3. 5/12/17

Μέθοδοι των Runge-Kutta

Προκαταρκτικά: Συμβολισμοί και παραδείγματα

Θα κατασκευάσουμε τις μεθόδους στη βαθμωτή περίπτωση. Η γενίκευση για συστήματα ΣΔΕ είναι προφανής.

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \; a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Έστω $q \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε παραμέτρους

τ_i, $i=1,\dots,q$ (κατά κανόνα $\tau_i \in [0,1]$)

a_{ij}, $i,j=1,\dots,q$ και b_i, $i=1,\dots,q$.

Όλες οι παράμετροι είναι πραγματικοί αριθμοί. Κάθε τέτοιο σύνολο παραμέτρων περιγράφει μια μέθοδο Runge-Kutta.

Συνήθως γράφουμε αυτές τις παραμέτρους σε μορφή μητρώου.

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array} = \begin{array}{c|c} A & \tau \\ b^T & \end{array}$$

(Butcher)

Αυτές οι παράμετροι περιγράφουν $q+1$ τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης:

$$\int_0^{\tau_i} \varphi(s)\,ds \approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\,\varphi(\tau_j), \quad i=1,\dots,q$$

και

$$\int_0^1 \varphi(s)\,ds \approx \sum_{i=1}^{q} b_i\,\varphi(\tau_i)$$

Δηλαδή, οι κόμβοι σε όλους αυτούς τους τύπους είναι ίδιοι, $\tau_1,\dots,\tau_q$. Τα βάρη για την προσέγγιση ολοκληρωμάτων στο $[0,\tau_i]$ είναι $a_{i1},\dots,a_{iq}$, ενώ

Τα αντίστοιχα βάρη για το διάστημα $[0,1]$ είναι $b_1, \dots, b_q$.

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$.

Ζητούνται προσεγγίσεις y^n των $y(t^n)$.

<u>Ερώτημα</u>: Πως από την y^n προκύπτει η y^{n+1};

Θέτουμε:

$$t^{n,i} = t^n + \tau_i h, \quad i = 1, \dots, q.$$

Ολοκληρώνουμε τη ΔΕ $y' = f(t,y)$ στο διάστημα $[t^n, t^{n,i}]$ και παίρνουμε

$$y(t^{n,i}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t, y(t))\, dt$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $t = t^n + hs$ έχουμε

$$y(t^{n,i}) - y(t^n) = \int_0^{\tau_i} f(t^n + hs, y(t^n + hs)) \cdot h\, ds$$

$$\approx h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(\underbrace{t^n + h\tau_j}_{t^{n,j}}, y(\underbrace{t^n + h\tau_j}_{t^{n,j}}))$$

$$\Rightarrow y(t^{n,i}) - y(t^n) \approx h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y(t^{n,j})), \quad i = 1, \dots, q$$

Αντικαθιστούμε το $y(t^n)$ με y^n, τα $y(t^{n,i})$ με $y^{n,i}$ και το $\approx$ με $=$, οπότε παίρνουμε,

$$(*) \quad y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q$$

Αντίστοιχα, ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[t^n, t^{n+1}]$ παίρνουμε

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\, dt$$

$$\underset{t = t^n + hs}{=} h \int_0^1 f(t^n + hs, y(t^n, hs))\, ds$$

Άρα,

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i \, f(\overset{t^{n,i}}{t^n + h\tau_i}, \overset{\approx y^{n,i}}{y(t^n + h\tau_i)})$$

$$(*)\begin{cases} y^{n,i} = y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) & (\text{από πριν η } (*)) \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i \, f(t^{n,i}, y^{n,i}) & (2^{\eta} \text{ σχέση}) \end{cases}$$

Το $(*)$ είναι ένα σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους, τους $y^{n,1}, \dots, y^{n,q}$. Βρίσκουμε πρώτα τα $y^{n,1}, \dots, y^{n,q}$, τα αντικαθιστούμε στη 2^{η} σχέση και βρίσκουμε το y^{n+1}.

Ειδική περίπτωση: Ο A είναι γνήσια κάτω τριγωνικός, δηλαδή $a_{ij} = 0$ για $j \geq i$

Τότε το $(*)$ γράφεται ως εξής:

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + h \cdot a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ \vdots \\ y^{n,q} = y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj} \, f(t^{n,j}, y^{n,j}) \end{cases}$$

Τα $y^{n,1}, \dots, y^{n,q}$ υπολογίζονται αναδρομικά χωρίς να χρειαστεί να λύσουμε κάποια εξίσωση ή κάποιο σύστημα.

Τέτοιες μέθοδοι λέγονται άμεσοι. Όλες οι άλλες λέγονται πεπλεγμένες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- τάξη μεθόδου $p \geq 1 \Leftrightarrow b_1 + b_2 + \dots + b_q = 1$
- Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην πράξη έχουν την ιδιότητα $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{iq} = \tau_i \quad , i = 1, \dots, q$

Μόνο με τέτοιες μεθόδους θα ασχοληθούμε.

Παραδείγματα

1. $q=1$

άμεση μέθοδος

$$
\begin{array}{c|c}
0 & 0 \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

Αυτό το μητρώο περιγράφει την (άμεση) μέθοδο του Euler.
Πράγματι,

$$
\begin{cases}
y^{n,1} = y^n \\
y^{n+1} = y^n + hf(\overbrace{t^{n,1}}^{t^n}, \overbrace{y^{n,1}}^{y^n})
\end{cases}
$$

$$\Rightarrow \quad y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$$

2. $q=1$

$$
\begin{array}{c|c}
1 & 1 \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

Αυτό το μητρώο περιγράφει τη πεπλεγμένη μέθοδο του Euler
Πράγματι, έχουμε

$$
\begin{cases}
y^{n,1} = y^n + h\cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\
y^{n+1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1})
\end{cases}
$$

Τα δεξιά μέλη ταυτίζονται, οπότε και τα αριστερά είναι ίδια.
Επομένως,

$y^{n,1} = y^{n+1}$ και η δεύτερη σχέση δίνει

$$y^{n+1} = y^n + hf(\underbrace{t^{n,1}}_{= t^n + h\cdot 1 = t^{n+1}}, y^{n+1})$$

Συνολικά:

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$$

7/12/17

Μέθοδοι των Runge-Kutta

$q \in \mathbb{N}$ πλήθος σταδίων

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array} = \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & , a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$y^0 = y_0$

$$\begin{cases} (*)\ y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q, \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

$t^{n,i} = t^n + \tau_i h$

Παραδείγματα

3.

$q = 1$

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & \end{array}$$

Ισχυρισμός: Αυτό το μητρώο περιγράφει τη μέθοδο του μέσου.

Πράγματι, $t^{n,1} = t^n + \frac{h}{2}$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) \end{cases}$$

Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} h \cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) = 2y^{n,1} - 2y^n \\ h f(t^{n,1}, y^{n,1}) = y^{n+1} - y^n \end{array}\right\} \Rightarrow 2y^{n,1} - 2y^n = y^{n+1} - y^n \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2y^{n,1} = y^{n+1} + y^n \Rightarrow \boxed{y^{n,1} = \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})}$

Άρα, αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n, y^{n+1})\right)$$

<u>Γενικά</u>: Για κάθε q η τάξη ακρίβειας μιας μεθόδου RK με q στάδια είναι το πολύ 2q. Μάλιστα, για q υπάρχει ακριβώς μια μέθοδος RK με q στάδια και τάξη ακρίβειας $p = 2q$.

Για $q=1$ η μέθοδος με τάξη $p=2$ είναι η μέθοδος του μέσου.

4.

$q=2$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

<u>Ισχυρισμός</u>: Αυτό το μητρώο περιγράφει τη μέθοδο του τραπεζίου.

Πράγματι,

$$t^{n,1} = t^n, \quad t^{n,2} = t^n + h = t^{n+1}$$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + \frac{1}{2} h \left[f(t^{n,1}, y^{n,1}) + f(t^{n,2}, y^{n,2}) \right] \\ y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} \left[f(t^{n,1}, y^{n,1}) + f(t^{n,2}, y^{n,2}) \right] \end{cases}$$

Άρα

$y^{n,2} = y^{n+1}$

Αντικαθιστώντας στην <u>τελευταία σχέση</u> παίρνουμε:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} \left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1}) \right]$$

μέθοδος του τραπεζίου

Τάξη ακρίβειας: $p = 2$.

5. $q=2$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$$

άμεση μέθοδος

$$t^{n,1} = t^n \ , \ t^{n,2} = t^n + \frac{1}{2}\cdot h$$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + 1\cdot h\cdot f(t^{n,2}, y^{n,2}) \end{cases}$$

Άρα

$$y^{n+1} = y^n + h\cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \ y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n)\right)$$

Βελτιωμένη μέθοδος του Euler

ή

Άμεση μέθοδος του μέσου

βελτίωση: $\boxed{p=2}$

6. (στο βιβλίο έχουν άλλη αρίθμηση, από εδώ και κάτω)

$q=2$

Η μέθοδος

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\mu & \frac{1}{2}-\mu \\ \frac{1}{4}+\mu & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}+\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

με $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$ είναι η μόνη μέθοδος με $q=2$ και $p=4$. Λέγεται μέθοδος Runge-Kutta-Gauss-Legendre δύο σημείων (σταδίων)

Εξήγηση:

Το $\frac{1}{2}-\mu$, $\frac{1}{2}+\mu$ και $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ είναι οι κόμβοι και τα βάρη του τύπου του Gauss στο διάστημα $[0,1]$ με συνάρτηση βάρους $w(x)=1$, $x\in[0,1]$

(Legendre)

Επιλυσιμότητα

• Αν η μέθοδος είναι άμεση, τότε οι προσεγγίσεις είναι προφανώς καλά ορισμένες

Ερώτημα: Τι γίνεται στην περίπτωση πεπλεγμένων μεθόδων;
Χρειάζονται συνθήκες!

Υπόθεση:

$\exists L \geq 0 \quad \forall t \in [a,b]$

$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Ύπαρξη και μοναδικότητα προσεγγίσεων)

Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz και $h < \frac{1}{\gamma}$, όπου

$$\gamma = L \cdot \max_{1 \leq i \leq q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|.$$

Τότε το σύστημα ⊛ έχει ακριβώς μια λύση $y^{n,1}, \ldots, y^{n,q}$.

Απόδειξη:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$,

$$F_i(x) = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, x_j), \quad i = 1, \ldots, q$$

με $x = (x_1, \ldots, x_q)^T \in \mathbb{R}^q$ και $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_q(x))^T$.

Τότε το ⊛ γράφεται στη μορφή

$$\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix}\right)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η F έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο (στο $\mathbb{R}^q$).
Αρκεί να αποδείξουμε ότι η F είναι συστολή.

Έχουμε, για $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^q$ και $i=1,\dots,q$,

$$F_i(x) - F_i(\tilde{x}) = h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \left[f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j) \right]$$

$\Rightarrow$

$$|F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \le h \cdot \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \cdot \underbrace{|f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)|}_{\le L |x_j - \tilde{x}_j|}$$

$$\Rightarrow \quad |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \le \left(h \cdot \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\right) \max_{1 \le l \le q} |x_l - \tilde{x}_l|$$

$$\le h \cdot \rho \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty$$

Ιδιαίτερα

$$\underbrace{\max_{1 \le i \le q} |F_i(x) - F_i(\tilde{x})|}_{\|F(x) - F(\tilde{x})\|_\infty} \le \rho \cdot h \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty$$

Άρα

$$\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^q \quad \|F(x) - F(\tilde{x})\|_\infty \le \underbrace{\rho \cdot h}_{<1} \|x - \tilde{x}\|_\infty$$

$\Rightarrow$ F συστολή

$\Rightarrow$ η F έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

Ευστάθεια

Υπόθεση:

$\exists L \ge 0 \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

(+) $\quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|$

Ορισμός: (Ευστάθεια μεθόδων RK)

Μια μέθοδος RK λέγεται ευσταθής αν για κάθε πρόβλημα αρχικών τιμών με f που ικανοποιεί τη (+) και προσεγγίσεις y^n, z^n, ① $$\begin{cases} y^0 \in \mathbb{R} \\ y^{n,i} = y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad , i=1,\dots,q \\ y^{n+1} = y^n + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

② $$\begin{cases} z^0 \in \mathbb{R} \\ z^{n,i} = z^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}) \quad , i=1,\dots,q \\ z^{n+1} = z^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) \end{cases}$$

ισχύει

$$\max_{0 \le n \le N}$$

με μια σταθερά C ανεξάρτητη του h και ανεξάρτητη των y^n, z^n.

Πρόταση: Όλες οι μέθοδοι RK είναι (με αυτή την έννοια) ευσταθείς.
Μάλιστα με y^n που ικανοποιούν την ① και
z^n που ικανοποιούν τη: (②)

$$z^0 \in \mathbb{R}$$

$$z^{n,i} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}) \quad i=1,\dots,q$$

$$z^{n+1} = z^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) + \varrho^n$$

όπου $\varrho^0, \dots, \varrho^{N-1}$ δεδομένοι αριθμοί, ισχύει:

③ $$\max_{1 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C_1 |y^0 - z^0| + \frac{C_2}{h} \max_{0 \le n \le N-1} |\varrho^n|$$

με σταθερές C_1, C_2 ανεξάρτητες του h, των y^n, z^n και ϱ^n.

Απόδειξη: (την άλλη φορά)

Πόρισμα:

Για $\rho^0 = \dots = \rho^{N-1} = 0$ η ③ δίνει $\max\limits_{1 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C_1 |y^0 - z^0|$, δηλαδή ευστάθεια της μεθόδου RK.

8/12/17

Ευστάθεια

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

<u>Υπόθεση</u>: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz

$\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$

<u>Πρόταση</u>

Έστω

$$(1) \begin{cases} y^0 \in \mathbb{R} \\ y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i=1,\dots,q, \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}), \quad n=0,\dots,N-1 \end{cases}$$

<u>και</u>

$$(2) \begin{cases} z^0 \in \mathbb{R} \\ z^{n,i} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}), \quad i=1,\dots,q. \\ z^{n+1} = z^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) + \rho^n, \quad n=0,\dots,N-1, \end{cases}$$

με $\rho^0, \dots, \rho^{N-1}$ δεδομένους αριθμούς.

Τότε, <u>για αρκετά μικρό h</u>, ισχύει

$$(3) \quad \max_{1 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C_1 |y_0 - z_0| + \frac{C_2}{h} \max_{0 \le n \le N-1} |\rho^n|$$

με σταθερές C_1, C_2 ανεξάρτητες των h, y^n, z^n και ρ^n

Απόδειξη

Αφαιρούμε κατά μέλη τις μεσαίες σχέσεις των ① και ② και παίρνουμε

$$y^{n,i} - z^{n,i} = (y^n - z^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij}[f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})]$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| = |y^n - z^n| + h \cdot \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \cdot \underbrace{|f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})|}_{\leq L|y^{n,j} - z^{n,j}|}$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \leq |y^n - z^n| + h \underbrace{\left(L \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\right)}_{\gamma} \max_{1 \leq l \leq q} |y^{n,l} - z^{n,l}|$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \leq |y^n - z^n| + \gamma \cdot h \max_{1 \leq l \leq q} |y^{n,l} - z^{n,l}|$$

$$\Rightarrow \max_{1 \leq i \leq q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \leq |y^n - z^n| + \gamma h \max_{1 \leq l \leq q} |y^{n,l} - z^{n,l}|$$

$$\Rightarrow (1 - \gamma h) \max_{1 \leq i \leq q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \leq |y^n - z^n|$$

Επομένως, αν $h \leq h_0 < \frac{1}{\gamma}$ θα έχουμε $\max_{1 \leq i \leq q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \leq \frac{1}{1 - \gamma h} |y^n - z^n|$

$\leq \frac{1}{1 - \gamma h_0} = C$

Συμπέρασμα:

④ $\max_{1 \leq i \leq q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \leq C |y^n - z^n|$

Τώρα αφαιρώντας κατά μέλη τις τρίτες σχέσεις των ① και ② έχουμε

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i \, (f(t^{n,i}, y^{n,i}) - f(t^{n,i}, z^{n,i}))$$

Άρα

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| = |y^n - z^n| + h \cdot \sum_{i=1}^{q} |b_i| \cdot |[f(t^{n,i}, y^{n,i}) - f(t^{n,i}, z^{n,i})]| + \rho^n$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n| + h \sum_{i=1}^{q} |b_i| L \underbrace{|y^{n,i} - z^{n,i}|}_{\leq C|y^n - z^n| \text{ ④}} + \rho^n$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1 + h \underbrace{L \sum_{i=1}^{q} |b_i|}_{= C'}) |y^n - z^n| + |\rho^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1 + C'h) |y^n - z^n| + \underbrace{\max_{0 \leq l \leq N-1} |\rho^l|}_{K}$$

Σύμφωνα με το λήμμα 2.1, έχουμε

$$\max_{1\le n\le N} |y^n - z^n| \le \overbrace{e^{c'(b-a)}}^{C_1} |y^0 - z^0| + \overbrace{\frac{e^{c'(b-a)}-1}{c\,h}}^{C_2} \max_{0\le \ell\le N-1} |\rho^\ell|$$

Αυτή είναι η ③

Τάξη ακρίβειας και σύγκλιση

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αρκετά ομαλή. Τότε και η λύση y είναι αρκετά ομαλή.

Τοπικό σφάλμα (ή σφάλμα συνέπειας) (δ_n)

$$⑤ \begin{cases} J^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t^n, J^{n,j}), \quad i=1,\dots,q \\ \delta_n = \left[y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i\, f(t^{n,i}, J^{n,i})\right] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

(p) → Τάξη ακρίβειας της μεθόδου λέγεται ο μεγαλύτερος ακέραιος p, τ.ω να υπάρχει μια σταθερά $\tilde{C}$ ανεξάρτητη του h (που εξαρτάται από την f και την y), τ.ω

$$⑥ \quad \max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le \tilde{C}\, h^{p+1}$$

Αν $p \ge 1$ η μέθοδος λέγεται συνεπής. Μάλιστα, η μέθοδος είναι συνεπής, αν και μόνο αν

$$b_1 + \dots + b_q = 1 \quad \text{(Άσκηση 3.12)}$$

Θεώρημα (εκτίμηση σφάλματος)

Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz και ότι το πρόβλημα έχει μια αρκετά ομαλή λύση.
Θεωρούμε τη μέθοδο RK ① και υποθέτουμε ότι η τάξη ακρίβειας της είναι p. Τότε, για αρκετά μικρό h, ισχύει:

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \le \hat{C}\, h^p$$ με κατάλληλη σταθερά $\hat{C}$ ανεξάρτητη του h.

Απόδειξη

$$⑦ \begin{cases} \mathcal{J}^{n,i} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t^{n,i}, \mathcal{J}^{n,i}), \quad i=1,\dots,q, \\ y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i\, f(t^{n,i}, \mathcal{J}^{n,i}) - \delta^n \end{cases}$$

Από τις ⑤ και ⑦ προκύπτει, σύμφωνα με την ③

$$\max_{1\le n\le N} |y^n - y(t^n)| \le C_1 \, |\cancel{y^0 - y(a)}|^{0} + \frac{C_2}{h} \max_{0\le \ell\le N-1} |\delta^\ell|$$

$$\underset{⑥}{\le} \tilde{C}\, h^{p+1}$$

$$\Rightarrow \max_{1\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \le \frac{C_2}{\cancel{h}} \tilde{C}\, h^{p+\cancel{1}}$$

$$= \underbrace{C_2 \tilde{C}}_{\hat{C}}\, h^p$$

Προσδιορισμός της τάξης ακρίβειας p μεθόδων RK

Γενικά σχόλια:

- $p \le 2q$ για κάθε μέθοδο RK με q ενδιάμεσα στάδια
  $p \le q$ για άμεσες μεθόδους.

- Ακριβέστερα άνω φράγματα της p προκύπτουν εύκολα με τον τρόπο που θα γνωρίσουμε αργότερα, όταν θα αναφερθούμε στη συνάρτηση ευστάθειας r μιας μεθόδου RK.

- $p \ge 1 \Leftrightarrow b_1 + \dots + b_q = 1$

- Η τάξη ακρίβειας μιας μεθόδου RK μπορεί να προσδιοριστεί με κατάλληλα αναπτύγματα Taylor. Για μεγάλα q οι πράξεις γίνονται πολύ πολύπλοκες (Οι πράξεις διευκολύνονται κάπως με χρήση των λεγόμενων δένδρων του Butcher. Δεν θα ασχοληθούμε εδώ με αυτά)

- Οι λεγόμενες <u>απλοποιημένες συνθήκες</u> μπορούν να ελεγχθούν εύκολα και οδηγούν <u>γενικά</u> σε κάτω φράγματα της p.
Για ορισμένες ιδιαίτερα χρησιμοποιούμενες <u>οικογένειες</u> μεθόδων RK (με μέλη για κάθε $q\in\mathbb{N}$) οι απλοποιημένες συνθήκες δίνουν την τάξη ακρίβειας ακριβώς, (και όχι απλώς κάτω φράγματά της).

- Έστω $\tilde{p}$ ο μεγαλύτερος ακέραιος τω

$$\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^{\ell} = \frac{1}{\ell+1}, \quad \ell=0,\ \dots,\ \tilde{p}-1.$$

Τότε $p\le\tilde{p}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Η (πεπλεγμένη) μέθοδος του μέσου
$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

(Ξέρουμε $1\le p\le 2$. Θέλουμε να δούμε αν $p=1$ ή $p=2$)

Απάντηση:

Έχουμε

$$\begin{cases} y^{n,1} = y(t^n) + h\,\frac{1}{2}\, f(\overbrace{t^n+\frac{h}{2}}^{=\,t^{n,1}}, y^{n,1}) \\ \delta^n = y(t^n) + h\, f(t^{n,1}, y^{n,1}) - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

Έχουμε

$$f(t^{n,1}, y^{n,1}) = f\left(t^n+\frac{h}{2},\ y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^n+\frac{h}{2}, y^{n,1})\right)$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} \underbrace{f(t^n+\frac{h}{2}, y^{n,1})}_{f(t^n,y(t^n))+O(h)} f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

$$= f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2}\left[f_t(t^n, y(t^n)) + \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{=\,y'(t^n)} f_y(t^n, y(t^n))\right] + O(h^2)$$

$$= y'(t^n) + \frac{h}{2} \underbrace{\left[f_t(t^n, y(t^n)) + y'(t^n)\, f_y(t^n, y(t^n))\right]}_{y''(t^n)} + O(h^2)$$

$$= y'(t^n) + \frac{h}{2} y''(t^n) + O(h^2)$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \\ y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t^n)) y'(t) \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση για το δ^n, παίρνουμε:

$$\delta^n = y(t^n) + h\left[y'(t^n) + \frac{h}{2} y''(t^n)\right] - y(t^{n+1}) + O(h^3)$$

$$= y(t^n) + h \cdot y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(t^n) - y(t^{n+1}) + O(h^3)$$

$$= \cancel{y(t^n)} + \cancel{h \cdot y'(t^n)} + \cancel{\frac{h^2}{2} y''(t^n)} - \left[\cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \cancel{\frac{h^2}{2} y''(t^n)} + O(h^3)\right] + O(h^3)$$

$$= -O(h^3) + O(h^3) = O(h^3)$$

Άρα

$$|\delta^n| \leq C h^3 \rightsquigarrow \boxed{p \geq 2}$$

(Ξέρουμε ότι $p \leq 2$, άρα συμπεραίνουμε ότι $p = 2$)

Ας αποδείξουμε απευθείας (χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το γενικό αποτέλεσμα $p \leq 2q$) ότι $p \leq 2$.

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} y'(t) = 3t^2, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Λύση: $y(t) = t^3$.

<u>Τοπικό σφάλμα</u>

$$\delta^n = y(t^n) + h \cdot 3(t^{n,1})^2 - y(t^{n+1})$$

$$= y(t^n) + 3h\left(t^n + \frac{h}{2}\right)^2 - y(t^{n+1})$$

$$= (t^n)^3 + 3h\left(t^n + \frac{h}{2}\right)^2 - (t^n + h)^3$$

$$= \ldots = -\frac{h^3}{4}$$

$$\Rightarrow |\delta^n| \geq \underset{C}{\frac{1}{4}} h^3 \Rightarrow p \leq 2$$

Αφού $p \leq 2$ και $p \geq 2$, συμπεραίνουμε ότι $p = 2$.

12/12/17

Ικανές συνθήκες για την τάξη ακρίβειας μεθόδων RK

Θεώρημα: (Απλοποιημένες συνθήκες)

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών και υποθέτουμε ότι η f είναι αρκετά ομαλή στο $[a,b]\times\mathbb{R}$ και η ίδια και κατάλληλες παράγωγοί της είναι φραγμένες στο $[a,b]\times\mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ακέραιοι $p, s, r \geq 1$ τ.ω.

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^k = \frac{1}{k+1}$, $k=0,\dots,p-1$

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{ij} \tau_j^k = \frac{\tau_i^{k+1}}{k+1}$, $i=1,\dots,q$, $k=0,\dots,s-1$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^k a_{ij} = \frac{b_j(1-\tau_j^{k+1})}{k+1}$, $j=1,\dots,q$, $k=0,\dots,r-1$

και

(4) $p \leq r+s+1$ και $p \leq 2s+2$

Τότε η μέθοδος RK έχει τάξη ακρίβειας τουλάχιστον p.

Οι (1), (2), (3), (4) λέγονται απλοποιημένες συνθήκες.

Παρατηρήσεις:

1. Έχουμε

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{q} b_i \varphi(\tau_i) \approx \int_0^1 \varphi(x)\,dx$$

Για $\varphi(x) = x^k$, $k=0,\dots,p-1$, η $(*)$ ισχύει ως ισότητα (σύμφωνα με την (1))

Ισοδύναμα, η $(*)$ ισχύει ως ισότητα για $\varphi \in \mathbb{P}_{p-1}$, δηλαδή ο τύπος ολοκλήρωσης ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $p-1$

2. Έχουμε
$$\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, \varphi(\tau_j) \approx \int_0^{\tau_i} \varphi(x)\, dx \quad , \; i=1,\dots,q$$

Σύμφωνα με τη (2) αυτές οι σχέσεις ισχύουν ως ισότητες (για κάθε $i=1,\dots,q$) για $k=0,\dots,s-1$, δηλαδή αυτοί οι q τύποι ολοκλήρωσης ολοκληρώνουν ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $s-1$.

3. Η αληθινή έννοια της (4) είναι ότι η τάξη ακρίβειας είναι τουλάχιστον $\min(p, r+s+1, 2s+2)$

Πόρισμα (Butcher, Crouzax)

(α) Έστω p ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει η (1). Αν ισχύουν οι (2) με $\boxed{s=p-1}$, τότε η τάξη της μεθόδου είναι <u>ακριβώς</u> p.

(β) Έστω q' το πλήθος των τ_i που είναι διαφορετικά μεταξύ τα. Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει η (1) και ισχύει η (2) με $\boxed{s=q'}$, τότε η τάξη της μεθόδου είναι <u>ακριβώς</u> p.

(γ) Υπάρχει (για κάθε q) ακριβώς μια μέθοδος RK με τάξη $p=2q$ (όλες οι άλλες έχουν τάξη μικρότερη του $2q$).

Τα τ_i και b_i είναι οι κόμβοι και τα βάρη του τύπου ολοκλήρωσης του Gauss με q κόμβους στο διάστημα $[0,1]$ με συνάρτηση βάρους $w(x)=1$.

Τα a_{ij} προκύπτουν από τις (2) με $s=q$.
Αυτή είναι η οικογένεια μεθόδων RK - Gauss - Legendre.

Περιοχή ευστάθειας και ρητές προσεγγίσεις της εκθετικής συνάρτησης

Θεωρούμε το πρώτο πρόβλημα δοκιμής

$$(*)\begin{cases} y' = \lambda \cdot y, & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

με $\lambda \in \mathbb{C}$ και λύση $y(t) = e^{\lambda t}$, $t \geq 0$

Εφαρμόζουμε στο $(*)$ μια μέθοδο RK με μητρώο $\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$ και βήμα $h > 0$ και παίρνουμε

1. $y^{n,i} = y^n + h\lambda \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, y^{n,j}$, $i = 1, \ldots, q$.

2. $y^{n+1} = y^n + h\lambda \sum_{i=1}^{q} b_i\, y^{n,i}$.

Από την 1. παίρνουμε

$$I_q \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} + \lambda h\, A \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (I_q - \lambda h A) \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας $I_q - \lambda h A$ είναι αντιστρέψιμος (δηλαδή ότι το $\frac{1}{\lambda h}$, για $\lambda h \neq 0$, δεν είναι ιδιοτιμή του A).

Τότε έχουμε

$$(3)\quad \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = (I_q - \lambda h A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη 2.,

$$y^{n+1} = y^n + \lambda h\, b^T \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ ③}}{=} y^n + \lambda h\, b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} \begin{pmatrix} y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

$$= y^n + \lambda h\, b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} \cdot y^n \cdot e$$

με $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Άρα

$$\boxed{y^{n+1} = \left[1 + \lambda h\, b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} \cdot e\right] y^n}$$

Με τη <u>συνάρτηση ευστάθειας</u> r,

$$r(z) = 1 + z\, b^T (I_q - zA)^{-1} e,$$

η προηγούμενη σχέση γράφεται στη μορφή

$$④ \quad \boxed{y^{n+1} = r(\lambda h) y^n}, \quad n \geq 0$$

Η συνάρτηση r δεν ορίζεται για το πολύ q μιγαδικούς αριθμούς, δηλαδή των το $\frac{1}{z}$ να είναι ιδιοτιμή του A.

Η r εξαρτάται μόνο από τα b και A. Όχι από το τ.

<u>Ερώτημα</u>: Ποιάς μορφής είναι η συνάρτηση r;

Θέτουμε $w := (I_q - zA)^{-1} e$ και έχουμε

⑤ $(I_q - zA)w = e$

Λύνουμε το σύστημα ⊛ με τον κανόνα του Grammer.

Ο παρονομαστής είναι ίδιος για όλα τα w_i, $i=1,\dots,q$, ο $\det(I_q - zA)$.

Αυτό είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ q.

Αντίστοιχα οι αριθμητές είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ $q-1$.

Συμπέρασμα: Η r είναι ρητή συνάρτηση με αριθμητή και παρονομαστή πολυώνυμα βαθμού το πολύ q.

Περιοχή ευστάθειας

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1\}$$

Αν η S περιέχει το $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$, τότε και μόνο τότε η μέθοδος είναι Α-ευσταθής.

Σφάλμα συνέπειας (για το πρόβλημα ⊛)

$$\delta^n = r(\lambda h)\cdot y(t^n) - y(t^{n+1})$$

$$y(t^{n+1}) = e^{\lambda t^{n+1}} = e^{\lambda(t^n + h)} = e^{\lambda h}\cdot \underbrace{e^{\lambda t^n}}_{= y(t^n)}$$

Έχουμε

$$\delta^n = r(\lambda h)\, y(t^n) - e^{\lambda h}\, y(t^n)$$

$$= [r(\lambda h) - e^{\lambda h}]\, y(t^n)$$

Επομένως, αν η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι p, τότε

$$⊛ \quad |e^z - r(z)| \leq C|z|^{p+1}, \text{ για } z \to 0$$

Η ⊛ είναι αναγκαία (όχι ικανή) για να είναι η τάξη της μεθόδου p.

Άμεσες μέθοδοι:

Αφού ο A είναι γνήσια κάτω τριγωνικός, ο πίνακας $I_q - zA$ είναι κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο. Επομένως,

$$\boxed{\det(I_q - zA) = 1}$$

Συμπέρασμα: Η r είναι τώρα πολυώνυμο βαθμού το πολύ q.

Έστω ότι η τάξη της μεθόδου είναι p.
Τότε, σύμφωνα με την (*),

$$r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + C_{p+1} z^{p+1} + \dots + C_q z^q.$$

Ιδιαίτερα: $p \le q$.

Αν $p = q$, τότε $r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^q}{q!}$.

Υπόθεση: Άμεση μέθοδος με τάξη $p \geq 1$.
Τότε

$$r(z) = 1 + z + C_2 z^2 + \dots + C_q z^q.$$

Ιδιαίτερα:

$$|r(z)| \not\to 0 \text{ για } |z| \to \infty$$

Συμπέρασμα:
Καμία άμεση μέθοδος δεν είναι A-ευσταθής.

Συναρτήσεις ευστάθειας

- Άμεση μέθοδος του Euler: $r(z) = 1 + z$.
- Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler: $r(z) = 1/(1-z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ για $|z|<1$

- Πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου / Μέθοδος του τραπεζίου: $r(z) = \dfrac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για A-ευστάθεια:

Μια μέθοδος RK είναι A-ευσταθής, δηλαδή $S \supset \mathbb{C}^-$, αν και μόνο αν:

- $|r(iy)| \le 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

και

- η r δεν έχει πόλους (δηλ. σημεία στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστ

- εννοείται ότι ο αριθμητής και ο παρανομαστής δεν έχουν κοινές ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος

13/12/17

Περιοχή ευστάθειας και ρητές προσεγγίσεις της εκθετικής συνάρτησης

1ο πρόβλημα δοκιμής

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Μέθοδος RK : $\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$

Τότε

$$y^{n+1} = r(\lambda h) y^n$$

με

$$r(z) = 1 + z b^T (I_q - zA)^{-1} e$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Προσεγγίσεις Padé

Μια ρητή συνάρτηση $\frac{P(z)}{Q(z)}$ με $P \in \mathbb{P}_m$ και $Q \in \mathbb{P}_\ell$, $m, \ell \in \mathbb{N}_0$

λέγεται <u>προσέγγιση Padé</u> της εκθετικής συνάρτησης e^z, αν

$$e^z - \frac{P(z)}{Q(z)} = O(|z|^{m+\ell+1}) \quad \text{για } z \to 0$$

Για κάθε $m, \ell \in \mathbb{N}_0$ υπάρχει ακριβώς μια τέτοια προσέγγιση Padé.
Για $Q \in \mathbb{P}_0$ η $\frac{P(z)}{Q(z)}$ συμπίπτει με πολυώνυμο Taylor βαθμού m της e^z ως προς το 0.

Αν η συνάρτηση ευστάθειας r μιας μεθόδου RK είναι προσέγγιση Padé της e^z, που ισχύει πολύ συχνά αλλά όχι πάντα, τότε η μέθοδος είναι A-ευσταθής αν και μόνο αν ο βαθμός του παρανομαστή είναι ίσος με ή κατά ένα μεγαλύτερος ή κατά δύο μεγαλύτερος από το βαθμό του αριθμητή.

Εφαρμογή:

Μέθοδοι RK Gauss - Legendre:

Αφού η τάξη της μεθόδου είναι $p=2q$ και ο βαθμός αριθμητή και παρανομαστή είναι το πολύ q, συμπεραίνουμε ότι και οι δύο βαθμοί είναι q. Άρα η μέθοδος είναι Α-ευσταθής.

B-ευστάθεια

Ορισμός: Μια μέθοδος RK $\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$ λέγεται αλγεβρικά ευσταθής, αν

(α) $b_i \geq 0$, $i=1,\dots,q$.

(β) Ο $q\times q$ πίνακας M με στοιχεία $m_{ij} = b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j$, $i,j=1,\dots,q$.

(που είναι συμμετρικός) είναι μη αρνητικά ορισμένος, δηλαδή

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad (Mx, x) = \sum_{i,j=1}^{q} m_{ij} x_i x_j \geq 0$$

Τώρα ισχύουν:

(α) Μέθοδος αλγεβρικά ευσταθής $\Rightarrow$ Μέθοδος B-ευσταθής.

(β) Αν τα $\tau_1,\dots,\tau_q$ είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, τότε ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή

B-ευστάθεια $\Rightarrow$ αλγεβρική ευστάθεια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(1) Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler: $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$

(α) $b_1 = 1 \geq 0$ ✓

(β) $m_{11} = 1+1-1 = 1 \geq 0$, Μη αρνητικά ορισμένος.

Συμπέρασμα: Η μέθοδος είναι αλγεβρικά ευσταθής, οπότε και B-ευσταθής.

2. Πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

(α) $b_1 = 1 \geq 0$ ✓

(β) $m_{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0 \geq 0$

⇒ Μέθοδος αλγεβρικά ευσταθής, οπότε και Β-ευσταθής.

(Όλες οι μέθοδοι RK Gauss-Legendre είναι αλγεβρικά ευσταθείς με $M = 0$)

3. Μέθοδος του τραπεζίου

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

$m_{11} = 0 + 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$

$\left(M\binom{1}{0}, \binom{1}{0} \right) = m_{11} \cdot 1^2 = -\frac{1}{4}$

Συμπέρασμα: Η μέθοδος δεν είναι αλγεβρικά ευσταθής.

Αφού τα $\tau_1 = 0$ και $\tau_2 = 1$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους, η μέθοδος δεν είναι ούτε Β-ευσταθής.

– ΤΕΛΟΣ ΘΕΩΡΙΑΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ –