25/9/2017.

• Το περιεχόμενο συνοπτικά •

Διαφορική εξίσωση (Δ.Ε)

- Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις (Σ.ΔΕ)

Μόνο σε απλές περιπτώσεις μπορούμε να προσδιορίσουμε αναλυτικά τις λύσεις ΔΕ.

Κατά κανόνα προσεγγίζουμε τις λύσεις με αριθμητικές μεθόδους.

* Οι ΔΕ δεν περιγράφουν κατά κανόνα μονοσήμαντα τις λύσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$y'(t)=0 \quad , t\in\mathbb{R}$

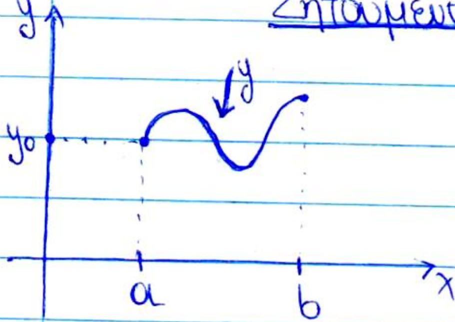
λύσεις : $y(t)=c \quad , \forall t\in\mathbb{R}$

Γι' αυτό χρειάζονται επιπρόσθετες συνθήκες, πχ. αρχικές (υπάρχουν και οι συνοριακές, με τις οποίες δεν θα ασχοληθούμε).

1. Προβλήματα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)

Δεδομένα: $f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση

$y_0\in\mathbb{R}$



Ζητούμενο: $y:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη τ.ω.

$$(*)\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) \;, & a\le t\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

ΔΕ πρώτης τάξης

Κάθε συνάρτηση $y\in C^1[a,b]$ που ικανοποιεί τη ΔΕ στο (*) για κάθε $t\in[a,b]$ και την αρχική συνθήκη (δηλαδή $y(a)=y_0$) λέγεται λύση του ΠΑΤ (*).

Θέματα

Ύπαρξη λύσης, Μοναδικότητα λύσεων, ευστάθεια (ή συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα αρχικά δεδομένα), γενίκευση για συστήματα ΣΔΕ,

Συμπλήρωμα (δεν υπάρχει στο βιβλίο μόνο στην ιστοσελίδα): επίλυση ΔΕ απλής μορφής: γραμμικές, Bernoulli, Riccati, με χωριζόμενες μεταβλητές, ομογενείς, πλήρεις, γραμμικά συστήματα ΣΔΕ με σταθερούς συντελεστές.

2. Η μέθοδος του Euler

Είναι η απλούστερη αριθμητική μέθοδος για ΠΑΤ.

Υπόθεση: Το ΠΑΤ έχει ακριβώς μια λύση y.

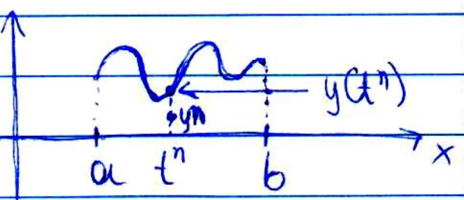
Έστω $N \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{N}$

δείκτης

Οι κόμβοι είναι $t^n = a + n h$, $n = 0, 1, \ldots, N$ κι αυτό δείκτης

Η μέθοδος του Euler δίνει προσεγγίσεις y^n των τιμών $y(t^n)$, οι οποίες υπολογίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y_n + h \cdot f(t^n, y^n), & n = 0, \ldots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$



Ερώτημα: Πως οδηγούμαστε στη μέθοδο;

Ποιό το κόστος της μεθόδου ανά βήμα;

Ποιότητα προσεγγίσεων;

Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα μεθόδου;

Πότε χρησιμοποιείται και πότε καταφεύγουμε σε άλλες μεθόδους;

3. Μέθοδοι των Runge-Kutta

4. Πολυβηματικές μέθοδοι

1 Προβλήματα αρχικών τιμών

Δεδομένα: $f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, $y_0\in\mathbb{R}$

Ζητούμενο: $y\in C^1[a,b]$ τ.ω.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a\le t\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

αυτά τα t, κάποιες φορές παραλείπονται.

Ύπαρξη και μοναδικότητα

Γραμμική Δ.Ε

$p, q \in C[a,b]$ (θέλω p και q συνεχείς το $[a,b]$)

$$\begin{cases} y'(t) = p(t)\,y(t)+q(t), & a\le t\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

(αν $q=0$ ομογενής γραμμική ΔΕ)

βάζω ό,τι θέλω εκτός από t

(α) (υποθέτω) $p=0$: $y'(s)=q(s) \Rightarrow$

$$\underbrace{\int_a^t y'(s)\,ds}_{y(t)-y(a)} = \int_a^t q(s)\,ds \Rightarrow$$

$$y(t)-y(a) = \int_a^t q(s)\,ds \Rightarrow y(t) = y_0+\int_a^t q(s)\,ds,\quad a\le t\le b$$

(β) γενική:

$$y'(s)-p(s)\cdot y(s) = q(s) \Rightarrow$$

$$\underbrace{e^{-\int_a^s p(t)dt}\cdot\left[y'(s)-p(s)y(s)\right]}_{\text{ισχυρίζομαι πως ισούται με: } \left(e^{-\int_a^s p(t)dt}\cdot y(s)\right)'} = e^{-\int_a^s p(t)dt}\cdot q(s)$$

$e^{-\int_a^s p(t)dt}$: ολοκληρωτικός παράγοντας.

Απόδειξη.

$$\left(e^{-\int_a^s p(t)dt}\cdot y(s)\right)' = e^{-\int_a^s p(t)dt}\,y'(s) + \left(e^{-\int_a^s p(t)dt}\right)' y(s)$$

$$\left(e^{-\int_a^s p(t)dt}\right)' = e^{-\int_a^s p(t)dt}\underbrace{\left(-\int_a^s p(t)dt\right)'}_{=-p(s)}$$

Άρα το απέδειξα

$$\left(e^{-\int_a^s p(t)dt}\cdot y(s)\right)' = e^{-\int_a^s p(t)dt}\cdot q(s) \Rightarrow$$

$$\int_a^t \left(e^{-\int_a^s p(t)dt}\cdot y(s)\right)' ds = \int_a^t e^{-\int_a^s p(t)dt}\cdot q(s)\,ds \Rightarrow$$

$$e^{-\int_a^t p(t)dt}\,y(t) - \underbrace{e^{-\int_a^a p(t)dt}}_{e^0=1}\cdot \underbrace{y(a)}_{y_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = e^{\int_a^t p(t)dt}\left[y_0+\int_a^t e^{-\int_a^s p(t)dt}\,q(s)\,ds\right]}$$

(πολλαπλασίασα με $\frac{1}{e^{-\int_a^t p(t)dt}}$)

(Αν θέλω συνεχίζω τη σχέση λίγο...)

$$y(t) = y_0\cdot e^{\int_a^t p(t)dt} + \int_a^t \underbrace{e^{\int_a^t p(t)dt}\cdot e^{-\int_a^s p(s)ds}}_{e^{\int_a^t p(t)dt-\int_a^s p(t)dt} = e^{\int_s^t p(t)dt}} q(s)\,ds$$

26/9/2017

Προβλήματα αρχικών τιμών

Δεδομένα: $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής
$y_0 \in \mathbb{R}$

Ζητούμενο: $y \in C^1[a,b]$ τω.

$$(*) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης

Ειδικές περιπτώσεις:

- Γραμμική ΔΕ: $f(t,y) = p(t)y + q(t)$
Τότε το $(*)$ έχει ακριβώς μια λύση, μάλιστα προσδιορίσαμε μια παράσταση της λύσης

Δεύτερο παράδειγμα: Μη ύπαρξη λύσης

$$\begin{cases} y' = y^2, & 0 \le t \le 2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Λύση

- Κάθε λύση είναι αύξουσα, και παίρνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του 1

Έχω $y'(s) = [y(s)]^2 \Leftrightarrow \dfrac{y'(s)}{[y(s)]^2} = 1 \Leftrightarrow$

$$(y(t)^{-1})' = -[y(t)]^{-2} y'(t) = -\frac{y'(t)}{[y(t)]^2}$$

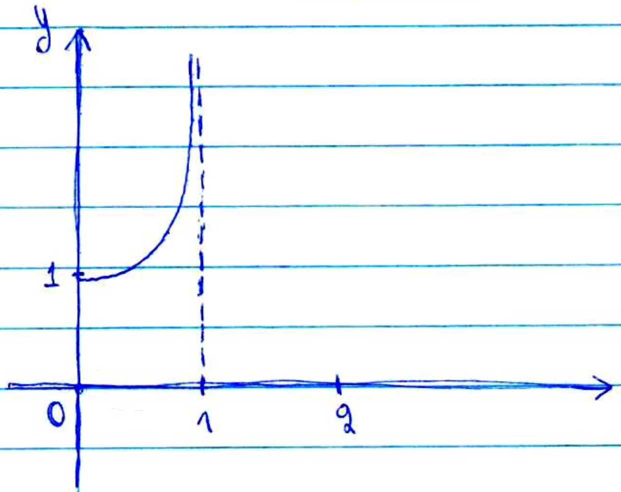
$$-\left(\frac{1}{y(s)}\right)' = 1 \Leftrightarrow$$

$$-\int_0^t \left(\frac{1}{y(s)}\right)' ds = \int_0^t ds \Leftrightarrow$$

$$-\left[\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(0)}\right] = t \Leftrightarrow +\frac{1}{y(t)} = \frac{1}{y(0)} - t \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y(t)} = 1 - t \Leftrightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{1-t}}$$

$*$ για $0 \le t \le c$, με $c<1$ η ~~λύση~~
$y(t) = \frac{1}{1-t}$ είναι η λύση!

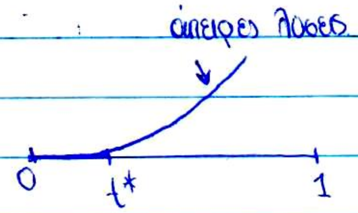


Αφού $y(t) \to \infty$ για $t \to 1^-$, η $y(t)$ δεν μπορεί να επεκταθεί ως συνεχής συνάρτηση σε όλο το διάστημα $[0,2]$

Παρατήρηση → Η $f(t,y) = y^2$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

3ο Παράδειγμα: Μη μοναδικότητα λύσεων

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



Ισχυρισμός: Το πρόβλημα έχει τις λύσεις

$$y(t) = 0, \quad t \in [0,1]$$

και, για κάθε $t^* \in (0,1)$

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le t^*, \\ \frac{(t-t^*)^2}{4}, & t^* < t \le 1 \end{cases}$$

Σημείωση: η y είναι συνεχώς παραγωγίσιμη!
(Και βλέπουμε εύκολα πως είναι λύση.)

• Πως οδηγούμαστε στην (**).
Ζητούμε λύση y τ.ω. $y(t)=0$ για $t \in [0,t^*]$ και $y(t)>0$ για $t \in (t^*, 1]$ (γιατί κάθε λύση είναι αύξουσα!)

Για $s > t^*$ έχουμε $y(s) > 0$, οπότε:

$$y'(s) = \sqrt{|y(s)|} \Leftrightarrow \frac{y'(s)}{\sqrt{|y(s)|}} = 1 \Leftrightarrow \frac{y'(s)}{\sqrt{y(s)}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left((\sqrt{y(s)})' = \frac{1}{2} y(s)^{\frac{1}{2}-1} \cdot y'(s) = = \frac{1}{2} \cdot \frac{y'(s)}{\sqrt{y(s)}} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 (\sqrt{y(s)})' = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_{t^*}^{t} (\sqrt{y(s)})' ds = \int_{t^*}^{t} ds$$

$$\Leftrightarrow 2 \sqrt{y(t)} - 2\sqrt{y(t^*)} = t - t^*$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{(t-t^*)^2}{4}$$

Θεώρημα (Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων)

Έστω $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλαδή

① $\exists L \geq 0 \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L \, |y_1 - y_2|$$

Τότε το ⊛ έχει ακριβώς μια λύση.

• Συνθήκη Lipschitz •
$\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$
$\exists L \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b]$
$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$

• Θεώρημα Μέσης Τιμής •
$\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχ. παραγ.
$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \varphi'(\xi) \cdot (x_1 - x_2)$
με ξ μεταξύ x_1 και x_2

$\Downarrow$

Παρατήρηση: Η ① είναι πολύ περιοριστική.

$\longrightarrow$ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Η $f(t,y) = y^2$ δεν ικανοποιεί την ①.

Πράγματι, έχουμε:

$$f(t,y_1) - f(t,y_2) = (y_1)^2 - (y_2)^2 = (y_1+y_2)(y_1-y_2)$$

$$\Rightarrow |f(t,y_1) - f(t,y_2)| = \underbrace{|y_1+y_2|}_{\infty \text{ για } y_1, y_2 \to \infty} \cdot |y_1 - y_2|$$

Υπόθεση: Η f είναι παραγωγίσιμη ως προς y
Ερώτημα: Πότε μια τέτοια f ικανοποιεί την ①;

$$f(t,y_1) - f(t,y_2) = f_y(t,\xi) \cdot (y_1 - y_2)$$

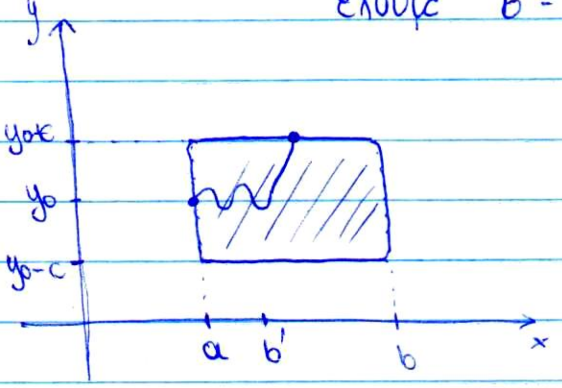
Η ① ικανοποιείται, αν και μόνο αν $|f_y(t,y)| \leq L$ $\forall t \in [a,b] \; \forall y \in \mathbb{R}$ *[1]

*δηλαδή αν η μερική παράγωγος είναι φραγμένη!

Η ① λέγεται "ολική" συνθήκη του Lipschitz.
(Τοπικές συνθήκες ικανοποιούνται σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα)

Θεώρημα (Τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα)
Έστω $c>0$ και $f:[a,b]\times[y_0-c,\ y_0+c]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί την (τοπική) συνθήκη του Lipschitz, ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλαδή

② $\exists L\geq 0 \ \forall t\in[a,b] \ \forall y_1,y_2\in[y_0-c,\ y_0+c]$
$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq L\cdot(y_1-y_2)$$
Τότε το (*) λύνεται μονοσήμαντα, τουλάχιστον στο διάστημα $[a,b']$ όπου με
$$A=\max_{\substack{a\leq t\leq b\\ y_0-c\leq y\leq y_0+c}}|f(t,y)|$$
έχουμε $b'=\max\left(b,\ a+\frac{c}{A}\right)$



Παρατήρηση Η ② δεν είναι καθόλου περιοριστική. Την ικανοποιούν όλες οι f που είναι συνεχώς παραγωγίσιμες ως προς y.

3ο παράδειγμα: $f(y)=\sqrt{y}$

$$f_y'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Για $y\downarrow 0$ έχουμε $f_y(y)\to\infty$.
Άρα η f δεν ικανοποιεί την ② σε κανένα διάστημα που περιέχει το 0!

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Η συνέχεια της f και μόνο εξασφαλίζει τοπική ύπαρξη λύσης. Όχι όμως μοναδικότητα (παράδειγμα 3).

28/9/2017

Προβλήματα αρχικών τιμών

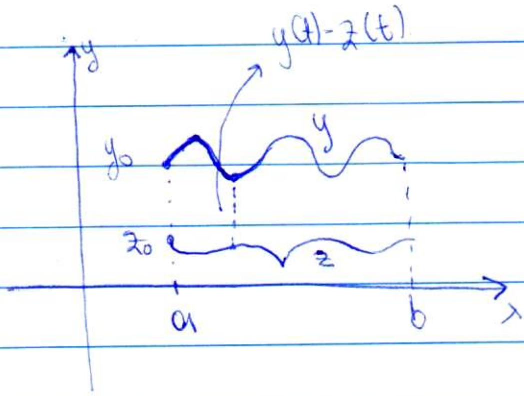
- Ύπαρξη και μοναδικότητα.

- Ευστάθεια

Θεωρούμε δύο προβλήματα

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$



Ερώτημα: Μπορούμε να εκτιμήσουμε τη $|y(t) - z(t)|$ με μια σταθερά C επί $|y_0 - z_0|$;

Αν δεν έχουμε μοναδικότητα αυτό είναι αδύνατο!

Επομένως, χρειάζονται συνθήκες.

Θέτουμε $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$, $t \in [a,b]$

Για να εκτιμήσουμε την $|\varepsilon(t)|$ ή ισοδύναμα την $(\varepsilon(t))^2$ χρειαζόμαστε πληροφορία για την παράγωγό της.

$((\varepsilon(t))^2)' = 2 \cdot \varepsilon(t)\varepsilon'(t)$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις διαφορικές εξισώσεις (Δ.Ε) παίρνουμε

$$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\varepsilon(t)$ έχουμε

$$\varepsilon(t) \cdot \varepsilon'(t) = [f(t,y(t)) - f(t,z(t))]\,\varepsilon(t)$$

ή (*) $$\frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)' = [f(t,y(t)) - f(t,z(t))] \cdot \varepsilon(t)$$

1η περίπτωση: Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz (ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t),

$\exists L \geq 0 \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

Τότε, η (*) δίνει

$$\frac{1}{2} \cdot ((\varepsilon(t))^2)' \leq \underbrace{|f(t,y(t)) - f(t,z(t))|}_{\leq L \cdot \underbrace{|y(t)-z(t)|}_{\varepsilon(t)}} \cdot |\varepsilon(t)|$$

δηλαδή,

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot ((\varepsilon(t))^2)' \leq L \cdot (\varepsilon(t))^2}$$

Θέτουμε $\varphi(t) := (\varepsilon(t))^2$ και έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot \varphi'(t) \leq L \varphi(t)$$

Άρα

$$\varphi'(t) \leq 2L\varphi(t) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{e^{-2Lt}[\varphi'(t) - 2L\varphi(t)]}_{\text{ισχυρίζομαι πως ισούται με: } (e^{-2Lt} \cdot \varphi(t))'} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(e^{-2Lt}\varphi(t))' \leq 0}$$

Άρα η $e^{-2Lt}\varphi(t)$ είναι φθίνουσα, ιδιαίτερα

$$e^{-2Lt} \cdot \varphi(t) \leq e^{-2La}\varphi(a)$$

ή

(πολλ/ζω με τον αντίστροφο του e^{-2Lt}) $$\varphi(t) \leq e^{2L(t-a)}\varphi(a) \quad \forall t \in [a,b]$$

Επομένως

$$(\varepsilon(t))^2 \leq e^{2L(t-a)}(\varepsilon(a))^2$$

ή

$$|\varepsilon(t)| \leq e^{L(t-a)} \cdot |\varepsilon(a)|$$

δηλαδή,

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{L(t-a)}|y_0 - z_0| \quad \forall t \in [a,b]$$

Επομένως,

$$\max_{a\le t\le b}|y(t)-z(t)| \le \underbrace{e^{L(b-a)}}_{=C}|y_0-z_0|$$

Στην περίπτωση που το $L\cdot(b-a)$ είναι μεγάλο, αυτή η εκτίμηση δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην πράξη.

2η περίπτωση: Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz, δηλαδή

$\forall t\in[a,b]\ \forall y_1,y_2\in\mathbb{R}$

(**) $\boxed{(f(t,y_1)-f(t,y_2))\cdot(y_1-y_2)\le 0}$

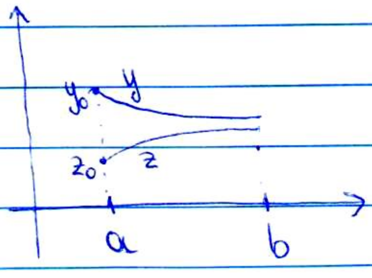
(Στην περίπτωσή μας αυτό σημαίνει ουσιαστικά ότι η $f(t,\cdot)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση, $\forall t\in[a,b]$

σημαίνει ως προς τη 2η μεταβλητή

Η (*) γράφεται στη μορφή

$$\frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)' = \underbrace{[f(t,y(t))-f(t,z(t))]\cdot(y(t)-z(t))}_{\le 0}$$

Άρα η $(\varepsilon(t))^2$ (οπότε και η $|\varepsilon(t)|$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.



Ιδιαίτερα,

$|\varepsilon(t)|\le|\varepsilon(a)|$

ή

$|y(t)-z(t)|\le \underset{C=1}{|y_0-z_0|}$

(Ειδική περίπτωση της 2ης περίπτωσης)

Έστω ότι η f είναι γραμμική,

$f(t,y)=\lambda(t)\,y+\mu(t)$

Προφανώς

$$f(t,y_1)-f(t,y_2) = \lambda(t)\cdot(y_1-y_2)$$

$$\Rightarrow \left[f(t,y_1)-f(t,y_2)\right](y_1-y_2) = \lambda(t)\cdot(y_1-y_2)^2$$

Επομένως, η f ικανοποιεί την (**), αν και μόνο αν $\lambda(t)\leq 0 \ \forall t\in[a,b]$

Αν έχω, $\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)\, y(t)+\mu(t), \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} z'(t) = \lambda(t)\, z(t)+\mu(t) \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

Τότε (με $\varepsilon(t)=y(t)-z(t)$)

έχουμε, $\begin{cases} \varepsilon'(t) = \lambda(t)\cdot\varepsilon(t) & , a\leq t\leq b \\ \varepsilon(a) = y_0 - z_0 \end{cases}$

Συμπέρασμα → Στην περίπτωση γραμμικής ΔΕ για την ευστάθεια αρκεί να θεωρήσω <u>ένα</u> πρόβλημα ΑΤ για την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ,

$$\begin{cases} y'(t)=\lambda(t)\, y(t) & , t\in[a,b], \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

Σε αυτή την περίπτωση για την ευστάθεια, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$|y(t)| \leq C\,|y_0| \quad , \forall t\in[a,b]$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Χπτγ (χωρίς περιορισμό της γενικότητας) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y_0=1$

Εξήγηση:

$$\begin{cases} y'(t)=\lambda(t)\, y(t) & , a\leq t\leq b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t)=\lambda(t)\,\tilde{y}(t) & , a\leq t\leq b \\ \tilde{y}(a)=1 \end{cases}$$

Ισχυρισμός: $y(t)=y_0\,\tilde{y}(t)$

Ένα πρόβλημα δοκιμής που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια είναι το

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda\, y(t) & , t \geq 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(με μιγαδικό αριθμό λ)

• Συστήματα ΣΔΕ

Έστω $m \in \mathbb{N}$, $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ και $y_0 \in \mathbb{R}^m$.

Ζητείται $y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ τ.ω

$$(\dagger) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a,b], \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Παράγωγος διανύσματος πχ $\begin{pmatrix} 2t \\ 5t^3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 15t^2 \end{pmatrix}$

Το αντίστοιχο του Θεωρήματος 1.1 (του βιβλίου) στην περίπτωση συστημάτων ΔΕ είναι:

Θεώρημα (Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων συστημάτων ΔΕ)

Έστω $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής, η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, ως προς μία νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$, δηλαδή

$$\exists L \geq 0 \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$$

$$\| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| \leq L \, \| y_1 - y_2 \|$$

Τότε, για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}^m$ το πρόβλημα $(\dagger)$ έχει ακριβώς μια λύση.

Το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών για γραμμική ΔΕ είναι τώρα

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)\, y(t) + g(t), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

πίνακας

με $A(t) \in \mathbb{R}^{m,m}$ και $g(t) \in \mathbb{R}^m$.

Γιατί ασχολούμαστε με το (+);
1. Έχουν πολλές εφαρμογές
2. Προβλήματα αρχικών τιμών για ΔΕ (αλλά και για συστήματα ΔΕ) υψηλότερης τάξης ανάγονται σε συστήματα ΔΕ πρώτης ($1^{ης}$) τάξης.

Ας θεωρήσουμε το εξής πρόβλημα ΑΤ: $y:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)), & a\le t\le b \\ y^{(i)}(a) = y_i, & i=0,\dots,m-1 \end{cases}$$

** $y^{(m)}(t)=0 \Rightarrow y\in\mathbb{P}_{m-1}$

31/10/17

1. Προβλήματα αρχικών τιμών
1.1. Ύπαρξη και μοναδικότητα
1.2 Ευστάθεια
1.3 <u>Συστήματα ΣΔΕ</u>

Έστω $m \in \mathbb{N}$, $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ και $y_0 \in \mathbb{R}^m$.
Ζητείται $y: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ τ.ω.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Προβλήματα αυτής της μορφής εμφανίζονται πολύ συχνά στις εφαρμογές.
Το ΠΑΤ για <u>γραμμικά</u> συστήματα ΣΔΕ είναι της μορφής:

$$(*) \begin{cases} y'(t) = A(t) \cdot y(t) + g(t), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

με $A(t) \in \mathbb{R}^{m,m}$ για $t \in [a,b]$

Προβλήματα αρχικών τιμών για διαφορικές εξισώσεις τάξης m $(m > 1)$ ανάγονται σε προβλήματα αρχικών τιμών για συστήματα ΔΕ πρώτης τάξης.

π.χ.
Το πρόβλημα αρχικών τιμών για μια Δ.Ε. τάξης m,

$$(**) \begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)), & a \le t \le b, \\ y^{(i)}(a) = y_i, & i = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases}$$

<u>Ισχυρισμός</u>: Το $(**)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $(*)$

Πράγματι, με

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Τότε

$$z(a) = \begin{pmatrix} y(a) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix} =: z_0$$

Επίσης,

$$z'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ \vdots \\ z_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(m)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ f(t, z(t), \ldots, z_m(t)) \end{pmatrix}$$

(μόνο αυτή αλλάζει.)

Ευστάθεια.

$f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
$y_0, z_0 \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t, z(t)), & a \le t \le b, \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz

$$\exists L \ge 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$$
$$\| f(t,x) - f(t,\tilde{x}) \| \le L \| x - \tilde{x} \|$$

με $\| \cdot \|$ την Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^m$.

Τότε
$$\|y(t)-z(t)\| \le e^{L(t-a)}\|y_0-z_0\|$$
$$t\in[a,b]$$
(βλέπε Άσκηση 1.9)

<u>2η περίπτωση</u>: Η f ικανοποιεί τη <u>μονόπλευρη</u> συνθήκη του Lipschitz, δηλαδή

$$\circledast \quad \forall t\in[a,b] \quad \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m$$
$$(f(t,x)-f(t,\tilde{x}),\ x-\tilde{x}) \le 0,$$

όπου $(\cdot,\cdot)$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Τότε ισχύει
$$\|y(t)-z(t)\| \le \|y_0-z_0\| \quad \forall t\in[a,b]$$

(Άσκηση 1.11)

<u>Ερώτημα</u>: Τι σημαίνει η $\circledast$ στην ειδική περίπτωση γραμμικών συστημάτων Σ.Δ.Ε;

$$f(t,y) = A(t)\cdot y + g(t)$$

$$\Rightarrow f(t,x)-f(t,\tilde{x}) = A(t)(x-\tilde{x})$$

$$\Rightarrow (f(t,x)-f(t,\tilde{x}),\ x-\tilde{x}) \le 0 \iff$$

$$(A(t)\underbrace{(x-\tilde{x})}_{y},\ \underbrace{x-\tilde{x}}_{y}) \le 0 \quad \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m$$

$$\iff (A(t)y,y) \le 0 \quad \forall y\in\mathbb{R}^m \quad \forall t\in[a,b]$$

Τέτοιοι πίνακες λέγονται μη θετικά ορισμένοι.

Θεωρούμε το <u>πρόβλημα δοκιμής</u>

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda \cdot y(t), & t \geq 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ (μιγαδικός) $y(t) = e^{\lambda t}$

Τότε $|y(t)| = e^{(Re\lambda)t}$ μένει φραγμένη, αν και μόνο αν $Re\lambda \leq 0$

Με $y(t) = y_1(t) + i\, y_2(t)$ και $\lambda = \alpha + i\beta$ (με $y_1(t), y_2(t), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$)
έχουμε

$$y'(t) = y_1'(t) + i\, y_2'(t)$$

$$\lambda y(t) = (\alpha + i\beta)[y_1(t) + i y_2(t)] = [\alpha y_1(t) - \beta y_2(t)] + i[\beta y_1(t) + \alpha y_2(t)]$$

Άρα $y'(t) = \lambda \cdot y(t) \iff$

$$\left.\begin{array}{l} y_1'(t) = \alpha y_1(t) - \beta y_2(t) \\ y_2'(t) = \beta y_1(t) + \alpha y_2(t) \end{array}\right\} \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Πότε είναι ο A μη θετικά ορισμένος;

Έχουμε $Ax = \begin{pmatrix} \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$(Ax, x) = (\alpha x_1 - \cancel{\beta x_2})\, x_1 + (\cancel{\beta x_1} + \alpha x_2)\, x_2$$

$$= \alpha \cdot (x_1^2 + x_2^2) \leq 0 \rightsquigarrow \alpha \leq 0.$$

<u>ΣΔΕ ειδικής μορφής</u>

- Γραμμικές Δ.Ε. (τις έχουμε δει ήδη) $y'(t) = p(t)y(t) + q(t)$

- <u>Εξισώσεις του Bernoulli</u>

Οι ΔΕ του Bernoulli είναι της μορφής

(*) $y'(t) = p(t)\, y(t) + q(t)\, [y(t)]^{6}$, $a \leq t \leq b$