1. Αριθμητική Κινητής Υποδιαστολής και Σφάλματα Στρογγύλευσης

Ασκήσεις

1.2 Βρείτε κατάλληλους τρόπους υπολογισμού των παρακάτω παραστάσεων, έτσι ώστε να μην χάνεται ακρίβεια, όταν οι πράξεις γίνονται με αριθμητική κινητής υποδιαστολής και πεπερασμένη ακρίβεια.

α) $1 - \cos x$, για μικρό $|x|$. (Χωρίς ανάπτυγμα Taylor.)

β) e^{x-y}, για μεγάλα θετικά x, y.

γ) $\log x - \log y$, για μεγάλα θετικά x, y.

δ) $\sin(\alpha + x) - \sin \alpha$, για μικρό $|x|$.

ε) $\arctan x - \arctan y$, για μεγάλα θετικά x, y.

1.3 Θεωρήστε τη δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$, όπου $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha^2 \gg \beta$. Δώστε έναν ευσταθή αλγόριθμο για τον υπολογισμό των ριζών της.

1.4 Θεωρήστε την τριτοβάθμια εξίσωση $x^3 + 3px + 2q = 0$, όπου p, q πραγματικοί αριθμοί και $p^3 + q^2 > 0$.

α) Αποδείξτε ότι έχει μόνο μία πραγματική ρίζα ρ, που μάλιστα δίνεται από τον *τύπο του Cardano*:

$$\rho = u - v, \quad \text{όπου} \quad u = \left(\sqrt{p^3 + q^2} - q\right)^{1/3}, \quad v = \left(\sqrt{p^3 + q^2} + q\right)^{1/3}.$$

β) Αν $p^3 \gg q^2$, αποδείξτε ότι ο τύπος του Cardano θα έχει προβλήματα ευστάθειας στους υπολογισμούς.

γ) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$, δώστε έναν ευσταθή τρόπο υπολογισμού της ρ.

[Σημειώνουμε ότι ο δευτεροβάθμιος όρος σε μια γενική τριτοβάθμια εξίσωση $y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ μπορεί να απαλειφθεί με την αντικατάσταση $x = y + \alpha/3$.]

1.6 α) Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$y_k = 2^k \tan\frac{\pi}{2^k}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο π. (Γεωμετρική ερμηνεία στον μοναδιαίο κύκλο;)

β) Αποδείξτε ότι η y_k παράγεται αναδρομικά από τον αλγόριθμο

$$\begin{cases} y_2 = 4 \\ y_{k+1} = 2^{2k+1}\,\dfrac{\sqrt{1+(2^{-k}y_k)^2}-1}{y_k}, \quad k = 2, 3, \dots . \end{cases}$$

γ) Αν κάνουμε πράξεις με αριθμητική κινητής υποδιαστολής με πεπερασμένη ακρίβεια, παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος του β) είναι ασταθής. Ποια είναι η αιτία της αστάθειας;

δ) Βρείτε έναν ευσταθή αλγόριθμο (που απαιτεί μόνο τις τέσσερεις πράξεις της αριθμητικής και εξαγωγή τετραγωνικών ριζών) για τον υπολογισμό των y_k.

1.7 α) Έστω, για $n \geq 3$, $y_n := n \sin\frac{\pi}{n}$ και $Y_n := n \tan\frac{\pi}{n}$, αντίστοιχα, η ημιπερίμετρος του κανονικού $n-$γώνου που είναι εγγεγραμμένο, αντίστοιχα περιγεγραμμένο, στον μοναδιαίο κύκλο. Αποδείξτε ότι

$$y_n = \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big), \quad Y_n = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$$

και οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι ο γραμμικός συνδυασμός $z_n = \frac{1}{3}(2y_n + Y_n)$ μας δίνει προσέγγιση του π με ακρίβεια $O(\frac{1}{n^4})$. Επιβεβαιώστε την αυξημένη ακρίβεια του z_n χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά δεδομένα του Πίνακα 1.11.

β) Αποδείξτε με ανάλογο τρόπο ότι

$$r_n := \frac{1}{3}(4y_{2n} - y_n) = \pi - \frac{\pi^5}{480n^4} + O\Big(\frac{1}{n^6}\Big),$$

και επιβεβαιώστε την τάξη ακρίβειας $O(\frac{1}{n^4})$ του r_n ως προσέγγισης του π χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 1.11. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε προσεγγίσεις του π με ακρίβεια $O(\frac{1}{n^6})$; (Οι βελτιωμένες προσεγγίσεις z_n, r_n είναι παραδείγματα μιας γενικότερης διαδικασίας, της λεγόμενης “προέκτασης κατά Richardson” που χρησιμοποιείται συχνά στην αριθμητική ανάλυση.)

1.12 Θέλουμε να υπολογίσουμε, για δεδομένη (μεγάλη) σταθερά $\alpha > 1$, τους όρους της ακολουθίας

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+\alpha}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

α) Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha > 0$ η ακολουθία (y_n) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

β) Αποδείξτε ότι, για $n \geq 1$,

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n}{k}\alpha^k \, \frac{(1+\alpha)^{n-k}-\alpha^{n-k}}{n-k} + (-\alpha)^n \, \log\frac{1+\alpha}{\alpha}\,.$$

Είναι ο τρόπος αυτός υπολογισμού του y_n ευσταθής;

γ) Προσδιορίστε αναδρομικό τύπο για τον υπολογισμό του y_n συναρτήσει του y_{n-1} και υπολογίστε αναλυτικά το y_0. Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμος που προκύπτει δεν είναι ευσταθής.

δ) Δώστε έναν ευσταθή αλγόριθμο για τον υπολογισμό π.χ. του y_{10}.

1.13 Διερευνήστε την κατάσταση του προβλήματος της επίλυσης του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} x + \qquad\quad y &= 1\\ x + (1-\alpha)y &= 0\end{aligned}\right\}$$

για πραγματικές τιμές της παραμέτρου α.

1.15 (Οι νυοστές ρίζες της μονάδας.) Για έναν φυσικό αριθμό ν, βεβαιωθείτε ότι οι ν ρίζες της εξίσωσης $z^\nu = 1$ είναι

$$z_k = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} k}{\nu}}, \quad k = 0,1,2,\dots,\nu-1,$$

με i τη φανταστική μονάδα, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Βεβαιωθείτε επίσης ότι, για $\nu \geq 3$, τα σημεία $z_0 = 1, z_1, \dots, z_{\nu-1}$ είναι οι κορυφές του εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων στο μιγαδικό επίπεδο κανονικού $\nu-$γώνου.

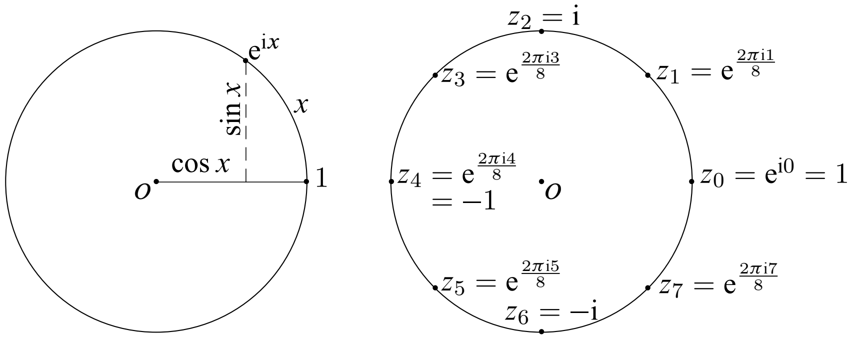
Εφαρμογή (βλ. την (1.22)):

$$\begin{aligned}&(x-2)^6 = 10^{-6} \iff \big[10(x-2)\big]^6 = 1 \iff\\ &10(x_k-2) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} k}{6}},\ k=0,1,\dots,5 \iff x_k = 2 + \frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} k}{6}},\ k = 0,1,\dots,5.\end{aligned}$$

[*Υπόδειξη*: Σύμφωνα με τον τύπο του Euler, για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$, συνεπώς το $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ ισούται με τη μονάδα, αν και μόνο αν το x είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Ιδιαίτερα,

$$(z_k)^\nu = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k} = 1, \quad k = 0,1,2,\dots,\nu-1.$$

Ποιο σημείο στον μοναδιαίο κύκλο είναι το $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$; Βλ. το Σχήμα 1.3.]



Σχήμα 1.3: Γεωμετρική επεξήγηση του e^{ix}, αριστερά, και των νυοστών ριζών της μονάδας, για $\nu = 8$, δεξιά, στο μιγαδικό επίπεδο.