$\varphi''(x) = -\frac{1}{3}e^x < 0 \Rightarrow \varphi'$ φθίνουσα

$\Rightarrow \forall x \in [0,1] \quad \varphi'(1) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(0)$

$$\varphi'(1) = \frac{1-e}{3} \qquad \varphi'(0) = 0$$

$\Rightarrow \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |\varphi'(x)| = \max\left(\left|\frac{1-e}{3}\right|, 0\right) = \frac{e-1}{3} < 1$

$\Rightarrow$ Η φ είναι συστολή στο $[0,1]$

Άρα το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα της συστολής.

(

$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(1-e^x)$

$\Rightarrow |\varphi'(x)| = \frac{1}{3}|1-e^x| = \frac{1}{3}(e^x - 1)$

$\Rightarrow \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |\varphi'(x)| = \frac{1}{3}(e^1 - 1)$

$= \frac{e-1}{3}$

)

Άσκηση 9.10 $\quad x_0 \in [0,1]$

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}\left[3 + 4(x_n)^2 - e^{x_n}\right]$$

$$x_n \longrightarrow x^* \in [0,1]$$

Ναι

$$|x_n - x^*| \leq \frac{a^n}{1-a} |x_1 - x_0|, \ n \in \mathbb{N}$$

$$\text{με} \quad a = \frac{8-e}{6}$$

Απόδειξη:

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{6}(3 + 4x^2 - e^x)$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{6}(8x - e^x)$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{6}(8 - e^x) > 0$$

$\Rightarrow$ Η φ' είναι γνήσια αύξουσα επομένως, για $x \in [0,1]$ έχουμε

$$\underset{\displaystyle -\frac{1}{6}}{\underset{\shortparallel}{\varphi'(0)}} \leq \varphi'(x) \leq \underset{\displaystyle \frac{8-e}{6}}{\underset{\shortparallel}{\varphi'(1)}}$$

$$\Rightarrow \max|\varphi'(x)| = \max\left(\left|\frac{8-e}{6}\right|, \left|-\frac{1}{6}\right|\right) = \frac{8-e}{6} = L_a < 1$$

Μένει να αποδείξουμε ότι η $\varphi:[0,1] \longrightarrow [0,1]$

* Η $3+4x^2$ είναι αύξουσα ;

Η $-e^x$ είναι φθίνουσα

οπότε

$$\max_{0 \le x \le 1} \varphi(x) \le \max_{0 \le x \le 1} \left(\frac{1}{6}(3+4+x^2) \right)$$

$$+ \max_{0 \le x \le} \left(-\frac{1}{6} \cdot e^x \right)$$

$$= \frac{1}{6}(3+4) + \frac{1}{6}(-e^0) = 1 \le 1$$

Επίσης

$$\min_{0 \le x \le 1} \varphi(x) \geq \min_{0 \le x \le 1} \left(\frac{1}{6}(3+4x^2) \right)$$

$$+ \min_{0 \le x \le 1} \left(-\frac{1}{6} e^x \right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(3+4 \cdot 0^2\right) + \left(-\frac{1}{6} e^1\right)$$

$$= \frac{3}{6} - \frac{e}{6} = \frac{3-e}{6} > 0$$

Παρατήρηση

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

Ισχυρισμός: $\max_{a \le x \le b} f(x) \le \max_{a \le x \le b} \varphi(x) + \max_{a \le x \le b} \psi(x)$

Και

$$\min_{a \le x \le b} f(x) \geq \min_{a \le x \le b} \varphi(x) + \max_{a \le x \le b} \varphi(x)$$

$$\rightarrow \max_{a \le x \le b} f(x) = f(\tilde{x}) = \varphi(\hat{x}) + \psi(\hat{x})$$

$$\le \max_{a \le x \le b} \varphi(x) + \max_{a \le x \le b} \psi(x)$$

πχ $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = 1 - x$, $x \in [0,1]$ $f(x) = 1$

28/3/17

Άσκηση 2.12

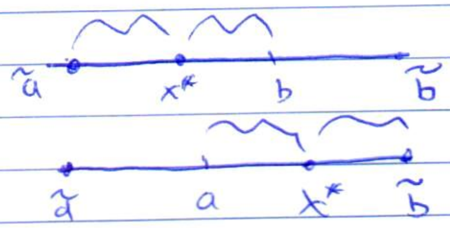
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη

$x^* \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\varphi(x^*) = x^*$ και $\varphi'(x^*) = 0$

νδο: υπάρχει $[a,b]$ με μέσο το x^* τ.ω. η φ συστολή στο $[a,b]$ και $\varphi : [a,b] \to [a,b]$

Απόδειξη

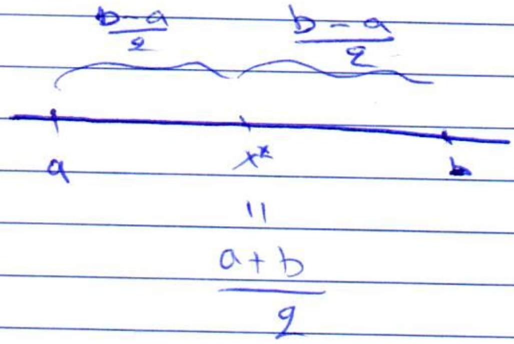
Αφού $\varphi'(x^*) = 0$ και η φ' είναι συνεχής, υπάρχει ένα διάστημα $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ τ.ω. $\tilde{a} < x^* < \tilde{b}$ και $\max_{\tilde{a} \le x \le \tilde{b}} |\varphi'(x)| < 1$



Επομένως υπάρχει ένα διάστημα $[a,b]$ υποδιάστημα του $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ με μέσο το x^*, και $\max_{a \le x \le b} |\varphi'(x)| = L < 1$ (1)

Επομένως η φ είναι συστολή στο $[a,b]$

Τώρα:



(2) $x \in [a,b] \Leftrightarrow |x - x^*| \le \frac{b-a}{2}$

Έστω ότι $x \in [a,b]$ Τότε

$$\varphi(x) - x^* = \varphi(x) - \varphi(x^*)$$

$$\Rightarrow |\varphi(x) - x^*| = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| \underset{(1)}{\le} L|x - x^*| \le |x - x^*| \le \frac{b-a}{2}$$

Τελικά $|\varphi(x) - x^*| \le \frac{b-a}{2}$

Σύμφωνα με την (2) έχουμε ότι το $\varphi(x) \in [a,b]$

Συμπέρασμα: $\varphi : [a,b] \to [a,b]$