

Στατιστικές Μέθοδοι Ανακατασκευής Εικόνων
Τομογραφίας Εκπομπής

Η ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

υποβάλλεται στην
ορισθείσα από την Γενική Συνέλευση Ειδικής Σύνθεσης
του Τμήματος Πληροφορικής Εξεταστική Επιτροπή

από την

ΑΡΓΥΡΩ ΚΑΜΠΟΥΡΑΚΗ

ως μέρος των Υποχρεώσεων για τη λήψη του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΕ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗ
ΣΤΙΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ιούνιος 2009

ΑΦΙΕΡΩΣΕΙΣ

Η παρούσα διατριβή αφιερώνεται με πολύ αγάπη στους γονείς μου, Κώστα και Σωτηρία.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Νίκου Χριστόφορο, Λέκτορα του του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για τη συνεχή και ουσιώδη επίβλεψη της πορείας του μεταπτυχιακού, για τις συμβουλές του και τις κατευθυντήριες σκέψεις του. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Κώστα και Σωτηρία και τον αδερφό μου Μάρκο για τη βοήθεια, αγάπη και κατανόησή τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	Εισαγωγή	9
1.1	Γενικά	9
1.2	Είδη Τομογραφίας	14
1.2.1	Τομογραφία Διέλευσης	14
1.2.2	Τομογραφία Εκπομπής	17
1.3	Παρουσίαση Εργασίας	20
2	Βασικές Μέθοδοι Ανακατασκευής Εικόνας	21
2.1	Εισαγωγή	21
2.2	Μετασχηματισμός Radon	23
2.3	Θεώρημα Κεντρικής Τομής	29
2.4	Ανακατασκευή Δισδιάστατης Εικόνας	32
2.4.1	Οπισθοπροβολή	32
2.4.2	Ανακατασκευή με Φιλτράρισμα Οπισθοπροβολής	36
2.4.3	Ανακατασκευή με Φιλτραρισμένη Οπισθοπροβολή	40
2.4.4	Ανακατασκευή με Αντίστροφο Μετασχηματισμό Radon	41
2.5	Poisson Θόρυβος	44
3	Στατιστικές Μέθοδοι Ανακατασκευής Εικόνας	50
3.1	Εισαγωγή	50
3.2	Στατιστικά Μοντέλα στη Τομογραφία Εκπομπής	51
3.2.1	Poisson Μοντέλο	51
3.2.2	Γκαουσιανό Μοντέλο	53
3.3	Κριτήριο Μέγιστης Πιθανοφάνειας	54
3.4	Μπεϋζιανές Μέθοδοι	55
3.5	Ανακατασκευή με τον αλγόριθμο EM	56
3.5.1	Γενική Δομή των Επαναληπτικών Αλγορίθμων	57
3.5.2	Αλγόριθμος ML-EM	58
3.5.3	Αλγόριθμος MAP-EM	65
3.5.4	Αλγόριθμος MAP-EM με Median εκ των προτέρων κατανομή	69
3.6	Πειραματικά Αποτελέσματα	76

4	ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΕ ΧΩΡΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ	83
4.1	Εισαγωγή	83
4.2	Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων	84
4.3	Χωρικά Αμετάβλητο Μοντέλο	88
4.4	Χωρικά Μεταβαλλόμενο Μοντέλο	90
4.5	Χωρικά Μεταβαλλόμενο ανά Κατεύθυνση Μοντέλο	92
4.6	Πειραματικά Αποτελέσματα	96
5	Συμπεράσματα	103

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1.1	Σχηματική αναπαράσταση για το πώς δημιουργούνται οι προβολές στα υπολογιστικά απεικονιστικά συστήματα.	10
1.2	CT-1ης Γενιάς.	11
1.3	CT-2ης Γενιάς.	11
1.4	CT-3ης Γενιάς.	12
1.5	CT-4ης Γενιάς.	12
1.6	Ελικοειδή Σάρωση.	13
1.7	Σχηματική Αναπαράσταση των διαφορετικών Γενιών CT.	13
1.8	Σχηματική αναπαράσταση τομογραφίας.	15
1.9	Σχηματικά πώς γίνεται η απορρόφηση ακτινοβολίας στο Τομογράφο για τρισδιάστατα αντικείμενα.	16
1.10	Σχηματική αναπαράσταση της απορρόφησης της ακτινοβολίας.	16
1.11	Πώς ορίζονται οι συντεταγμένες της ακτινοβολίας και οι συντεταγμένες του αντικειμένου.	17
1.12	Η προβολή $g(x_r, \phi)$ του αντικειμένου $f(x, y)$ για μια γωνία ϕ	18
1.13	a) Η PET σχηματικά και b) η εικόνα PET εγκεφάλου.	19
2.1	Θεώρηση του σωλήνα (VOR) ως μια γραμμή (LOR).	22
2.2	Οι τιμές της $f(x, y)$ ολοκληρώνονται κατά μήκος των LORs για να πάρουμε τη προβολή της.	23
2.3	Η προβολή $g(x_r, \phi)$ της $f(x, y)$ ολοκληρώνοντας όλες τις LORs που σχηματίζουν γωνία ϕ με τον άξονα των x	24
2.4	Γραμμές απόκρισης $x_r = x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi$ που περνάνε από το ίδιο σημείο για διαφορετικές γωνίες.	25
2.5	Οι γραμμές απόκρισης $x_r = x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi$ έχουν σιγμοειδή μορφή.	25
2.6	Ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων στο (x_r, ϕ) είναι ημιτονοειδές.	26
2.7	Στο σχήμα a. έχουμε την αρχική Εικόνα και στο b. το Μετασχηματισμό Radon σημείου.	26
2.8	Φαίνεται η προβολή $g(x_r, \phi)$ της εικόνας $f(x, y)$ στον άξονα των x_r για γωνία περιστροφής ϕ	27
2.9	Σχηματική αναπαράσταση του θεωρήματος κεντρικής τομής, όπου φαίνεται η ισοδυναμία ανάμεσα στο 1-Δ Fourier της προβολής για γωνία ϕ με το 2-Δ Fourier της αρχικής εικόνας.	30

2.10	Μέθοδος ανακατασκευής με το μετασχηματισμό <i>Fourrier</i>	31
2.11	Θεωρούμε ένα τετράγωνο πλέγμα που περιέχει τα ακτινικά και αναγκαστικά και άλλα σημεία, τα οποία προκύπτουν με παρεμβολή.	32
2.12	Οπισθοπροβολή για να πάρουμε τις τιμές του τελεστή b^1 για μια γωνία ϕ	34
2.13	Ο μετασχηματισμός <i>Fourrier</i> του τελεστή οπισθοπροβολής b^1	34
2.14	Η γραφική παράσταση της οπισθοπροβολής ενός σημείου.	36
2.15	(α) αρχική εικόνα, (β) τα τρία σημεία που πήραμε με οπισθοπροβολή και (γ) ο Μετασχηματισμός <i>Radon</i> της αρχικής εικόνας.	37
2.16	(α) αρχική εικόνα (<i>phantom</i>), (β) η οπισθοπροβολή της για (180°) και (γ) ο Μετασχηματισμός <i>Radon</i> της αρχικής εικόνας.	38
2.17	Η Οπισθοπροβολή του <i>Shepp-Logan phantom</i> , που είναι η αρχική εικόνα, για όλες τις γωνίες.	39
2.18	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του φίλτρου <i>Ramp</i> στο πεδίο της συχνότητας και στο πεδίο της εικόνας.	40
2.19	Αποτελέσματα οπισθοπροβολής με διαφορετικά φίλτρα, θεωρώντας αρχική εικόνα το <i>Shepp-Logan phantom</i>	45
2.20	Ανακατασκευή εικόνας με 13 φωτόνια/pixel.	47
2.21	Ανακατασκευή εικόνας με 25 φωτόνια/pixel	48
2.22	Ανακατασκευή εικόνας με 75 φωτόνια/pixel	49
3.1	Τα στάδια που ακολουθεί γενικά ένας επαναληπτικός αλγόριθμος ανακατασκευής.	57
3.2	Ο αλγόριθμος <i>ML-EM</i> σε μορφή γενικού επαναληπτικού αλγορίθμου.	59
3.3	Διακριτό μοντέλο της διαδικασίας προβολής.	61
3.4	Συναρτήσεις κλίμακας για <i>Gibbs</i> εκ των προτέρων πιθανότητες.	68
3.5	Φαίνεται η επίδραση της μεταβλητής η στη προσέγγιση της απόλυτης τιμής της συνάρτησης <i>logcosh</i> . Η συνεχής γραμμή δηλώνει την απόλυτη τιμή της συνάρτησης. Η διακεκομμένη και η γραμμή με παύλες δηλώνουν τη <i>logcosh</i> συνάρτηση για $\eta = 1$ και για $\eta = 5$ αντίστοιχα.	73
3.6	Αρχική εικόνα.	76
3.7	Τιμές του <i>ISNR</i> για τον <i>ML-EM</i> αλγόριθμο για 13, 25, 50 και 100 φωτόνια ανά <i>pixel</i>	77
3.8	Τιμές του <i>ISNR</i> για τον <i>MAP-EM</i> αλγόριθμο για 13, 25, 50 και 100 φωτόνια ανά <i>pixel</i>	78
3.9	Τιμές του <i>ISNR</i> για τον <i>MAP-EMMP</i> αλγόριθμο για 13, 25, 50 και 100 φωτόνια ανά <i>pixel</i>	78
3.10	Ανακατασκευή εικόνας με 13 φωτόνια/pixel.	79
3.11	Ανακατασκευή εικόνας με 25 φωτόνια/pixel.	80
3.12	Ανακατασκευή εικόνας με 50 φωτόνια/pixel.	81
3.13	Ανακατασκευή εικόνας με 100 φωτόνια/pixel.	82
4.1	Αρχική εικόνα.	97

4.2	Τιμές του ISNR για το Χωρικά Μεταβαλλόμενο Μοντέλο ανά Κατεύθυνση για 13, 25, 50 και 100 φωτόνια/rixel.	98
4.3	Τιμές του ISNR για το Χωρικά Αμετάβλητο Μοντέλο για 13, 25, 50 και 100 φωτόνια/rixel.	98
4.4	Τιμές του ISNR για το Χωρικά Μεταβαλλόμενο Μοντέλο για 13, 25, 50 και 100 φωτόνια/rixel.	99
4.5	Ανακατασκευή εικόνας με 13 φωτόνια/rixel.	99
4.6	Ανακατασκευή εικόνας με 25 φωτόνια/rixel.	100
4.7	Ανακατασκευή εικόνας με 50 φωτόνια/rixel.	101
4.8	Ανακατασκευή εικόνας με 100 φωτόνια/rixel.	102

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Καμπουράκη Αργυρώ του Κώστα και της Σωτηρίας. MSc, Τμήμα Πληροφορικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Ιούνιος 2009. Στατιστικές Μέθοδοι Ανακατασκευής Εικόνων Τομογραφίας Εκπομπής. Επιβλέπωντας: Χριστόφορος Νίκου.

Στην εργασία αυτή ασχοληθήκαμε με την ανακατασκευή τομογραφικών εικόνων. Σκοπός της ανακατασκευής εικόνων από προβολές είναι η εκτίμηση της αρχικής εικόνας έχοντας ως μόνο δεδομένο τις προβολές της. Μελετήσαμε τις βασικές μεθόδους ανακατασκευής τομογραφικών εικόνων με κύρια την Φιλτραρισμένη Οπισθοπροβολή, οι οποίες υπολογίζουν τις αρχικές εικόνες αρκετά γρήγορα. Δυστυχώς, όμως αυτό το μοντέλο δεν περιγράφει με ακρίβεια τα πραγματικά δεδομένα τομογραφίας εκπομπής, έχοντας ως αποτέλεσμα οι εικόνες που παίρνουμε μ' αυτές τις μεθόδους να παρουσιάζουν σφάλματα.

Για να αποφύγουμε τα μειονεκτήματα της μεθόδου της Φιλτραρισμένης Οπισθοπροβολής προσεγγίζουμε το πρόβλημα ανακατασκευής με Στατιστικές και Μπεϋζιανές μεθόδους ανακατασκευής που ενσωματώνουν πιθανοτικά μοντέλα που περιγράφουν το θόρυβο και την εικόνα που θέλουμε να υπολογίσουμε αντίστοιχα. Μελετήσαμε τους αλγόριθμους EM, MAP-EM με εκ των προτέρων Gibbs κατανομή και το MAP-EM με Median εκ των προτέρων κατανομή. Οι τρεις αυτοί αλγόριθμοι ακολουθούν τη δομή των επαναληπτικών αλγορίθμων και παρουσιάζουν καλύτερα αποτελέσματα από τις βασικές μεθόδους παρουσία θορύβου.

Έχοντας ικανοποιητικά αποτελέσματα ανακατασκευής από τις επαναληπτικές μεθόδους προτείνουμε τρία μοντέλα για ανακατασκευή τομογραφικών εικόνων, τα Χωρικά Αμετάβλητο, Χωρικά Μεταβαλλόμενο και Χωρικά Μεταβαλλόμενο ανά Κατεύθυνση μοντέλο. Στο πρώτο μοντέλο θέτουμε περιορισμό στα στοιχεία της εικόνας, με σκοπό την εξομάλυνσή της. Τα στοιχεία της προβολής ακολουθούν Poisson κατανομή και τα στοιχεία της εικόνας Γκαουσιανή κατανομή και χρησιμοποιώντας τη μέγιστη εκ των υστέρων (MAP) διατύπωση, υπολογίζουμε τις κατάλληλες παραμέτρους για το μοντέλο μας, ώστε να πάρουμε τις ανακατασκευασμένες εικόνες. Επιπλέον, βασιζόμενοι σ' αυτό το μοντέλο χρησιμοποιούμε ένα πιο προσαρμοσμένο μοντέλο θεωρώντας ότι οι παράμετροι του μοντέλου μας ακολουθούν Γάμμα κατανομές με αποτέλεσμα κάθε στοιχείο της εικόνας να προσδιορίζεται από διαφορετική τιμή της παραμέτρου. Μ' αυτό το τρόπο πετυχαίνουμε το μοντέλο αυτό να είναι χωρικά προσαρμοζόμενο. Το τρίτο μοντέλο που προτείνουμε βασίζεται στη μέγιστη εκ των υστέρων πιθανοφάνεια και έχει Γκαουσιανή μεταβαλλόμενη εκ των προτέρων πιθανότητα. Αυτή η εκ των προτέρων πιθανότητα υποθέτει ότι η πρώτη τάξη διαφορές ανάμεσα στα pixels της εικόνας, στις τέσσερις κατευθύνσεις, είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν Γκαουσιανή

κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση, η οποία μεταβάλλεται χωρικά. Με σκοπό την παραμετροποίηση αυτού του μοντέλου, οι χωρικά μεταβαλλόμενες διακυμάνσεις θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές μιας Γάμμα κατανομής. Τα τρία αυτά μοντέλα παρουσιάζουν αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα συγκριτικά με τις επαναληπτικές μεθόδους και συγκρινόμενα μεταξύ τους τις καλύτερες ανακατασκευασμένες εικόνες μας δίνει το Χωρικά Μεταβαλλόμενο μοντέλο.

EXTENDED ABSTRACT IN ENGLISH

Kampouraki, Argyrw. MSc, Computer Science Department, University of Ioannina, Greece. June, 2009. Statistical Reconstruction Methods of Emission Tomography Images. Supervisor: Christophoros Nikou.

An important problem in image processing is to reconstruct a cross section of an object from several images of its transaxial projections. A projection is a shadowgram obtained by illuminating an object by penetrating radiation. In first part of this work, were studied basic reconstruction methods with the most important , the Filtered BackProjection method (inverse radon transform). This method allows emission tomography images to be computed very quickly. Unfortunately, because real emission tomography data are not precisely described by the Filtered BackProjection method, the resulting images can exhibit significant inaccuracies.

Avoiding the shortcomings of Filtered BackProjection method requires that reconstruction problem be framed in a way that more closely resembles reality. In this framework, statistical reconstruction techniques in addition incorporate probabilistic models of the noise and, in case of Bayesian methods, of the image itself. Thus, most reconstruction algorithms that attempt to incorporate an accurate imaging model are iterative, meaning that the estimated image is progressively refined in a repetitive calculation. The iterative reconstruction algorithms that have studied is based in maximum likelihood estimation (ML-EM), the maximum a posteriori distribution of image given the projections, where being several assumptions for the prior pdf that image follows (MAP- EM with Gibbs or Median prior pdf). These methods appear to have results with better precision compared with basic methods, in presence of noise, which obey Poisson pdf.

In third part of this work, are proposed three reconstruction algorithms that based in spatially adaptive models. The basic idea is that the image, which intend to estimate, follows Gaussian pdf that its parameters are varied spatially and are adapted proportionally with the existence or absence of edges. We must refer to maximum likelihood estimation of observations (projections) that follows Poisson distribution. The estimation either of image or the parameters of models arise in closed form. These models appear to have the best results of all methods were studied refer to precision and the estimation of reconstructed images.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά

1.2 Είδη Τομογραφίας

1.3 Παρουσίαση Εργασίας

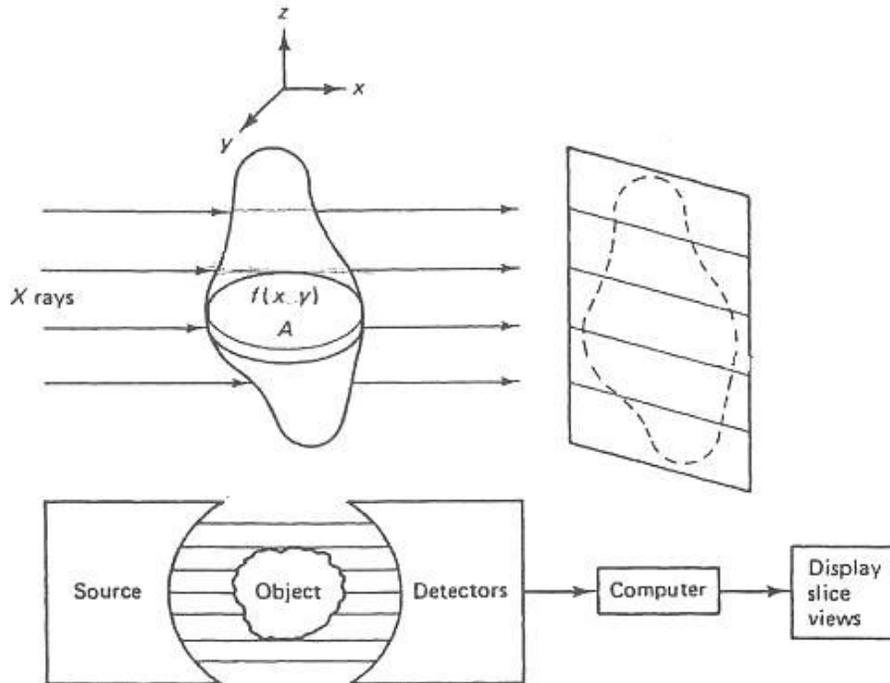
1.1 Γενικά

Η ιατρική εικόνα είναι η απεικόνιση μιας ανατομικής δομής του ανθρώπινου σώματος σε ένα φιλμ ή σε μια οθόνη. Η απεικόνιση αυτή πραγματοποιείται με τη βοήθεια των σύγχρονων υπολογιστικών απεικονιστικών συστημάτων, όπως είναι ο Αξονικός και ο Μαγνητικός Τομογράφος, Ενδοσκοπικά Συστήματα και ο Υπερηχογράφος. Τα περισσότερα από τα ιατρικά υπολογιστικά απεικονιστικά συστήματα, όπως είναι και τα παραπάνω, μπορούν να εκτιμούν μόνο τις προβολές ενός αντικειμένου με συγκεκριμένη πυκνότητα [2]-[7].

Έτσι, ένα σημαντικό ζήτημα στο τομέα της Επεξεργασίας Εικόνας είναι το πώς θα ανακατασκευάσουμε μια εικόνα από τις προβολές της. Προβολή είναι το "σκιόγραμμα" που παίρνουμε ως αποτέλεσμα της έκθεσης ενός αντικειμένου σε ραδιενεργό ακτινοβολία. Για να πάρουμε μια προβολή χρειαζόμαστε μια πηγή που να εκπέμπει ραδιενεργό ακτινοβολία, ένα αντικείμενο από το οποίο θα περνάνε οι ακτινοβολίες και μια σειρά από ανιχνευτές οι οποίοι μετρούν το βαθμό της εξασθένησης της ακτινοβολίας μέσα από το πέρασμά της από το αντικείμενο.

Στο σχήμα (1.1) παρατηρούμε τη τυπική μέθοδο με την οποία δημιουργούνται οι προβολές στα υπολογιστικά απεικονιστικά συστήματα. Κάθε οριζόντια γραμμή που φαίνεται στο σχήμα είναι μια μονοδιάστατη προβολή ενός οριζόντιου κομματιού του αντικειμένου που είναι προς εξέταση. Κάθε pixel της εικόνας-προβολής αναπαριστά την ολική απορρόφηση της ακτινοβολίας από τα αντίστοιχα σημεία του αντικειμένου που βρίσκονται κατά μήκος του μονοπατιού από τη πηγή στους ανιχνευτές. Ένα σύστημα πηγής - ανιχνευτών μπορεί να

περισταρφεί σε διάφορες γωνίες δίνοντάς μας διαφορετικές προβολές του αντικειμένου για διαφορετικές γωνίες περιστροφής. Τα απεικονιστικά συστήματα που έχουν ως θεμελιώδη αρχή να αποκτούν πολλαπλές προβολές του αντικειμένου για ένα σύνολο διαφορετικών γωνιών ονομάζονται σαρωτές υπολογιστικής τομογραφίας (CT scanners- computerized tomography scanners).



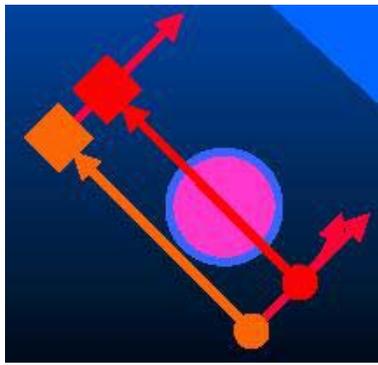
Σχήμα 1.1: Σχηματική αναπαράσταση για το πώς δημιουργούνται οι προβολές στα υπολογιστικά απεικονιστικά συστήματα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι παίρνοντας τις προβολές, χάνεται πληροφορία από την αρχική εικόνα (αντικείμενο) κατά μήκος του μονοπατιού που διανύει η ακτινοβολία μέχρι να φτάσει στους ανιχνευτές. Η υπολογιστική τομογραφία προσπαθεί να αποκαταστήσει αυτή τη πληροφορία που χάνεται σε κάθε προβολή χρησιμοποιώντας τη πληροφορία από τις πολλαπλές προβολές που παίρνει καθώς αλλάζει γωνίες το σύστημα πηγή - ανιχνευτές.

Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι η γεωμετρία συλλογής των δεδομένων προβολής εξαρτάται από τη διάταξη της λυχνίας και των ανιχνευτών, καθώς και από την κίνησή τους. Ανάλογα με τη χρησιμοποιούμενη γεωμετρία οι υπολογιστικοί τομογράφοι κατατάσσονται σε διάφορες διάφορες γενιές που περιγράφουν την εξέλιξη αυτών των απεικονιστικών συστημάτων.

1. Πρώτη Γενιά : Παράλληλη Δέσμη.

- Μια εξαιρετικά ευθυγραμμισμένη δέσμη ακτίνων X και ένας ανιχνευτής κινούνται γραμμικά σε σχέση με τον ασθενή για την απόκτηση μίας προβολής

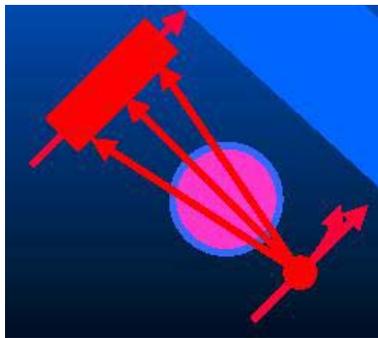


Σχήμα 1.2: CT-1ης Γενιάς.

και στη συνέχεια περιστρέφονται γύρω από τον ασθενή για την απόκτηση της επόμενης προβολής.

- Περιστροφή κατά 180° με γωνιακά βήματα εύρους 1° .
- Μεγάλο χρονικό διάστημα (της τάξης των 5 min) για την ολοκλήρωση της λήψης μιας τομής.

2. Δεύτερη Γενιά: Αποκλίνουσα Δέσμη, Πολλαπλοί Ανιχνευτές.

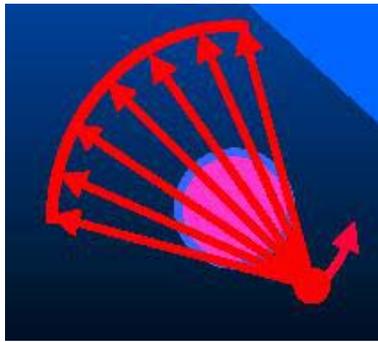


Σχήμα 1.3: CT-2ης Γενιάς.

- Μια αποκλίνουσα δέσμη ακτίνων X (fan beam) και μία γραμμική διάταξη ανιχνευτών κινούνται γραμμικά και στη συνέχεια περιστρέφονται.
- Είναι δυνατή η χρήση γωνιακών βημάτων μεγαλύτερου εύρους και συνεπώς η μείωση του χρόνου σάρωσης σε 30 sec.

3. Τρίτη Γενιά: Αποκλίνουσα Δέσμη, Περιστρεφόμενοι Ανιχνευτές.

- Μια πηγή αποκλίνουσας δέσμης ακτίνων X και μία μηχανικά συζευγμένη καμπυλοειδής διάταξη ανιχνευτών, που αποτελείται από μερικές εκατοντάδες (800) ανεξάρτητους ανιχνευτές, περιστρέφονται κατά (360°).
- Ο χρόνος συλλογής των δεδομένων μίας τομής είναι της τάξης του 1 sec.



Σχήμα 1.4: CT-3ης Γενιάς.

- Είναι δυνατή η χρήση διαφραγμάτων βολφραμίου μεταξύ των ανιχνευτών με εστίαση στην πηγή ώστε να απορρίπτεται η ακτινοβολία που προέρχεται από σκέδαση.

4. Τέταρτη Γενιά: Αποκλίνουσα Δέσμη, Ακίνητοι Ανιχνευτές.

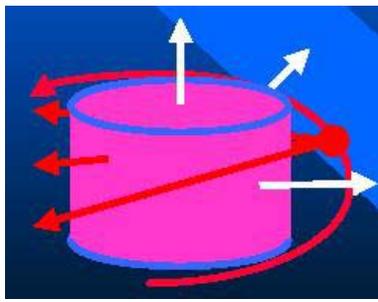


Σχήμα 1.5: CT-4ης Γενιάς.

- Η πηγή μιας αποκλίνουσας δέσμης ακτίνων X περιστρέφεται ενώ η ανιχνευτική διάταξη (δακτύλιος 600- 4800 ανεξάρτητων ανιχνευτών) παραμένει ακίνητη.
- Οι χρόνοι σάρωσης είναι της ίδιας τάξης με εκείνους της τρίτης γενιάς γενιάς.

5. Πέμπτη Γενιά: Σάρωση Δέσμης Ηλεκτρονίων.

- Η πηγή των ακτίνων X αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα της σχεδίασης του συστήματος.
- Η διάταξη των ανιχνευτών παραμένει σταθερή.
- Μία υψηλής ενέργειας δέσμη ηλεκτρονίων οδηγείται ηλεκτρονικά σε μία ημικυκλική άνοδο βολφραμίου. Περιστροφή της πηγής περί τον ασθενή, χωρίς μηχανικά μέρη.
- Χρόνος σάρωσης της τάξης των 50-100 msec.

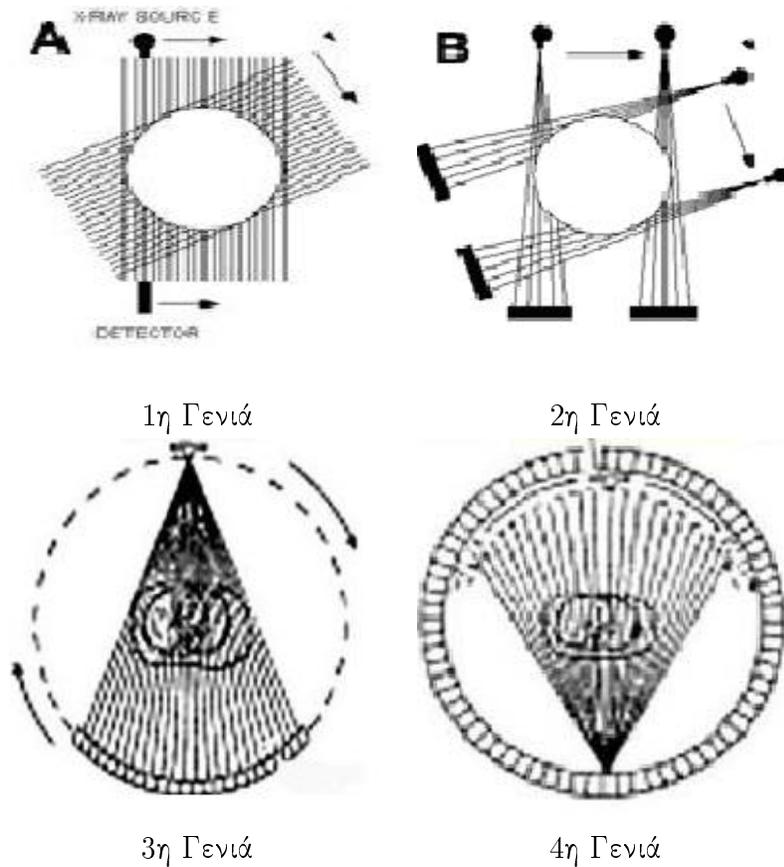


Σχήμα 1.6: Ελικοειδή Σάρωση.

6. Ελικοειδής Σάρωση.

Ταυτόχρονη

- Περιστροφή πηγής
- Μετακίνηση εξεταστικής τράπεζας
- Συλλογή δεδομένων προβολών για πολλαπλές τομές που καλύπτουν μια περιοχή (όγκο) του εξεταζόμενου με ρυθμό 1-3 τομών/sec.



Σχήμα 1.7: Σχηματική Αναπαράσταση των διαφορετικών Γενιών CT.

1.2 Είδη Τομογραφίας

Στην κλασική τομογραφία, εφαρμόζεται για πρώτη φορά η ιδέα της απεικόνισης των δομών από ένα συγκεκριμένο επίπεδο του σώματος. Η μεγάλη επανάσταση όμως στην ιατρική απεικόνιση, έγινε με την εμφάνιση της Αξονικής Τομογραφίας. Ο όρος "Αξονική Τομογραφία" είναι πλέον ένας πολύ κοινός όρος που δεν είναι γνωστός μόνο στους ειδικούς. Διεθνώς έχει επικρατήσει ο όρος Computerized Tomography ή CT, που κατά λέξη σημαίνει Υπολογιστική Τομογραφία (Υ.Τ).

Η Υ.Τ. είναι μία διαγνωστική εξέταση που βασίζεται στην ανακατασκευή (reconstruction) μιας εικόνας από τη σύνθεση πολλών προβολών της περιοχής του σώματος που εξετάζεται. Εφαρμόστηκε για πρώτη φορά σε ασθενείς το 1973, μετά από μελέτες δύο δεκαετιών από τους Άγγλους μηχανικούς Hounsfield και McCormac.

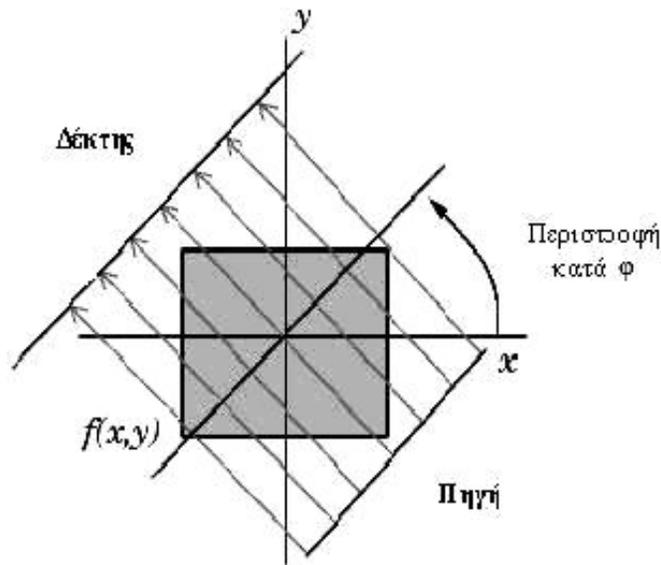
Υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι τομογραφικής απεικόνισης ανάλογα με τη φύση του προβλήματος που θέλουμε να επιλύσουμε. Η τομογραφία διέλευσης (transmission tomography) και η τομογραφία εκπομπής (emission tomography). Στην πρώτη μέθοδο, η πηγή και το ανιχνευτικό σύστημα βρίσκονται σε αντιδιαμετρική θέση και περιστρέφονται γύρω από το υπό εξέταση αντικείμενο (π.χ. CT). Στη δεύτερη μέθοδο, η πηγή είναι η ίδια η υπό εξέταση περιοχή και γύρω απ'αυτήν περιστρέφεται το ανιχνευτικό σύστημα (π.χ. SPECT, PET).

1.2.1 Τομογραφία Διέλευσης

Η Υ.Τ. χρησιμοποιεί την τομογραφία διέλευσης ή τη λεγόμενη Τομογραφία Ακτίνων Χ. Μία λυχνία παραγωγής ακτίνων Χ (πηγή), προσαρτημένη σε δακτύλιο διαμέτρου 1,5 μέτρου περίπου, περιστρέφεται, κινούμενη πάνω στο δακτύλιο, γύρω από τον εξεταζόμενο. Αντιδιαμετρικά με τη λυχνία, προσαρτημένο στον ίδιο δακτύλιο, υπάρχει σύστημα ανιχνευτών ακτινοβολίας Χ. Η εξεταστική τράπεζα, όπου τοποθετείται ο ασθενής, είναι τοποθετημένη με τον άξονά της κάθετα στο επίπεδο λυχνία - ανιχνευτές και έχει τη δυνατότητα να κινείται κατά μήκος του άξονά της. Η λειτουργία του συστήματος βασίζεται στη δυνατότητα ανακατασκευής μιας εικόνας - τομής του αντικειμένου, από πολλαπλές προβολές του με ακτίνες Χ. Η διαδικασία σχηματικά απεικονίζεται στο σχήμα (1.8).

Οι ακτίνες Χ διέρχονται μέσα από το αντικείμενο και η κατανομή της απορρόφησής τους καταγράφεται από το ανιχνευτικό σύστημα το οποίο όπως ήδη αναφέραμε βρίσκεται σε αντιδιαμετρική θέση με τη λυχνία. Δομές που βρίσκονται πάνω ή κάτω από το επίπεδο της δέσμης δεν απεικονίζονται. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται για πολλές διαφορετικές θέσεις του συστήματος λυχνία - ανιχνευτικό σύστημα γύρω από το αντικείμενο, παίρνοντας έτσι πολλές προβολές του αντικειμένου.

Η τελική εικόνα είναι σαν να έχει αφαιρεθεί από το σώμα του ασθενούς μια "φέτα" πάχους λίγων χιλιοστών, και αυτή η φέτα να έχει ακτινογραφηθεί με ακτίνες Χ κάθετες στο επίπεδο της. Το ανιχνευτικό σύστημα αποτελείται από μεγάλο αριθμό ανιχνευτών διατεταγμένων σε τόξο, οι οποίοι είναι ανιχνευτές αερίου ή ανιχνευτές στερεάς κατάστασης, οι οποίοι και θεωρούνται καλύτεροι, καθώς παρουσιάζουν καλύτερα χαρακτηριστικά (απόδοση κ.λ.π.)



Σχήμα 1.8: Σχηματική αναπαράσταση τομογραφίας.

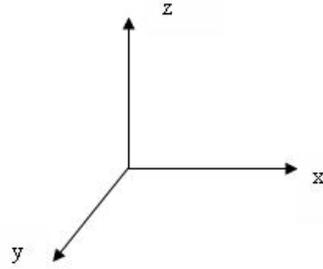
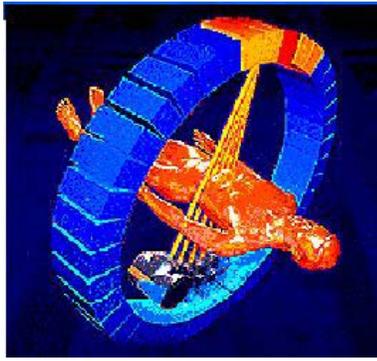
και λιγότερα προβλήματα λειτουργίας.

Για να ολοκληρωθεί μία εξέταση απαιτείται μια σειρά από τομές. Για παράδειγμα για την απεικόνιση του κρανίου απαιτούνται 25 τομές (προβολές). Η διαδικασία λοιπόν που περιγράφηκε παραπάνω για τη λήψη μίας τομής, επαναλαμβάνεται 25 φορές. Μεταξύ δύο τομών μπορούν να γίνουν δυο πράγματα, είτε να μετακινηθεί το σύστημα λυχνίας-ανιχνευτών με γωνιακή μετατόπιση πολύ μικρή είτε η εξεταστική τράπεζα να κινηθεί κατά πολύ μικρό διάστημα, ίσο με το πάχος τομής. Έτσι μπορούμε να πάρουμε από νέα θέση την επόμενη τομή από τον ασθενή.

Ένα απλό μοντέλο για το πώς αποκτούμε τη τελική εικόνα (προβολή) από τον X-ray CT scanner έχει ως εξής:

Έστω $f(x, y)$ δηλώνει τον συντελεστή απορρόφησης του αντικειμένου σ' ένα σημείο (x, y) της τομής για μια συγκεκριμένη τιμή του επιπέδου z , όπως φαίνεται στο σχήμα (1.9).

Η ικανότητα και το ποσοστό εξασθένησης της δέσμης από τα οστά είναι διαφορετικό από αυτό των μαλακών ιστών και ακόμη πιο διαφορετικό από αυτό των κοιλιοτήτων με αέρα (π.χ πνεύμονες) που τυχόν παρεμβάλλονται στην πορεία των ακτίνων. Επίσης, ένας όγκος απορροφά περισσότερη ακτινοβολία (X ή Γ) διότι τα κύτταρα είναι σε φάση διάσπασης που σημαίνει ότι απορροφούν περισσότερη ακτινοβολία και έτσι προστατεύονται και οι υγιείς ιστοί από το να απορροφούν μεγάλη ακτινοβολία χωρίς ιδιαίτερο λόγο. Γι' αυτό το λόγο η τομογραφική εικόνα εμφανίζεται με διαβαθμίσεις του γκρι(gray scale) που αντιστοιχούν σε διαβαθμίσεις της τιμής του συντελεστή εξασθένησης. Η υψηλότερη τιμή αντιστοιχεί στο λευκό (π.χ οστά) και η χαμηλότερη στο μαύρο (π.χ μαλακοί ιστοί).

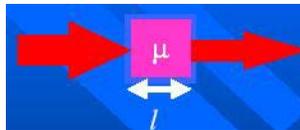


Σχήμα 1.9: Σχηματικά πώς γίνεται η απορρόφηση ακτινοβολίας στο Τομογράφο για τρισδιάστατα αντικείμενα.

Κατά τη διέλευση της ακτινοβολίας μέσα από ένα αντικείμενο οι ακτίνες X απορροφούνται και η ένταση της ακτινοβολίας που παίρνουμε τελικά δίνεται από τον τύπο:

$$I = I_0 \exp[-\mu \cdot l] \quad (1.1)$$

και σχηματικά έχει όπως φαίνεται στο σχήμα (1.10):



Σχήμα 1.10: Σχηματική αναπαράσταση της απορρόφησης της ακτινοβολίας.

μ : ο γραμμικός συντελεστής εξασθένησης των ακτίνων X.

l : το μήκος διαδρομής μέσα από το αντικείμενο.

Ο συντελεστής μ εξαρτάται από την

- ενέργεια των ακτίνων X.
- τη σύσταση και την πυκνότητα του αντικειμένου.

Το ανθρώπινο σώμα είναι μη ομογενές μέσο, οπότε η σχέση (1.1) γίνεται:

$$I = I_0 \exp \left[- \int_L f(x, y) du \right], \quad (1.2)$$

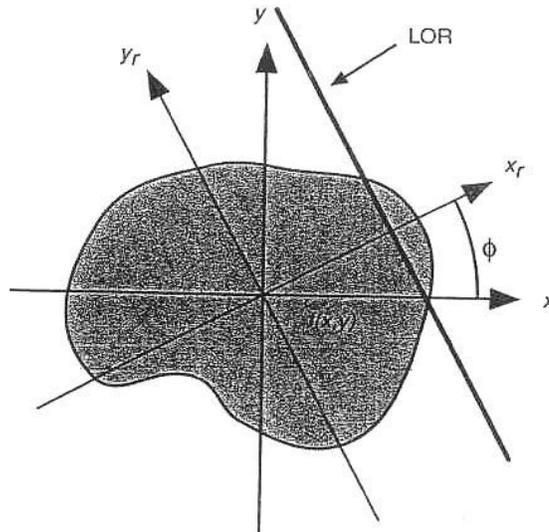
όπου I_0 είναι η ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, L είναι το μήκος διαδρομής που διανύει η ακτινοβολία μέσα από το αντικείμενο και y_r είναι η απόσταση κατά μήκος του L . Ορίζοντας το παρατηρούμενο σήμα ως:

$$g = \ln\left(\frac{I_0}{I}\right), \quad (1.3)$$

έχουμε τον ακόλουθο γραμμικό μετασχηματισμό[1]

$$g \triangleq g(x_r, \phi) = \int_L f(x, y) du, \quad -\infty < x_r < \infty, \quad 0 \leq \phi < \pi, \quad (1.4)$$

όπου (x_r, ϕ) αναπαριστούν τις συντεταγμένες της ακτινοβολίας που είναι σχετικές με τις συντεταγμένες (x, y) του αντικειμένου, όπως φαίνεται στο σχήμα (1.11)



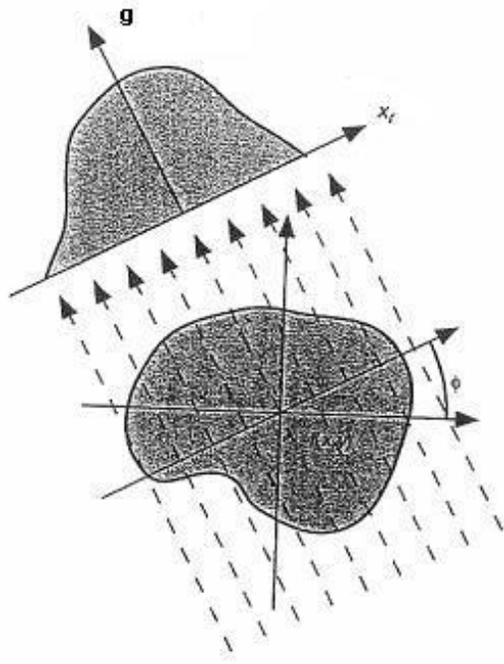
Σχήμα 1.11: Πώς ορίζονται οι συντεταγμένες της ακτινοβολίας και οι συντεταγμένες του αντικειμένου.

Οπότε το πρόβλημα ανακατασκευής είναι να βρούμε την αρχική εικόνα $f(x, y)$ του αντικειμένου από τις προβολές του $g(x_r, \phi)$. Πρακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε την $f(x, y)$ μόνο από ένα ορισμένο αριθμό προβολών $g(x_r, \phi)$, όπου $0 \leq \phi < \pi$, οι οποίες είναι διαθέσιμες, όπως φαίνεται στο σχήμα (1.12).

Η Υ.Τ. άλλαξε την πάγια τακτική της μέχρι τότε ιατρικής, μειώνοντας την ανάγκη "ανιχνευτικής" χειρουργικής. Δηλαδή η Υ.Τ. προσφέρει τη δυνατότητα εντοπισμού και απεικόνισης π.χ. εσωτερικού μορφώματος και, αν θεωρηθεί απαραίτητη, μπορεί να ακολουθήσει χειρουργική επέμβαση.

1.2.2 Τομογραφία Εκπομπής

Στη τομογραφία εκπομπής γίνεται χρήση των ραδιενεργών υλικών με στόχο την οπτικοποίηση της φυσιολογίας του σώματος και πηγή της ραδιενεργούς ακτινοβολίας είναι ο ίδιος ο ασθενής. Επίσης αυτό το είδος τομογραφίας πλεονεκτεί στη δυνατότητά της να απεικονίζει την ανατομία της τομής, αποφεύγοντας την "ενοχλητική" παρουσία της προβολής στην ίδια εικόνα των υπερ- ή/και υπο-κείμενων ιστών. Η καινοτομία που εισάγεται είναι ότι προσφέρεται η δυνατότητα αναπαράστασης λειτουργιών του ανθρώπινου σώματος όπως είναι ο μεταβολισμός της γλυκόζης και η ροή του αίματος αλλά και η ανίχνευση ειδικών παθήσεων όπως η στεφανιαία νόσος και οι όγκοι.



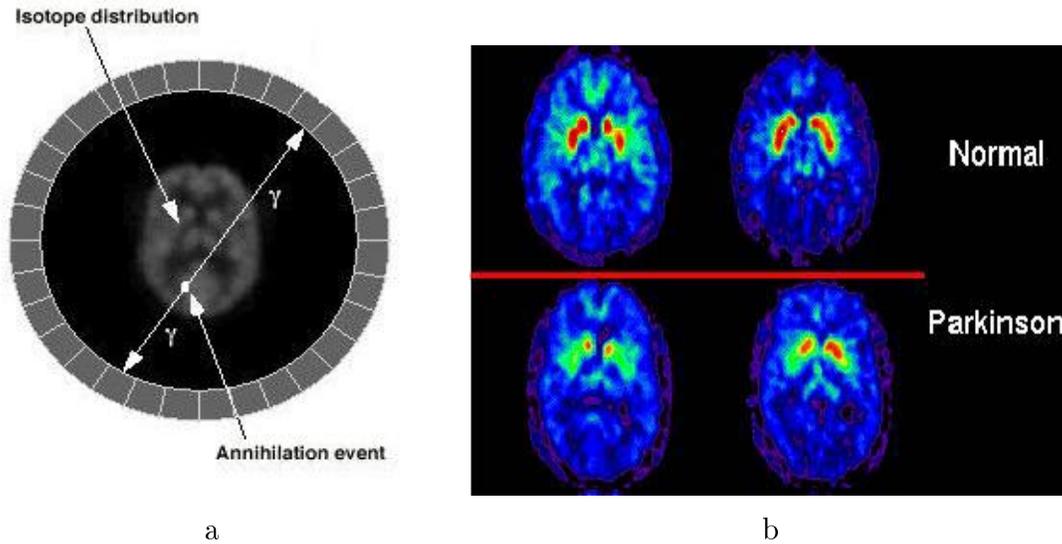
Σχήμα 1.12: Η προβολή $g(x_r, \phi)$ του αντικειμένου $f(x, y)$ για μια γωνία ϕ .

Η αρχή πάνω στην οποία βασίζεται είναι η "αρχή του tracer" (George de Hevesy, Νόμπελ Χημείας 1943), βάσει της οποίας: Τα ραδιενεργά υλικά συμμετέχουν στις φυσιολογικές διαδικασίες του οργανισμού, όπως ακριβώς και τα μη ραδιενεργά. Επειδή τα ραδιενεργά υλικά έχουν την τάση να επικάθονται σε συγκεκριμένες περιοχές του σώματος, όπως κόκκαλα, αίμα, όγκους και εκπέμπουν ακτίνες-Γ, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της ροής και της κατανομής σημαντικών ουσιών του σώματος. Η Τομογραφία Εκπομπής συμπεριλαμβάνει δυο τεχνικές ανάλογα με το είδος του ραδιενεργού υλικού που χρησιμοποιείται σε:

1. Τομογραφία Εκπομπής Ποζιτρονίου (Positron Emission Tomography -PET)
2. Μονοφωτονιακή Τομογραφία Εκπομπής (Single Photon Emission Computed Tomography-SPECT)

Τομογραφία Εκπομπής Ποζιτρονίου(PET)

Σ' αυτή τη τεχνική το απεικονιστικό σύστημα που χρησιμοποιείται αποτελείται από μια κυκλική διάταξη ανιχνευτών που περιστρέφεται γύρω από τον ασθενή, στον οποίο έχουμε εισάγει με ενδοφλέβια ένεση ραδιενεργό υλικό σε υγρή μορφή και έναν ανιχνευτή ραδιενεργού υλικού. Το ραδιενεργό υλικό δεν είναι παρά ισότοπα που εκπέμπουν ποζιτρόνια, και κινούνται κατά μήκος του σώματος, όπου τα περισσότερα από αυτά συγκεντρώνονται σε συγκεκριμένα όργανα ή ιστούς. Το φαινόμενο έχει ως εξής: Κάθε φορά που ένα ποζιτρόνιο συναντά κάποιο ηλεκτρόνιο προκαλείται αμοιβαία καταστροφή και εκπέμπονται δυο φωτόνια (ακτίνες-Γ) προς αντίθετες κατευθύνσεις. Όταν δυο ακτίνες-Γ εντοπισθούν



Σχήμα 1.13: a) Η PET σχηματικά και b) η εικόνα PET εγκεφάλου.

ταυτόχρονα θεωρείται ότι προήλθαν από την ίδια διάσπαση και ότι η διάσπαση έγινε πάνω στην ευθεία που ενώνει τους δυο ανιχνευτές, την οποία την ονομάζουμε line of response (LOR). Μ' αυτό το τρόπο παίρνουμε τη πληροφορία από την ανιχνευόμενη ακτινοβολία χωρίς να χρειαζόμαστε φυσική συσκευή παραλληλοποίησης της δέσμης (collimator). Ο τρόπος αυτός απόκτησης της πληροφορίας είναι γνωστός ως ηλεκτρονική παραλληλοποίηση (electronic collimation). Η ηλεκτρονική παραλληλοποίηση έχει δυο κύρια πλεονεκτήματα σε σχέση με τη φυσική παραλληλοποίηση. Αυτά είναι η καλύτερη ευαισθησία στην ανίχνευση φωτονίων και η μεγαλύτερη ομοιομορφία της συνάρτησης απόκρισης από το σημείο της πηγής ακτινοβολίας (point source response function).

Μονοφωτονιακή Τομογραφία Εκπομπής (SPECT)

Σε αντίθεση με την τομογραφία εκπομπής ποζιτρονίου εδώ γίνεται χρήση ισοτόπων που εκπέμπουν ένα φωτόνιο (ακτίνα-Γ) κάθε φορά που λαμβάνει χώρα μια διάσπαση. Η διαμόρφωση των προβολών γίνεται μέσω διάταξης σωληνοειδών, κατά τρόπο ώστε, μόνο οι ακτίνες που έχουν συγκεκριμένο προσανατολισμό να φτάνουν στους αισθητήρες. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται υπό διαφορετικές γωνίες. Μια ακόμα διαφορά σε σχέση με τη τεχνική PET είναι ότι το ισότοπο έχει μεγαλύτερο χρόνο ημιζωής¹. Ωστόσο, μόλις 1 στα 10.000 φωτόνια ανιχνεύονται και η ανακατασκευασμένη εικόνα είναι χαμηλής ανάλυσης. Συγκριτικά, η SPECT είναι πιο φτηνή από την PET, ωστόσο η PET δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

¹Κάθε μεμονωμένη ραδιενεργός ουσία έχει μια χαρακτηριστική περίοδο διάσπασης ή όπως λέγεται χρόνος ημιζωής (ο χρόνος μέσα στον οποίο η αρχική ποσότητα μειώθηκε στο ήμισυ). Επειδή οι ημιζωές τους είναι τόσο μακροχρόνιες που η αποσύνθεση δεν είναι αξιόλογη εντός της περιόδου παρατήρησης, η μείωση του συγκεκριμένου ποσοστού αποσύνθεσης μερικών ισοτόπων δεν είναι αισθητή με τις παρούσες μεθόδους. Το Θόριο-232, παραδείγματος χάριν, έχει χρόνο ημιζωής 14 δισεκατομμύρια έτη

1.3 Παρουσίαση Εργασίας

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με την ανακατασκευή τομογραφικών εικόνων. Αρχικά, στο Κεφάλαιο 2, θα μελετήσουμε τις βασικές μεθόδους ανακατασκευής τομογραφικών εικόνων με κύρια την Φιλτραρισμένη Οπισθοπροβολή, οι οποίες παρουσία θορύβου δίνουν μη ικανοποιητικά αποτελέσματα. Στο Κεφάλαιο 3, θα μελετήσουμε τις επαναληπτικές μεθόδους ανακατασκευής που παρουσιάζουν καλύτερα αποτελέσματα από τις βασικές μεθόδους παρουσία θορύβου. Αυτές είναι ο EM, ο MAP-EM και ο MAP με Median εκ των προτέρων κατανομή αλγόριθμος. Στο Κεφάλαιο 4, προτείνουμε τρία μοντέλα ανακατασκευής, ένα χωρικά αμετάβλητο μοντέλο, ένα χωρικά μεταβαλλόμενο και ένα χωρικά μεταβαλλόμενο ανά κατεύθυνση μοντέλο. Η χρήση των δυο τελευταίων έχει σκοπό να καταφέρουμε οι παράμετροι του μοντέλου μας να ακολουθούν τα δεδομένα και έτσι να έχουμε ένα πιο προσαρμοσμένο μοντέλο που θα κρατάει πειρσσότερη πληροφορία από τα δεδομένα. Τέλος, παρουσιάζουμε τα πειραματικά αποτελέσματα για όλες τις παραπάνω μεθόδους. Με καλύτερα, όπως αναμενόταν, τα χωρικά μεταβαλλόμενα μοντέλα, στα οποία έχουμε τη ταυτόχρονη διατήρηση των ακμών και την απομάκρυνση του θορύβου από την εικόνα.

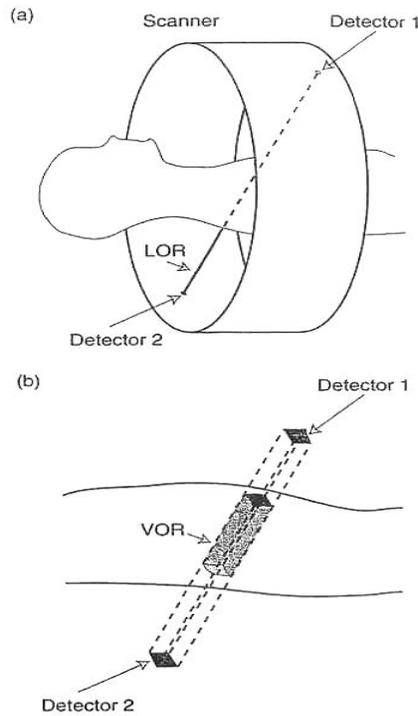
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ

-
- 2.1 Εισαγωγή
 - 2.2 Μετασχηματισμός Radon
 - 2.3 Θεώρημα Κεντρικής Τομής
 - 2.4 Ανακατασκευή Διδιάστατης Εικόνας
 - 2.5 Poisson Θόρυβος
-

2.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε για το πώς δημιουργούνται τα φωτόνια και πώς ανιχνεύονται στις διαφορετικές τεχνικές απεικόνισης. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα ασχολήθουμε με την τεχνική απεικόνισης PET, η οποία για την απόκτηση των δεδομένων χρησιμοποιεί το μοντέλο που έχει να κάνει με τις ευθείες πάνω στις οποίες γίνονται οι διασπάσεις και ανιχνεύουμε τα φωτόνια, όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1, τις λεγόμενες γραμμές απόκρισης (lines of response-LORs). Αρχικά, θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο που ενώνει τους δυο ανιχνευτές που βρίσκονται στην ίδια LOR ως μια μονάδα απόκρισης, που την ονομάζουμε volume of response-VOR, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.1). Θεωρώντας ότι έχουμε απουσία των φυσικών φαινομένων, όπως εξασθένιση ακτινοβολίας μετά τη διάσπαση ή τα φωτόνια μετά τη διάσπαση να διασκορπιστούν ή να ακολουθήσουν τυχαίες τροχιές και ότι δεν υπάρχουν μεταβολές στην αποδοτικότητα των ανιχνευτών, τότε ο συνολικός αριθμός των διασπάσεων συνεπακόλουθα και των φωτονίων που ανιχνεύονται θα είναι ανάλογος με το συνολικό ποσό ακτινοβολίας που έχει συλλέξει ο ανιχνευτής ραδιενεργού υλικού που



Σχήμα 2.1: Θεώρηση του σωλήνα (VOR) ως μια γραμμή (LOR).

περιέχεται στον υποθετικό σωλήνα ή VOR, όπως δηλώνεται από τη σκιασμένη περιοχή στο σχήμα (2.1)b.

Επειδή η μέτρηση των φωτονίων λόγω της εξασθένησης της ακτινοβολίας είναι μια τυχαία διαδικασία, έχουμε:

$$E[\textit{photons detected per second}] = \int_V \int_O \int_R s(x) f(x) dx \quad (2.1)$$

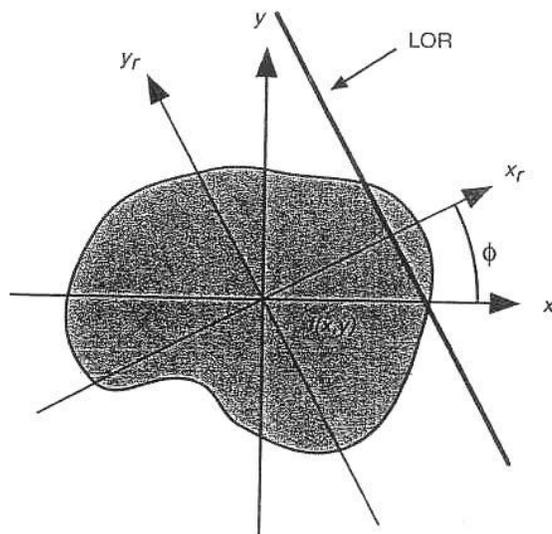
όπου E είναι η αναμενόμενη τιμή, $s(x)$ είναι η ευαισθησία του ανιχνευτή μέσα στον VOR στο σημείο $\mathbf{x} = (x, y, z)$ και $f(x)$ είναι η τρισδιάστατη κατανομή που αποκτήθηκε από τη δραστηριότητα του ανιχνευτή ραδιενεργού υλικού μέσα στον ασθενή. Με την εξίσωση 2.1 μπορούμε να ορίσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια το πρόβλημα αντιστροφής που θέλουμε να επιλύσουμε: Δοθείσης μιας θορυβώδους μέτρησης για τις μονάδες απόκρισης (VORs), ποιά είναι η αρχική εικόνα. Η διαδικασία υπολογισμού της $f(x)$ από τις θορυβώδεις μετρήσεις (προβολή) ονομάζεται ανακατασκευή εικόνας. Για να μπορέσουμε να κάνουμε τους υπολογισμούς μας θεωρούμε ότι η υπόλοιπη περιοχή εκτός του VOR έχει κατανομή ακτινοβολίας μηδέν, οπότε λαμβάνουμε υπόψη μας για τις μετρήσεις μόνο την ακτινοβολία που βρίσκεται κατά μήκος της LOR. Με άλλα λόγια, η ευαισθησία $s(x)$ είναι μια Δέλτα συνάρτηση, η οποία είναι μη μηδενική μόνο κατά μήκος μιας συγκεκριμένης γραμμής απόκρισης (LOR). Επίσης θεωρούμε ότι δεν υπάρχει θόρυβος στις μετρήσεις κάτι που μας επιτρέπει να παίρνουμε ακριβείς λύσεις στο πρόβλημά μας. Η παρουσία του θορύβου σημαίνει ότι δεν θα υπάρχουν ακριβείς λύσεις, οπότε στη πράξη είναι σίγουρο ότι απαιτείται

ένα είδος κανονικοποίησης των μετρήσεων. Αυτές οι θεωρήσεις-υποθέσεις που κάναμε για απλούστευση του μοντέλου μας στη πραγματικότητα παραβιάζονται όλες. Ωστόσο και χωρίς αυτές τις θεωρήσεις είναι δυνατόν να δημιουργηθούν μοντέλα που να επιλύουν το πρόβλημά μας. Αυτά τα μοντέλα τυπικά οδηγούν σε ένα σύνολο από πολλές εξισώσεις οι οποίες μπορούν να αντιστραφούν μόνο με τις λεγόμενες επαναληπτικές μεθόδους στις οποίες θα αναφέρθουμε σε επόμενο κεφάλαιο. Βασιζόμενοι στο μοντέλο με τις γραμμές απόκρισης, ωστόσο, μπορούμε να εξάγουμε θεωρητικές γνώσεις, οι οποίες οδηγούν σε αλγόριθμους ανακατασκευής που είναι χρήσιμη στη πράξη.

2.2 Μετασχηματισμός Radon

Για απεικόνιση σε δυο διαστάσεις θεωρούμε ότι οι γραμμές απεικόνισης εκτείνονται σ'ένα συγκεκριμένο επίπεδο της τρισδιάστατης εικόνας που θέλουμε να απεικονίσουμε. Τα δεδομένα που αποκτήθηκαν συλλέχθηκαν κατά μήκος των LORs που περνάνε από το διδιάστατο αντικείμενο $f(x, y)$, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.2) και την εξίσωση (2.1) τη γράφουμε θεωρώντας ένα VOR να είναι μια LOR [1] συντεταγμένων, το οποίο περιστρέφεται δεξιόστροφα κατά γωνία ϕ , όπως φαίνεται στο σχήμα (2.2). Οι νέες συντεταγμένες (x_r, y_r) , εφόσον αποκτήθηκαν από την περιστροφή των (x, y) -συντεταγμένων κατά γωνία ϕ , σχετίζονται μ'αυτές ως εξής:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}$$

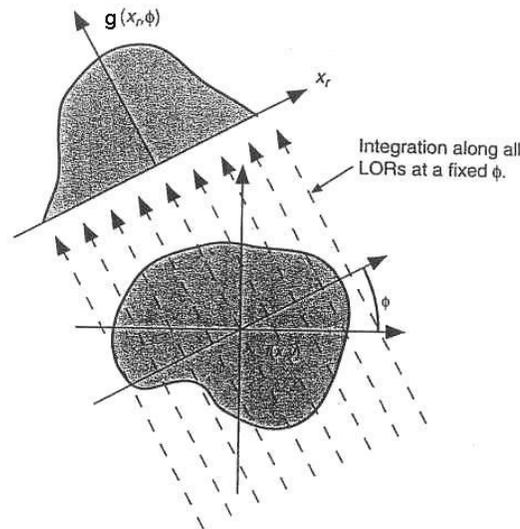


Σχήμα 2.2: Οι τιμές της $f(x, y)$ ολοκληρώνονται κατά μήκος των LORs για να πάρουμε τη προβολή της.

Από την παραπάνω σχέση η εξίσωση (2.1) γράφεται:

$$g(x_r, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy_r, \quad (2.2)$$

όπου ολόκληρη η γραμμική απόκρισης- LOR περιγράφεται από το x_r και την γωνία ϕ και το $g(x_r, \phi)$ είναι το ολοκλήρωμα των σημείων του αντικειμένου (ασθενή) $f(x, y)$ κατά μήκος της LOR. Το πρόβλημα ανακατασκευής της εικόνας μπορεί τώρα να οριστεί επακριβώς: Δοθείσης της προβολής $g(x_r, \phi)$ για όλα τα x_r και ϕ , ποιά είναι η αρχική συνάρτηση $f(x, y)$ που αντιστοιχεί στην αρχική εικόνα του αντικειμένου. Για μια συγκεκριμένη κατεύθυνση ϕ , το σύνολο των δεδομένων για όλες τις LORs, που περνάνε από όλα τα στοιχεία του άξονα x_r γι' αυτή τη γωνία ορίζουν την προβολή της $f(x, y)$, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.3).

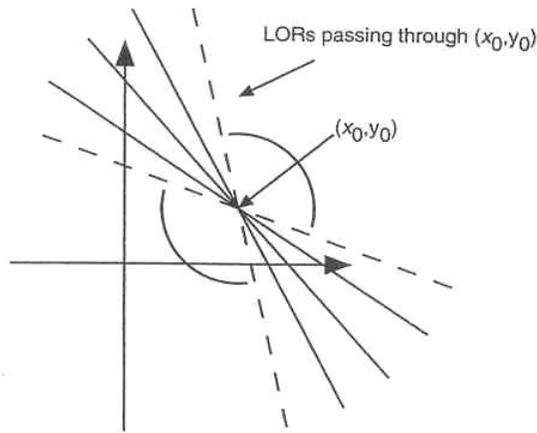


Σχήμα 2.3: Η προβολή $g(x_r, \phi)$ της $f(x, y)$ ολοκληρώνοντας όλες τις LORs που σχηματίζουν γωνία ϕ με τον άξονα των x .

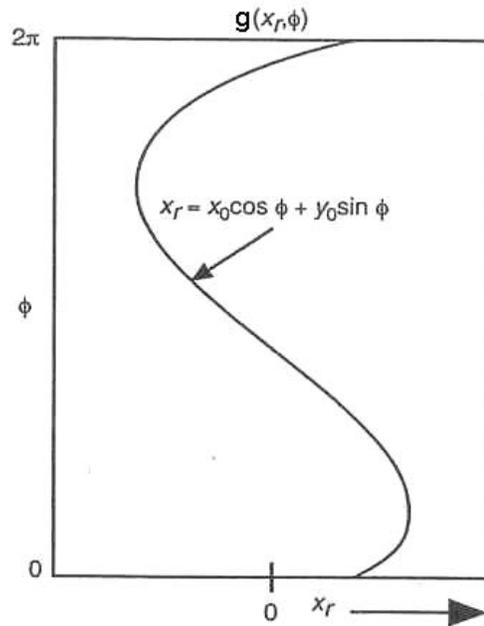
Η συλλογή όλων των προβολών για $0 \leq \phi < 2\pi$, με βήμα γωνιών προβολής τόσο μικρό ώστε να ληφθούν όσο το δυνατό περισσότερες υπολογιστικά προβολές και να έχουμε τη λήψη ενός ικανοποιητικού αποτελέσματος, ως μια δισδιάστατη συνάρτηση των x_r, ϕ έχει οριστεί ως sinogram από τον Σουηδό επιστήμονα Paul Edholm διότι το σύνολο των LORs που περνάνε από ένα συγκεκριμένο σημείο (x_0, y_0) , σχήμα (2.4) βρίσκονται σε μια σιγμοειδή συνάρτηση που περιγράφεται από τον τύπο $x_r = x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi$. Αυτός ο τύπος απεικονίζεται στο σχήμα (2.5).

Γενικά, το sinogram ενός αντικειμένου είναι μια γραμμική τοποθέτηση όλων των σιγμοειδών που αντιστοιχούν σε κάθε σημείο του αντικειμένου. Επίσης, ότι οι LORs που περνάνε από ένα συγκεκριμένο σημείο (x_0, y_0) βρίσκονται σε μια σιγμοειδή συνάρτηση μπορούμε να το παρατηρήσουμε και από το γεγονός ότι αν (r, θ) είναι οι πολικές συντεταγμένες τυχόντος σημείου $G(x, y)$ τότε ισχύει:

$$x = r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = r \sin \theta$$



Σχήμα 2.4: Γραμμές απόκρισης $x_r = x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi$ που περνάνε από το ίδιο σημείο για διαφορετικές γωνίες.

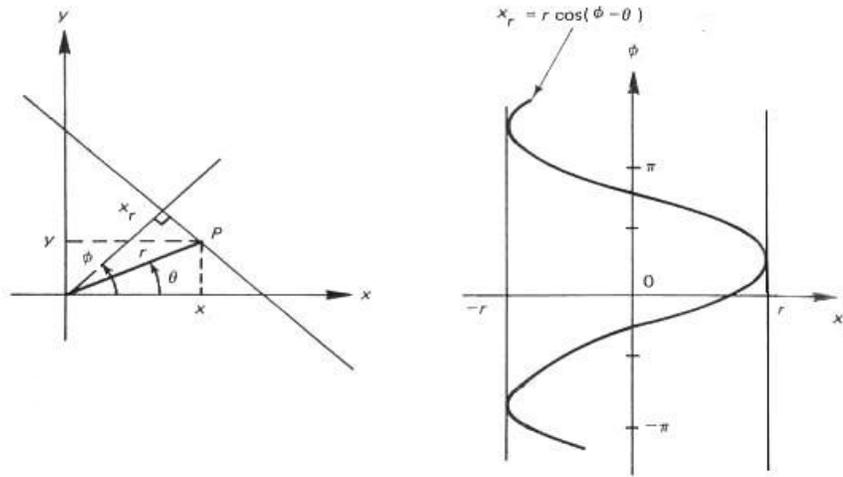


Σχήμα 2.5: Οι γραμμές απόκρισης $x_r = x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi$ έχουν σιγμοειδή μορφή.

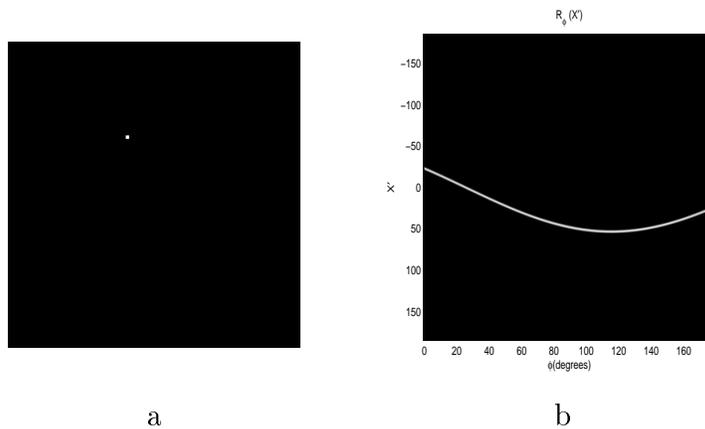
τότε με βάση το σχήμα (2.6): $x_r = r \cos(\phi - \theta)$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για δεδομένο σημείο (r, θ) η σχέση $x_r = r \cos(\phi - \theta)$ δίνει το γεωμετρικό τόπο όλων των σημείων στο (x_r, ϕ) , ο οποίος είναι ένα ημιτονοειδές. Στο σχήμα (2.7) φαίνεται ξεκάθαρα το γεγονός ότι η προβολή (μετασχηματισμός Radon) ενός σημείου είναι ημιτονοειδές. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός αναφέρεται ως sinogram.

Η συσχέτιση του διδιάστατου αντικειμένου με τις προβολές του $f(x, y) \rightarrow g(x_r, \phi)$



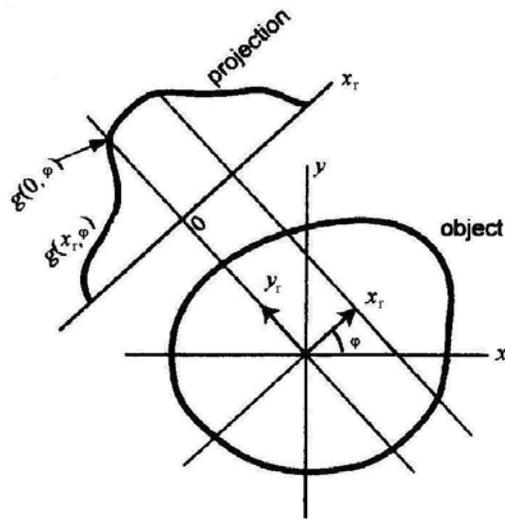
Σχήμα 2.6: Ο γεωμετρικός τύπος όλων των σημείων στο (x_r, ϕ) είναι ημιτονοειδές.



Σχήμα 2.7: Στο σχήμα a. έχουμε την αρχική Εικόνα και στο b. το Μετασχηματισμό Radon σημείου.

ονομάζεται μετασχηματισμός Radon [8], από το γερμανό Johann Radon, ο οποίος το 1917 πρότεινε αυτό το μετασχηματισμό και δημιούργησε το βασικό μαθηματικό υπόβαθρο για τη μελέτη του προβλήματός μας. Ας θεωρήσουμε το σύστημα συντεταγμένων του σχήματος(2.8). Η συνάρτηση $g(x_r, \phi)$ είναι η προβολή της εικόνας $f(x,y)$ στον άξονα των x_r για γωνία περιστροφής ϕ . Η συνάρτηση $g(x_r, \phi)$ δίνεται από το ολοκλήρωμα κατά μήκος της γραμμής απόκρισης της οποίας το κάθετο διάνυσμα σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα των x . Η τιμή $g(0, \phi)$ υπολογίζεται ως η ολοκλήρωση κατά μήκος της γραμμής απόκρισης που περνάει από την αρχή των αξόνων των (x,y) -συντεταγμένων.

Καθώς τα σημεία της LOR, της οποίας το κάθετο διάνυσμα σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα των x και περνάει από την αρχή των αξόνων των (x,y) -συντεταγμένων ικανοποιούν την :



Σχήμα 2.8: Φαίνεται η προβολή $g(x_r, \phi)$ της εικόνας $f(x, y)$ στον άξονα των x_r για γωνία περιστροφής ϕ .

$$x \cos \phi + y \sin \phi = 0 \quad (2.3)$$

διότι για το κάθετο διάνυσμα x_r ισχύει $x_r = x \cos \phi + y \sin \phi$ από παραπάνω μετασχηματισμό. Η ολοκλήρωση κατά μήκος της LOR, της οποίας το κάθετο διάνυσμα σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα των x και περνάει από την αρχή των αξόνων των (x, y) -συντεταγμένων, όπως φαίνεται στα σχήματα (2.2) και (2.3), σημαίνει την ολοκλήρωση της συνάρτησης $f(x, y)$ μόνο κατά τα σημεία που ικανοποιούν τη σχέση (2.3). Το $g(0, \phi)$ εκφράζεται χρησιμοποιώντας τη δ-συνάρτηση (Dirac delta function) για την οποία ισχύει η ιδιότητα:

$$\int_a^c g(x) \delta(x - b) dx = g(b), \quad \text{αν } a < b < c \quad (2.4)$$

και έχουμε:

$$g(0, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \phi + y \sin \phi) dx dy \quad (2.5)$$

Όμοια, από την εξίσωση (2.3) παίρνουμε ότι τα σημεία της γραμμής, της οποίας το κάθετο διάνυσμα σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα των x και της οποίας η απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι x_r ικανοποιούν την παρακάτω εξίσωση:

$$(x - x_r \cos \phi) \cos \phi + (y - x_r \sin \phi) \sin \phi = 0 \quad (2.6)$$

που ισοδυναμεί με τη σχέση (2.7)

$$x \cos \phi + y \sin \phi - x_r = 0 \quad (2.7)$$

καθώς αυτή τη γραμμή απόκρισης την παίρνουμε μετακινώντας τη γραμμή απόκρισης από την αρχή των αξόνων κατά $x_r \cos \phi$ στην κατεύθυνση x και $x_r \sin \phi$ στην κατεύθυνση y . Γι' αυτό το λόγο, όμοια από την (2.5) παίρνουμε:

$$g(x_r, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \phi + y \sin \phi - x_r) dx dy, \quad (2.8)$$

$$-\infty < x_r < \infty, 0 \leq \phi < \pi$$

Η εξίσωση (2.8) ονομάζεται μετασχηματισμός Radon και υπολογίζει την προβολή ($g(x_r, \phi)$) μιας εικόνας $f(x, y)$. Η ύπαρξη της χρουστικής συνάρτησης δ μέσα στο ολοκλήρωμα εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση θα υπολογιστεί μόνο κατά την ευθεία που απέχει x_r από την αρχή των αξόνων και το κάθετο σε αυτήν διάνυσμα σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα των x . Προφανώς, είναι κατανοητό ότι δεν έχει νόημα η γωνία προβολής να είναι μεγαλύτερη του π . Μολονότι ο μετασχηματισμός Radon εκφράζει τη προβολή ως το διπλό ολοκλήρωμα ως προς τις (x, y) -συντεταγμένες, η προβολή μπορεί να εκφραστεί πιο φυσικά από το ολοκλήρωμα ως προς μια μεταβλητή. Ας ξαναγράψουμε, λοιπόν, την εξίσωση (2.8) σε ολοκλήρωμα μιας μεταβλητής. Καθώς τις (x_r, y_r) -συντεταγμένες κατά τη κατεύθυνση της προβολής τις πήραμε περιστρέφοντας τις (x, y) -συντεταγμένες κατά γωνία ϕ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Έτσι, έχουμε τις παρακάτω σχέσεις μεταξύ των (x_r, y_r) και των (x, y) :

$$\begin{cases} x_r = x \cos \phi + y \sin \phi \\ y_r = -x \sin \phi + y \cos \phi \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} x = x_r \cos \phi - y_r \sin \phi \\ y = x_r \sin \phi + y_r \cos \phi \end{cases} \quad (2.10)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.10) στην εξίσωση (2.8), παρατηρούμε ότι το όρισμα της δ συνάρτησης είναι:

$$\begin{aligned} x \cos \phi + y \sin \phi - x_r &= (x_r \cos \phi - y_r \sin \phi) \cos \phi + (x_r \sin \phi + y_r \cos \phi) \sin \phi - x_r \\ &= x_r (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - y_r \sin \phi \cos \phi + y_r \cos \phi \sin \phi - x_r = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

και η εξίσωση (2.8) γίνεται:

$$g(x_r, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_r \cos \phi - y_r \sin \phi, x_r \sin \phi + y_r \cos \phi) \delta(0) dx_r dy_r \quad (2.12)$$

Αφού η δ-συνάρτηση στην εξίσωση (2.8) είναι συνάρτηση της μεταβλητής x_r , έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_r) dx_r = 1 \quad (2.13)$$

Από τα παραπάνω ο μετασχηματισμός Radon $g(x_r, \phi)$ στην εξίσωση (2.8) μετασχηματίζεται στο παρακάτω ολοκλήρωμα της μεταβλητής y_r ,

$$g(x_r, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_r \cos \phi - y_r \sin \phi, x_r \sin \phi + y_r \cos \phi) dy_r, \quad (2.14)$$

$$-\infty < x_r < \infty, 0 \leq \phi < \pi.$$

2.3 Θεώρημα Κεντρικής Τομής

Η ανακατασκευή εικόνας από τις προβολές της είναι ισοδύναμη με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Radon, δηλ. να πάρουμε της συνάρτηση $f(x,y)$ δοθέντος της $g(x_r, \phi)$ για $0 \leq \phi < \pi$. Το κλειδί για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα είναι το Θεώρημα Κεντρικής Τομής το οποίο δηλώνει ότι: Ο 1-Δ μετασχηματισμός Fourier ως προς x_r , της προβολής $g(x_r, \phi)$ για γωνία ϕ με τον άξονα των x είναι ισοδύναμος με τον 2-Δ μετασχηματισμό Fourier της αρχικής εικόνας πάνω στην τομή που σχηματίζει γωνία ϕ με τους άξονες του πεδίου συχνοτήτων. Πιο απλά:

$$G(u_{xr}, \phi) = F(u_{xr} \cos \phi, u_{xr} \sin \phi) \quad (2.15)$$

όπου u_{xr} είναι αντίστοιχα ο άξονας x_r στο πεδίο των συχνοτήτων, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.9).

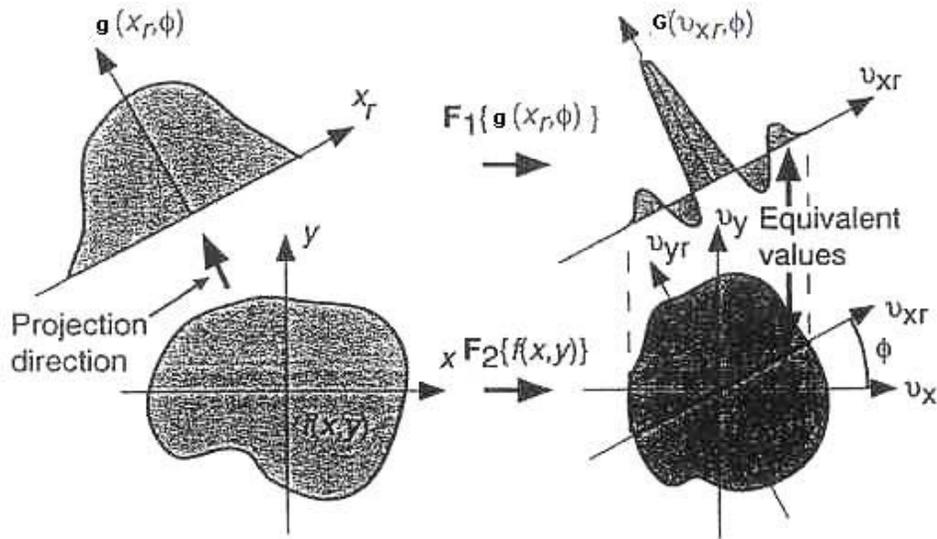
Η απόδειξη του θεωρήματος έχει ως εξής: Αρχίζουμε από τον ορισμό του 1-Δ μετασχηματισμού Fourier και του αντίστροφου μετασχηματισμού:

$$F(u_x) = F_1\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi x u_x} dx \quad (2.16)$$

$$f(x) = F_1^{-1}\{F(u_x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u_x) e^{i2\pi x u_x} du_x \quad (2.17)$$

όπου υιοθετούμε το συμβολισμό των κεφαλαίων γραμμάτων για τις συναρτήσεις των μετασχηματισμών Fourier αλλά και γενικά ο τελεστής $F_n\{f(x)\}$ δηλώνει το n-διάστατο μετασχηματισμό Fourier της $f(x)$ καθώς και ο $F_n^{-1}\{F(u)\}$ δηλώνει τον αντίστροφο n-διάστατο μετασχηματισμό Fourier και τέλος το u_x αντιστοιχεί στη συντεταγμένη x αλλά στο πεδίο των συχνοτήτων. Σύμφωνα με το σχήμα (2.9), ο 1-Δ μετασχηματισμός Fourier της προβολής δίνεται από την εξίσωση:

$$G(u_{xr}, \phi) = F_1\{g(x_r, \phi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_r, \phi) e^{-i2\pi x_r u_{xr}} dx_r \quad (2.18)$$



Σχήμα 2.9: Σχηματική αναπαράσταση του θεωρήματος κεντρικής τομής, όπου φαίνεται η ισοδυναμία ανάμεσα στο 1-Δ Fourier της προβολής για γωνία ϕ με το 2-Δ Fourier της αρχικής εικόνας.

Το πιο σημαντικό βήμα είναι στην εξίσωση (2.18) να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (2.2) οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
 G(u_{xr}, \phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_r, \phi) e^{-i2\pi x_r u_{xr}} dx_r \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi x_r u_{xr}} dx_r dy_r \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(x \cos \phi + y \sin \phi) u_{xr}} dx dy \\
 &= F(u_{xr} \cos \phi, u_{xr} \sin \phi),
 \end{aligned}$$

όπου $F(u_x, u_y) = F_2[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(xu_x + yu_y)} dx dy$. Μπορέσαμε και εφαρμόσαμε τη σχέση:

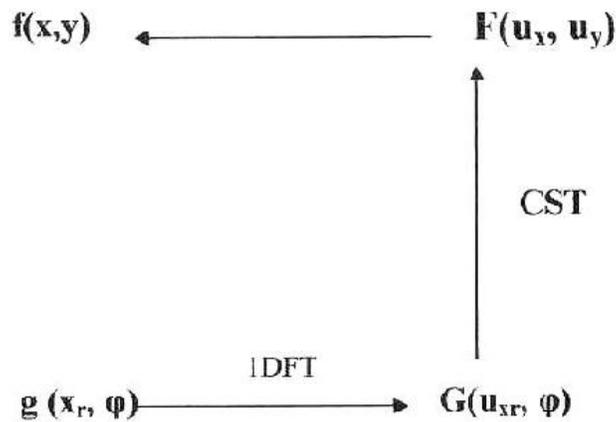
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xr} \\ u_{yr} \end{pmatrix}$$

διότι ο μετασχηματισμός Fourier παραμένει σταθερός κατά την περιστροφή των συντεταγμένων του, οπότε μπορούμε να έχουμε τελικά ότι:

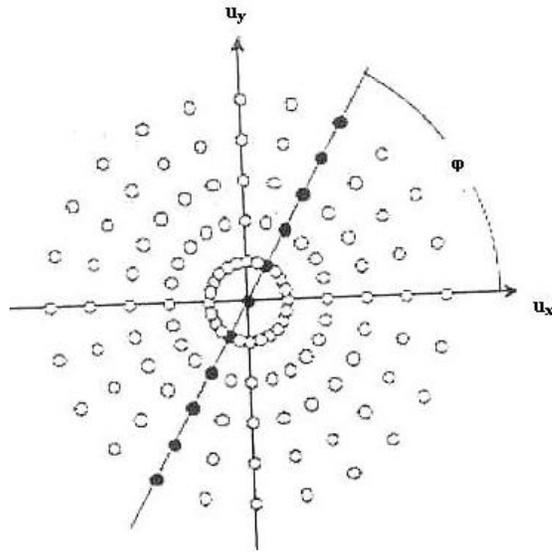
$$G(u_{xr}, \phi) = F(u_x, u_y)|_{u_{yr}=0} \quad (2.19)$$

Η εξίσωση (2.10) είναι το κλειδί για την κατανόηση της τομογραφικής απεικόνισης. Καταλήγουμε δηλ, ότι ο μετασχηματισμός Fourier της μονοδιάστατης προβολής για γωνία ϕ είναι ισοδύναμος με το διδιάστατο μετασχηματισμό Fourier του αντικειμένου πάνω στη τομή που σχηματίζει την ίδια γωνία με τους άξονες στο πεδίο των συχνοτήτων. Καθίσταται, λοιπόν, προφανές ότι αφού ο 2- Δ μετασχηματισμός Fourier της εικόνας μπορεί να ληφθεί από τον 1- Δ μετασχηματισμό Fourier των προβολών, η αρχική εικόνα μπορεί να ανακατασκευαστεί μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier της εικόνας, δεδομένου ότι μια συνάρτηση προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τον μετασχηματισμό Fourier της. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει ξεκάθαρα τα βήματα που ακολουθούνται για τη μέθοδο ανακατασκευής με μετασχηματισμό Fourier:



Σχήμα 2.10: Μέθοδος ανακατασκευής με το μετασχηματισμό Fourier.

Μολονότι αυτή η μέθοδος είναι θεωρητικά η απλούστερη από διάφορες μεθόδους ανακατασκευής, πρακτικά δεν είναι και τόσο δημοφιλής για τον παρακάτω λόγο. Για να αποκτήσουμε τις προβολές για όλες τις γωνίες ϕ στο συνεχές διάστημα $[0, \pi]$ είναι πρακτικά αδύνατον διότι πρακτικά το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι οι γωνίες προβολής να λαμβάνονται με κάποιο μικρό βήμα. Ο μετασχηματισμός Fourier της $g(x_r, \phi)$ υπολογίζεται πρακτικά από τους υπολογιστές χρησιμοποιώντας το διακριτό μετασχηματισμό Fourier δειγματολειπτώντας ως προς x_r . Ο μετασχηματισμός Fourier $F(u_x, u_y)$ υπολογίζεται μόνο από τα διακριτά σημεία που βρίσκονται ακτινικά στον επίπεδο (u_x, u_y) . Ο διακριτός αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του $F(u_x, u_y)$ ή γνωστός και ως Fast Fourier Transform, απαιτεί τα σημεία του $F(u_x, u_y)$ να είναι σ' ένα τετράγωνο πλέγμα. Καθώς τις περισσότερες φορές τα ακτινικά



Σχήμα 2.11: Θεωρούμε ένα τετράγωνο πλέγμα που περιέχει τα ακτινικά και αναγκαστικά και άλλα σημεία, τα οποία προκύπτουν με παρεμβολή.

σημεία και τα σημεία του τετράγωνου πλέγματος δεν ταυτίζονται (2.11), οι τιμές του $F(u_x, u_y)$ στα σημεία του πλέγματος πρέπει να υπολογιστούν από τις τιμές των ακτινικών σημείων με κάποια μέθοδο παρεμβολής. Το σφάλμα λόγω της παρεμβολής στο χώρο της συχνότητας μπορεί να δημιουργήσει ψευδοενδείξεις, τα λεγόμενα artifacts, που είναι θόρυβος που δεν υπάρχει στην αρχική εικόνα αλλά προκαλείται από τη παραπάνω διαδικασία και απλώνεται σε ολόκληρη την εικόνα. Τα σφάλματα αυτά μας οδηγούν σε λάθος συμπεράσματα για την εικόνα που συνεπάγεται και λάθος ιατρική διάγνωση, διότι σε μια τέτοια διάγνωση μπορεί να βρεθεί ένα αντικείμενο στην εικόνα το οποίο κανονικά δε θα 'πρεπε να παρατηρούνταν, για παράδειγμα μπορεί να διαγνωστεί η ύπαρξη ενός όγκου ενώ στην πραγματικότητα να μην υπάρχει.

2.4 Ανακατασκευή Δισδιάστατης Εικόνας

2.4.1 Οπισθοπροβολή

Ένα ουσιώδες βήμα για την ανακατασκευή εικόνας είναι η οπισθοπροβολή (backprojection) [9] και ορίζεται ως εξής:

$$b(x, y) = \int_0^\pi g(x_r, \phi) d\phi \quad (2.20)$$

όπου $x_r = x \cos \phi + y \sin \phi$ από την σχέση

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}$$

Αν θέλουμε να γράψουμε το τελεστή οπισθοπροβολής b σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$b(x, y) \triangleq b_p(r, \phi) = \int_0^\pi g(r(\cos(\phi - \theta), \phi)) d\phi \quad (2.21)$$

Η φυσική σημασία του τελεστή b είναι ότι αναπαριστά τη συσσώρευση όλων των προβολών, για όλες τις γωνίες, για κάθε σημείο (x, y) ή (r, ϕ) της εικόνας που περνούν. Μια πιο αποδοτική διαδικασία είναι αυτή που απεικονίζεται στο σχήμα (2.12), όπου για κάθε τιμή της ϕ όλα τα σημεία της εικόνας (x, y) ενημερώνονται με τις κατάλληλες τιμές της $g(x_r, \phi)$. Έτσι, αντιλαμβανόμαστε ότι ο τύπος για το τελεστή b μπορεί να περιγραφεί από το γεγονός ότι τοποθετούμε μια τιμή της $g(x_r, \phi)$ πίσω στην εικόνα κατά μήκος της κατάλληλης γραμμής απόκρισης (LOR). Επειδή, όμως, δεν γνωρίζουμε ακριβώς η τιμή της $g(x_r, \phi)$ κατά μήκος μιας συγκεκριμένης LOR από ποια σημεία της LOR προήλθε, αφού με την ολοκλήρωση κατά μήκος της LOR χάνεται αυτή η πληροφορία, το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να δώσουμε μια σταθερή τιμή σε όλα τα σημεία κατά μήκος της LOR. Αυτό μπορεί να περιγραφεί ως:

$$b^1(x, y|\phi) = g(x_r, \phi), \quad (2.22)$$

όπου $b^1(x, y|\phi)$ εκφράζει τη 2-Δ συνάρτηση που παίρνουμε από την οπισθοπροβολή της προβολής που αφορά σε μια γωνία ϕ , με $x_r = x \cos \phi + y \sin \phi$.

Για να πάρουμε τη συνολική οπισθοπροβολή της εικόνας για όλες τις γωνίες ϕ , τοποθετούμε την $b^1(x, y|\phi)$ σ' ένα ολοκλήρωμα ως προς το ϕ :

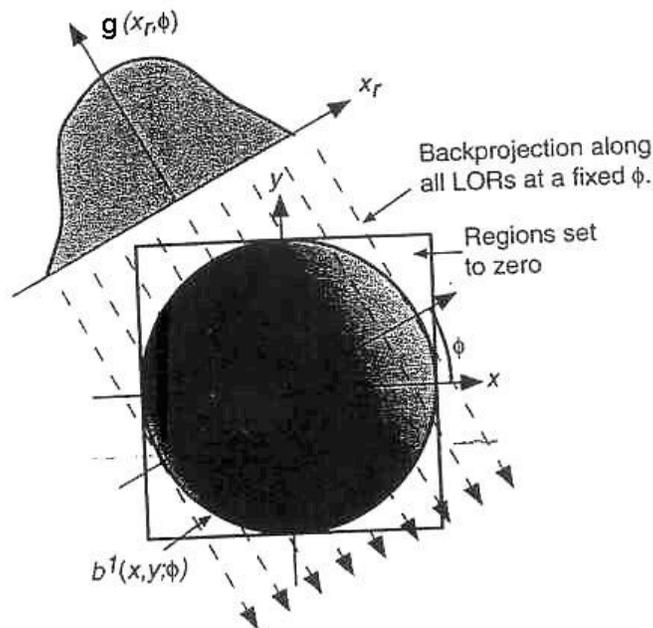
$$b(x, y) = \int_0^\pi b^1(x, y|\phi) d\phi \quad (2.23)$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό Fourier $B^1(u_x, u_y, |\phi) = F_2\{b_1(x, y|\phi)\}$ και

$$B^1(u_x, u_y, |\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b^1(x, y|\phi) e^{-2\pi i(xu_x + yu_y)} dx dy \quad (2.24)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_r, \phi) e^{2\pi i(x_r u_{xr} + y_r u_{yr})} dx_r dy_r = G(u_{xr}, \phi) \delta(u_{yr}) \quad (2.25)$$

όπου το τελευταίο αποτέλεσμα ισχύει μόνο αν υποθέσουμε ότι η $b^1(x, y|\phi)$ είναι σταθερή κατά την y_r κατεύθυνση. Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός Fourier της οπισθοπροβολής για μια συγκεκριμένη γωνία έχει μη μηδενικές τιμές κατά μήκος της γραμμής που περνάει από την αρχή των αξόνων. Κατά μήκος της γραμμής, οι τιμές είναι ίσες με το μετασχηματισμό Fourier της προβολής πολλαπλασιασμένο με μια δέλτα συνάρτηση σε κατεύθυνση κάθετη στη γραμμή αυτή. Αυτό το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα (2.13)



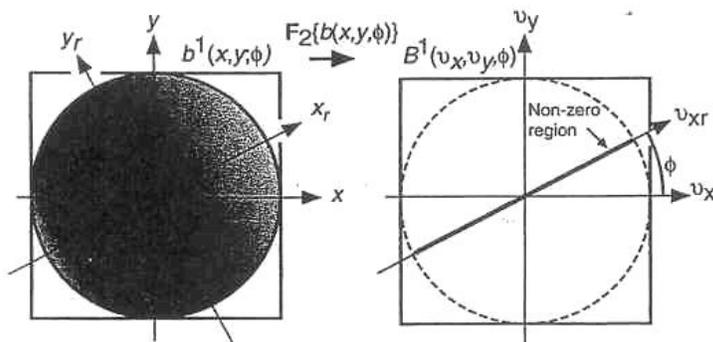
Σχήμα 2.12: Οπισθοπροβολή για να πάρουμε τις τιμές του τελεστή b^1 για μια γωνία ϕ .

και είναι γνωστό ως θεώρημα οπισθοπροβολής και είναι αποτέλεσμα του θεωρήματος της κεντρικής τομής.

Αν εκτελέσουμε οπισθοπροβολή για δυο γωνίες, ϕ_1 και ϕ_2 , και εξετάσουμε το μετασχηματισμό Fourier του αποτελέσματος, τότε παρατηρούμε ότι η τιμή στην αρχή των αξόνων διπλασιάστηκε. Στο πλαίσιο, λοιπόν, της συνεχούς δειγματοληψίας ως προς ϕ έχουμε:

$$B(u_x, u_y) = \int_0^\pi B^1(u_x, u_y | \phi) d\phi = \int_0^\pi F(u_x, u_y) \delta(u_{y\phi}) d\phi \quad (2.26)$$

Για να ερμηνεύσουμε την εξίσωση (2.26) θεωρούμε τα u_x, u_y ως παραμέτρους και $\delta(u_{y\phi}) = \delta(u_{y\phi}(\phi))$ χρησιμοποιώντας τη σχέση:



Σχήμα 2.13: Ο μετασχηματισμός Fourier του τελεστή οπισθοπροβολής b^1 .

$$\begin{pmatrix} u_{xr} \\ u_{yr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

Από την ταυτότητα:

$$\delta(f(x)) = \sum_i (\delta(x - x_i) / |f'(x_i)|) \quad (2.27)$$

όπου x_i είναι οι μηδενικές τιμές της συνάρτησης $f(x)$, καταλήγουμε σ' ένα σημαντικό αποτέλεσμα:

$$B(u_x, u_y) = \frac{F(u_x, u_y)}{u} \quad (2.28)$$

όπου $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ είναι η μεταβλητή στο χώρο της ακτινικής συχνότητας. Η εξίσωση (2.28) δηλώνει ότι ο διδιάστατος μετασχηματισμός Fourier της οπισθοπροβολής είναι ο μετασχηματισμός Fourier του αντικειμένου με βάρους, την αντίστροφη τιμή της απόστασης από την αρχή των αξόνων. Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της εξίσωσης (2.28) έχουμε:

$$b(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \quad (2.29)$$

όπου $*$ αναπαριστά την κατάλληλη συνέλιξη, η οποία είναι 2- Δ στην προκειμένη περίπτωση.

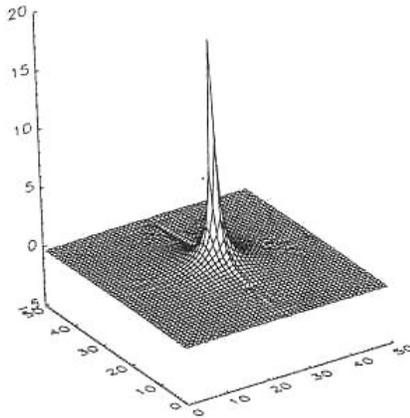
Χρησιμοποιώντας τον 2- Δ μετασχηματισμό Fourier μιας συμμετρικής ως προς την περιστροφή συνάρτησης, ο οποίος είναι γνωστός και ως μετασχηματισμός Hankel, η συνάρτηση του γραμμικού συστήματος απόκρισης δίνεται ως εξής:

$$h(x, y) = F_2^{-1} \frac{1}{u} = \frac{1}{r} \quad (2.30)$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Από την εξίσωση (2.30) παρατηρούμε ότι τα δεδομένα που προκύπτουν από το μετασχηματισμό της οπισθοπροβολής αποτελούν ένα σύστημα απεικόνισης αμετάβλητο στη μετατόπιση (shift-invariant).

Στα συστήματα απεικόνισης η συνάρτηση του γραμμικού συστήματος απόκρισης $h(x, y)$ συχνά ονομάζεται συνάρτηση σημειακού διασκορπισμού (PSF) διότι περιγράφει την εμφάνιση ενός ιδανικού σημείου - πηγή αντικειμένου μετά από τη διαδικασία απεικόνισης. Επειδή ο όρος $1/u$ ενισχύει τις χαμηλές συχνότητες και μειώνει τις υψηλές συχνότητες, η έξοδος που παίρνουμε ως αποτέλεσμα στο σύστημα είναι μια θολωμένη εκδοχή της εισόδου. Γι' αυτό το λόγο, η οπισθοπροβολή από μόνη της δεν επαρκεί ώστε να έχουμε μια ακριβή ανακατασκευή μιας εικόνας. Επίσης, επιπρόσθετες τεχνικές πρέπει να χρησιμοποιηθούν ώστε να αντισταθμίσουμε το θόλωμα που προκαλεί στην εικόνα η συνάρτηση $1/r$. Στο σχήμα (2.14) φαίνεται η γραφική παράσταση της οπισθοπροβολής ενός σημείου, από την

οποία αντιλαμβανόμαστε γιατί με την οπισθοπροβολή παίρνουμε θολωμένη εκδοχή της εικόνας.



Σχήμα 2.14: Η γραφική παράσταση της οπισθοπροβολής ενός σημείου.

Ο τελεστής b σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$b(r, \phi) = f(r, \phi) * \frac{1}{|r|} \quad (2.31)$$

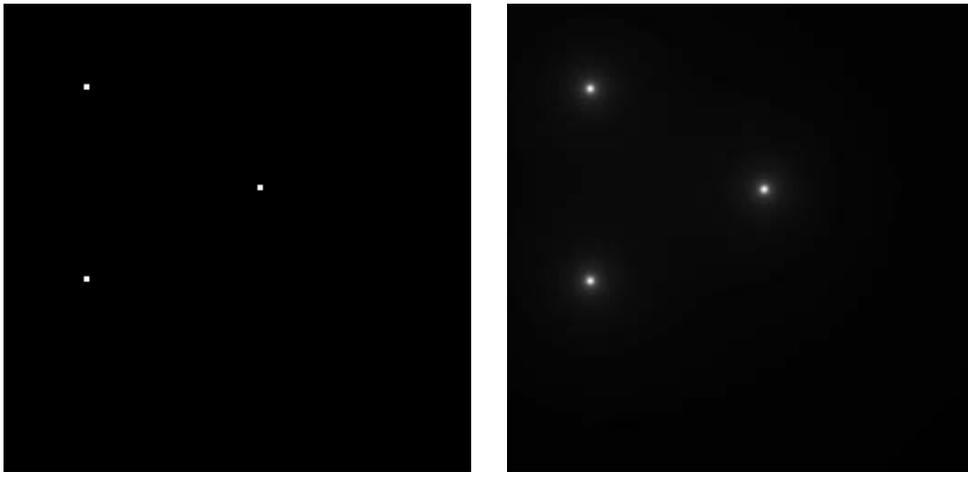
Στο σχήμα (2.15) παρατηρούμε ότι, η εφαρμογή του τελεστή b στον μετασχηματισμό Radon μεμονομένων σημείων είναι όπως προαναφέρθηκε μια θολή εκδοχή των αρχικών σημείων.

Κάτι που αναφέρθηκε παραπάνω είναι ότι ο τελεστής b διαδίδει με ομοιόμορφο τρόπο το sinogram πίσω στο χώρο της εικόνας κατά μήκος των γραμμών προβολής. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό από την ακολουθία των παρακάτω σχημάτων, όπου παίρνουμε την Back-Projected εκδοχή της εικόνας για τις διάφορες γωνίες περιστροφής του συστήματος και τελικά λαμβάνουμε την BackProjected εκδοχή της αρχικής εικόνας για όλες τις γωνίες όπως φαίνεται στα σχήματα (2.16) και (2.17).

Για τα πειράματά μας, ως αρχική εικόνα χρησιμοποιούμε το phantom, που είναι μια προσομοίωση του ανθρώπινου κεφαλιού που χρησιμοποιείται συχνά για να ελέγχουμε την αριθμητική ακρίβεια, στη τομογραφία εκπομπής, του μετασχηματισμού Radon, του αντίστροφου μετασχηματισμού Radon και άλλων διδιάστατων αλγορίθμων ανακατασκευής εικόνων.

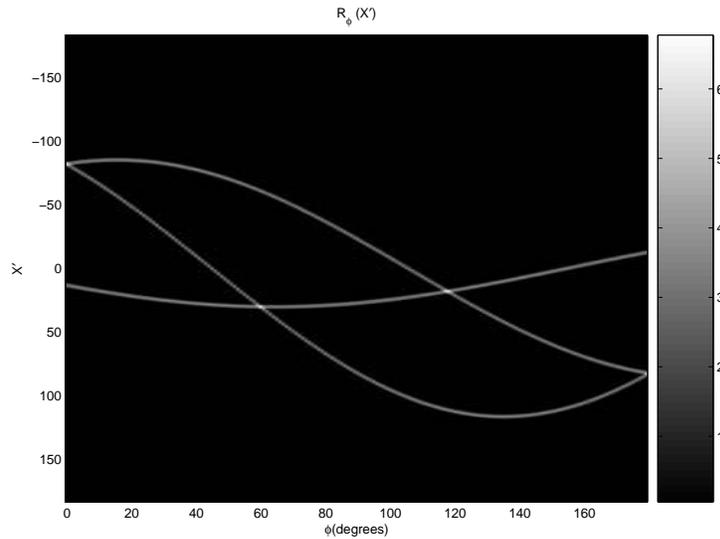
2.4.2 Ανακατασκευή με Φιλτράρισμα Οπισθοπροβολής

Ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε την αρχική εικόνα $f(x,y)$ από την προβολή της $g(x_r, \phi)$ και μια προσέγγιση προτείνεται από την εξίσωση (2.28) και είναι:



(α)

(β)

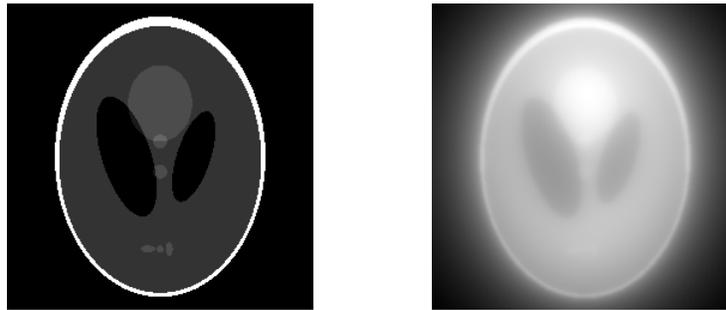


(γ)

Σχήμα 2.15: (α) αρχική εικόνα, (β) τα τρία σημεία που πήραμε με οπισθοπροβολή και (γ) ο Μετασχηματισμός Radon της αρχικής εικόνας.

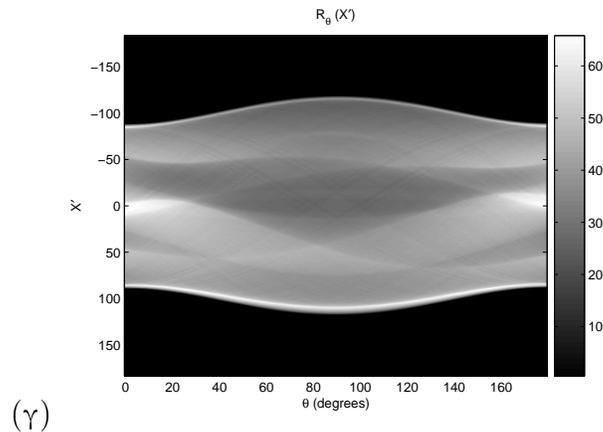
$$f(x, y) = F_2^{-1} \left\{ u F_2 \left\{ b(x, y) = \int_0^\pi g(x_r, \phi) d\phi \right\} \right\} \quad (2.32)$$

Αυτή η προσέγγιση είναι γνωστή και ως φιλτράρισμα οπισθοπροβολής (BPF) μέθοδος ανακατασκευής εικόνας, στην οποία τα δεδομένα που παίρνουμε από τις προβολές για γωνίες $0 \leq \phi \leq \pi$ πρώτα οπισθοπροβάλλονται, μετά φιλτράρονται στο πεδίο του Fourier με το cone filter $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ και έπειτα μετασχηματίζονται με τον αντίστροφο Fourier, ώστε να πάρουμε την αρχική εικόνα $f(x, y)$. Εναλλακτικά, το φιλτράρισμα μπορεί να γίνει στο πεδίο της εικόνας μέσω της συνέλιξης της $b(x, y)$ με τον $F_2^{-1} \{u\}$. Δηλαδή ανάλογα με το πεδίο στο οποίο λαμβάνει χώρα το φιλτράρισμα των προβολών έχουμε και δυο διαφορετικές



(α)

(β)



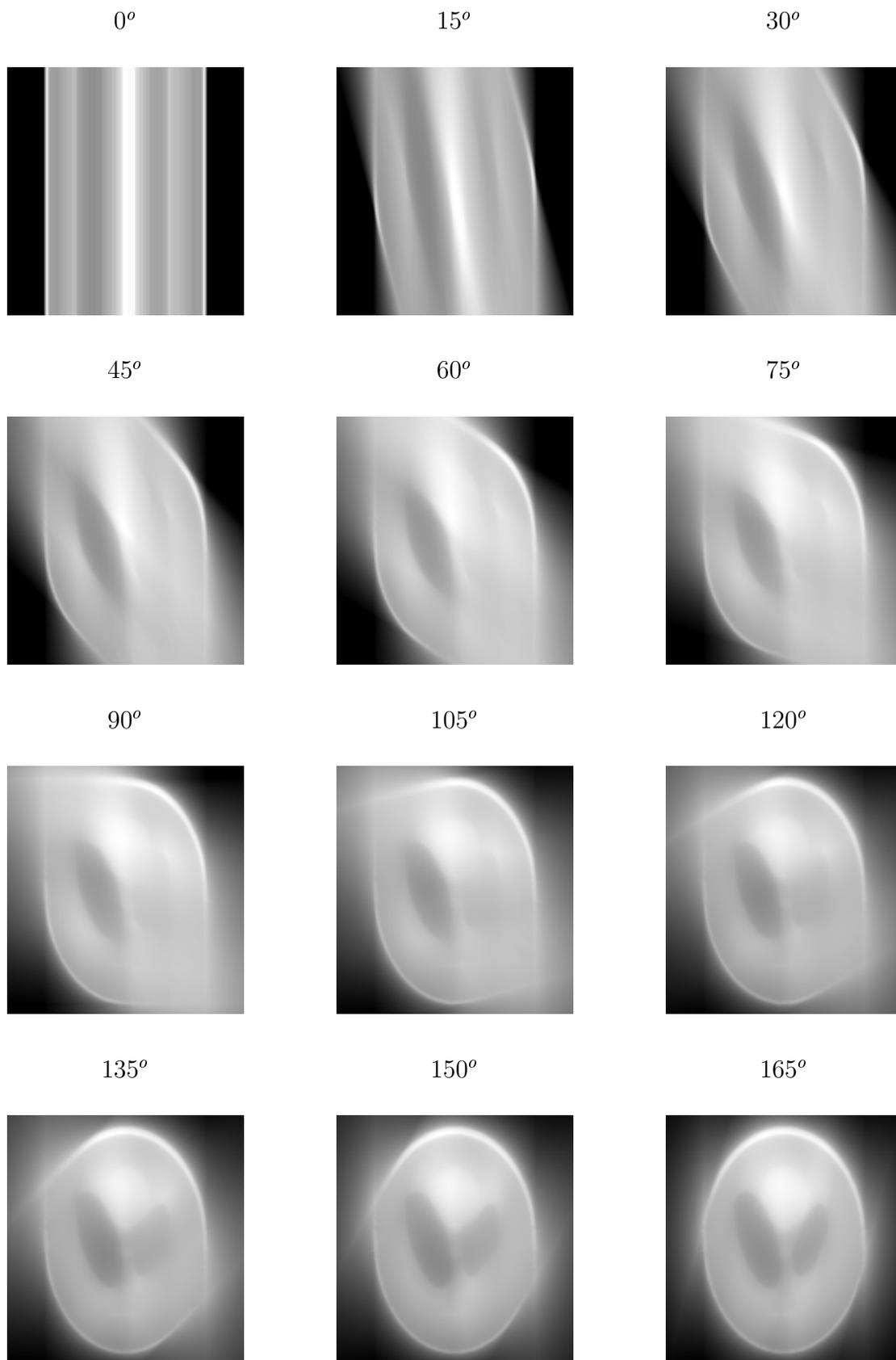
(γ)

Σχήμα 2.16: (α) αρχική εικόνα (phantom), (β) η οπισθοπροβολή της για (180°) και (γ) ο Μετασχηματισμός Radon της αρχικής εικόνας.

μεθόδους ανακατασκευής:

1. Φιλτράρισμα Οπισθοπροβολής
2. Συνέλιξη Οπισθοπροβολής

Ένα μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι η οπισθοπροβολή $b(x, y)$ έχει μεγαλύτερο πεδίο τιμών από την $f(x, y)$ εξαιτίας της συνέλιξης της με τον όρο $(1/r)$, το οποίο οδηγεί σε βαθμιαία εξασθένιση των τιμών που δεν ανήκουν στο πεδίο τιμών της $f(x, y)$. Γι' αυτό το λόγο, κάθε αριθμητική διαδικασία πρέπει πρώτα να υπολογίζει την $b(x, y)$ χρησιμοποιώντας αρκετά μεγαλύτερη εικόνα σε μέγεθος από αυτή που χρειάζεται για το τελικό αποτέλεσμα. Αυτό το μειονέκτημα μπορεί να αποφευχθεί ανταλλάσσοντας τη σειρά με την οποία γίνονται τα βήματα του φιλτραρίσματος και της οπισθοπροβολής, όπως θα δούμε στη παρακάτω μέθοδο ανακατασκευής εικόνας.



Σχήμα 2.17: Η Οπισθοπροβολή του Shepp-Logan phantom, που είναι η αρχική εικόνα, για όλες τις γωνίες.

2.4.3 Ανακατασκευή με Φιλτραρισμένη Οπισθοπροβολή

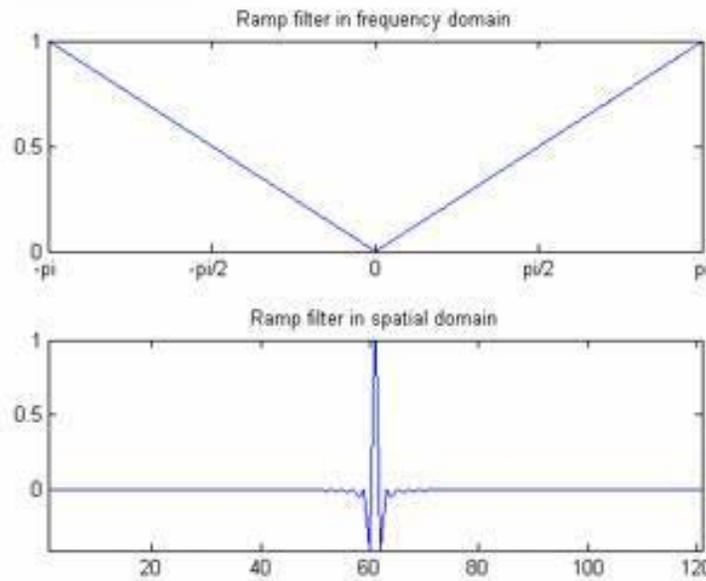
Αν εναλλάξουμε τη σειρά των βημάτων φιλτραρίσματος και οπισθοπροβολής στην εξίσωση (2.32), παίρνουμε τη πολύ χρήσιμη μέθοδο ανακατασκευής εικόνας, τη φιλτραρισμένη οπισθοπροβολής (FBP):

$$f(x, y) = \int_0^\pi g^F(x_r, \phi) d\phi, \quad (2.33)$$

όπου η φιλτραρισμένη προβολή δίνεται ως εξής:

$$g^F(x_r, \phi) = F_1^{-1} \{ |u_{xr}| F_1 \{ g(x_r, \phi) \} \} \quad (2.34)$$

Το μονοδιάστατο φίλτρο ράμπας που φαίνεται στο σχήμα (2.18), $|u_{xr}|$, είναι μια τομή του διδιάστατου cone filter $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ που είναι συμμετρικό ως προς την περιστροφή.



Σχήμα 2.18: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του φίλτρου Ramp στο πεδίο της συχνότητας και στο πεδίο της εικόνας.

Το στάδιο του φιλτραρίσματος στην εξίσωση (2.34) μπορεί επίσης να εκτελεστεί από τη παρακάτω συνέλιξη:

$$g^F(x_r, \phi) = g(x_r, \phi) * h^{-1}(x_r), \quad (2.35)$$

όπου το φίλτρο ράμπας στο πεδίο της εικόνας έχει ως εξής:

$$h^{-1}(x_r) = F_1^{-1} \{ |u_{xr}| \} \quad (2.36)$$

Ένα πλεονέκτημα του FBP είναι ότι το φίλτρο ράμπας εφαρμόζεται σε κάθε προβολή που παίρνουμε, η οποία και έχει ένα σαφώς ορισμένο πεδίο ορισμού- x_r , και το μόνο που πρέπει να κάνουμε από'κει και πέρα είναι να οπισθοπροβάλλουμε τις φιλτραρισμένες προβολές. Αυτό σημαίνει ότι με τον FBP η εικόνα μπορεί αποτελεσματικά να υπολογιστεί από έναν αρκετά μικρότερο πίνακα ανακατασκευής από αυτόν που χρησιμοποιείται στον BPF ώστε να έχουμε το ίδιο επίπεδο ακρίβειας. Η καλή ταχύτητά του σε συνάρτηση με την εύκολη υλοποίησή του, είναι οι δυο πιο σημαντικοί από τους λόγους που ο αλγόριθμος FBP έχει μεγαλύτερη αποδοχή. Ένας πιο άμεσος αλλά και λιγότερο διαισθητικός τρόπος για να δείξουμε πώς προκύπτει η ανακατασκευή της εικόνας με τον FBP είναι ο εξής:

$$f(x, y) = F_2^{-1} \{F(u_x, u_y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u_x, u_y) e^{i2\pi(xu_x + yu_y)} dx dy \quad (2.37)$$

Μετασχηματίζοντας τις συντεταγμένες του διδιάστατου επιπέδου σε πολικές $\{(u, \phi) | 0 \leq u \leq \infty, 0 \leq \phi < 2\pi\}$ καθώς $u_x = u \cos \phi$ και $u_y = u \sin \phi$ έχουμε:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(u, \phi) e^{i2\pi u(x \cos \phi + y \sin \phi)} u du d\phi \quad (2.38)$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος να μετατρέψουμε τις διδιάστατες συντεταγμένες σε πολικές είναι $\{(u, \phi) | -\infty \leq u \leq \infty, 0 \leq \phi < \pi\}$, έτσι μπορούμε να αλλάξουμε τα όρια ολοκλήρωσης χρησιμοποιώντας τη σχέση συμμετρίας $F(u, \phi + \pi) = F(-u, \phi)$, το οποίο απαιτεί να ισχύει $udu \rightarrow |u|du$ για να έχουμε:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, \phi) e^{i2\pi u(x \cos \phi + y \sin \phi)} u du d\phi \quad (2.39)$$

Το πιο σημαντικό βήμα για να φτάσουμε στο ζητούμενο είναι να παρατηρήσουμε ότι $u = u_{xr}$, $x_r = x \cos \phi + y \sin \phi$ και $F(u, \phi) = G(u_{xr}, \phi)$ από το θεώρημα της κεντρικής τομής, τα οποία μας επιτρέπουν να γράψουμε:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u_{xr}| G(u_{xr}, \phi) e^{i2\pi x_r u_{xr}} du_{xr} d\phi, \quad (2.40)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση (2.33).

2.4.4 Ανακατασκευή με Αντίστροφο Μετασχηματισμό Radon

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα (2.3) το πρόβλημα ανακατασκευής της εικόνας είναι θεωρητικά ισοδύναμο με το να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Radon της προβολής $g(x_r, \phi)$. Το θεώρημα κεντρικής τομής είναι χρήσιμο για να πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Radon συνοψίζεται στο παρακάτω θεώρημα (το σύμβολο \mathfrak{R} αναπαριστά το μετασχηματισμό Radon): Θεώρημα Αντίστροφου Μετασχηματισμού Radon:

Δοθέντος $g(x_r, \phi) = \mathfrak{R}f$, $-\infty < x_r < \infty, 0 \leq \phi < \pi$ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Radon είναι:

$$f(x, y) = (1/2\pi^2) \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{[(\partial g / \partial x_r)(x_r, \phi)]}{x \cos \phi + y \sin \phi - x_r} dx_r d\phi \quad (2.41)$$

Σε πολικές συντεταγμένες:

$$f_p(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = (1/2\pi^2) \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{[(\partial g / \partial x_r)(x_r, \phi)]}{r \cos(\phi - \theta) - x_r} dx_r d\phi \quad (2.42)$$

Απόδειξη: Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u_x, u_y) e^{i2\pi(u_x x + u_y y)} du_x du_y \quad (2.43)$$

όταν το μετατρέπουμε σε πολικές συντεταγμένες στο πεδίο της συχνότητας παίρνουμε:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty F_p(u, \phi) e^{i2\pi u(x \cos \phi + y \sin \phi)} u du d\phi \quad (2.44)$$

Επιτρέποντας το u να είναι αρνητικό και $0 \leq \phi < \pi$, μπορούμε να αλλάξουμε τα όρια ολοκλήρωσης και χρησιμοποιώντας το θεώρημα κεντρικής τομής $G(u, \phi) = F_p(u, \phi) \triangleq F(u \cos \phi, u \sin \phi)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |u| F_p(u, \phi) e^{i2\pi u(x \cos \phi + y \sin \phi)} du d\phi \\ &= \int_0^\pi \left\{ \int_{-\infty}^\infty |u| G(u, \phi) e^{i2\pi u(x \cos \phi + y \sin \phi)} du \right\} d\phi \\ &= \int_0^\pi \hat{g}(x \cos \phi + y \sin \phi, \phi) d\phi \end{aligned} \quad (2.45)$$

όπου

$$\hat{g}(x_r, \phi) \triangleq \int_{-\infty}^\infty |u| G(u, \phi) e^{i2\pi u x_r} du \quad (2.46)$$

Γράφοντας $|u|G$ ως $|u|G \operatorname{sgn}(u)$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα συνέλιξης, έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{g}(x_r, \phi) &= [\mathcal{F}_1^{-1}\{uG(u, \phi)\}] * [\mathcal{F}_1^{-1}\{\operatorname{sgn}(u)\}] \\ &= \left[\left(\frac{1}{i2\pi} \right) \frac{\partial g}{\partial x_r}(x_r, \phi) \right] * \left[\frac{-1}{i\pi x_r} \right] \\ &= \left(\frac{1}{2\pi^2} \right) \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\partial g(t, \phi)}{\partial t} \right] \frac{1}{x_r - t} dt \end{aligned} \quad (2.47)$$

όπου $\left(\frac{1}{i2\pi} \right) \left[\frac{\partial g(x_r, \phi)}{\partial x_r} \right]$ και $\frac{-1}{i\pi x_r}$ είναι οι αντίστροφοι Fourier των $uG(u)$ και $\operatorname{sgn}(u)$ αντίστοιχα. Συνδυάζοντας την (2.45) με την (2.47), παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα της (2.41). Τη συνάρτηση (2.42) μπορούμε να τη πάρουμε αλλάζοντας τις συντεταγμένες $x = r \cos \phi$ και $y = r \sin \phi$.

Η διαδικασία για να πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Radon περιλαμβάνει δυο στάδια. Πρώτον, κάθε προβολή $g(x_r, \phi)$ φιλτράρεται με ένα μονοδιάστατο φίλτρο του οποίου η απόκριση συχνότητας είναι $|u|$. Το αποτέλεσμα $\hat{g}(x_r, \phi)$ έπειτα οπισθοπροβάλλεται και παίρνουμε την αρχική εικόνα $f(x, y)$. Η διαδικασία φιλτραρίσματος μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε στο πεδίο της εικόνας x_r είτε στο πεδίο συχνοτήτων u . Αυτή η διαδικασία δημιουργεί δυο διαφορετικές μεθόδους για να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό

Radon \mathfrak{R}_{-1} . Πρέπει να σημειωθεί ότι για να βρούμε τον \mathfrak{R}_{-1} στο πεδίο x_r της εικόνας, χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό Hilbert.

Ορισμός: Ο μετασχηματισμός Hilbert μιας συνάρτησης $\varphi(t)$ ορίζεται ως:

$$\psi(s) \triangleq \tilde{H}\varphi \triangleq \varphi(s) * \left(\frac{1}{\pi s}\right) = \left(\frac{1}{\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{s-t} dt \quad (2.48)$$

Το σύμβολο \tilde{H} αναπαριστά το τελεστή για το μετασχηματισμό Hilbert. Από αυτό τον ορισμό καταλαβαίνουμε ότι η συνάρτηση $\hat{g}(x_r, \phi)$ είναι ο μετασχηματισμός Hilbert της συνάρτησης $\varphi(x_r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\partial g(x_r, \phi)/\partial x_r$ για κάθε γωνία ϕ .

Μέθοδος Οπισθοπροβολής με Συνέλιξη

Ορίζοντας το τελεστή παραγώγισης ως:

$$D\varphi = \frac{\partial\varphi(s)}{\partial s} \quad (2.49)$$

Το σύμβολο B αναπαριστά την οπισθοπροβολή. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Radon μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)B\tilde{H}Dg \quad (2.50)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο τελεστής του αντίστροφου μετασχηματισμού Radon μπορεί να υλοποιηθεί από τη συνέλιξη της παραγώγου των προβολών με το $\left(\frac{1}{2\pi}\right)$ και να οπισθοπροβάλουμε το αποτέλεσμα.

Μέθοδος Οπισθοπροβολής με Φιλτράρισμα

Από τις (2.45), (2.46) μπορούμε να γράψουμε:

$$f(x, y) = BHg \quad (2.51)$$

όπου H είναι ένα μονοδιάστατο φίλτρο του οποίου η απόκριση στη συχνότητα είναι $|u|$ έχοντας:

$$\hat{g} \triangleq Hg \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |u|G(u, \phi)e^{i2\pi ux_r} dx_r \quad (2.52)$$

$$F_1^{-1}\{|u|[F_1g]\} \quad (2.53)$$

Αυτό δίνει

$$f(x, y) = BF_1^{-1}\{|u|[F_1g]\} \quad (2.54)$$

το οποίο μπορεί να υλοποιηθεί φιλτράροντας τις προβολές στο πεδίο του Fourier και οπισθοπροβάλλοντας το αποτέλεσμα του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier.

Επιλογή Φίλτρων

Η συνάρτηση φίλτρου $|u|$ που απαιτείται για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Radon ενισχύει τις υψηλές συχνότητες. Δεδομένου ότι οι περισσότερες εικόνες στην πράξη παρουσιάζουν χαμηλή σηματοθορυβική σχέση στις υψηλές συχνότητες, η χρήση αυτού του φίλτρου έχει ως αποτέλεσμα την ενίσχυση του θορύβου. Μια πρώτη προσέγγιση για να επιλύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι να περιορίσουμε τη μη φραγμένη απόκριση του φίλτρου. Ένα τέτοιο φίλτρο είναι το Ram-Lak με απόκριση $H(u) = H_{RL}(u) \triangleq |u| \text{rect}(\frac{u}{2u_0})$. Παρ' όλα αυτά, τίθεται εκ νέου το ζήτημα ως προς την επιλογή της συχνότητας αποκοπής u_0 . Μικρή τιμή για το u_0 αποφέρει εικόνα χαμηλής ποιότητας ενώ αντίθετα μεγάλη τιμή αποδίδει θορυβώδη εικόνα. Για να μετριαστούν τα μη επιθυμητά αποτελέσματα, προτάθηκε μια κλάση φίλτρων με απόκριση $H(u) = |u|W(u)$, όπου $W(u)$ είναι ένα παράθυρο τέτοιο ώστε, να προσφέρει ταυτόχρονα απόκριση υψηλών συχνοτήτων αλλά και υποβάθμιση του θορύβου, όσο βέβαια αυτό είναι δυνατό.

Για χαμηλά επίπεδα θορύβου το φίλτρο Shepp-Logan προτιμάται έναντι του Ram-Lak. Το χαμηλοπερατό φίλτρο Hamming χρησιμοποιείται όταν η παρουσία θορύβου είναι σημαντική. Στο σχήμα (2.19) φαίνονται τα αποτελέσματα της χρήσης διαφορετικών φίλτρων για τη μέθοδο οπισθοπροβολής με φιλτράρισμα.

Αυτό που μπορεί κανείς να παρατηρήσει είναι ότι, η εφαρμογή των διαφορετικών φίλτρων δεν αποφέρει σημαντική αλλαγή στο αποτέλεσμα, με την ποιότητα των ανακατασκευασμένων εικόνων να κρίνεται ικανοποιητική. Εύλογα λοιπόν, παρατηρώντας τις παραπάνω εικόνες, προκύπτει το εξής ερώτημα: Αφού η μέθοδος οπισθοπροβολής με φιλτράρισμα (FBP) αποδίδει τόσο καλά, ποιος ο λόγος εξεύρεσης εναλλακτικών μεθόδων ανακατασκευής. Η απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα πηγάζει από το γεγονός της ύπαρξης θορύβου στην εικόνα, στο οποίο έγινε αναφορά όταν έγινε λόγος για την επιλογή του φίλτρου.

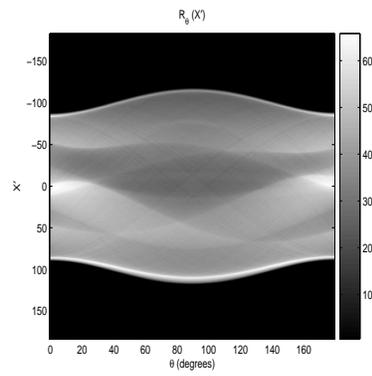
2.5 Poisson Θόρυβος

Στην τομογραφία εκπομπής όπως εξηγήσαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο το δεδομένο μας είναι η προβολή που παίρνουμε. Η προβολή ή sinogram, καθώς συνηθίζεται να λέγεται, που παράγεται από τον μετασχηματισμό Radon εξαρτάται κατά κύριο λόγο από τα φωτόνια που εντοπίζονται από το σύστημα ανίχνευσης. Έτσι, η ποιότητα του sinogram έχει να κάνει με το ρυθμό άφιξης-ανίχνευσης των φωτονίων. Οπότε εύκολα μπορούμε να καταλάβουμε ότι, μικρός ρυθμός συνεπάγεται παρουσία θορύβου στο sinogram. Η εκπομπή φωτονίων όπως και η ανίχνευση φωτονίων από το σύστημα ανίχνευσης είναι γνωστό ότι ακολουθούν κατανομή Poisson.

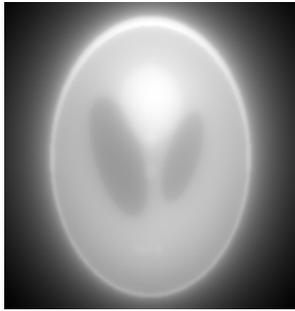
Έστω X τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των αφίξεων φωτονίων στους ανιχνευτές μιας διάταξης Τομογραφίας Εκπομπής. Η μεταβλητή αυτή ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό αφίξεων λ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ με μέση τιμή $E[x] = \lambda$ και μεταβλητότητα $Var[x] = \lambda$. Στην κατανομή Poisson η μέση τιμή και η μεταβλητότητα είναι οι ίσες με το ρυθμό αφίξεων, που είναι η παράμετρος λ . Η



(α) Αρχική Εικόνα



(β) Μετασχηματισμός Radon(sinogram)



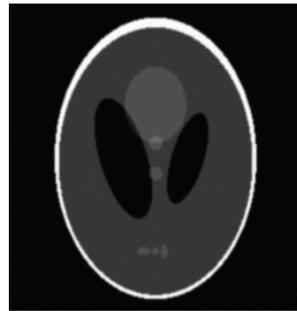
(γ) Χωρίς φίλτρο



(δ) Ram-Lak



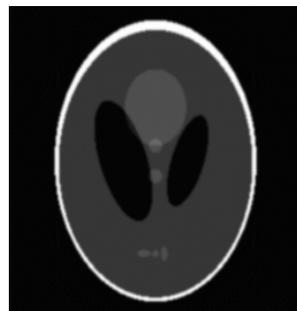
(ε) Shepp-Logan



(ζ) Cosine



(η) Hamming



(θ) Hann

Σχήμα 2.19: Αποτελέσματα οπισθοπροβολής με διαφορετικά φίλτρα, θεωρώντας αρχική εικόνα το Shepp-Logan phantom.

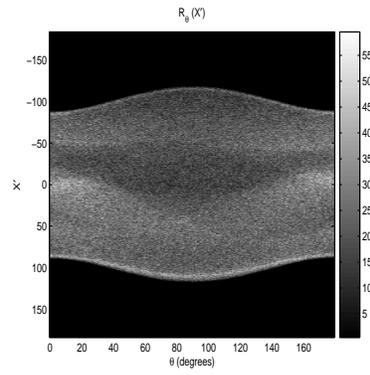
παράμετρος λ εκφράζει το μέσο αριθμό των πραγματοποιούμενων γεγονότων στο βασικό διάστημα, το οποίο εξετάζουμε κάθε φορά.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τον αλγόριθμο FBP, όπου υποθέσαμε τη μη ύπαρξη θορύβου, παίρνοντας μια πολύ καλή ανακατασκευή της αρχικής εικόνας. Κάτι που στη πράξη δε συμβαίνει διότι η εικόνα έχει θόρυβο και η ανακατασκευή της είναι δύσκολη υπόθεση καθώς και η ποιότητα της εικόνας που παίρνουμε εξαρτάται από τη μέθοδο που θα χρησιμοποιήσουμε. Για να πάρουμε μια ιδέα πόσο διαφέρει η ανακατασκευή με θόρυβο από την ανακατασκευή χωρίς θόρυβο παρατίθενται κάποια παραδείγματα (σχήματα (2.20), (2.21), (2.22)), όπου με τον FBP βλέπουμε την ανακατασκευή της εικόνας με θόρυβο χρησιμοποιώντας τα ίδια φίλτρα με το σχήμα (2.19). Το sinogram που παίρνουμε για το phantom στο σχήμα (2.16) θεωρώντας ότι δεν υπάρχει θόρυβος, είναι κάτι που δεν συμβαίνει ποτέ στα δεδομένα εκπομπής (emission data), το sinogram που παίρνουμε συνήθως είναι με θόρυβο (φωτόνια ανά pixel) και φαίνεται στα σχήματα (2.21) β και (2.22) β .

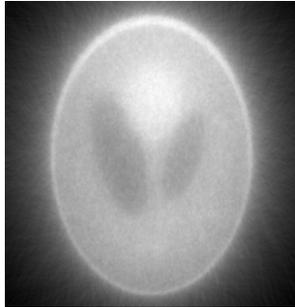
Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η επιλογή του φίλτρου παίζει σημαντικό ρόλο στο τελικό αποτέλεσμα της ανακατασκευής. Για παράδειγμα το φίλτρο Ram-Lak δίνει πιο 'ζωηρές' ακμές αλλά πιο θορυβώδη εικόνα, ενώ αντίθετα το φίλτρο Hann μειώνει την επίδραση του θορύβου αλλά δίνει πιο ομαλές εικόνες, με λιγότερο εμφανείς ακμές. Τέλος, παρατηρούμε όποια και να είναι η επιλογή του φίλτρου, το αποτέλεσμα παραμένει μη ικανοποιητικό ιδίως παρουσία υψηλής στάθμης θορύβου. Έτσι, κρίνεται εύλογη η προσπάθεια εφαρμογής εναλλακτικών μεθόδων ανακατασκευής τις οποίες και θα εξετάσουμε στα επόμενα κεφάλαια.



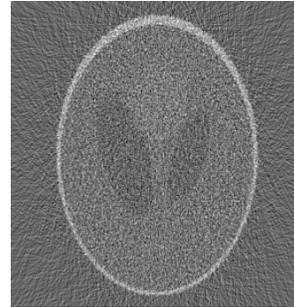
(α) Αρχική Εικόνα(phantom)



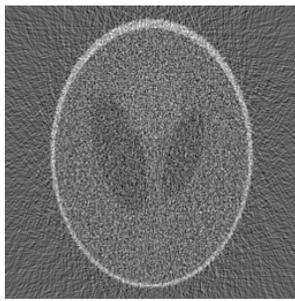
(β) sinogram



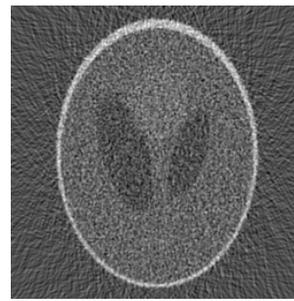
(γ) Χωρίς φίλτρο



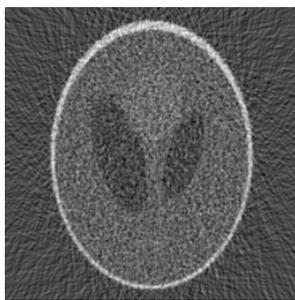
(δ) Ram-Lak



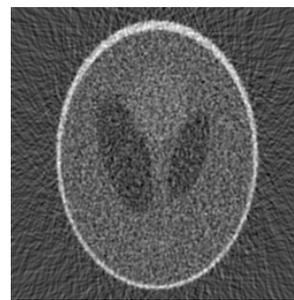
(ε) Shepp-Logan



(ζ) Cosine



(η) Hamming

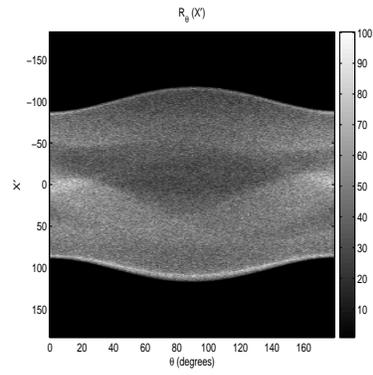


(θ) Hann

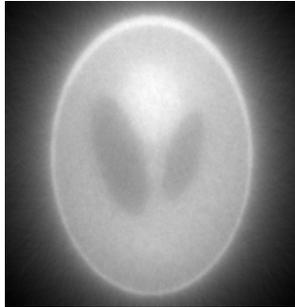
Σχήμα 2.20: Ανακατασκευή εικόνας με 13 φωτόνια/pixel.



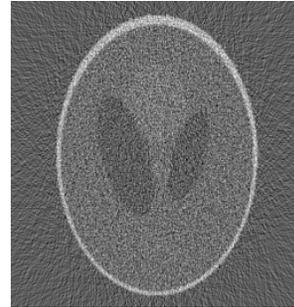
(α) Αρχική Εικόνα(phantom)



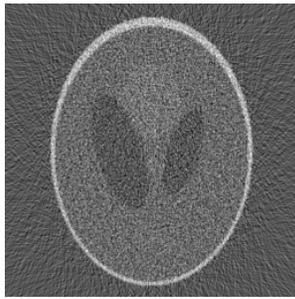
(β) sinogram



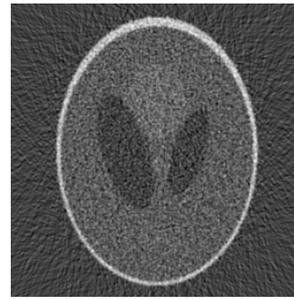
(γ) Χωρίς φίλτρο



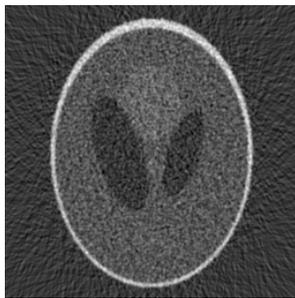
(δ) Ram-Lak



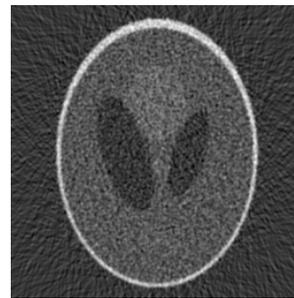
(ε) Shepp-Logan



(ζ) Cosine



(η) Hamming

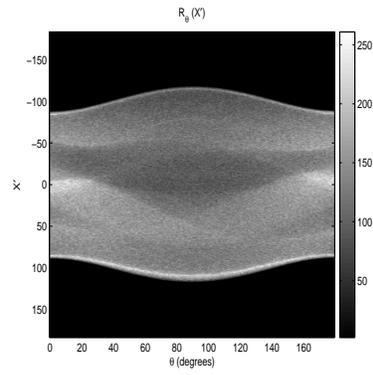


(θ) Hann

Σχήμα 2.21: Ανακατασκευή εικόνας με 25 φωτόνια/pixel



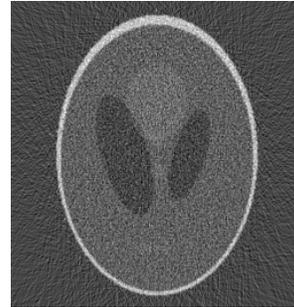
(α) Αρχική Εικόνα(phantom)



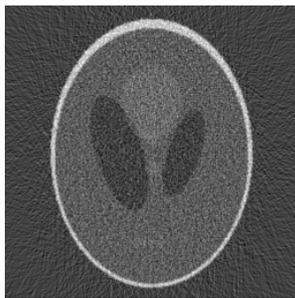
(β) sinogram



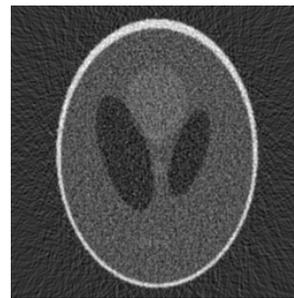
(γ) Χωρίς φίλτρο



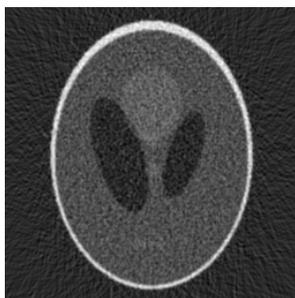
(δ) Ram-Lak



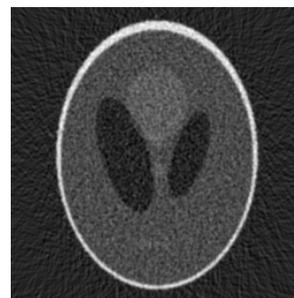
(ε) Shepp-Logan



(ζ) Cosine



(η) Hamming



(θ) Hann

Σχήμα 2.22: Ανακατασκευή εικόνας με 75 φωτόνια/pixel

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ

-
- 3.1 Εισαγωγή
 - 3.2 Στατιστικά Μοντέλα στη Τομογραφία Εκπομπής
 - 3.3 Κριτήριο Μέγιστης Πιθανοφάνειας
 - 3.4 Μπεϋζιανές Μέθοδοι
 - 3.5 Επαναληπτικοί Αλγόριθμοι Ανακατασκευής
 - 3.6 Πειραματικά Αποτελέσματα
-

3.1 Εισαγωγή

Μετά απ' όσα μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 2, συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα της ανακατασκευής εικόνας δεν συνίσταται απλά στην αντιστροφή του μετασχηματισμού Radon. Αυτό διότι ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός δεν μοντελοποιεί με ακρίβεια τη τυχαιότητα που διακρίνει τη διαδικασία ανίχνευσης των φωτονίων. Ανακατασκευάζοντας εικόνες με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Radon χρησιμοποιούμε τη φιλτραρισμένη οπισθοπροβολή (FBP), που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο αναλυτικά, μια μέθοδος που επιτρέπει στη τομογραφία εκπομπής (ET) οι εικόνες να υπολογίζονται αρκετά γρήγορα. Δυστυχώς, επειδή τα πραγματικά δεδομένα στη τομογραφία εκπομπής δεν περιγράφονται επακριβώς από το μοντέλο του FBP, οι εικόνες που παίρνουμε ως αποτελέσματα μπορούν να παρουσιάσουν σφάλματα. Αυτό είναι πραγματικά εμφανές στην περίπτωση της μονοφωτονιακής τομογραφία εκπομπής (SPECT), όπου η εξασθένιση των φωτονίων είναι μεγαλύτερη και μπορεί να προκαλέσει σφάλματα.

Για να αποφύγουμε τα μειονεκτήματα του FBP απαιτείται το πρόβλημα ανακατασκευής να προσεγγιστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να προσομοιάζει στη φύση της πραγματικής διαδικασίας κατά το δυνατόν περισσότερο. Αντίθετα με το μοντέλο Radon, οι καινούριες τεχνικές ανακατασκευής χρησιμοποιούν ένα πιο γενικό γραμμικό μοντέλο που μπορεί να μας επιτρέψει μια πιο πλούσια περιγραφή των πραγματικών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα στη διαδικασία απεικόνισης. Τέτοιες τεχνικές εισάγουν πιθανοθεωρητικά μοντέλα περιγραφής του θορύβου αλλά και της εικόνας. Αυτό βέβαια δεν γίνεται χωρίς κόστος. Πιο συγκεκριμένα, η εισαγωγή των μοντέλων αυτών καθιστούν το τελικό μαθηματικό πρόβλημα δυσκολότερο στην επίλυση του σε σχέση μ' αυτό του αντίστροφου μετασχηματισμού Radon. Στην πραγματικότητα, η λύση δεν μπορεί γενικά να υπολογιστεί με ακρίβεια ή ακόμα και όταν μπορεί να γραφεί σε αναλυτική μορφή είναι υπολογιστικά αδύνατον να βρεθεί. Αυτός είναι ο λόγος που προσανατολιζόμαστε στις λεγόμενες Έπαναληπτικές Μεθόδους Ανακατασκευής. Από την ονομασία τους, μπορούμε να καταλάβουμε ότι η λύση (τελική εικόνα) δεν είναι διαδικασία ενός βήματος αλλά πολλών, ξεκινώντας από μια αρχική εκτίμησή της μέχρι τη λήψη μιας ικανοποιητικής εκτίμησης, χρησιμοποιώντας επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς προβολών και οπισθοπροβολών. Οπότε είναι εύκολα αντιληπτό ότι οι επαναλαμβανόμενοι υπολογισμοί εκτινάσσουν τον υπολογιστικό χρόνο σε σχέση πάντα με τον FBP. Αυτό είναι ένα σημείο, όπου οι επαναληπτικές μέθοδοι υστερούν έναντι του FBP. Παρόλα αυτά, δίνουν σαφώς καλύτερα και με μεγαλύτερη ακρίβεια αποτελέσματα, ενώ η ανάπτυξη υπολογιστικών συστημάτων τις καθιστούν ολοένα ταχύτερες και πιο διαδεδομένες, εφόσον πλέον εκτός από την εργαστηριακή έρευνα χρησιμοποιούνται και στην κλινική έρευνα.

3.2 Στατιστικά Μοντέλα στη Τομογραφία Εκπομπής

Μέχρι τώρα στη μελέτη μας έχουμε ασχοληθεί με τη μέση συμπεριφορά ενός συστήματος απεικόνισης και έχουμε αγνοήσει την έμφυτη μεταβλητότητα της διαδικασίας ανίχνευσης φωτονίων στη Τομογραφία Εκπομπής. Λαμβάνοντας υπόψη τη τυχαιότητα των δεδομένων στην προβολή, η εξίσωση (3.19) μπορεί να γραφτεί ως:

$$E[g] = Hf, \quad (3.1)$$

όπου $E[\cdot]$ δηλώνει την αναμενόμενη τιμή.

3.2.1 Poisson Μοντέλο

Στην τομογραφία εκπομπής όπως εξηγήσαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο το δεδομένο μας είναι η προβολή που παίρνουμε. Η προβολή ή sinogram, καθώς συνηθίζεται να λέγεται, που παράγεται από τον μετασχηματισμό Radon εξαρτάται κατά κύριο λόγο από τα φωτόνια που εντοπίζονται από το σύστημα ανίχνευσης. Έτσι, η ποιότητα του sinogram έχει να κάνει με το ρυθμό άφιξης-ανίχνευσης των φωτονίων. Οπότε μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε ότι, μικρός ρυθμός συνεπάγεται παρουσία θορύβου στο sinogram. Η εκπομπή φωτονίων

όπως και η ανίχνευση φωτονίων από το σύστημα ανίχνευσης είναι γνωστό ότι ακολουθούν κατανομή Poisson.

Έστω X τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των αφίξεων φωτονίων στους ανιχνευτές μιας διάταξης Τομογραφίας Εκπομπής. Η μεταβλητή αυτή ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό αφίξεων λ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$. Στην κατανομή Poisson η μέση τιμή και η διακύμανση είναι ίσες με το ρυθμό αφίξεων, που είναι η παράμετρος λ . Η παράμετρος λ εκφράζει το μέσο αριθμό των πραγματοποιούμενων γεγονότων στο βασικό διάστημα, το οποίο εξετάζουμε κάθε φορά.

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, ο χώρος των προβολών είναι διακριτός με τα δεδομένα των προβολών να αναπαριστούνται από το διάνυσμα g . Τα στοιχεία της προβολής g αναφέρονται συνήθως στην βιβλιογραφία ως projection bins ή απλά bins και οι μετρήσεις για κάθε γωνία προβολής αναπαρίσταται από ένα bin και ισχύει η εξίσωση (3.19), όπου η μέση τιμή των προβολών είναι η (3.1).

Στην περίπτωση μας, ο αριθμός των γεγονότων (φωτονίων) που ανιχνεύονται για κάθε γωνία προβολής είναι ανεξάρτητος. Οπότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το g δίνεται από την εξίσωση:

$$p(g|f) = \prod_{i=1}^P \frac{\bar{g}_i^{g_i} \exp(-\bar{g}_i)}{g_i!}, \quad (3.2)$$

όπου P είναι ο αριθμός των προβολών (bins) και \bar{g}_i είναι το i -οστό στοιχείο της $E[g] = Hf$ για το οποίο ισχύει:

$$\bar{g}_i = \sum_{j=1}^N h_{ij} f_j, \quad (3.3)$$

όπου κάθε στοιχείο της αρχικής εικόνας f , δηλώνεται με το διάνυσμα f_j , $j = 1, 2, \dots, N$ που αναπαριστά ένα pixel στο χώρο της εικόνας, κάθε στοιχείο του H , που δηλώνεται από το h_{ij} , αναπαριστά πόσα pixel j της αρχικής εικόνας- αντικειμένου συμμετέχουν στο bin i των προβολών και τέλος κάθε στοιχείο του $h_{ij} f_j$ αναπαριστά τη μέση συνεισφορά του pixel j της αρχικής εικόνας-αντικειμένου στο bin i των προβολών. Αν και το Poisson μοντέλο δεν περιγράφει ακριβώς αυτό που συμβαίνει στα πραγματικά συστήματα τομογραφίας, αποτελεί μια καλή περιγραφή για δεδομένα που έχουν να κάνουν με τομογραφία εκπομπής και είναι το πιο κοινά χρησιμοποιούμενο μοντέλο στο πεδίο της τομογραφίας εκπομπής. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλα πιθανοτικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται συχνά σ' αυτό το πεδίο. Για παράδειγμα, όταν ένα σύστημα τομογραφίας εκπομπής ποζιτρονίου (PET) διορθώνει εσωτερικά κάτι που έχει συμβεί τυχαία από σύμπτωση, αφαιρώντας μια τυχαία υπολογιζόμενη συνεισφορά, τα στατιστικά μπορούν να περιγραφούν από ένα μετατοπισμένο Poisson Μοντέλο (shifted Poisson Model). Επίσης, σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται συχνά και Γκαουσιανά Μοντέλα (Gaussian Models), όπως περιγράφεται στη παρακάτω ενότητα, λόγω των πρακτικών πλεονεκτημάτων τους αλλά το Poisson Μοντέλο παραμένει να περιγράφει καλύτερα τα πραγματικά συστήματα τομογραφίας.

3.2.2 Γκαουσιανό Μοντέλο

Σε περιπτώσεις, που ο μέσος αριθμός γεγονότων (στην περίπτωση μας φωτονίων) που συμβαίνουν στο βασικό διάστημα είναι αρκετά μεγάλος, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το μοντέλο Poisson (3.2) μπορεί να προσεγγιστεί από τη παρακάτω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF):

$$p(g|f) = k \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^P \frac{(g_i - \bar{g}_i)^2}{\bar{g}_i}\right] = k \exp\left[-\frac{1}{2}(g - Hf)^T C^{-1}(g - Hf)\right], \quad (3.4)$$

όπου k είναι μια σταθερά κανονικοποίησης και $C = \text{diag}(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_p)$ είναι ο πίνακας συμμεταβλητότητας του g . Αυτή η προσέγγιση είναι αρκετά ακριβής όταν ο μέσος αριθμός των γεγονότων \bar{g}_i είναι 20 ή και μεγαλύτερος [31]. Η εξίσωση (3.4) προκύπτει από την (3.2) ως εξής:

$$\log p(g|f) = \sum_{i=1}^N g_i \log[Hf]_i - [Hf]_i - \ln g_i! \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \log p(g|f)}{\partial [Hf]_m} = \frac{g_m}{[Hf]_m} - 1 \quad (3.6)$$

Βρίσκουμε το σημείο που μηδενίζει τη πρώτη παράγωγο

$$\frac{\partial \log p(g|f)}{\partial [Hf]_m} = 0 \Rightarrow [Hf]_m^* = g_m \quad (3.7)$$

και έπειτα αναπτύσσουμε την $\log p(g|f)$ κατά Taylor γύρω από το σημείο $g_m = [Hf]_m^*$ που μηδενίζει τη πρώτη παράγωγο και έχουμε:

$$\log p(g|f) \approx C(g) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N ([Hf]_i - g_i)^T \left[\frac{\partial^2 \ln p(g|f)}{\partial [Hf]_i^2} \Big|_{[Hf]_i = g_i} \right] ([Hf]_i - g_i) \quad (3.8)$$

Παίρνοντας τη δεύτερη παράγωγο από την εξίσωση (3.6) προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 \log p(g|f)}{\partial [Hf]_i^2} = -\frac{g_i}{[Hf]_i^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \log p(g|f)}{\partial [Hf]_i^2} \Big|_{[Hf]_i = g_i} = -\frac{1}{g_i} \quad (3.9)$$

Οπότε η εξίσωση (3.8) γράφεται ως εξής:

$$\log p(g|f) \approx C(g) - \frac{1}{2}(Hf - g)^T D^{-1}(Hf - g), \quad (3.10)$$

όπου $D = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_N)$. Οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση (3.4).

3.3 Κριτήριο Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι οποιαδήποτε μέθοδος ανακατασκευής εικόνων αποτελείται από δυο σχετικές αλλά ταυτόχρονα και διακριτές συνιστώσες. Η πρώτη είναι, αυτό που αποκαλούμε αντικειμενικό κριτήριο, που είναι η βασική αρχή για να αποφασίσουμε ποιά εικόνα μπορεί να θεωρηθεί ως η καλύτερη εκτίμηση της πραγματικής εικόνας. Η δεύτερη είναι, αυτό που αποκαλούμε αλγόριθμος, που είναι η υπολογιστική τεχνική που χρησιμοποιείται για να βρούμε τη λύση που καθορίζεται από το κριτήριο δηλ το κριτήριο είναι η στρατηγική και ο αλγόριθμος είναι ένα σύνολο από βήματα που υλοποιούν αυτή τη στρατηγική.

Ένα κριτήριο βάσει του οποίου μπορούμε να βρούμε την καλύτερη εκτίμηση είναι το κριτήριο της μέγιστης πιθανοφάνειας (ML) [9]. Σ' αυτό το κριτήριο παίρνουμε ως δεδομένο ότι η πιθανότητα $p(g|f)$ για το διάνυσμα παρατήρησης g προσδιορίζεται από μια άγνωστη ντετερμινιστική παράμετρο, το διάνυσμα f , που στην περίπτωσή μας είναι η εικόνα που ελπίζουμε να πάρουμε με την ανακατασκευή. Η πιθανότητα αυτή ονομάζεται συνάρτηση πιθανοφάνειας και δηλώνεται ως $L(f)$.

Το ML κριτήριο μας δίνει μια περιγραφή για να αποφασίσουμε ποιά εικόνα, από όλες τις πιθανές, είναι η καλύτερη εκτίμηση της αρχικής εικόνας. Το κριτήριο μπορεί απλά να δηλωθεί ως ακολούθως:

ML κριτήριο:Επίλεξε την ανακατασκευασμένη εικόνα \hat{f} να είναι το διάνυσμα f για το οποίο οι μετρήσεις-παρατηρήσεις μας θα πρέπει να έχουν τη μεγαλύτερη πιθανοφάνεια $p(g|f)$.

Δηλαδή, το ML κριτήριο ψάχνει να βρεί μια λύση η οποία θα έχει τη μεγαλύτερη συνάφεια με τις παρατηρήσεις μας. Συμβολικά, το ML κριτήριο μπορεί να γραφεί ως:

$$\hat{f} = \arg \max_f p(g|f) \quad (3.11)$$

δηλ, επιλέγουμε τη τιμή της f για την οποία η πιθανότητα $p(g|f)$ παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή της.

Η μέθοδος ML, όπως και η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, αναφέρονται ως κλασσικά κριτήρια εύρεσης της καλύτερης εκτίμησης. Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου, όταν εφαρμόζεται στην ανακατασκευή εικόνων που πάρθηκαν με τομογραφία εκπομπής, είναι ότι τείνουν να παράγουν εικόνες, οι οποίες είναι υπερβολικά θορυβώδεις. Αυτό το πρόβλημα προκύπτει διότι τα κλασσικά κριτήρια έχουν ως αποκλειστικό τους σκοπό την εύρεση μιας ανακατασκευασμένης εικόνας που να είναι όσο πιο κοντά στις μετρήσεις-δεδομένα. Δυστυχώς, λόγω του ότι τα δεδομένα μας είναι θορυβώδη, η εικόνα που είναι πιο κοντά σ' αυτά τα δεδομένα, επίσης, θα τείνει να είναι θορυβώδης. Αυτό είναι ιδιαίτερος σοβαρό πρόβλημα για την ανακατασκευή σε τομογραφία εκπομπής διότι τα συστήματα απεικόνισής της είναι χαμηλοπερατά από τη φύση τους (δηλ παράγουν δεδομένα που είναι θολωμένα) ενώ ο θόρυβος επηρεάζει όλες τις συχνότητες.

3.4 Μπεϋζιανές Μέθοδοι

Το κριτήριο της μέγιστης πιθανοφάνειας [9] όπως και όλα τα κλασσικά κριτήρια εύρεσης της καλύτερης εκτίμησης έχουν να κάνουν με τη υπόθεση ότι η f είναι άγνωστη αλλά ντετερμινιστική (δηλ όχι τυχαία). Εν αντιθέσει, οι μπεϋζιανές μέθοδοι [10] υποθέτουν ότι μια άγνωστη ποσότητα f είναι τυχαία και επομένως μπορεί να περιγραφεί από μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(f)$, η οποία είναι γνωστή εκ των προτέρων από τα δεδομένα μας. Δηλαδή, αν θέλουμε να απεικονίσουμε τον εγκέφαλο ενός ασθενούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτή η εικόνα είναι ένα δείγμα τυχαία απεικονισμένο από ένα υποθετικό σύνολο με εικόνες που απεικονίζουν ανθρώπινους εγκεφάλους και ορίζεται από μια εκ των προτέρων πιθανότητα $p(f)$. Η πιθανότητα αυτή ονομάζεται εκ των προτέρων διότι έχει να κάνει με τις πληροφορίες που γνωρίζουμε εκ των προτέρων και μας δίνει τη δυνατότητα να τροποποιούμε την ανακατασκευασμένη εικόνα ώστε να σχετίζεται με την αναμενόμενη εικόνα για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα δηλ, μπορούμε να ορίσουμε την εκ των προτέρων γνώση για την πραγματική εικόνα, ξέροντας ότι η πραγματική εικόνα είναι ένας ανθρώπινος εγκέφαλος. Το θεμελιώδη μειονέκτημα του ML κριτηρίου είναι ότι αποτυγχάνει να επιλέξει βάσει κάποιων κριτηρίων μια εικόνα έναντι κάποιας άλλης ως καλύτερης εκτίμησης. Η θεωρία του Bayes, όμως, δηλώνει με σαφήνεια κριτήρια τα οποία μας καθοδηγούν στην εύρεση της καλύτερης εκτίμησης, και έχουν τη μορφή συνάρτησης που ονομάζεται συνάρτηση κόστους, η οποία δηλώνεται ως $\lambda(f, \hat{f})$. Αυτή η συνάρτηση μετράει το βαθμό που η ανακατασκευασμένη εικόνα \hat{f} αποκλίνει από την πραγματική εικόνα f και δίνεται από το τύπο ως:

$$\lambda(f, \hat{f}) = \begin{cases} 0 & |f - \hat{f}| < \delta \\ 1 & \text{αλλιως} \end{cases} \quad (3.12)$$

όπου δ είναι μια θετική σταθερά και το $|\cdot|$ δηλώνει την L_1 νόρμα, $|x| = \sum_i |x_i|$.

Ο σκοπός των μπεϋζιανών μεθόδων είναι η εύρεση ενός κριτηρίου ώστε να επιλέγουν την \hat{f} , που ελαχιστοποιεί τη μέση απώλεια μεταξύ αυτής και της πραγματικής εικόνας. Είναι κατανοητό ότι η ελαχιστοποίηση της (3.12) οδηγεί στη μεγιστοποίηση του εκ των υστέρων κριτηρίου (MAP), το οποίο δηλώνεται ως εξής:

MAP κριτήριο: Επιλέγουμε τη τιμή της f που μεγιστοποιεί την εκ των υστέρων συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $p(f|g)$. Συμβολικά, το MAP κριτήριο μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\hat{f} = \arg \max_f p(f|g) \quad (3.13)$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο του Bayes, έχουμε:

$$p(f|g) = \frac{p(g|f)p(f)}{p(g)} \quad (3.14)$$

και το MAP κριτήριο μπορεί να γραφεί σε μια πιο χρήσιμη μορφή ως εξής:

$$\hat{f} = \arg \max_f \frac{p(g|f)p(f)}{p(g)} \quad (3.15)$$

Αν πάρουμε το λογάριθμο της ποσότητας που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε και παραλείποντας το όρο $p(g)$, διότι δεν είναι συνάρτηση του f , το MAP κριτήριο μπορεί να απλοποιηθεί στον τύπο:

$$\hat{f} = \arg \max_f [\ln p(g|f) + \ln p(f)] \quad (3.16)$$

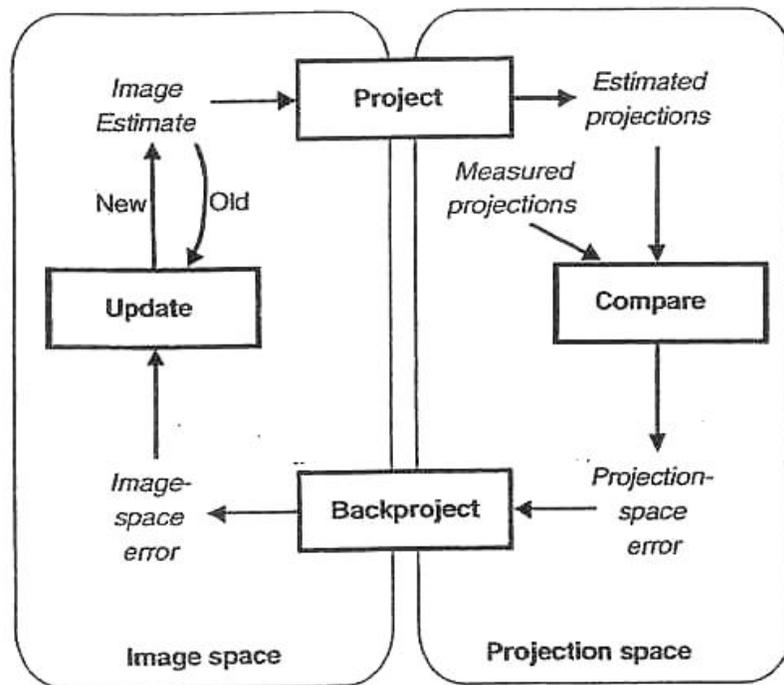
Από την εξίσωση (3.16) παρατηρούμε ότι το MAP κριτήριο είναι παρόμοιο με το ML κριτήριο ωστόσο χρησιμοποιεί τον λογάριθμο της εκ των προτέρων πιθανότητας για να περιορίσει τις λύσεις - εικόνες έτσι ώστε να μην έχουν τόσο θόρυβο όσο η πραγματική εικόνα. Συγκεκριμένα, αυτό το κριτήριο έχει ως στόχο να παράγει μια εικόνα που θα είναι συνεπής με τα δεδομένα g αλλά δεν θα είναι ταυτόχρονα τόσο θορυβώδης. Τέλος, αυτό το κριτήριο λόγω της έντονης κορυφής της συνάρτησης της εκ των προτέρων πιθανότητας μπορεί να κάνει αλγόριθμους ανακατασκευής εικόνας πιο αποτελεσματικούς. Συνήθως προτιμούμε εκ των προτέρων πιθανότητες που κρατάνε τις ιδιότητες του ML κριτηρίου ενώ ταυτόχρονα οδηγούν τη λύση λίγο και προς την κατεύθυνση που ορίζει η εκ των προτέρων ώστε η εικόνα μας να έχει λιγότερο θόρυβο. Υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις για το πώς θα ορίσουμε την εκ των προτέρων γνώση $p(f)$. Μια προσέγγιση είναι να εκφράσουμε την εκ των προτέρων γνώση μας για την πραγματική εικόνα που είναι παραδείγματος χάρη στη περίπτωση της τομογραφίας εκπομπής, όπως αναφέρθηκε πριν, οι εικόνες να μοιάζουν με ανθρώπινο εγκέφαλο. Αυτή η προσέγγιση δεν είναι διαδεδομένη διότι μπορεί να οδηγήσει σε σφάλματα. Ας υποθέσουμε ότι το μοντέλο μας για την εκ των προτέρων πιθανότητα δεν προέβλεπε ασθενείς με μια οργανική βλάβη στον εγκέφαλο, τότε ο αλγόριθμος ανακατασκευής ίσως θεωρούσε τις εικόνες με αυτή την οργανική βλάβη ως απίθανο να υπάρχουν και να προσπαθούσε να εξαφανίσει αυτό το χαρακτηριστικό από την ανακατασκευασμένη εικόνα. Η πιο διαδεδομένη πρόσεγγιση, που χρησιμοποιείται και στην ανακατασκευή με τομογραφία εκπομπής, είναι να χρησιμοποιούμε την εκ των προτέρων πιθανότητα απλά για να παίρνουμε εικόνες με λιγότερο θόρυβο. Το κύριο αρνητικό αυτής της προσέγγισης είναι ότι κάποια μόνιμα χαρακτηριστικά της εικόνας μπορεί να εξαλειφούν ταυτόχρονα με την προσπάθειά μας να εξαλείψουμε το θόρυβο απ' αυτή.

3.5 Ανακατασκευή με τον αλγόριθμο EM

Σε προηγούμενη ενότητα αναφέραμε ότι μια επαναληπτική μέθοδο ανακατασκευής αποτελείται από ένα κριτήριο με βάση το οποίο θα επιλέξουμε τη καλύτερη εικόνα και έναν αλγόριθμο για να υπολογίσουμε αυτή την εικόνα. Πολλοί διαφορετικοί αλγόριθμοι έχουν μελετηθεί για να επιλύσουμε το πρόβλημα της ανακατασκευής εικόνας στη τομογραφία εκπομπής αλλά οι περισσότεροι μοιράζονται κοινές ιδιότητες και χαρακτηριστικά. Στη ενότητα (??) περιγράφουμε τα κύρια χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των περισσότερων επαναληπτικών αλγόριθμων ανακατασκευής.

3.5.1 Γενική Δομή των Επαναληπτικών Αλγορίθμων

Οι περισσότεροι επαναληπτικοί αλγόριθμοι ανακατασκευής ταιριάζουν στο γενικό μοντέλο που φαίνεται στο σχήμα (3.1). Η διαδικασία ξεκινάει με μια αρχική εκτίμηση f^0 για την εικόνα που αναζητούμε. Στο επόμενο βήμα εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Radon στην τρέχουσα εικόνα f^n και παίρνουμε τη προβολή της g^n , που θα ήταν η αναμενόμενη μόνο αν η f^n ήταν η πραγματική εικόνα. Η προβολή αυτή στο επόμενο βήμα συγκρίνεται με τα πραγματικά δεδομένα g που έχουμε πάρει από τις μετρήσεις, έτσι ώστε να δημιουργήσουμε ένα σύνολο από σφάλματα e_g στο χώρο - προβολής. Αυτά, στη συνέχεια, αντιστοιχίζονται πίσω στο χώρο της εικόνας μέσω της οπισθοπροβολής ώστε να πάρουμε τα σφάλματα αυτά στο χώρο της εικόνας e_f . Έπειτα, αυτά χρησιμοποιούνται για να ενημερωθεί η εκτιμώμενη εικόνα του βήματος 1 και έχουμε τη νέα εκτίμησή μας f^{n+1} για τη πραγματική εικόνα. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται ξανά και ξανά μέχρι είτε η επανάληψη να σταματήσει αυτόματα ή να τερματιστεί από τον χρήστη. Στο τέλος της διαδικασίας, η τρέχουσα εκτιμώμενη εικόνα θεωρείται ότι είναι η τελική λύση. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι μέθοδοι άμεσης ανακατασκευής, όπως η FBP, χρησιμοποιούν μόνο το κομμάτι της οπισθοπροβολής από όλη αυτή την επαναληπτική διαδικασία, οπότε δεν έχουμε σύγκριση της προβολής της εκτιμώμενης εικόνας με την προβολή που έχουμε αποκτήσει από τις μετρήσεις. Η δύναμη των επαναληπτικών μεθόδων [9] βασίζεται στη χρήση της ανάδρασης του βρόχου για να βελτιώσουμε την ανακατασκευασμένη εικόνα.



Σχήμα 3.1: Τα στάδια που ακολουθεί γενικά ένας επαναληπτικός αλγόριθμος ανακατασκευής.

3.5.2 Αλγόριθμος ML-EM

Για αρκετά χρόνια, ο κύριος επαναληπτικός αλγόριθμος ανακατασκευής στη Τομογραφία Εκπομπής Ποζιτρονίου (PET) και στην Μονοφωτονιακή Τομογραφία Εκπομπής (SPECT) ήταν ο ML-EM αλγόριθμος και οι παραλλαγές του. Ο αλγόριθμος αυτός προτάθηκε επίσημα το 1977 ως λύση σε προβλήματα στατιστικής που είχαν ελλιπή δεδομένα [11] έχει βρει εφαρμογή σε έναν μεγάλο αριθμό από εφαρμογές που αφορούν στην στατιστική. Αν το δούμε πιο αυστηρά, ο αλγόριθμος ML-EM που παρουσιάστηκε στο δεν είναι τόσο ένας αλγόριθμος όσο μια γενική περιγραφή για να αναπτυχθούν αλγόριθμοι που μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα μεγάλο αριθμό συγκεκριμένων προβλημάτων εκτίμησης της μέγιστης πιθανοφάνειας (ML)[12].

Χρησιμοποιώντας αυτή τη γενική περιγραφή, ο αλγόριθμος ML-EM για ανακατασκευή σε τομογραφία εκπομπής περιγράφηκε το 1984 [13][14], παρ' όλα αυτά ο τελικός επαναληπτικός τύπος προήλθε από μια διαφορετική προσέγγιση το 1970 στο [15],[16] και ήταν γνωστός στο πεδίο της αστρονομίας ως ο αλγόριθμος Richardson-Lucy. Όταν εφαρμόστηκε σε προβλήματα ανακατασκευής σε τομογραφία εκπομπής ή αλλιώς σε οποιοδήποτε γραμμικό πρόβλημα αντιστροφής με Poisson θόρυβο, στο πλαίσιο εργασίας με τον ML-EM κατέληξαν στην παρακάτω απλή επαναληπτική εξίσωση, η οποία είναι εύκολο να υλοποιηθεί και να γίνει κατανοητή:

$$f_j^{\hat{n}+1} = \frac{\hat{f}_j^n}{\sum_{i'} h_{i'j}} \sum_i h_{ij} \frac{g_i}{\sum_k h_{ik} \hat{f}_k^n} \quad (3.17)$$

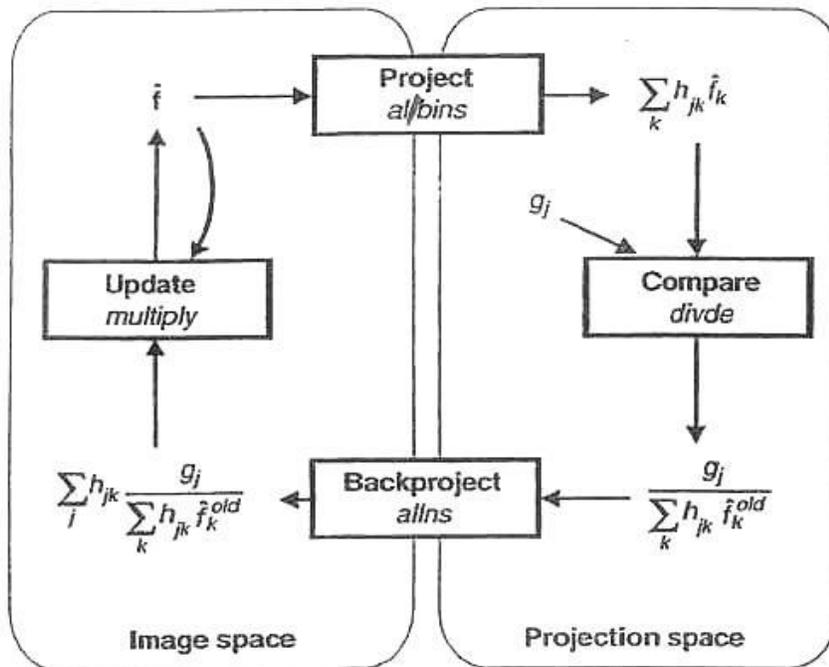
Περαιτέρω εξήγηση για το πώς προκύπτει η εξίσωση (3.17) θα μελετήσουμε στην υποενότητα (3.5.2)3 καθώς και τις ιδιότητες και παραλλαγές του στις υποενότητες 1, 2 αντίστοιχα.

Ιδιότητες του ML-EM

Η εξίσωση (3.17) του ML-EM αλγορίθμου έχει έναν απλό τύπο που ταιριάζει με το γενικό μοντέλο ενός επαναληπτικού αλγορίθμου όπως φαίνεται στο σχήμα (3.2).

Κάποιες ιδιότητες του αλγορίθμου είναι:

1. Όλα τα pixels ενημερώνονται ταυτόχρονα .
2. Η συμπεριφορά του ως προς την σύγκλιση είναι συνεπής και προβλέψιμη.
3. Επειδή τα σφάλματα και οι ενημερώσεις είναι πολλαπλάσια, ο ML-EM αλγόριθμος αυτόματα θέτει έναν μη αρνητικό περιορισμό και επιτρέπει για τα επιλεγμένα pixels τα σφάλματα και οι ενημερώσεις να παίρνουν αρχικά τη τιμή μηδέν.
4. Ο αλγόριθμος είναι απλό να υλοποιηθεί στον υπολογιστή χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο που βασίζεται στην προβολή και τελικά μας οδηγεί σε μια ύπο περιορισμούς λύση μέγιστης πιθανοφάνειας.



Σχήμα 3.2: Ο αλγόριθμος ML-EM σε μορφή γενικού επαναληπτικού αλγορίθμου.

Ο ML-EM αλγόριθμος για την ανακατασκευή σε τομογραφία εκπομπής έχει δυο κύρια μειονεκτήματα. Το πρώτο είναι, ότι η σύγκλιση του αλγορίθμου είναι αργή. Μια χρησιμοποιήσιμη λύση ίσως απαιτεί 30-50 επαναλήψεις. Επειδή κάθε επανάληψη απαιτεί μια προβολή και μια οπισθοπροβολή, ο ML-EM αλγόριθμος μπορεί να αναμένεται να απαιτεί ίδιας ή διπλάσιας τάξης μεγέθους χρόνο επεξεργασίας σε σχέση με το FBP. Ωστόσο, θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι ο ML-EM αλγόριθμος μπορεί να παρουσιάσει καλύτερα αποτελέσματα από τον FBP, λόγω της ικανότητας του να επιλύει το γενικό γραμμικό μοντέλο και συνεπώς εξισορροπεί τη μη ομοιόμορφη εξασθένηση. Παρ' όλα αυτά, ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος εμποδίζει την αποδοχή αυτής της μεθόδου στη κλινική χρήση. Το δεύτερο μειονέκτημα του είναι ότι το κριτήριο της μέγιστης πιθανοφάνειας (ML) στο οποίο βασίζεται δίνει αρκετά θορυβώδη ανακατασκευασμένες εικόνες. Γι' αυτό το λόγο, καθώς προχωράνε οι επαναλήψεις του ML-EM και ο αλγόριθμος προσεγγίζει την λύση μέγιστης πιθανοφάνειας, η διακύμανση της εκτιμώμενης εικόνας, που είναι γνωστή ως θόρυβος, αυξάνεται.

Στην πράξη, ο ML-EM αλγόριθμος δίνει καλά αποτελέσματα αν η επαναληπτική διαδικασία σταματήσει προώρα και τα αποτελέσματα, επιπρόσθετα, επωφεληθούν από εφαρμογή που θα χρησιμοποιεί χαμηλοπερατό φίλτρο μετά την ανακατασκευή, που είναι μια συνηθισμένη προσέγγιση σε κλινικές εφαρμογές.

Αναλυτικά ο αλγόριθμος ML-EM

Ο αλγόριθμος αυτός και οι παραλλαγές του κυριάρχησε, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα (3.5.2), στο πεδίο επαναληπτικής ανακατασκευής εικόνων τομογραφίας εκπομπής για πολλά

χρόνια, οπότε αξίζει να τον μελετήσουμε πιο αναλυτικά αυτή την ευρέως χρησιμοποιούμενη τεχνική.

Καθώς αυτός ο αλγόριθμος δίνει τη γενική περιγραφή για να αναπτυχθούν επαναληπτικές διαδικασίες που θα λύνουν όλων των ειδών τα προβλήματα εκτίμησης της μέγιστης πιθανοφάνειας, ας περιγράψουμε τα κύρια σημεία της μεθοδολογίας του. Υπάρχουν πολλά προβλήματα στην στατιστική στα οποία είναι δύσκολο να βρεθεί λύση για τη μέγιστη πιθανοφάνεια αλλά θα μπορούσε εύκολα να βρεθεί αν γνωρίζαμε κάποια επιπρόσθετα δεδομένα. Σε κάποιες περιπτώσεις, αυτά τα επιπλέον δεδομένα είναι μετρήσεις που λείπουν διότι κυριολεκτικά δεν καταγράφηκαν κατά τη συλλογή δεδομένων του εκάστοτε προβλήματος. Σε άλλες πάλι, η ιδέα αυτή χρησιμοποιείται ώστε να μπορέσουμε να βρούμε μια ικανοποιητική λύση στο πρόβλημά μας. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, τα δεδομένα που λείπουν είναι μετρήσεις που αν είχαν γίνει θα ήταν εξαιρετικά χρήσιμες αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι μετρήσιμα. Όταν εφαρμόζουμε την EM [17] προσέγγιση, τα παρατηρούμενα δεδομένα, τα οποία στην πραγματικότητα έχουμε, ονομάζονται ελλιπή δεδομένα και είναι η προβολή g ενώ τα πλήρη δεδομένα τα δηλώνουμε με (s, g) , όπου s είναι η κρυφή μεταβλητή.

Στη τομογραφία εκπομπής, ο λόγος που τα δεδομένα μας, τα φωτόνια που ανιχνεύονται, είναι ελλιπή είναι διότι δεν ξέρουμε από ποιά εικονοστοιχεία (pixels) ακριβώς προέρχονται τα φωτόνια που συλλέγουμε σε κάθε προβολή. Σ' αυτό το σημείο θα πρέπει να δούμε πιο αναλυτικά πώς υπολογίζουμε τη προβολή ενός αντικειμένου. Για υπολογιστικούς λόγους, δεν μπορούμε να αναπαραστήσουμε την ανακατασκευασμένη εικόνα ως μια συνάρτηση στο συνεχές πεδίο, οπότε αντί αυτής υπολογίζουμε την εικόνα στο διακριτό πεδίο ως ένα διάνυσμα στήλης f . Οπότε οι μετρήσεις g_i , οι προβολές για τις διάφορες γωνίες περιστροφής, μπορούν να προσεγγιστούν από το σύστημα των παρακάτω γραμμικών εξισώσεων:

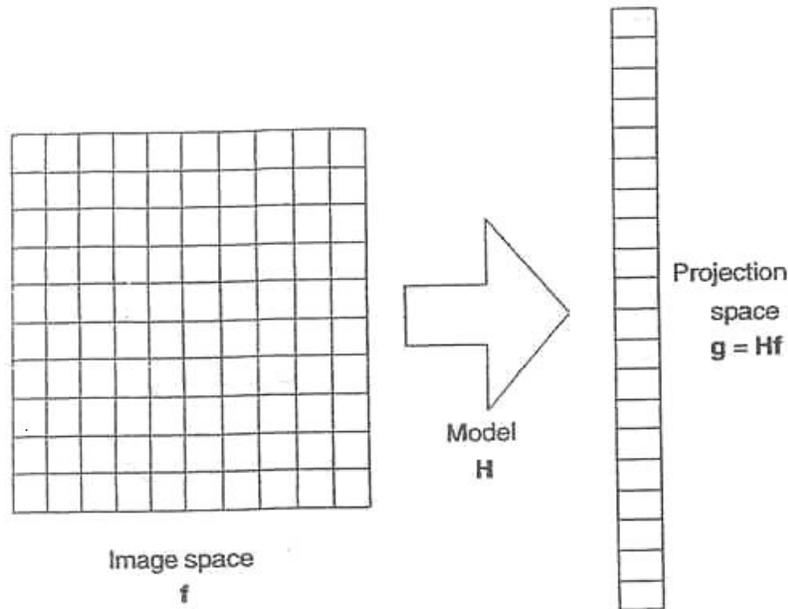
$$g_i = h_i^T f, \quad i = 1, \dots, P \quad (3.18)$$

το οποίο μπορεί να συνοψιστεί στην παρακάτω εξίσωση, όπου τα P διανύσματα απουελούν ένα πίνακα:

$$g = H f \quad (3.19)$$

Στην εξίσωση (3.18) το διάνυσμα h_i είναι η i -οστή γραμμή του πίνακα H και κάθε στοιχείο της f , δηλώνεται από τον $f_j, j = 1, \dots, N$, όπου N είναι το πλήθος των εικονοστοιχείων της εικόνας f και f_j αναπαριστά ένα εικονοστοιχείο στην εικόνα. Τα στοιχεία της προβολής g , όπως φαίνονται και στο σχήμα (3.3), αναφέρονται συνήθως ως κουτιά αποθήκευσης της g (projections bins) και η μέτρηση για κάθε προβολή αναπαρίσταται από ένα κάδο αποθήκευσης (bin).

Στην εξίσωση (3.19), ο H είναι ένας πίνακας $P \times N$ και ονομάζεται πίνακας συστήματος. Αυτός περιγράφει τη διαδικασία της απεικόνισης εφόσον κάθε στοιχείο του (h_{ij}, f_j) αναπαριστά τη μέση συνεισφορά ενός pixel j του αντικειμένου στο κάδο αποθήκευσης i των προβολών. Το μοντέλο της διαδικασίας προβολής μπορεί να γίνει απλό ή σύνθετο ανάλογα με το μοντέλο απεικόνισης. Στην περίπτωση του Radon, τα στοιχεία του πίνακα συστήματος ορίζονται ώστε τα κουτιά προβολής να λαμβάνουν τιμή από την συνεισφορά μόνο των



Σχήμα 3.3: Διακριτό μοντέλο της διαδικασίας προβολής.

pixel, τα οποία συμπίπτουν με μια δοσμένη γραμμή και οι συνεισφορές των pixel που δεν συμπίπτουν με τη γραμμή τους αναθέτουμε τη τιμή μηδέν. Η περίπτωση του γραμμικού μοντέλου είναι μια πιο ρεαλιστική περίπτωση, όπου κάθε κάδο προβολής λαμβάνει συνεισφορές από πολλά pixels που κάθε ένα επιβαρύνεται με μια τιμή σύμφωνα με την σχετική ευαισθησία του κουτιού προβολής με κάθε pixel. Αυτές οι συνεισφορές επηρεάζονται από φυσικούς παράγοντες όπως η εξασθένηση της ακτινοβολίας, η απόκριση των ανιχνευτών και το διασκορπισμό των φωτονίων και μπορεί να υπολογιστεί από τη γνώση μας για το σχεδιασμό του συστήματος και τη μέτρηση της κατανομής, που προκύπτει από την εξασθένηση της ακτινοβολίας, στον ασθενή.

Αν γνωρίζαμε το πίνακα συστήματος H , δηλ αν γνωρίζαμε όχι μόνο πόσα φωτόνια μετριοούνται στο κάδο προβολής j αλλά και πόσα από τα φωτόνια προήλθαν από κάθε pixel k του αντικειμένου, τότε τα δεδομένα μας θα ήταν πλήρη. Γι' αυτό το λόγο μπορούμε να ορίσουμε ένα στοιχείο από τα πλήρη δεδομένα ως την ποσότητα s_{jk} , η οποία δηλώνει τον αριθμό των φωτονίων που εκπέμπονται από το pixel k και ανιχνεύονται στο κάδο προβολής j . Βεβαίως, αν είχαμε πρόσβαση σε τέτοιου είδους δεδομένα, το πρόβλημα της ανακατασκευής θα ήταν τετριμμένο. Ο λόγος που υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε αυτά τα μη πραγματικά δεδομένα είναι γιατί μας επιτρέπουν να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο EM (expectation -maximization) ώστε να έχουμε την λύση που ικανοποιεί τη μέγιστη πιθανοφάνεια.

Παρουσίαση του ML-EM αλγορίθμου

Ο αλγόριθμος ML-EM αποτελείται από εναλλασσόμενα βήματα, τα οποία επαναλαμβάνονται μέχρι να συγκλίνει ο αλγόριθμος. Γενικά ο αλγόριθμος αυτό δοθέντος της πιθανότητας για τη κρυφή μεταβλητή $p(s|g; f)$, που έχει να κάνει με τα παρατηρούμενα δεδομένα g καθώς και με τα κρυμμένα δεδομένα, s , τα οποία ελέγχονται από τη παράμετρο f που είναι οι εκτιμήσεις για την ανακατασκευασμένη εικόνα, έχει στόχο να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα $p(g|f)$ λαμβάνοντας υπόψη τη παράμετρο f . Τα βήματα είναι το βήμα αποτίμησης της πιθανότητας $p(s|g; f)$ (E-step) και το βήμα μεγιστοποίησης αυτής με στόχο σε κάθε επανάληψη να αυξάνουμε τη πιθανότητα $p(g|f)$ M-step και ορίζονται ως εξής:

E-step: Βασιζόμενη στην αρχική εκτίμηση για την ανακατασκευασμένη εικόνα, υπολογίζουμε:

$$Q(f, \hat{f}^n) = E[\ln p(s|g; \hat{f}^n)] \quad (3.20)$$

M-step: Επιλέγουμε την επόμενη εκτίμηση για την ανακατασκευασμένη εικόνα ώστε να μεγιστοποιείται η $Q(f, \hat{f}^n)$:

$$\hat{f}^{n+1} = \arg \max_f Q(f, \hat{f}^n) \quad (3.21)$$

Η ουσία του αλγορίθμου είναι ότι αν είχαμε τα πλήρη δεδομένα, το πρόβλημα της μέγιστης πιθανοφάνειας θα ήταν εύκολο να επιλυθεί. Ωστόσο, με την απουσία των πλήρη δεδομένων ο λογάριθμος της πιθανότητας για αυτά δεν μπορεί ούτε καν να υπολογιστεί. Γι' αυτό το λόγο, σε κάθε επανάληψη υπολογίζεται η μέση τιμή του λογαρίθμου της πιθανότητας των πλήρη δεδομένων στο E-step και μεγιστοποιείται στο M-step. Παρακάτω θα δείξουμε ότι αυτή η διαδικασία μεγιστοποιεί τη πιθανότητα $p(g|f)$ σε κάθε επανάληψη, εκτός και αν αυτή έχει πάρει τη μέγιστη τιμή της σε κάποια επανάληψη, οπότε από εκεί κ πέρα δεν θα αλλάξει τιμή.

Ο EM αλγόριθμος αυξάνει τη πιθανοφάνεια

Σ' αυτό το σημείο σημαντικό είναι να υπενθυμίσουμε ότι ο στόχος της ML ανακατασκευής είναι να βρούμε μια εικόνα f που θα μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανότητας $p(g|f)$ ή ισοδύναμα το λογάριθμο της πιθανοφάνειας $l(f) = \ln p(g|f)$, για τον EM αλγόριθμο αυτή την ονομάζουμε το λογάριθμο πιθανοφάνειας για τα ελλιπή δεδομένα.

Αρχικά, ας συσχετίσουμε το λογάριθμο της πιθανοφάνειας των παρατηρούμενων (ελλιπή) δεδομένων g με αυτόν των πλήρη δεδομένων που θα μπορούσαμε ιδανικά να έχουμε. Από τη βασική θεωρία πιθανοτήτων έχουμε:

$$p(s; f) = p(s|g; f)p(g|f) \quad (3.22)$$

Παίρνοντας τον λογάριθμο και των δυο μερών της εξίσωσης (3.11) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.22) έχουμε:

$$l(f) = \ln p(g|f) = \ln p(s; f) - \ln p(s|g; f) \quad (3.23)$$

Παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή και των πλευρών της εξίσωσης (3.23) λαμβάνοντας υπόψη τη πιθανότητα $p(s|g; \hat{f}^n)$ έχουμε:

$$l(f) = E[\ln p(s; f)|g; \hat{f}^n] - E[\ln p(s|g; f)|g; \hat{f}^n] = Q(f, \hat{f}^n) - R(f, \hat{f}^n), \quad (3.24)$$

Ας συγκρίνουμε, τις τιμές του λογαρίθμου της πιθανοφάνειας για τα ελλιπή δεδομένα g για την επανάληψη n και $n + 1$:

$$l(f^{\hat{n}+1}) - l(\hat{f}^n) = [Q(f^{\hat{n}+1}, \hat{f}^n) - Q(\hat{f}^n, \hat{f}^n)] + [R(\hat{f}^n, \hat{f}^n) - R(f^{\hat{n}+1}, \hat{f}^n)] \quad (3.25)$$

Αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι ότι αυτή η διαφορά είναι θετική, οπότε τότε συνεπάγεται ότι σε κάθε επανάληψη η πιθανοφάνεια όταν είναι δυνατόν ενώ στη χειρότερη περίπτωση παραμένει αμετάβλητη. Ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους της εξίσωσης (3.25) στις αγκύλες είναι ξεκάθαρα ότι είναι θετικός διότι στο M-step μεγιστοποιείται ο $Q(f, \hat{f}^n)$ οπότε έχουμε $Q(f^{\hat{n}+1}, \hat{f}^n) \geq Q(\hat{f}^n, \hat{f}^n)$. Ο δεύτερος όρος είναι επίσης θετικός, όπως αποδεικνύεται από τα παρακάτω.

Η παρακάτω ταυτότητα ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό t : $\ln t \leq t - 1$. Οπότε για τον πραγματικό αριθμό

$$\pi(s) = \frac{p(s|g; f^{\hat{n}+1})}{p(s|g; \hat{f}^n)} \quad (3.26)$$

ισχύει:

$$E[\ln \pi(s)|g; \hat{f}^n] \geq E[\ln \pi(s)|g; \hat{f}^n] - 1 \quad (3.27)$$

Αντικαθιστώντας στο δεξί μέλος της (3.27) την (3.26) έχουμε:

$$E[\ln \pi(s)|g; \hat{f}^n] - 1 = E\left[\frac{p(s|g; f^{\hat{n}+1})}{p(s|g; \hat{f}^n)}|g; \hat{f}^n\right] - 1 = \int \frac{p(s|g; f^{\hat{n}+1})}{p(s|g; \hat{f}^n)} p(s|g; \hat{f}^n) ds - 1 = 0 \quad (3.28)$$

Από τις εξισώσεις (3.26)- (3.28) έχουμε:

$$\begin{aligned} E[\ln \pi(s)|g; \hat{f}^n] \leq 0 &\implies E[\ln p(s|g; f^{\hat{n}+1})|g; \hat{f}^n] - E[\ln p(s|g; \hat{f}^n)|g; \hat{f}^n] \leq 0 \\ &\implies R(f^{\hat{n}+1}, \hat{f}^n) - R(\hat{f}^n, \hat{f}^n) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, ότι ο δεύτερη διαφορά στην εξίσωση (3.25) είναι θετική, οπότε ισχύει:

$$l(f^{\hat{n}+1}) \geq l(\hat{f}^n) \quad (3.30)$$

και τελικά καταλήγουμε σ' αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε, ότι σε κάθε επανάληψη αυξάνεται η πιθανοφάνεια του λογαρίθμου της συνάρτησης $p(g|f)$.

Ο αλγόριθμος EM για ανακατασκευή εικόνας σε τομογραφία εκπομπής

Σ' αυτή την ενότητα θα δούμε πώς προκύπτει η εξίσωση (3.17), η οποία είναι ο επαναληπτικός τύπος του αλγόριθμου ML-EM για την ανακατασκευή εικόνας σε τομογραφία εκπομπής. Ένας χρήσιμος ορισμός στη τομογραφία εκπομπής για τη κρυφή μεταβλητή είναι ο s_{im} , ο οποίος περιγράφει τον τυχαίο αριθμό των φωτονίων που εκπέμπονται από ένα pixel m και ανιχνεύονται στο κάδο προβολής i . Η κρυφή μεταβλητή μπορεί να σχετιστεί με τη παρατηρούμενη προβολή g και την εικόνα f ως εξής:

$$g_i = \sum_m s_{im} \quad (3.31)$$

$$E[s_{im}] = h_{im} f_m \quad (3.32)$$

Το E-step του EM αλγορίθμου απαιτεί μια έκφραση για το λογάριθμο της πιθανότητας για τα πλήρη δεδομένα $\log p(s, f)$. Στη τομογραφία εκπομπής, οι μετρήσεις των φωτονίων s_{im} είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κατανομή Poisson, οπότε έχουμε:

$$p(s; f) = \prod_i \prod_m \frac{E[s_{im}]^{s_{im}} e^{-E[s_{im}]}}{s_{im}!} \quad (3.33)$$

και ο λογάριθμος αυτής της πιθανότητας είναι, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.32):

$$\ln p(s; f) = \sum_i \sum_m [s_{im} \ln(h_{im} f_m) - h_{im} f_m - \ln(s_{im}!)] \quad (3.34)$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το E-step του EM αλγορίθμου.

E-step

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.34), το E-step υπολογίζεται ως εξής:

$$Q(f, \hat{f}^n) = E[\ln p(s|g; \hat{f}^n)] = \sum_i \sum_m \{E[s_{im}|g; \hat{f}^n] \ln(h_{im} f_m) - h_{im} f_m - E[\ln(s_{im}!)]\} \quad (3.35)$$

Επειδή δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα πλήρη δεδομένα, θεωρούμε αντί αυτών την αναμενόμενη τιμή τους. Η υπό όρους μέση τιμή της s_{im} στην εξίσωση (3.35) δίνεται από τον τύπο:

$$E[s_{im}|g, \hat{f}^n] = \frac{h_{im} f_m^n}{\sum_k h_{ik} f_k^n} g_i \triangleq p_{im} \quad (3.36)$$

το οποίο είναι απλά το κλάσμα που μας δείχνει τα ανιχνευόμενα φωτόνια στο κάδο προβολής i τα οποία αναμένονταν να έχουν εκπεμφθεί από το pixel m , δοθέντος ότι η εκτίμηση της εικόνας \hat{f}^n είναι η πηγή απ' όπου εκπέμπονται αυτά τα φωτόνια. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.36) στην εξίσωση (3.35), έχουμε τη τελική μορφή του E-step που είναι:

$$Q(f, \hat{f}^n) = \sum_i \sum_m \{p_{im} \ln(h_{im} f_m) - h_{im} f_m - E[\ln(s_{im}!)]\} \quad (3.37)$$

Οπότε τώρα έχουμε τη ποσότητα που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ώστε να πάρουμε την καλύτερη ανακατασκευασμένη εικόνα.

M-step

Στο βήμα αυτό, βρίσκουμε την επόμενη εκτίμηση της εικόνας, την f^{n+1} μεγιστοποιώντας τη ποσότητα $Q(f, \hat{f}^n)$ ως προς f . Αυτό το επιτυγχάνουμε θέτοντας τη παράγωγο ως προς f της $Q(f, \hat{f}^n)$ ίση με μηδέν έχουμε:

$$\frac{\partial Q(f, \hat{f}^n)}{\partial f_j} = \sum_i \left(\frac{p_{ij}}{f_j^{\hat{n}+1}} - h_{ij} \right) = 0 \quad (3.38)$$

Λύνοντας ως προς $f_j^{\hat{n}+1}$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.36), έχουμε το τύπο της εξίσωσης (3.17) που αναφέραμε αρχικά και παίρνουμε την εκτίμηση της ανακατασκευασμένης εικόνας σε κάθε επανάληψη για τον αλγόριθμο EM στην τομογραφία εκπομπής και έχουμε:

$$f_j^{\hat{n}+1} = \frac{\hat{f}_j^n}{\sum_{i'} h_{i'j}} \sum_i h_{ij} \frac{g_i}{\sum_k h_{ik} \hat{f}_k^n} \quad (3.39)$$

3.5.3 Αλγόριθμος MAP-EM

Όπως εξηγήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, η λύση μέγιστης πιθανοφάνειας είναι σε γενικές γραμμές αρκετά θορυβώδη ώστε να είναι πρακτικά χρήσιμη, οπότε με κάποιο τρόπο θα πρέπει να ελέγξουμε το θόρυβο στην εικόνα. Σε πρόσφατες κλινικές εφαρμογές, η πιο συνηθισμένη προσέγγιση για να επιτευχθεί αυτό είναι το σταμάτημα των επαναλήψεων νωρίς και/ή η εφαρμογή ενός γραμμικού φίλτρου για την απομάκρυνση του θορύβου. Ωστόσο, η MAP προσέγγιση προσφέρει μια πιο ευέλικτη και έχων αρχές μέθοδο, η οποία ενισχύει τις επιθυμητές ιδιότητες που θέλουμε να έχει η ανακατασκευασμένη εικόνα.

Λόγω των ομοιοτήτων ανάμεσα στο MAP και το ML κριτήριο, οι περισσότεροι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για ανακατασκευή με βάση τη μέγιστη πιθανοφάνεια έχουν ισοδύναμους ώστε η ανακατασκευή να γίνεται με βάση τη μέγιστη εκ των υστέρων πιθανοφάνειας. Ωστόσο, ο όρος που ορίζει την εκ των προτέρων πιθανοφάνεια μπορεί συχνά να δημιουργεί προβλήματα τα οποία απαιτούν για να επιλυθούν κάποιες διαδικασίες προσέγγισης ή επιπρόσθετα βήματα. Σε αντίθετη περίπτωση ο αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοστεί χωρίς δυσκολία αλλά μόνο για συγκεκριμένες μορφές εκ των προτέρων πιθανοφάνειας.

Τελείως ανάλογα με την εξίσωση (3.39) στην οποία καταλήξαμε για τον EM αλγόριθμο έχουμε και την εξίσωση για τον MAP-EM αλγόριθμο με τη διαφορά ότι προστίθεται και ένας όρος παραπάνω, ο λογάριθμος της εκ των προτέρων πιθανοφάνειας $\ln p(f)$ [10]:

$$f_j^{\hat{n}+1} = \frac{\hat{f}_j^n}{\sum_{i'} h_{i'j} + \beta \frac{\partial U(f)}{\partial f}} \sum_i h_{ij} \frac{g_i}{\sum_k h_{ik} \hat{f}_k^n} \quad (3.40)$$

όπου η $U(f)$ είναι η συνάρτηση που έχει να κάνει με τη Gibbs κατανομή που ακολουθεί η εκ των προτέρων πιθανότητα με την οποία έχουμε ασχοληθεί και θα αναλύσουμε στην παρακάτω ενότητα. Ο αλγόριθμος αυτός διαφέρει από τον ML-EM κυρίως στο ότι υπάρχει

ένας prior όρος, επιπλέον, στον παρονομαστή. Αυτός ο όρος είναι προβληματικός διότι για να υπολογιστεί προϋποθέτει να γνωρίζουμε την επόμενη εκτίμηση της εικόνας, δηλ αυτή που ψάχνουμε, που βέβαια δεν είναι διαθέσιμη σ' αυτό το βήμα. Οι διάφορες παραλλαγές του MAP-EM αλγορίθμου έχουν να κάνουν με το πώς προσεγγίζουν αυτό το πρόβλημα. Η πιο απλή προσέγγιση είναι να αποτιμηθεί η παράγωγος του νέου όρου με την εκτίμηση της εικόνας που έχει γίνει στο προηγούμενο βήμα, μέθοδος που ονομάζεται διαδικασία με ενός βήματος καθυστέρηση (OSL) [10]. Ο MAP-EM OSL αλγόριθμος συγκλίνει στη MAP λύση μόνο για ορισμένες μορφές εκ των προτέρων πιθανοτήτων [18].

Ιδιότητες του MAP αλγορίθμου ανακατασκευής

Με τη μέθοδο MAP πολλά από τα κύρια προβλήματα που σχετίζονται με την ανακατασκευή με τον αλγόριθμο EM δεν υπάρχουν σε μεγάλο βαθμό. Πρώτα, οι ανακατασκευές με τον MAP έχουν ως αποτέλεσμα πιο ομαλές (smooth) εικόνες. Δεύτερον, οι εκτιμήσεις της επαναλαμβανόμενης MAP μεθόδου τείνουν να φτάσουν σε τιμές, οι οποίες αλλάζουν πολύ λίγο μετά από κάποιο αριθμό επαναλήψεων, δείχνοντας ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει. Η σύγκλιση μπορεί να ελεγχθεί στην περίπτωση που η εκ των προτέρων πιθανότητα ακολουθεί κατανομή Gibbs από τη τιμή της παραμέτρου β [19]. Καθώς η τιμή της παραμέτρου β μειώνεται, ο βαθμός εξομάλυνσης της εικόνας μειώνεται διότι το MAP κριτήριο δεν λαμβάνει τόσο υπόψη τον όρο της εκ των προτέρων πιθανότητας για την εξομάλυνση της εικόνας. Αντίθετα, καθώς η παράμετρος β αυξάνεται, η εξομάλυνση της εικόνας αυξάνεται αλλά ενδεχομένως κάποια σημαντικά χαρακτηριστικά της εικόνας να αρχίσουν να αλλοιώνονται. Η ανάθεση τιμής στη παράμετρο β είναι ένα κρίσιμο κομμάτι στην υλοποίηση του MAP αλγορίθμου διότι αρκετά μεγάλες ή αρκετά μικρές τιμές για τη μεταβλητή β οδηγούν στην έλλειψη αντίθεσης (contrast) και εμφάνιση των λεπτομερειών της εικόνας ενώ ανεπαρκής τιμές παράγουν εικόνες που είναι αρκετά θορυβώδεις.

Διαφορετικοί τύποι εκ των προτέρων πιθανοτήτων παράγουν διαφορετικά χαρακτηριστικά εξομάλυνσης. Priors δευτέρου βαθμού οδηγούν σε εξομαλυσμένες εικόνες, οι οποίες ποιοτικά είναι ίδιες μ' αυτές που παίρνουμε από το γραμμικό φιλτράρισμα που γίνεται στο πεδίο της εικόνας [20]. Priors που αυξάνονται γραμμικά συνήθως έχουν μια ρυθμιζόμενη κλιμακούμενη παράμετρο, η οποία ορίζει κατά πόσο λαμβάνουμε υπόψη τις μικρές διαφορές ανάμεσα στα pixel. Αν η κλιμακούμενη παράμετρος ρυθμιστεί να επιτρέπει μικρές διαφορές ανάμεσα στα pixel, το αποτέλεσμα μπορεί να εξομαλύνει το θόρυβο στην εικόνα ενώ ταυτόχρονα να διατηρήσει αδρές τις ακμές των αντικειμένων της εικόνας.

Μολονότι ο αλγόριθμος ανακατασκευής MAP εξομαλύνει το θόρυβο με επιτυχία και συγκλίνει πιο γρήγορα από τον EM, έχει και αυτός κάποια μειονεκτήματα. Πρώτον, η επιτυχία του εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την επιλογή των παραμέτρων. Δυστυχώς, δεν είναι αποτελεσματικό να χρησιμοποιούμε προσεγγίσεις του τύπου δοκιμή και αποσφαλμάτωση για την επιλογή των παραμέτρων διότι μια ολόκληρη επαναληπτική μέθοδος ανακατασκευής εκτελείται και αποτιμά το αποτέλεσμα με βάση ένα σύνολο από παραμέτρους. Δεύτερον, υπερβολική εξομάλυνση χρησιμοποιώντας priors που ακολουθούν κατανομή Gibbs μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα να χαθούν αρκετά χαρακτηριστικά της εικόνας ή σε μερικές περιπτώσεις

τη δημιουργία ψεύτικων χαρακτηριστικών. Τέλος, ένα κύριο χαρακτηριστικό του MAP αλγορίθμου είναι ότι προσθέτει μια πόλωση στο πρόβλημα εύρεσης της μέγιστης πιθανοφάνειας (ML) με σκοπό να μειώσει τη διακύμανση του θορύβου.

Κατανομή Gibbs

Μια εικόνα που δεν έχει θόρυβο είναι αρκετά πιθανό τα γειτονικά της pixel να έχουν την ίδια ένταση τιμών. Μια prior που ενισχύει αυτή την ιδιότητα προσπαθεί να παρεμποδίσει έντονες μεταβολές ανάμεσα στα pixel με βάση το γεγονός ότι τέτοια χαρακτηριστικά εμφανίζονται πιθανόν λόγω του θορύβου. Θεωρώντας τις πραγματικές τιμές των pixel ως τυχαίες μεταβλητές, μια ομαλή εικόνα μπορεί να περιγραφεί ως αυτή που οι τιμές των γειτονικών της pixel είναι αρκετά συσχετισμένες ενώ σε pixel που βρίσκονται σε απόσταση αυτό συμβαίνει λιγότερο.

Ένα απλό μαθηματικό μοντέλο που έχει αυτή την ιδιότητα είναι το στοχαστικό πεδίο Markov (Markov random field), το οποίο μπορεί να περιγραφεί από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας Gibbs [21]:

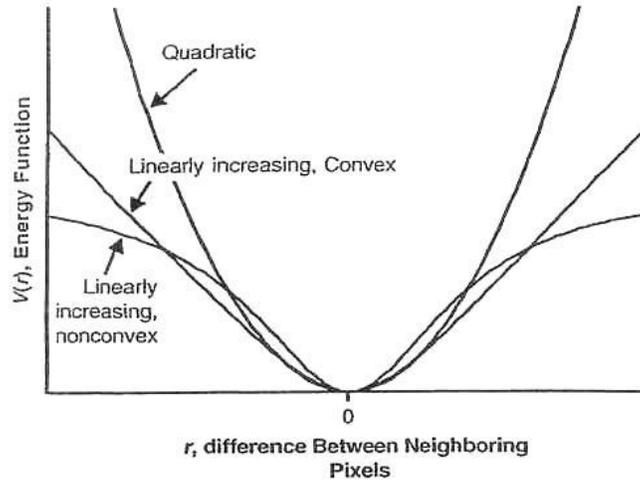
$$p(f) = \frac{1}{Z} \exp[-\beta U(f)], \quad (3.41)$$

όπου Z είναι μια σταθερά κανονικοποίησης, β είναι μια βαθμωτή πολωμένη παράμετρος που αποφασίζει την κορυφή της κατανομής σε σχέση με το μέγιστό της και η $U(f)$ είναι η συνάρτηση ενέργειας (energy function). Η συνάρτηση αυτή είναι ένα πολωμένο άθροισμα από συναρτήσεις, οι οποίες αφορούν σε ένα μικρό σύνολο από γειτονικά pixels, τις κλίκες και δηλώνονται από το S_c με $c = 1, \dots, C$:

$$U(f) = \sum_{c=1}^C \sum_{i,j,k \in S_c} w_{ijk} V_c(f_i, f_j, f_k, \dots) \quad (3.42)$$

Στην εξίσωση (3.43), τα pixels με δείκτες i, j, k, \dots είναι στοιχεία της ίδιας κλίκας. Αυτό το γενικό μοντέλο περιγράφει έναν αριθμό από priors που προτάθηκαν για ανακατασκευή σε τομογραφία εκπομπής, που εμπεριέχει και τις Gaussian priors [22]. Οι κλίκες μπορούν να έχουν οποιοδήποτε αριθμό από pixels. Για παράδειγμα, η συνολική ένταση στην εικόνα μπορεί να δεσμευτεί χρησιμοποιώντας μια κλίκα που περιέχει όλα τα pixels της εικόνας και η συνάρτηση ενέργειας βασίζεται στο άθροισμα των εντάσεων όλων των pixels της κλίκας. Είναι επιτρεπτό να αλλάζω το μέγεθος της κλίκας και της συναρτήσεων ενέργειας στο μοντέλο Gibbs και ένα συγκεκριμένο pixel μπορεί να είναι μέλος σε περισσότερες από μια κλίκα.

Στις περισσότερες εφαρμογές ανακατασκευής σε τομογραφία εκπομπής, υπάρχει μια κλίκα για κάθε pixel i και κάθε κλίκα αποτελείται από pixels που είναι πιο κοντινά στο pixel i . Μέθοδοι που χρησιμοποιούν κλίκες των δυο pixel [23] γενικά χρησιμοποιούν συναρτήσεις που σχετίζονται με τη διαφορά έντασης μεταξύ των δυο pixels. Σαν αποτέλεσμα των παραπάνω, η εξίσωση (3.43) συχνά απλοποιείται στην:



Σχήμα 3.4: Συναρτήσεις κλίμακας για Gibbs εκ των προτέρων πιθανότητες.

$$U(f) = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in S_i, i < j} w_{ij} V_{ij}(f_i - f_j), \quad (3.43)$$

όπου $V_{ij}(f_i - f_j) = (f_i - f_j)^2$.

Μολονότι υπάρχουν πολλές δυνατότητες για τη δομή της κλίμακας και τα βάρη της, συνήθως οι κλίμακας αποτελούνται από τοπικές γειτονιές και τα βάρη συνήθως προσδιορίζονται από το αντίστροφο της απόστασης ανάμεσα στα κέντρα των δυο pixels της κλίμακας.

Οι συναρτήσεις που προσδιορίζουν τη κλίμακα έχουν γενικά τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα (3.4). Η τιμή της συνάρτησης αυτής μηδενίζεται όταν $r = f_i - f_j = 0$ και αυξάνεται με την αύξηση της διαφοράς ανάμεσα στα γειτονικά pixel. Γι' αυτό το λόγο, μεγάλες διαφορές στις τιμές των pixel σημαίνει αύξηση της συνάρτησης ενέργειας $U(f)$, η οποία με τη σειρά της μειώνει την εκ των προτέρων πιθανότητα της εικόνας. Οι συναρτήσεις ενέργειας χωρίζονται σε δυο κατηγορίες ανάλογα με τη συμπεριφορά της συνάρτησης, που προσδιορίζει τη κλίμακα, για μεγάλο r . Εφαρμόζεται δευτέρου και μεγαλύτερου βαθμού συναρτήσεις [24] που αυξάνουν την εξομάλυνση καθώς η διαφορά μεταξύ των pixel αυξάνεται. Οι γραμμικά αυξανόμενες συναρτήσεις [10] [25],[26],[27] τείνουν να γίνουν γραμμικές συναρτήσεις του r για μεγάλο r . Οι εκ των προτέρων πιθανότητες που αυξάνονται πιο αργά από μια δευτέρου βαθμού συνάρτηση ονομάζονται εκ των προτέρων πιθανότητες που διατηρούν τις ακμές (edge-preserving priors) διότι μπορούν να επιλέξουν το βαθμό εξομάλυνσης στο αποτέλεσμα, απομακρύνοντας τις μικρές διαφορές λόγω θορύβου ενώ διατηρούν τη δριμύτητα των ακμών στο τελικό αποτέλεσμα. Οι γραμμικές συναρτήσεις μπορεί να είναι κυρτές ή μη κυρτές. Επειδή το να πραγματοποιηθούν εξαντλητικές συγκρίσεις, για να καταλήξουμε ποιές είναι καλύτερες, είναι δύσκολο, δεν έχει καθιερωθεί καμία κατηγορία συνάρτησης κλίμακας να προτιμάται πάντα σε σχέση με άλλες.

Χρησιμοποιώντας την Gibbs εκ των προτέρων πιθανότητα της εξίσωσης (3.41), ο λογάριθμος της εκ των υστέρων πιθανότητας γίνεται:

$$\ln p(f|g) = \ln L(f) - \beta U(f), \quad (3.44)$$

όπου η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(f)$ μπορεί να ακολουθεί Poisson ή Gaussian κατανομή όπως περιγράφονται στην ενότητα (3.2). Θορυβώδεις εικόνες μπορούν να παράγουν μεγάλες τιμές της συνάρτησης πιθανοφάνειας αλλά περιορίζονται από τον εκ των προτέρων όρο $\beta U(f)$. Μ' αυτό το τρόπο, παρατηρούμε ότι πρέπει να υπάρχει ισορροπία ώστε να λαμβάνονται υπόψη τα δεδομένα -μετρήσεις g , μέσω της πιθανοφάνειας, αλλά και τα δεδομένα της εκ των προτέρων πιθανότητας. Αυτή η ισορροπία ελέγχεται από την παράμετρο στάθμισης β . Αν η παράμετρος β είναι ίση με μηδέν, η MAP λύση είναι η λύση μέγιστης πιθανοφάνειας. Καθώς η β παίρνει μεγαλύτερες τιμές, ο όρος της prior κυριαρχεί στη μεγιστοποίηση. Γι' αυτό, η β , που ονομάζεται υπερπαράμετρος του προβλήματος μεγιστοποίησης, είναι ο πιο καθοριστικός παράγοντας όσο αφορά στο βαθμό εξομάλυνσης στη MAP λύση. Συνήθως η τιμή της παραμέτρου β καθορίζεται από το χρήστη και η επιλογή της βασίζεται στην εμπειρία του και τα επιθυμητά αποτελέσματα αλλά υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για να αποφασιστεί αυτόματα η τιμή της [28].

Ο τύπος της εκ των προτέρων πιθανότητας καθορίζει αν η εξίσωση (3.44) έχει ένα μέγιστο ή αν έχει πολλά μη σχετιζόμενα τοπικά μέγιστα. Για εκ των προτέρων πιθανότητες με το τύπο της εξίσωσης (3.43), η συνάρτηση κλίμακας πρέπει να είναι αυστηρά κυρτή με σκοπό να εξασφαλίσουμε ότι η συνάρτηση (3.44) θα έχει ένα μέγιστο. Οπότε, μόνο κυρτές εκ των προτέρων πιθανότητες μπορούν να εγγυηθούν ότι θα έχουμε σύγκλιση σε ένα ολικό μέγιστο του λογαρίθμου της εκ των προτέρων συνάρτησης $p(f|g)$. Μη κυρτές εκ των προτέρων πιθανότητες έχουν προταθεί και φαίνεται να έχουν χρήσιμες ιδιότητες εξίσου καλές, παρά το γεγονός ότι μπορεί να συγκλίνει μόνο σε τοπικά μέγιστα. Η MAP μέθοδος είναι γνωστή και ως η ML μέθοδος υπό περιορισμό διότι ο εκ των προτέρων όρος μπορεί να θεωρηθεί ως περιορισμός στις λύσεις που έχουν ανεπιθύμητες ιδιότητες.

Ένα κύριο αρνητικό της Gibbs prior είναι ότι περιορίζει όλων των ειδών τις απότομες μεταβολές στις τιμές των pixel προσπαθώντας να μειώσει το θόρυβο. Δυστυχώς, κάνοντας αυτό μπορεί επίσης να αλλοιώσει τα όρια της εικόνας αλλοιώνοντας τις ακμές από βασικά χαρακτηριστικά της εικόνας.

3.5.4 Αλγόριθμος MAP-EM με Median εκ των προτέρων κατανομή

Ο αλγόριθμος MAP μπορεί να υλοποιηθεί με διάφορων ειδών εκ των προτέρων πιθανοτήτων εκτός από Gibbs κατανομή. Σ' αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τον αλγόριθμο MAP που η prior του ονομάζεται "median prior" (MP) [29], η οποία προσπαθεί να υιοθετήσει την ιδιότητα ότι κάθε pixel προσελκύεται από το τοπικό του διάμεσο ενώ ταυτόχρονα με τον όρο πιθανοφάνειας ικανοποιείται η συνάφεια με τα δεδομένα. Μ' αυτό το τρόπο διατηρούνται αναλλοίωτες οι ακμές αλλά και περιοχές που είναι τοπικά ομοιόμορφες. Ας ορίσουμε τη γενική περίπτωση ανακατασκευής με τον υπό περιορισμό (λόγω prior) MAP αλγόριθμο και στη συνέχεια να το μελετήσουμε στην περίπτωση της τομογραφίας εκπομπής.

Έστω $\{f_j, j = 1, \dots, N\}$ δηλώνει τη τιμή του αντικειμένου, που θέλουμε να υπολογίσουμε, για το j pixel και $\{\hat{f}_j, j = 1, \dots, N\}$ είναι το αντικείμενο που παράχθηκε από τη διαδικασία της ανακατασκευής. Το πολυδιάστατο αντικείμενο που θέλουμε να υπολογίσουμε και το αντικείμενο που πήραμε από την ανακατασκευή παίρνουν τη μορφή διανυσμάτων N -στοιχείων f και \hat{f} αντίστοιχα με στοιχεία f_j και \hat{f}_j αντίστοιχα. Τα δεδομένα που ανιχνεύθηκαν έχουν στοιχεία $g_i, i = 1, \dots, M$ όπου και αυτά παίρνουν τη μορφή διανύσματος M -στοιχείων g . Η μέγιστης πιθανοφάνειας με εκ των προτέρων εκτίμηση \hat{f} του αντικειμένου f μπορεί να υπολογιστεί βελτιστοποιώντας τη συνάρτηση $\Phi(f)$ που έχει ως εξής:

$$\hat{f} = \arg \min_f \Phi(f) = \arg \min_f \Phi_L(g, f) + \lambda \Phi_P(f), \quad (3.45)$$

όπου $\Phi_L(g, f)$ είναι ο λογάριθμος της πιθανοφάνειας που μας δίνει πληροφορίες για το μοντέλο θορύβου που υπάρχει στα δεδομένα μας και για τις ιδιότητες του αντικειμένου μας παίρνουμε πληροφορίες από τον εκ των προτέρων όρο $\Phi_P(f)$. Η βαθμωτή μεταβλητή $\lambda > 0$ είναι ένας γενικός παράγοντας στάθμισης που ελέγχει τη σχετική επιρροή αυτού του όρου περιορισμού του αποτελέσματος. Η ίδια προσέγγιση συχνά περιγράφεται και από την Μπεϋζιανή ορολογία όπου η εξίσωση (3.45) είναι η εκτίμηση της μέγιστης εκ των υστέρων πιθανοφάνειας (MAP) με την $\Phi(f)$ να θεωρείται ως ο λογάριθμος της εκ των υστέρων πιθανότητας της f και $\lambda \Phi_P(f)$ που θεωρείται ανάλογη με το λογάριθμο της εκ των προτέρων πιθανότητας του αντικειμένου.

Πιο συγκεκριμένα, η εκ των προτέρων πιθανότητα της εικόνας-αντικειμένου $\Phi(f, m)$ εξαρτάται από δυο μεταβλητές με μορφή διανυσμάτων f και m . Το βοηθητικό διάνυσμα m έχει στοιχεία $(m_{j'}, j' = 1, \dots, N)$ που είναι σε πλήρη αντιστοιχία με τα στοιχεία της εικόνας f . Η νέα εκ των προτέρων πιθανότητα περιορίζει τις διαφορές ανάμεσα στα voxels f_j και τα αντίστοιχα στοιχεία $m_{j'}$ του διανύσματος m και είναι:

$$\Phi_P(f, m) = \sum_j \sum_{j' \in \mathcal{N}(j)} w_{jj'} \varphi(f_j - m_{j'}), \quad (3.46)$$

όπου $\mathcal{N}(j)$ δηλώνει τη γειτονιά του pixel j εμπεριέχοντας και τον εαυτό του. Το βοηθητικό διάνυσμα m που είναι σε αντιστοιχία με το διάνυσμα f και οι παράγοντες στάθμισης της γειτονιάς $w_{jj'}$ συνδέουν το στοιχείο f_j όχι με τους $f_{j'}$ γείτονες αλλά με τα $m_{j'}, j' \in \mathcal{N}(j)$. Ο όρος $\varphi(\cdot)$ είναι μια συνάρτηση, της οποίας η μορφή αποφασίζει πώς θα επιδρά η prior στο αποτέλεσμα. Σ' αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι το όρισμα z της συνάρτησης $\varphi(z)$ σχετίζεται συνήθως με το να περιορίζει τις διαφορές μεταξύ των γειτονικών pixels, $z = f_j - f_{j'}$ αλλά σ' αυτή τη μέθοδο το z το χρησιμοποιούμε ως $z = f_j - m_{j'}$. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι το διάνυσμα m είναι μια μεταβλητή που πρέπει να υπολογιστεί και για τους παράγοντες στάθμισης ή αλλιώς βάρη ισχύει $w_{jj'} \geq 0$. Όσο αφορά στη συνάρτηση $\varphi(\cdot)$ θα ορίσουμε τη μορφή της παρακάτω ώστε να συγκεκριμενοποιήσουμε την prior που θα χρησιμοποιήσουμε.

Παρατηρούμε ότι η prior εξαρτάται από δυο μεταβλητές διανύσματα f και m , οπότε η εκ των υστέρων πιθανότητα της εξίσωσης (3.45) μπορεί να γενικευτεί στη μορφή της από κοινού εκ των υστερών πιθανότητας:

$$\Phi(f, m) = \Phi_L(g, f) + \lambda \Phi_P(f, m) \quad (3.47)$$

Θα πρέπει η από κοινού εκ των υστέρων πιθανότητα $\Phi(f, m)$ να είναι κυρτή, οπότε εφόσον είμαστε στη περίπτωση που η $\Phi_L(g, f)$ είναι κυρτή, θα πρέπει να αποδείξουμε τη κυρτότητα της $\Phi_P(f, m)$.

Απόδειξη κυρτότητας

Σ' αυτό το σημείο θα δείξουμε ότι οποιαδήποτε prior της μορφής (3.46) είναι κυρτή δοθέντος μόνο της συνθήκης ότι η $\varphi(\cdot)$ είναι κυρτή. Επιπλέον, η απόδειξη της κυρτότητας της (3.46) δεν εξαρτάται από την διαφορησιμότητα της $\varphi(\cdot)$.

Στην (3.46), τα βάρη w αποτελούν ένα γράφημα με πίνακα γειτνίασης με στοιχεία $w_{jj'}$, οι τιμές των οποίων δηλώνουν τη διαμόρφωση της γειτονιάς. Αν η $\varphi(\cdot)$ είναι κυρτή, τότε έχουμε:

$$\varphi(ax + (1 - a)y) \leq a\varphi(x) + (1 - a)\varphi(y) \quad (3.48)$$

για $a \in [0, 1]$. Δοθέντος δυο σημείων $(f^{(1)}, m^{(1)})$ και $(f^{(2)}, m^{(2)})$ στο χώρο της $\Phi_P(f, m)$, η συνθήκη κυρτότητας για τη $\Phi_P(f, m)$ με βάση την εξίσωση (3.48) έχει ως εξής:

$$\sum_{jj'} w_{jj'} \varphi[\alpha(f_j^1 - m_{j'}^1) + (1 - \alpha)(f_j^2 - m_{j'}^2)] \leq \alpha \sum_{jj'} w_{jj'} \varphi(f_j^1 - m_{j'}^1) + (1 - \alpha) \sum_{jj'} w_{jj'} \varphi(f_j^2 - m_{j'}^2) \quad (3.49)$$

για $a \in [0, 1]$. Αφού $w_{jj'} \geq 0$ και το άθροισμα των κυρτών συναρτήσεων είναι κυρτό, αποδείξαμε ότι η $\Phi_P(f, m)$ είναι κυρτή αν $\varphi(\cdot)$ είναι κυρτή.

Median εκ των προτέρων κατανομή

Αφού αποδείξαμε ότι η εκ των προτέρων πιθανότητα αυτής της μορφής είναι κυρτή, μπορούμε να συνεχίσουμε διαλέγοντας τη κατάλληλη μορφή για τη συνάρτηση $\varphi(\cdot)$. Μπορούμε να ειδικεύσουμε την εξίσωση (3.46) σε μια εκδοχή Median prior (MP), που δηλώνεται από την $\Phi_P^{abs}(f, m)$ και στη συνέχεια θα τροποποιήσουμε αυτή την εκδοχή, για πρακτικούς υπολογιστικούς λόγους, στην τελική εκδοχή της prior $\Phi_P^{med}(f, m)$, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για την εφαρμογή του MAP αλγόριθμου μ' αυτή τη εκ των προτέρων πιθανότητα στη τομογραφία.

Υπάρχει μια σύνδεση ανάμεσα στην απόλυτη τιμή της συνάρτησης $\varphi(z) = |z|$ και τον μέσο. Παρατηρούμε ότι βελτιστοποιώντας την απόλυτη τιμή της συνάρτησης εντός της τοπικής γειτονιάς, η λύση καταλήγει να είναι ο τοπικός διάμεσος. Για παράδειγμα, $median\{2, 2, 5\} = 2 = \arg \min_z |z - 2| + |z - 2| + |z - 5|$. Ο διάμεσος μας ενδιαφέρει διότι ο διάμεσος ενός συνόλου δεδομένων διατηρεί τις ακμές και περιοχές που είναι τοπικά ομοιόμορφα ίδιες. Η συνάρτηση $\Phi_P^{abs}(f, m)$ χρησιμοποιώντας την $\varphi(z) = |z|$ είναι:

$$\Phi_P^{abs}(f, m) = \sum_j \sum_{j' \in N(j)} w_{jj'} \varphi(f_j - m_{j'}) = \sum_j \sum_{j' \in N(j)} |f_j - m_{j'}| \quad (3.50)$$

όπου $w_{jj'} = 1$ για $j' \in N(j)$ και 0 αλλιώς. Καθώς η $\varphi(z) = |z|$ είναι κυρτή και η $\Phi_P^{abs}(f, m)$ είναι επίσης κυρτή σύμφωνα με την παραπάνω απόδειξη. Εφόσον η εκ των προτέρων πιθανότητα Φ_P^{abs} είναι συνάρτηση των f και m , η MAP βελτιστοποίηση της εξίσωσης (3.45) γίνεται μια από κοινού εκτίμηση και γράφεται ως εξής:

$$\hat{f}, \hat{m} = \arg \min_{f, m} \Phi_L(g, f) + \lambda \Phi_P^{abs}(f, m) \quad (3.51)$$

όπου \hat{m} είναι η MAP εκτίμηση για τη μεταβλητή m . Αυτή η από κοινού εκτίμηση υλοποιείται με μια μέθοδο ελαχιστοποίησης (descent), η οποία για κάθε επανάληψη k παίρνει τη γενική μορφή:

$$f^{\hat{k}+1} = \arg \min_f \Phi_L(g, f) + \lambda \Phi_P^{abs}(f, \hat{m}^k) \quad (3.52)$$

$$m^{\hat{k}+1} = \arg \min_m \Phi_P^{abs}(f^{\hat{k}+1}, m) \quad (3.53)$$

Καθώς η $\Phi(f, m)$ είναι κυρτή, η μέθοδος ελαχιστοποίησης για την εξίσωση (3.52) και την (3.53) οδηγεί σε σύγκλιση. Αυτό συμβαίνει ακόμα και όταν η Φ^{abs} δεν είναι παραγωγίσιμη.

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $j \in N(j')$ για να προσδιορίσουμε τους f_j γείτονες του $m_{j'}$. Με βάση τα παραπάνω ότι σχετίζεται ο μέσος με την απόλυτη τιμή της συνάρτησης, οι λύσεις $m^{\hat{k}+1}$ της εξίσωσης (3.53) είναι το σύνολο των τοπικών διαμέσων των $f^{\hat{k}+1}$ και έχουμε:

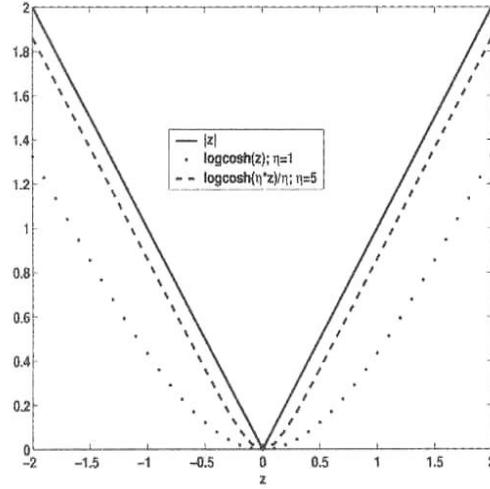
$$f^{\hat{k}+1} = \arg \min_f \Phi_L(g, f) + \lambda \Phi_P^{abs}(f, \hat{m}^k) \quad (3.54)$$

$$m_{j'}^{\hat{k}+1} = \text{median}(f_j^{\hat{k}+1}, j \in N(j')) \quad (3.55)$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα όπου $k = 2$ και $j' = 6$. Γι' αυτή τη περίπτωση, από την εξίσωση (3.55) $\hat{m}_6^3 = \text{median}(\hat{f}_5^3, \hat{f}_6^3, \hat{f}_7^3)$. Εξετάζοντας την εξίσωση (3.54) παρατηρούμε ότι μας δίνει την εκτίμηση MAP για τη f δοθέντος των μέσων \hat{m}^k της προηγούμενης επανάληψης. Η εκ των προτέρων πιθανότητα της εξίσωσης (3.54) παίρνει τη μορφή $\Phi_P^{med}(f, \hat{m}^k) = \sum_j \sum_{j' \in N(j)} |f_j - \hat{m}_{j'}^k|$.

Από την έκφραση της εκ των προτέρων πιθανότητας παρατηρούμε ότι η σχέση ανάμεσα στο διάμεσο και την απόλυτη τιμή της συνάρτησης, έχει ως αποτέλεσμα κάθε $f_j^{\hat{k}+1}$ να έλκεται από το τοπικό διάμεσο των $\hat{m}_{j'}^k$. Αλλά τα $\hat{m}_{j'}^k$ είναι τα ίδια τοπικοί διάμεσοι των \hat{f}_k 's.

Παρατηρούμε ότι ενώ η εξίσωση (3.55) είναι εύκολα υλοποιήσιμη από μια εφαρμογή φιλτραρίσματος με παράθυρο διαμέσου, στην ελαχιστοποίηση της (3.54) δημιουργούνται προβλήματα αν για την επίλυση της χρησιμοποιούνται μέθοδοι κλίσεων (gradient methods), τις οποίες θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Καθώς αναφέραμε παραπάνω,



Σχήμα 3.5: Φαίνεται η επίδραση της μεταβλητής η στη προσέγγιση της απόλυτης τιμής της συνάρτησης \logcosh . Η συνεχής γραμμή δηλώνει την απόλυτη τιμή της συνάρτησης. Η διακεκομμένη και η γραμμή με παύλες δηλώνουν τη \logcosh συνάρτηση για $\eta = 1$ και για $\eta = 5$ αντίστοιχα.

η εκ των προτέρων πιθανότητα $\Phi_P^{abs}(f, m)$ είναι κυρτή αλλά όχι παραγωγίσιμη σε σημεία όπου τα ορίσματα έχουν απόλυτη τιμή μηδέν δηλ $f_j = m_{j'}$. Οπότε, είναι δύσκολο να χρησιμοποιήσουμε τις συνηθισμένες μορφές βελτιστοποίησης αφού βασίζονται στη παραγωγισιμότητα της συνάρτησης. Για να παρακάμψουμε αυτό το πρόβλημα, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση του λογάριθμου του υπερβολικού συνημιτόνου (\logcosh) για να προσεγγίσουμε το $|z|$:

$$\frac{1}{\eta} \logcosh(\eta z) \approx |z|, \quad (3.56)$$

όπου η είναι η παράμετρος που ρυθμίζει την ακρίβεια της προσέγγισης. Η γραφική παράσταση της (3.56) φαίνεται στο σχήμα (3.5) για δυο διαφορετικές τιμές της μεταβλητής η και δείχνει της επίδραση της η στη διαδικασία της προσέγγισης. Καθώς η αυξάνεται, η απόλυτη τιμή της συνάρτησης προσεγγίζεται καλύτερα.

Μ' αυτή τη προσέγγιση, ορίζουμε τη τελική μορφή της median εκ των προτέρων πιθανότητα, $\Phi_P^{med}(f, m)$ ως:

$$\Phi_P^{med}(f, m) = \frac{1}{\eta} \sum_j \sum_{j' \in N(j)} \logcosh(\eta(f_j - m_{j'})) \quad (3.57)$$

Για να επιβεβαιώσουμε ότι η Φ_P^{med} παραμένει κυρτή, αρκεί να δούμε αν η συνάρτηση $\varphi(z) = \logcosh(z)$ είναι κυρτή και τότε από την παραπάνω απόδειξη μπορούμε να μαστε σίγουρη ότι και η Φ_P^{med} είναι κυρτή. Είναι εύκολο να δείξουμε τη κυρτότητα της $\varphi(z) = \logcosh(z)$ παρατηρώντας ότι η δεύτερη παράγωγός της δίνεται από την $\text{sech}^2(z) \geq 0$.

Μ' αυτή τη τροποποιημένη μορφή της MP εκ των προτέρων πιθανότητα, το MAP πρόβλημα γίνεται:

$$\hat{f}, \hat{m} = \arg \min_{f, m} \Phi_L(g|f) + \lambda \Phi_P^{med}(f, m) \quad (3.58)$$

και έχουμε αντίστοιχα και τις εναλλαγές:

$$f^{\hat{k}+1} = \arg \min_f \Phi_L(g|f) + \lambda \Phi_P^{med}(f, \hat{m}_k) \quad (3.59)$$

$$m^{\hat{k}+1} = \arg \min_m \Phi_P^{k+1}(f^{\hat{k}+1}, m) \quad (3.60)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η ελαχιστοποίηση της εξίσωσης (3.60) είναι μόνο η προσέγγιση των μέσων και η υλοποίησή της γίνεται με υπολογισμό της από επαναληπτική μέθοδο. Η ελαχιστοποίηση στην εξίσωση (3.59) είναι απλά μια επαναληπτική MAP εκτίμηση της f . Γι' αυτό το λόγο για κάθε εξωτερικό βρόχο-επανάληψη k πρέπει να πραγματοποιείται ο εσωτερικός βρόχος επαναλήψεων για τις εξισώσεις (3.59) και (3.60). Οπότε όλη η από κοινού MAP εκτίμηση φαίνεται να χρειάζεται αρκετούς υπολογισμούς. Στην επόμενη υποενότητα θα δούμε πώς η υλοποίηση της από κοινού εκτίμησης ,εξισώσεις (3.59) και (3.60), γίνεται έτσι ώστε η υπολογιστική πολυπλοκότητα να είναι σχεδόν ίδια μ' αυτή των συνηθισμένων μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας (MAP) ανακατασκευών στη τομογραφία εκπομπής.

Γι' αυτό το λόγο θα χρησιμοποιήσουμε την εκ των προτέρων πιθανότητα $\Phi_P^{mvp}(f, \hat{m}^k)$ και οι εξισώσεις (3.54), (3.55) θα γραφτούν στην εξής μορφή:

$$f^{\hat{k}+1} = \arg \min_{f \leq 0} \Phi_L(g|f) + \lambda \Phi_P^{mvp}(f, \hat{m}^k) \quad (3.61)$$

$$m_{j'}^{\hat{k}+1} = \text{median}(f_j^{\hat{k}+1}, j \in N(j')), \quad (3.62)$$

όπου η εξίσωση (3.61) είναι η βελτιστοποίηση MAP ως προς f χρησιμοποιώντας την κ των προτέρων πιθανότητα $\Phi_P^{mvp}(f, m)$ που είναι:

$$\Phi_P^{mvp}(f, \hat{m}^k) = \sum_j \frac{(f_j - \hat{m}_j^k)^2}{2\hat{m}_j^k} \quad (3.63)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (3.62) είναι ίδια με την εξίσωση (3.55).

Εφαρμογή της Median Prior στη Τομογραφία

Σ' αυτή την υποενότητα, εφαρμόζουμε τη MAP ανακατασκευή με την εκ των προτέρων πιθανότητα που αφορά στους διάμεσους (median prior) στο πρόβλημα της τομογραφίας εκπομπής. Για να προσαρμόσουμε τις γενικές διατυπώσεις στο πρόβλημα τομογραφίας, χρειάζεται να ορίσουμε τα f και g και έπειτα να δηλώσουμε τα μοντέλα απεικόνισης και θορύβου μέσω της διατύπωσης του λογάριθμου πιθανοφάνειας $\Phi_L(g|f)$. Για την τομογραφία εκπομπής, f_j είναι ο μέσος ρυθμός εκπομπής από το pixel j και g_i είναι ο αριθμός των φωτονίων που ανιχνεύονται στο κάδο αποθήκευσης προβολών i δηλ το sinogram. As

ορίσουμε το πίνακα συστήματος $M \times N H$ να έχει στοιχεία H_{ij} που σημαίνει ότι ανιχνεύουμε φωτόνια στο κάδο αποθήκευσης i προβολής από το pixel j . Στο απλοποιημένο μοντέλο για τομογραφία εκπομπής, θα χρησιμοποιούμε το πίνακα H για να μοντελοποιήσουμε το διακριτό μετασχηματισμό Radon αγνοώντας τα αναρίθμητα σφάλματα που συχνά δημιουργεί αυτό το μοντέλο στη SPECT αλλά και στην PET. Στο μοντέλο μας, τα δεδομένα του sinogram g_i είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν κατανομή Poisson οπότε η πιθανότητα είναι $P(g|f) = Poisson(\bar{g})$ με μέση τιμή $\bar{g} = Hf$. Δοθέντος αυτής της πιθανότητας, μπορούμε να γράψουμε την $\Phi_L(g|f)$ ως εξής:

$$\Phi_L(g|f) = - \sum_i g_i \log \left[\sum_j H_{ij} f_j \right] - \sum_j H_{ij} f_j \quad (3.64)$$

Η MAP-MP ανακατασκευή δίνεται από την εξίσωση (3.59) και (3.60). Παρατηρήθηκε ότι κάθε μια απ' αυτές τις εξισώσεις είναι από μόνη της μια ελαχιστοποίηση που θα πρέπει επιλυθεί από επαναληπτικές μεθόδους και κάθε μια αποτελεί μια υποεπανάληψη των κύριων k -επαναλήψεων. Για να επιλυθεί η (3.60), παρατήρησαν οι (Hsiao et al) ότι το πρόβλημα διασπάται σε μια σειρά από ξεχωριστές 1- Δ ελαχιστοποιήσεις για κάθε m_j^{k+1} και χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Newton για κάθε 1- Δ ελαχιστοποίηση. Για την εξίσωση (3.59), δε χρειάζεται να κάνουμε την ελαχιστοποίηση της $\Phi(f, \hat{m}^k)$ (εσωτερικός βρόχος) για κάθε επανάληψη k (εξωτερικός βρόχος). Απλά μπορούμε να κάνουμε μια επανάληψη του εσωτερικού βρόχου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων με έναν απλό διαγώνιο πίνακα (preconditioner), που επιταχύνει τη σύγκλιση. Η κυρτότητα της συνάρτησης αυτής που ελαχιστοποιούμε μας εγγυάται ότι αυτός ο τρόπος επίλυσης δουλεύει και στη πράξη αυτός ο τρόπος οδηγεί σε γρήγορη ανακατασκευή. Η υπολογιστική πολυπλοκότητα ενός βήματος της μεθόδου των συζυγών κλίσεων έχει να κάνει στη πράξη (για τη τομογραφία) με τις λειτουργίες της προβολής και της οπισθοπροβολής. Καθώς ο υπολογιστικός χρόνος της εξίσωσης (3.60) είναι αμελητέος λαμβάνοντας υπόψη το ένα βήμα της μεθόδου CG που χρησιμοποιείται για την επίλυση της (3.59), καταλήγουμε ότι ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος καθορίζεται από το K , που είναι ο αριθμός των k επαναλήψεων μέχρι να έχουμε σύγκλιση, που είναι περίπου ισοδύναμος με $2K$ διαδικασίες προβολής και οπισθοπροβολής. Από πειράματα που έκαναν παρατηρήθηκε ότι ο αριθμός K φαίνεται να είναι ισοδύναμος με το πλήθος επαναλήψεων που χρειάζονται για μια MAP ανακατασκευή, που χρησιμοποιεί μια συνηθισμένη δευτέρου βαθμού prior εξομάλυνσης. Οπότε καταλήγουμε ότι μια MAP ανακατασκευή χρησιμοποιώντας median prior για να μας δώσει αποτελέσματα χρειάζεται τόσο χρόνο όσο μια συνηθισμένη MAP ανακατασκευή.

Υλοποιώντας τον MP αλγόριθμο με εκ των προτέρων πιθανότητα $\Phi_P^{mrrp}(f, \hat{m}^k)$ για τη τομογραφία εκπομπής [30], ο MP μετατρέπεται σ' έναν επαναληπτικό EM-OSL (expectation-maximization one step late) αλγόριθμο, που αναφέραμε σε παραπάνω ενότητα. Η εξίσωση, όπου η εικόνα \hat{f} ενημερώνεται μέχρι να έχουμε το βέλτιστο αποτέλεσμα, έχει ως εξής:

$$\hat{f}_j^{k+1} = \hat{f}_j^k \frac{\sum_i H_{ij} \frac{g_i}{\sum_i H_{ii} \hat{f}_i^k}}{\sum_{i'} H_{i'j} + \lambda \frac{\partial \Phi^{mrrp}(f=\hat{f}^k)}{\partial f_j}} = \hat{f}_j^k \frac{\sum_i H_{ij} \frac{g_i}{\sum_i H_{ii} \hat{f}_i^k}}{\sum_i H_{ij} + \lambda \frac{\hat{f}_j^k - m_j^k}{m_j^k}}, \quad (3.65)$$



Σχήμα 3.6: Αρχική εικόνα.

όπου $\Phi^{mvp}(f) = \sum_j ((f_j - m_j)^2 / (2m_j))$ και m_j επιλέγεται ευριστικά να είναι ο τοπικός διάμεσος μιας γειτονιάς ($3 \times 3, 5 \times 5$) του pixel j , όπως συμβαίνει και στην εξίσωση (3.55). Η OSL μέθοδος δεν εγγυάται σύγκλιση αλλά σε όλα τα πειράματά μας συνέκλινε.

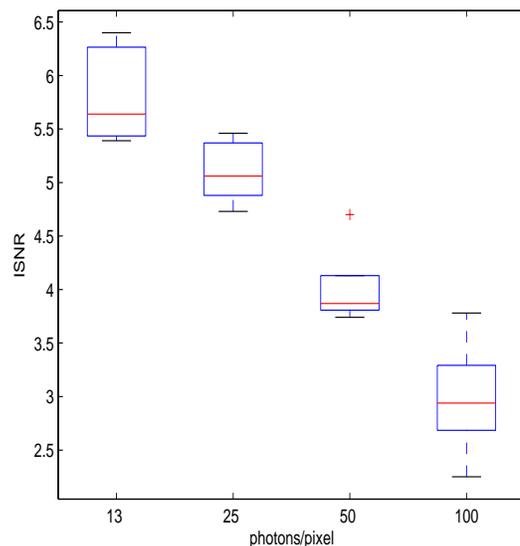
3.6 Πειραματικά Αποτελέσματα

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε μια σειρά από επαναληπτικούς αλγόριθμους, τον αλγόριθμο Μέγιστης Πιθανοφάνειας, που απλά θα τον αναφέρουμε ως ML-EM, τον αλγόριθμο Μέγιστης εκ των υστέρων Πιθανοφάνειας που απλά θα τον αναφέρουμε ως MAP-EM και τέλος τον αλγόριθμο Μέγιστης εκ των υστέρων Πιθανοφάνειας MAP με Median Prior, που απλά θα τον αναφέρουμε ως MAP-EMMP. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε κάποια πειραματικά αποτελέσματα για να αξιολογήσουμε και να συγκρίνουμε αυτούς τους τρεις αλγορίθμους ως προς την επίδοσή τους στην ανακατασκευή τομογραφικών εικόνων. Η εικόνα που χρησιμοποιούμε στα πειράματά μας και αποτελεί τη τέλεια λύση (ground truth) για τη σύγκριση των διάφορων μεθόδων ανακατασκευής είναι η εικόνα, γνωστή ως Shepp - Logan phantom που φαίνεται στο σχήμα (4.1), που αποτελεί προσομοίωση του ανθρώπινου κεφαλιού και έχει διαστάσεις 256×256 .

Για να συγκρίνουμε τους αλγορίθμους ανακατασκευής εισάγουμε μετρικές, για την αριθμητική εκτίμηση των ανακατασκευασμένων εικόνων. Χρησιμοποιούμε λοιπόν την βελτίωση σηματοθορυβικής σχέσης, ISNR, για να ποσοτικοποιήσουμε την ποιότητα της ανακατασκευασμένης εικόνας και ορίζεται ως εξής :

$$ISNR = 20 \log_{10} \frac{\|f - f_{FBP}\|}{f - \hat{f}}, \quad (3.66)$$

όπου f, f_{FBP} και \hat{f} είναι η αρχική εικόνα (ground truth), η εικόνα που λαμβάνεται με τον Filter BackProjection και η ανακατασκευασμένη εικόνα αντίστοιχα.



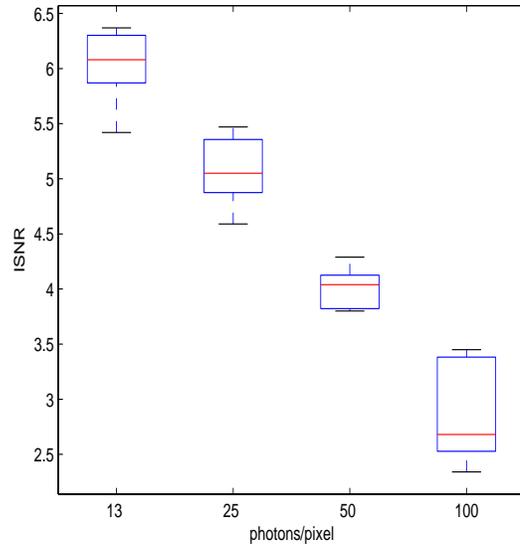
Σχήμα 3.7: Τιμές του ISNR για τον ML-EM αλγόριθμο για 13, 25, 50 και 100 φωτόνια ανά pixel.

Παρακάτω απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις του ISNR των τριών μεθόδων για τέσσερα διαφορετικά επίπεδα Poisson θορύβου, που είναι 13, 25, 50, 100 φωτόνια/pixel.

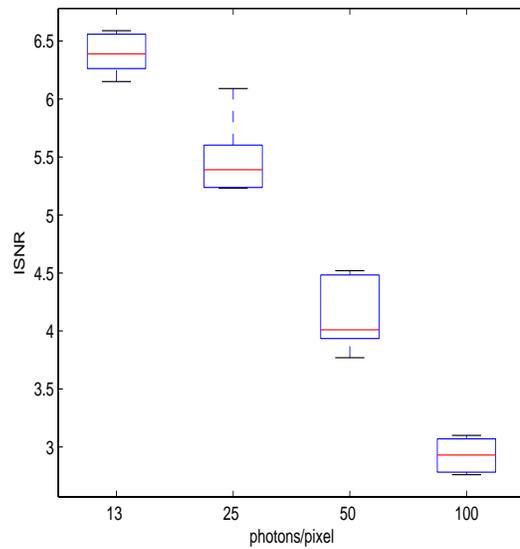
Για τους παραπάνω αλγόριθμους παρατίθενται για κάθε επίπεδο θορύβου οι ανακατασκευασμένες εικόνες και το μέσο ISNR από τα πειράματά μας.

Επιλέγουμε την ανακατασκευασμένη FBP εικόνα με φίλτρο Hann διότι, όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, μειώνει την επίδραση του θορύβου και δίνει πιο ομαλές εικόνες σε σχέση με τα υπόλοιπα φίλτρα, με λιγότερο εμφανείς ακμές.

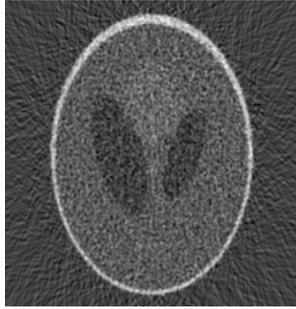
Παρατηρώντας τις εικόνες αλλά και τις γραφικές παραστάσεις καταλήγουμε ότι και οι τρεις επαναληπτικές μέθοδοι είναι πολύ κοντά ως προς την ποιότητα της ανακατασκευασμένης εικόνας που δίνουν για κάθε επίπεδο θορύβου. Παρ' όλα αυτά αν θέλουμε να διακρίνουμε κάποια, μπορούμε να πούμε ότι ο αλγόριθμος MAP-EMMP παρουσιάζει λίγο καλύτερα αποτελέσματα από τους δυο άλλους.



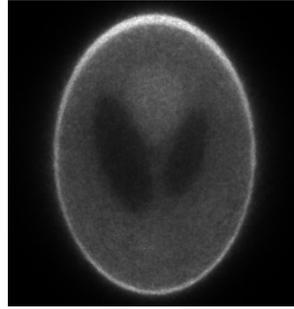
Σχήμα 3.8: Τιμές του ISNR για τον MAP-EM αλγόριθμο για 13, 25, 50 και 100 φωτόνια ανά pixel.



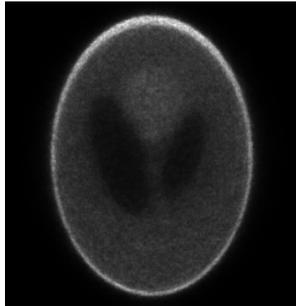
Σχήμα 3.9: Τιμές του ISNR για τον MAP-EMMP αλγόριθμο για 13, 25, 50 και 100 φωτόνια ανά pixel.



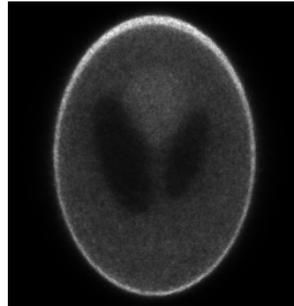
FBP (Hann)



ML-EM (ISNR = 5.64 dB)

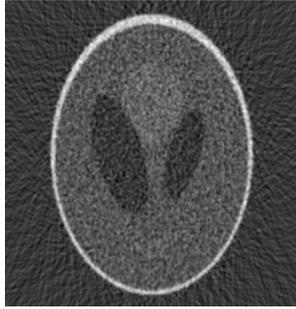


MAP-EM (ISNR = 6.08 dB)

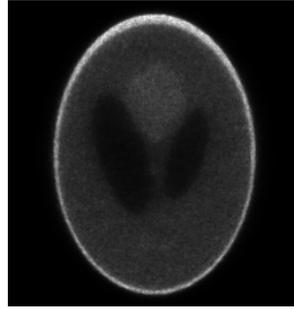


MAP-EMMP (ISNR = 6.39 dB)

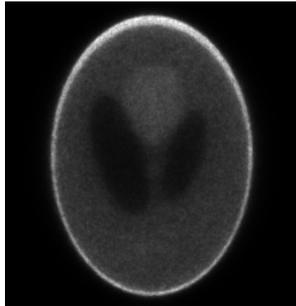
Σχήμα 3.10: Ανακατασκευή εικόνας με 13 φωτόνια/pixel.



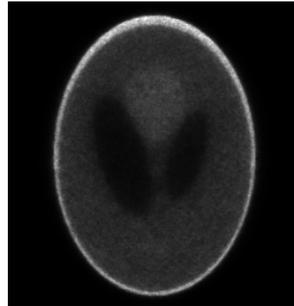
FBP (Hann)



ML-EM (ISNR= 5.06 dB)

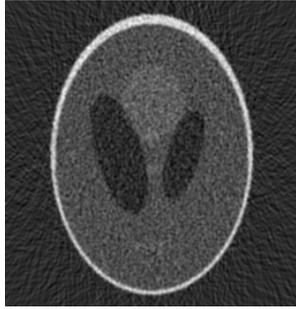


MAP-EM (ISNR= 5.05 dB)

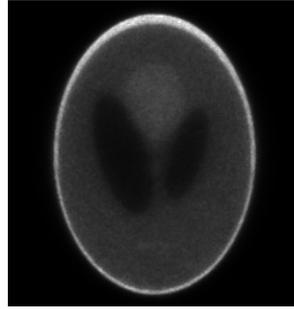


MAP-EMMP (ISNR= 5.39 dB)

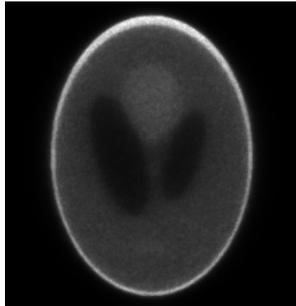
Σχήμα 3.11: Ανακατασκευή εικόνας με 25 φωτόνια/pixel.



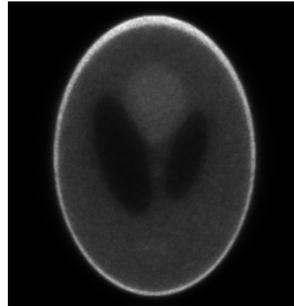
FBP (Hann)



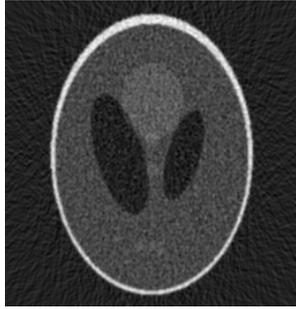
ML-EM (ISNR = 3.87 dB)



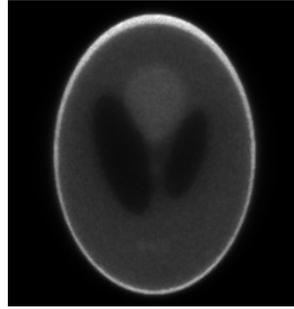
MAP-EM (ISNR= 4.04 dB) MAP-EMMP (ISNR= 4.01 dB)



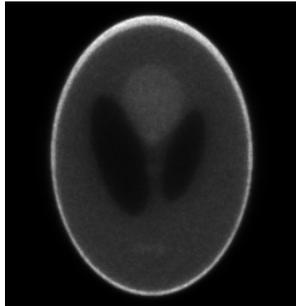
Σχήμα 3.12: Ανακατασκευή εικόνας με 50 φωτόνια/pixel.



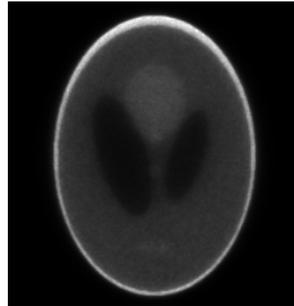
FBP (Hann)



ML-EM (ISNR = 2.94 dB)



MAP-EM (ISNR= 2.68 dB) MAP-EMMP (ISNR= 2.93 dB)



Σχήμα 3.13: Ανακατασκευή εικόνας με 100 φωτόνια/pixel.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΕ ΧΩΡΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

-
- 4.1 Εισαγωγή
 - 4.2 Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων
 - 4.3 Χωρικά Αμετάβλητο Μοντέλο
 - 4.4 Χωρικά Μεταβαλλόμενο Μοντέλο
 - 4.5 Χωρικά Μεταβαλλόμενο ανά Κατεύθυνση Μοντέλο
 - 4.6 Πειραματικά Αποτελέσματα
-

4.1 Εισαγωγή

Σ' αυτό το κεφάλαιο προτείνουμε δυο μοντέλα για την ανακατασκευή εικόνας. Στο πρώτο μοντέλο θέτουμε περιορισμό στα στοιχεία της εικόνας, με σκοπό την εξομάλυνση της εικόνας. Επίσης, τα στοιχεία της προβολής της εικόνας ακολουθούν Poisson κατανομή και τα στοιχεία της εικόνας Γκαουσιανή κατανομή και χρησιμοποιώντας τη μέγιστη εκ των υστέρων (MAP) διατύπωση, όπου ελαχιστοποιώντας τον αρνητικό λογάριθμο της, υπολογίζουμε τις κατάλληλες παραμέτρους για το μοντέλο μας. Επιπλέον, βασιζόμενοι σ' αυτό το μοντέλο χρησιμοποιούμε ένα πιο προσαρμοσμένο μοντέλο θεωρώντας ότι οι παράμετροι του μοντέλου μας ακολουθούν διαφορετικές κατανομές για κάθε στοιχείο της εικόνας. Μ' αυτό το τρόπο πετυχαίνουμε το μοντέλο αυτό να είναι χωρικά προσαρμοζόμενο. Αυτά τα δυο μοντέλα περιγράφονται στην ενότητα (4.3).

Επίσης, προτείνουμε και ένα δεύτερο ιεραρχικό μοντέλο, που βασίζεται στη μέγιστη εκ των υστέρων πιθανοφάνεια και έχει Γκαουσιανή μεταβαλλόμενη εκ των προτέρων πιθανότητα. Αυτή η εκ των προτέρων πιθανότητα υποθέτει ότι η πρώτη τάξης διαφορές ανάμεσα στα pixels της εικόνας, στις τέσσερις κατευθύνσεις, είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση, η οποία μεταβάλλεται χωρικά. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οι διακυμάνσεις αυτές να μας δίνουν πληροφορίες για τις ασυνέχειες της εικόνας με ένα συνεχές μοντέλο. Με σκοπό την παραμετροποίηση αυτού του μοντέλου, οι χωρικά μεταβαλλόμενες διακυμάνσεις θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές μιας Γάμμα κατανομής. Οι παράμετροι αυτής της κατανομής ελέγχουν τη μέση τιμή και τη διακύμανση των χωρικά μεταβαλλόμενων διακυμάνσεων όπου κατά κάποιο τρόπο έτσι ελέγχουμε το βαθμό της μεταβλητότητας της εκ των προτέρων πιθανότητας της εικόνας. Αυτό το μοντέλο περιγράφεται στην ενότητα (4.4).

Τέλος, στην ενότητα (4.2) περιγράφουμε τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων που θα μας φανεί χρήσιμη για την ελαχιστοποίηση των συναρτήσεων των παραπάνω δυο μοντέλων.

4.2 Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων

Το γραμμικό μοντέλο που χρησιμοποιούν οι επαναληπτικές μέθοδοι αλλά και τα δυο μοντέλα που χρησιμοποιήσαμε και αναφέρονται λεπτομερώς στις ενότητες (4.3) και (4.4) μπορεί να περιγραφεί σε μια πρώτη γενική ανάγνωση από το γραμμικό σύστημα:

$$Af = b \quad (4.1)$$

Ποιό είναι όμως το κριτήριο που θα πρέπει να πληρεί η λύση αυτού του συστήματος; Τρόποι για την εύρεση της καλύτερης εκτίμησης που ξεχωρίζουμε είναι, πρώτον η πλήρωση του κριτηρίου των ελαχίστων τετραγώνων για στατιστικά προβλήματα στα οποία δεν γνωρίζουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας, δεύτερον το κριτήριο της μέγιστης πιθανοφάνειας και τρίτον το κριτήριο της μέγιστης εκ των υστέρων πιθανοφάνειας. Εδώ θ' ασχοληθούμε με το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων.

Κριτήριο ελαχίστων τετραγώνων: Επιλέγουμε τη τιμή της f , στην οποία αν εφαρμοστεί ο πίνακας συστήματος H , θα μας δώσει τις προβολές Hf που απέχουν λιγότερο με όρους της Ευκλείδειας απόστασης από τη δοθείσα προβολή, παρατηρήσεις g . Δηλ η λύση των ελαχίστων τετραγώνων σκοπεύει να μεγιστοποιήσει τη συνάφεια μεταξύ των παρατηρούμενων δεδομένων και της ανακατασκευασμένης εικόνας. Μαθηματικά, το κριτήριο αυτό για τη τομογραφία εκπομπής περιγράφεται ως εξής:

$$J(f) = \arg \min_f \|g - Hf\|^2 \Rightarrow \hat{f} = \arg \min_f J(f) \quad (4.2)$$

Λήμμα: Η συνάρτηση $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $J(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - x^T b$, όπου ο $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ένας συμμετρικός, θετικά ορισμένος πίνακας, $b \in \mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n$, καλείται τετραγωνική μορφή.

Η συνάρτηση $J(f)$ μπορεί να γραφεί διαδοχικά:

$$J(f) = \|g - Hf\|^2 = (g - Hf)^T(g - Hf) = \frac{1}{2}f^T(2H^T H)f - 2f^T H^T g + g^T g \quad (4.3)$$

Επομένως η συνάρτηση $J(f)$ είναι τετραγωνική μορφή. Άρα η εύρεση του ελαχίστου για τη συγκεκριμένη συνάρτηση ανάγεται στην ελαχιστοποίηση συναρτήσεων που είναι τετραγωνικές μορφές. Οπότε η ελαχιστοποίηση θα πραγματοποιηθεί με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων που ανήκει σε μια γενικότερη κατηγορία μεθόδων που χρησιμοποιούν τη κλίση της συνάρτησης.

Πιο συγκεκριμένα, η κλίση μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 συμβολίζεται με $\nabla f(x_0)$ ή $g(x_0)$ και έχει κατεύθυνση, την κατεύθυνση της μέγιστης αύξησης της f , από το σημείο αυτό. Επομένως, η κατεύθυνση της αρνητικής κλίσης $-\nabla f(x_0)$ είναι η κατεύθυνση της μέγιστης μείωσης της f από το σημείο αυτό. Είναι λοιπόν προφανές πως η κατεύθυνση της αρνητικής κλίσεως είναι μια καλή κατεύθυνση όταν ψάχνεις το ελάχιστο μιας συνάρτησης. Η διατύπωση ενός αλγορίθμου που να υλοποιεί τη παραπάνω ιδέα δεν είναι παρά ένας επαναληπτικός αλγόριθμος που αν υποθέσουμε ότι μας δίνεται το αρχικό σημείο x^k και σε κάθε επανάληψη μετακινούμαστε κατά $-a_k \nabla f(x^k)$, για να βρούμε το επόμενο x^{k+1} ακολουθούμε το εξής επαναληπτικό σχήμα:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - a_k \nabla f(x^{(k)}) \quad (4.4)$$

όπου a^k είναι μια θετική βαθμωτή μεταβλητή που μας δείχνει το μέγεθος του βήματος. Συνήθως αναφερόμαστε στη παραπάνω επαναληπτική διαδικασία ως αλγόριθμος της απότομης κλίσης (gradient steepest descent algorithm), όπου η κλίση διαφέρει καθώς προχωράει η αναζήτηση, τείνοντας στο μηδέν, καθώς προσεγγίζουμε το ελάχιστο. Η ποσότητα a^k επιλέγεται ώστε:

$$a^k = \arg \min_{a \geq 0} f(x^{(k)} - a \nabla f(x^{(k)})) \quad (4.5)$$

Το καλύτερο κριτήριο για να σταματάει αυτός ο αλγόριθμος είναι όχι όταν μηδενίζεται η κλίση $\nabla f(x^{(k+1)}) = 0$, διότι από υπολογισμούς σπάνια η κλίση παίρνει τιμή ίση με μηδέν, αλλά όταν η απόλυτη διαφορά $|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})|$ ανάμεσα στις τιμές της συνάρτησης για δυο επαναλήψεις είναι μικρότερη από ένα προκαθορισμένο κατώφλι ως εξής:

$$|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})| < \varepsilon \quad (4.6)$$

Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων είναι πιο αποδοτική από τη μέθοδο της απότομης κλίσης. Οι βασικές ιδιότητες αυτής της μεθόδου είναι ότι:

1. Επιλύει δευτεροβάθμιες συναρτήσεις n μεταβλητών σε n βήματα.
2. Η συνήθης υλοποίηση της δεν απαιτεί τον υπολογισμό του Hessian πίνακα.
3. Δεν απαιτεί αντιστροφή αλλά και ούτε αποθήκευση κανενός $n \times n$ πίνακα.

Καθώς γνωρίζουμε η αποδοτικότητα μιας επαναληπτικής μεθόδου έχει να κάνει με τη κατεύθυνση σε κάθε επανάληψη. Για μια δευτεροβάθμια συνάρτηση n μεταβλητών $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - x^T b$, $x \in \mathbb{R}^n$ και $Q^T = Q > 0$, η καλύτερη κατεύθυνση αναζήτησης είναι η λεγόμενη Q -συζυγής κατεύθυνση. Βασικά δυο κατευθύνσεις d^1 και d^2 που ανήκουν \mathbb{R}^n ονομάζονται Q - συζυγείς αν ισχύει ότι $d^{(1)T} Q d^2 = 0$.

Ορισμός: Έστω Q ένας πραγματικός και συμμετρικός $n \times n$ πίνακας. Οι κατευθύνσεις $d^0, d^1, d^2, \dots, d^m$ είναι Q - συζυγείς αν για όλα τα i, j με $i \neq j$ ισχύει $d^{(i)T} Q d^j = 0$.

Λήμμα: Έστω Q συμμετρικός και θετικά ορισμένος $n \times n$ πίνακας. Αν οι κατευθύνσεις $d^0, d^1, \dots, d^k \in \mathbb{R}^n$ με $k \leq n-1$ είναι μη μηδενικές και Q - συζυγείς, τότε είναι και γραμμικά ανεξάρτητες.

Ο αλγόριθμος των συζυγών κλίσεων [32] για την ελαχιστοποίηση της δευτεροβάθμιας συνάρτησης n μεταβλητών:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - x^T b \quad (4.7)$$

όπου $Q = Q^T > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Πρέπει να σημειωθεί ότι επειδή ο πίνακας $Q > 0$, η συνάρτηση f έχει ένα ολικό ελάχιστο που μπορεί να βρεθεί λύνοντας την $Qx = b$. Έχοντας ως σημείο εκκίνησης το x^0 και τις Q -συζυγείς κατευθύνσεις d^0, d^1, \dots, d^{n-1} για $k \geq 0$ έχουμε τα εξής:

$$g^k = \nabla f(x^{(k)}) = Qx^k - b, \quad (4.8)$$

$$a_k = -\frac{g^{(k)T} d^{(k)}}{d^{(k)T} Q d^{(k)}}, \quad (4.9)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k d^{(k)} \quad (4.10)$$

πριν δούμε αναλυτικά τα βήματα του αλγόριθμου, πρέπει να αναφέρουμε το εξής:

Λήμμα: Στον αλγόριθμο των συζυγών κλίσεων ισχύει $g^{(k+1)T} d^{(i)} = 0$ για $0 \leq k \leq n-1$ και $0 \leq i \leq k$, όπου g είναι η κλίση.

Αυτό το λήμμα είναι σημαντικό όχι μόνο επειδή η $g^{(k+1)}$ είναι ορθογώνια σε κάθε διάνυσμα του υποχώρου που παράγεται από τα d^0, d^1, \dots, d^k αλλά και γιατί με βάση αυτό αποδεικνύεται ότι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης ως προς κάθε μια κατεύθυνση ξεχωριστά, αποτελεί συγχρόνως και ελαχιστοποίηση ως προς όλο τον υποχώρο των μέχρι τότε θεωρηθεισών κατευθύνσεων. Αυτή ακριβώς η ιδιότητα είναι που καθιστά τη συγκεκριμένη μέθοδο πολύ αποτελεσματική.

Στη μέθοδο αυτή δεν προκαθορίζουμε τις συζυγείς κατευθύνσεις, αντί αυτού υπολογίζουμε τις κατευθύνσεις καθώς ο αλγόριθμος προχωράει. Σε κάθε στάδιο του αλγορίθμου, η κατεύθυνση υπολογίζεται ως γραμμικός συνδυασμός της προηγούμενης κατεύθυνσης και της τρέχουσας κλίσης, με τέτοιο τρόπο ώστε όλες οι κατευθύνσεις να είναι αμοιβαία Q -συζυγείς, απο' κει και το όνομα της μεθόδου. Οπότε για την εύρεση του ελαχίστου της (4.7) χρειάζονται n αναζητήσεις κατά μήκος των αμοιβαία συζυγών κατευθύνσεων. Η πρώτη κατεύθυνση στην οποία θα αναζητήσουμε το ελάχιστο έχοντας σημείο εκκίνησης το x^0 είναι η κατεύθυνση του steepest descent:

$$d^{(0)} = -g^{(0)} \quad (4.11)$$

και γι'αυτό η λύση στο πρώτο στάδιο είναι:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + a_0 d^{(0)}, \quad (4.12)$$

όπου

$$a_0 = \arg \min_{a \geq 0} f(x^{(0)} + ad^{(0)}) = -\frac{g^{(0)T} d^{(0)}}{d^{(0)T} Q d^{(0)}} \quad (4.13)$$

Στο επόμενο βήμα, κάνουμε αναζήτηση στην κατεύθυνση $d^{(1)}$ που είναι Q- συζυγής με την $d^{(0)}$. Επιλέγουμε $d^{(1)}$ ως γραμμικό συνδυασμό των g^1 και $d^{(0)}$. Γενικά, στο $(k+1)$ βήμα επιλέγουμε $d^{(k+1)}$ να είναι γραμμικός συνδυασμός των $g^{(k+1)}$ και $d^{(k)}$ και έχουμε:

$$d^{(k+1)} = -g^{(k+1)} + \beta d^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

Οι συντελεστές $\beta_k, k = 1, 2, \dots$ επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε η $d^{(k+1)}$ να είναι Q- συζυγής με τις d^0, d^1, \dots, d^k . Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας το συντελεστή β_k να είναι:

$$\beta_k = \frac{g^{(k+1)T} Q d^{(k)}}{d^{(k)T} Q d^{(k)}} \quad (4.15)$$

Ο αλγόριθμος των συζυγών κλίσεων συνοψίζεται στα παρακάτω βήματα:

1. $k = 0$. Επιλογή αρχικής εκτίμησης $x^{(0)}$.
2. $g^{(0)} = \nabla f(x^{(0)})$. Αν $g^{(0)} = 0$ ΤΕΛΟΣ, αλλιώς $d^{(0)} = -g^{(0)}$.
3. $a_k = -\frac{g^{(k)T} d^{(k)}}{d^{(k)T} Q d^{(k)}}$.
4. $x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k d^{(k)}$.
5. $g^{(k+1)} = \nabla f(x^{(k+1)})$. Αν $g^{(k+1)} = 0$ ΤΕΛΟΣ.
6. $\beta_k = \frac{g^{(k+1)T} Q d^{(k)}}{d^{(k)T} Q d^{(k)}}$.
7. $d^{(k+1)} = -g^{(k+1)} + \beta_k d^{(k)}$.
8. $k = k + 1$. Πήγαινε στο βήμα 3.

Αναφερθήκαμε σ' αυτή τη μέθοδο διότι θα τη χρησιμοποιήσουμε για την ελαχιστοποίηση οπότε και την επίλυση των συναρτήσεων των μοντέλων που περιγράφονται στις παρακάτω ενότητες.

4.3 Χωρικά Αμετάβλητο Μοντέλο

Το μοντέλο αυτό [33] βασίζεται στη στοχαστική ερμηνεία της κανονικοποίησης Tikhonov χρησιμοποιώντας την εκτίμηση MAP και εισάγοντας την κατάλληλη εκ των προτέρων πιθανότητα. Σ' αυτό το πλαίσιο, καθορίζουμε ότι η εκ των προτέρων πιθανότητα της εικόνας $p(f)$ ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή. Στην περίπτωση μας, τα δεδομένα - παρατηρήσεις είναι οι προβολές που δηλώνονται με τη μεταβλητή g . Η συνάρτηση πιθανοφάνειας $p(g|f)$ σχετίζεται με την εκ των υστέρων πιθανότητα $p(f|g)$ μέσω του θεωρήματος του Bayes ως εξής:

$$p(f|g) \propto p(g|f)p(f) \quad (4.16)$$

Πριν αρχίσουμε να αναλύουμε πώς θα βρούμε τη πιο κατάλληλη τιμή για την f δοθέντων των παρατηρήσεων με τη βοήθεια της MAP εκτίμησης, θα δούμε πώς επιλύουμε ένα γραμμικό πρόβλημα με κανονικοποίηση Tikhonov. Έχοντας το πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$f = \arg \min_f [\|g - Hf\|^2 + \lambda \|Qf\|^2], \quad (4.17)$$

όπου λ είναι ένας παράγοντας στάθμισης και $Q = \nabla^2$ είναι ο Λαπλασιανός τελεστής, το υπερβατό φίλτρο που χρησιμοποιείται ως περιορισμός για την κανονικοποίηση Tikhonov. Ελαχιστοποιώντας την εξίσωση (4.17) ως προς f έχουμε:

$$(H^T H + \lambda Q^T Q) f = H^T g \quad (4.18)$$

Εξαιτίας της μεγάλης διάστασης των πινάκων H και Q που εμπλέκονται στην ελαχιστοποίηση (4.18), το παραπάνω γραμμικό σύστημα μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, που επιλύει συναρτήσεις δευτέρου βαθμού και ανήκει σε μια γενικότερη ομάδα μεθόδων που χρησιμοποιούν την κλίση της συνάρτησης και αναφέραμε στην ενότητα (4.2). Ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται δίνοντας κάθε φορά όλο και καλύτερη εκτίμηση της εικόνας, την οποία κάθε φορά τη χρησιμοποιούμε ως αρχική εκτίμηση για την επόμενη επανάληψη μέχρι να φτάσουμε σε σύγκλιση της μεθόδου.

Έχοντας αναφέρει την ελαχιστοποίηση με Tikhonov κανονικοποίηση επισημαίνουμε ότι εδώ θα ασχοληθούμε με τη στοχαστική ερμηνεία της Tikhonov κανονικοποίησης, η οποία έχει να κάνει με την εξίσωση (4.16) θέλοντας να βρούμε τη βέλτιστη λύση f δοθέντος των παρατηρήσεων g ακολουθώντας MAP εκτίμηση.

Γενικά, η Γκαουσιανή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για ένα διάνυσμα N -διαστάσεων x συνεχών τυχαίων μεταβλητών έχει ως εξής:

$$N(x|\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}, \quad (4.19)$$

όπου N είναι η διάσταση του διανύσματος x και μ, Σ είναι η μέση τιμή του διανύσματος και ο πίνακας συμμεταβλητότητας αντίστοιχα. Ο αντίστροφος του πίνακα συμμεταβλητότητας είναι γνωστός ως πίνακας ακριβείας.

Η εκ των προτέρων συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της f εφόσον ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή είναι:

$$p(f) = N(f|0, (aQ^T Q)^{-1}), \quad (4.20)$$

Η παράμετρος a , η οποία ελέγχει κατά κάποιον τρόπο τον πίνακα ακριβείας και συνεπακόλουθα τη κατανομή των παραμέτρων του μοντέλου, ονομάζεται υπερ-παράμετρος (hyperparameter). Για τον υπολογισμό αυτής της παραμέτρου μπορούμε να ακολουθήσουμε δυο τρόπους.

Ο πιο απλός είναι να υποθέσουμε ότι αυτή η υπερ-παράμετρος είναι χωρικά σταθερή. Πρέπει να σημειωθεί ότι σ' αυτή τη περίπτωση, οι περιοχές της εικόνας όπου έχουμε απότομες αλλαγές στις τιμές των pixels οι τιμές του Laplacian τελεστή Qf είναι πολύ μεγαλύτερες απ' ότι σε περιοχές που οι αλλαγές είναι πιο ομαλές.

Η υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(g|f)$ είναι:

$$p(g|f) = \prod_{i=1}^N [Hf]_i^{g_i} \frac{\exp(-[Hf]_i)}{g_i!}, \quad (4.21)$$

όπου f η αρχική εικόνα, g το διάνυσμα με τις μετρήσεις από το sinogram (g_i , ο αριθμός των φωτονίων που μετράμε στην i -οστή θέση του sinogram) και H ο τελεστής προβολής. Οπότε, σύμφωνα με την ενότητα (3.2), η εξίσωση (4.21) γράφεται ως εξής:

$$\log p(g|f) \approx C(g) - \frac{1}{2}(Hf - g)^T D^{-1}(Hf - g), \quad (4.22)$$

όπου $D = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_N)$.

Εφόσον έχουμε ορίσει την υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(g|f)$ και την εκ των προτέρων πιθανότητα $p(f)$ και θεωρώντας την μεταβλητή a χωρικά σταθερή, είναι πολύ απλό να πάρουμε MAP εκτιμήσεις για την εικόνα f . Στην πράξη αυτό γίνεται ελαχιστοποιώντας τον αρνητικό λογάριθμο της εκ των υστέρων πιθανοφάνειας ως προς f :

$$\hat{f}_{MAP} = \arg \max_f \{p(f|g)\} = \arg \min_f \{-\log p(g|f) - \log p(f)\} \quad (4.23)$$

και η βέλτιστη λύση για την f δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{f}_{MAP} = (H^T D^{-1} H + aQ^T Q)^{-1} H^T D^{-1} g \quad (4.24)$$

Η εξίσωση (4.24) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$(H^T D^{-1} H + aQ^T Q)f = H^T D^{-1} g \quad (4.25)$$

Το παραπάνω γραμμικό σύστημα, λόγω των μεγάλων διαστάσεων των πινάκων H , D και Q , λύνεται επαναληπτικά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων (CGS). Εκτός από την εικόνα f που υπολογίσαμε πρέπει να ενημερώνουμε σε κάθε επανάληψη και τη τιμή της παραμέτρου a βάσει της παρακάτω εξίσωσης, την οποία την παίρνουμε από την ελαχιστοποίηση της (4.23) ως προς a αυτή τη φορά:

$$a = \frac{N-1}{\|Qf\|^2} \quad (4.26)$$

Οπότε καταλήγουμε ότι με το πρώτο τρόπο, δηλ θεωρώντας τη παράμετρο a χωρικά σταθερή βρίσκουμε μια MAP εκτίμηση για την εικόνα f , που μας δίνει τη μέγιστη εκ των υστέρων πιθανοφάνεια $p(f|g)$.

4.4 Χωρικά Μεταβαλλόμενο Μοντέλο

Με σκοπό να ξεπεράσουμε τις προαναφερθείσες δυσκολίες του χωρικά σταθερού μοντέλου θέτουμε το χωρικά προσαρμοζόμενο μοντέλο. Μ' άλλα λόγια, οι παράμετροι του μοντέλου μας μεταβάλλονται χωρικά παίρνοντας διαφορετικές τιμές για κάθε pixel της εικόνας και μπορούμε να τις εκφράσουμε με ένα διαγώνιο πίνακα $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)$. Η εξίσωση (4.20) σ' αυτό το μοντέλο γίνεται:

$$p(f) = N(f|0, (Q^T A Q)^{-1}) \quad (4.27)$$

Το πλεονέκτημα αυτού του μοντέλου είναι ότι λαμβάνει υπόψη του τη χωρικά μεταβαλλόμενη φύση της εικόνας και ο όρος Qf προσαρμόζεται ανάλογα με τα δεδομένα και δεν γενικεύεται. Γι' αυτό το λόγο, ακολουθούμε το Bayesian παράδειγμα και προσθέτουμε ένα ακόμα επίπεδο στο μοντέλο μας δηλ θέτουμε ότι η παράμετρος a είναι τυχαία μεταβλητή και ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους p και q :

$$p(a_i) = a_i^{\frac{p-2}{2}} \exp^{-q(p-2)a_i} \quad (4.28)$$

μέση τιμή $\mu_a = \frac{\frac{p}{2}}{q(p-2)}$ και διακύμανση $v_a = \frac{\frac{p}{2}}{q^2(p-2)^2}$.

Επιλέγουμε τη Γάμμα κατανομή γι' αυτές τις παραμέτρους διότι είναι η συζυγής εκ των προτέρων πιθανότητα του αντιστρόφου της διακύμανσης μιας Γκαουσιανής κατανομής. Αυτό συμβαίνει διότι θεωρούμε ότι έχουμε μια Γκαουσιανή μεταβλητή x . Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε τη μέση τιμή μ και θέλουμε να βγάλουμε συμπεράσματα για τη διακύμανση σ^2 δοθέντος ενός συνόλου από N παρατηρήσεις $X = x_1, x_2, \dots, x_N$ που ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή. Στους υπολογισμούς μας θα διευκολυνθούμε αρκετά αν επιλέξουμε ένα συζυγή τύπο για την εκ των προτέρων κατανομή. Αποδεικνύεται ότι είναι πιο εύκολο να δουλέψουμε με την ακρίβεια $\lambda \equiv \frac{1}{\sigma^2}$. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δοθέντος μ, σ^2 είναι:

$$p(X; \mu, \sigma^2) = \prod_{n=1}^N p(x_n; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N (x_n - \mu)^2 \right\} \quad (4.29)$$

Οπότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας δοθέντος λ παίρνει τη μορφή:

$$p(X|\lambda) = \prod_{n=1}^N N(x_n|\mu, \lambda^{-1}) \approx \lambda^{\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^N (x_n - \mu)^2 \right\} \quad (4.30)$$

Η αντίστοιχη συζυγής εκ των προτέρων πιθανότητα θα πρέπει να είναι ανάλογη του γινομένου μιας δύναμης του λ και μιας εκθετικής γραμμικής συνάρτησης της λ . Αυτό αντιστοιχεί σε μια Γάμμα κατανομή η οποία ορίζεται ως εξής:

$$Gamma(\lambda|\alpha, b) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} b^\alpha \lambda^{\alpha-1} \exp(-b\lambda) \quad (4.31)$$

Αν α είναι θετικός ακέραιος τότε $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$. Η Γάμμα κατανομή έχει μέση τιμή και διακύμανση αντίστοιχα:

$$E[\lambda] = \frac{\alpha}{b} \quad (4.32)$$

$$var[\lambda] = \frac{\alpha}{b^2} \quad (4.33)$$

Οπότε έχουμε ότι η εκ των προτέρων πιθανότητα είναι $p(\lambda) = Gamma(\lambda|\alpha_0, b_0)$. Αν την πολλαπλασιάσουμε με τη συνάρτηση πιθανοφάνειας (4.30), παίρνουμε την εκ των υστέρων κατανομή:

$$p(\lambda|X) \approx \lambda^{\alpha_0-1} \lambda^{\frac{N}{2}} \exp \left\{ -b_0\lambda - \frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^N (x_n - \mu)^2 \right\} \quad (4.34)$$

στην οποία αναγνωρίζουμε μια Γάμμα κατανομή του τύπου $Gamma(\lambda|\alpha_N, b_N)$ όπου:

$$a_N = a_0 + \frac{N}{2} \quad (4.35)$$

$$b_N = b_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (x_n - \mu)^2 = b_0 + \frac{N}{2} \sigma_{ML}^2, \quad (4.36)$$

όπου σ_{ML}^2 είναι η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας για τη διακύμανση.

Η ελαχιστοποίηση της (4.23) αυτή τη φορά μας οδηγεί στο παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$(H^T D^{-1} H + Q^T A Q) f = H^T D^{-1} g \quad (4.37)$$

και για να ενημερώσουμε σε κάθε επανάληψη τις χωρικά μεταβαλλόμενες παραμέτρους $A = a_1, a_2, \dots, a_N$ ελαχιστοποιούμε την (4.23) ως προς a_i και έχουμε:

$$a_i = \frac{p - 1}{(Qf)_i^2 + 2q(p - 2)} \quad (4.38)$$

Η παράμετρος p μπορεί να πάρει τιμές στο διάστημα $(2, +\infty)$. Η επιλογή τους επηρεάζει το μοντέλο με το παρακάτω τρόπο. Στην εξίσωση (4.38) όταν η παράμετρος p παίρνει τιμές κοντά στο 2, ο δεύτερος όρος του παρονομαστή επιβεβαιώνει ότι οι παράμετροι a_i εξαρτώνται μόνο από τον όρο $(Qf)_i^2$ και γι'αυτό οι εκτιμήσεις των a_i εξαρτώνται μόνο από τα δεδομένα. Απ' την άλλη πλευρά, αν ορίσουμε μεγάλες τιμές για τη παράμετρο p , ο δεύτερος όρος του παρονομαστή κυριαρχεί. Οπότε οι εκτιμήσεις των a_i δεν εξαρτώνται από τα δεδομένα και έχουν την ίδια τιμή για κάθε pixel της εικόνας. Οπότε καθορίζοντας τη

τιμή του p κοντά στο 2, μπορούμε να έχουμε ένα χωρικά μεταβαλλόμενο μοντέλο και το αντίθετο αν η τιμή του p καθοριστεί να είναι αρκετά μεγάλη. Η παράμετρος q εξάγεται από τα δεδομένα, καθώς αποδεικνύεται ότι είναι ανάλογη της διακύμανσης της Qf και έχουμε:

$$q = \frac{1}{p-2} \sqrt{\frac{p}{2\text{var}(Qf)}} \quad (4.39)$$

4.5 Χωρικά Μεταβαλλόμενο ανά Κατεύθυνση Μοντέλο

Σ' αυτό το μοντέλο [34] υποθέτουμε ένα γραμμικό μοντέλο απεικόνισης. Στο οποίο, το g είναι $N \times 1$ διάνυσμα και αναπαριστά τα δεδομένα, δηλαδή το sinogram. Αυτό διαμορφώνεται ως αποτέλεσμα του μετασχηματισμού Radon της αρχικής εικόνας και της προσθήκης θορύβου:

$$g = Hf + n, \quad (4.40)$$

όπου f είναι η άγνωστη αρχική εικόνα που θέλουμε να εκτιμήσουμε, H είναι ο $N \times N$ πίνακας του μετασχηματισμού Radon και n είναι ο προσθετικός κανονικός θόρυβος. Υποθέτουμε ότι ο θόρυβος ακολουθεί κανονική κατανομή με $n \sim N(0, \beta^{-1}I)$, όπου 0 είναι ένα $N \times 1$ μηδενικό διάνυσμα, I είναι ο $N \times N$ μοναδιαίος πίνακας και β^{-1} η διακύμανση του θορύβου που θεωρείται άγνωστη.

Για το prior μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε, ορίζουμε διαφορές πρώτης τάξης της εικόνας f σε τέσσερις κατευθύνσεις, 0° , 90° , 45° και 135° που δίνονται από τους τύπους αντίστοιχα:

$$\varepsilon^1(i, j) = f(i, j) - f(i, j + 1) \quad (4.41)$$

$$\varepsilon^2(i, j) = f(i, j) - f(i + 1, j) \quad (4.42)$$

$$\varepsilon^3(i, j) = f(i, j) - f(i + 1, j + 1) \quad (4.43)$$

$$\varepsilon^4(i, j) = f(i, j) - f(i - 1, j + 1) \quad (4.44)$$

όπου $\varepsilon^k(i, j)$ με $k = 1, 2, 3, 4$, οι διαφορές του pixel (i, j) με pixels που βρίσκονται σ' αυτές τις τέσσερις κατευθύνσεις. Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφτούν σε μορφή διανύσματος για ολόκληρη την εικόνα ως:

$$Q^k f = \varepsilon^k, k = 1, 2, 3, 4, \quad (4.45)$$

όπου Q^k είναι ο $N \times N$ διαφορικός τελεστής στην κατεύθυνση k για εικόνες με διάσταση $N \times 1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας και για λόγους ευκολίας, χρησιμοποιούμε το μονοδιάστατο συμβολισμό $\varepsilon^k = [\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k, \dots, \varepsilon_N^k]^T$. Η υπόθεση για τις διαφορές είναι ότι αυτές ακολουθούν

Γκαουσιανή κατανομή με $\varepsilon_i^k \sim N(0, (a_i^k)^{-1})$ για $i = 1, 2, \dots, N$ και $k = 1, 2, 3, 4$, όπου a_i^k είναι η αντίστροφη διακύμανση της ε_i^k και N είναι το μέγεθος της εικόνας.

Για τη αντίστροφη διακύμανση a_i^k , εισάγονται οι συμβολισμοί για τον $N \times N$ διαγώνιο πίνακα A , τον $4N \times 4N$ διαγώνιο πίνακα \tilde{A} και για τον $4N \times 1$ πίνακα \tilde{a} αντίστοιχα:

$$A^k = \text{diag}\{a_1^k, a_2^k, \dots, a_N^k\} \quad (4.46)$$

$$\tilde{A} = \text{diag}\{A^1, A^2, A^3, A^4\} \quad (4.47)$$

$$\tilde{a} = [a^1, a^2, a^3, a^4]^T, \quad (4.48)$$

όπου $a^k = a_1^k, a_2^k, \dots, a_N^k$ αντίστοιχα με τον ε^k . Τέλος, για τις διαφορές αντίστοιχα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός:

$$\tilde{\varepsilon} = [\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4]^T \quad (4.49)$$

Υποθέτουμε ότι οι διαφορές σε κάθε κατεύθυνση και σε κάθε pixel της εικόνας είναι ανεξάρτητες. Αυτή η υπόθεση όπως θα δούμε και παρακάτω κάνει πιο εύκολους τους υπολογισμούς μας. Έτσι, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τις διαφορές είναι Γκαουσιανή και δίνεται από:

$$p(\tilde{\varepsilon}|\tilde{a}) \propto \prod_{k=1}^4 \prod_{i=1}^N (a_i^k)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}((\varepsilon^k)^T A^k \varepsilon^k)\right) = \left(\prod_{k=1}^4 \prod_{i=1}^N (a_i^k)^{\frac{1}{2}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(\tilde{\varepsilon} \tilde{A} \tilde{\varepsilon})\right) \quad (4.50)$$

Για να συσχετίσουμε το διάνυσμα $\tilde{\varepsilon}$ με την εικόνα f , ορίζουμε τον $4N \times N$ τελεστή $\tilde{Q} = [(Q^1)^T, (Q^2)^T, (Q^3)^T, (Q^4)^T]$. Έτσι, η σχέση μεταξύ εικόνας και διαφορών δίνεται από την $\tilde{\varepsilon} = \tilde{Q}f$. Βασιζόμενοι σ' αυτή τη σχέση και στην $p(\tilde{\varepsilon}|\tilde{a})$, ορίζουμε μια μη αυστηρά ορισμένη κατανομή για την εικόνα f , η οποία δίνεται από την:

$$p(f|\tilde{a}) \propto \prod_{k=1}^4 \prod_{i=1}^N (a_i^k)^{\frac{1}{8}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left((Q^k f)^T A^k Q^k f\right)\right) \quad (4.51)$$

Η κατανομή αυτή δεν είναι αυστηρά ορισμένη αφού δεν ολοκληρώνει στη μονάδα. Για μια αυστηρά ορισμένη Γκαουσιανή, η σταθερά κανονικοποίησης ως συνάρτηση των χωρικά μεταβαλλόμενων διακυμάνσεων, a_i^k , δεν μπορεί να είναι, αφού ο \tilde{Q} δεν είναι τετραγωνικός πίνακας, $\text{Det}\{\tilde{Q}^T \tilde{A} \tilde{Q}\} \neq C \prod_{k=1}^4 \prod_{i=1}^N (a_i^k)^{\frac{1}{8}}$, όπου C μια σταθερά, παρόλο που ο \tilde{A} είναι διαγώνιος. Ωστόσο, τέτοιου είδους priors έχουν εφαρμοστεί με επιτυχία σε προβλήματα που μοντελοποιούνται με Bayesian μεθόδους. Σ' αυτά τα προβλήματα, η άγνωστη ποσότητα f δε θεωρείται ντετερμινιστική αλλά τυχαία μεταβλητή που μπορεί να περιγραφεί από μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(f|\tilde{a})$ γνωστή εξαρχής. Αυτό επιτρέπει την εκ των προτέρων γνώση κάποιων χαρακτηριστικών της εικόνας, η οποία χρησιμοποιείται κατά τη διαδικασία ανακατασκευής.

Πιο συγκεκριμένα, η εκ των προτέρων πιθανότητα της (4.51) που ορίσαμε λαμβάνεται υποθέτοντας ότι, όλα τα στοιχεία του διαγώνιου πίνακα \tilde{A} είναι ισοδύναμα με το γεωμετρικό τους μέσο $(\prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^4 a_i^k)^{\frac{1}{4N}}$. Αυτό προκύπτει διότι

$$\tilde{Q}^T \tilde{A} \tilde{Q} = \sum_{k=1}^4 (Q^k)^T A^k Q^k \quad (4.52)$$

είναι ένας $N \times N$ πίνακας για τον οποίο ισχύει:

$$\text{Det} \left(\tilde{Q}^T \tilde{A} \tilde{Q} \right)^{\frac{1}{2}} \propto \left(\prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^4 a_i^k \right)^{\frac{1}{8}}. \quad (4.53)$$

Η υπόθεση αυτή οδηγεί στη μη αυστηρή εκ των προτέρων πιθανότητα που ορίσαμε στην (4.51) και σε πιο εύκολους υπολογισμούς.

Ο ρόλος των παραμέτρων a_i^k είναι να "συγκρατούν" τη δομή της εικόνας για κάθε κατεύθυνση. Πιο συγκεκριμένα, μια μεγάλη διακύμανση (μικρή a_i^k) δηλώνει μεγάλη μεταβολή στην κατεύθυνση που λαμβάνεται η διαφορά, που σημαίνει ότι στην κατεύθυνση αυτή υπάρχει ακμή. Το γεγονός ότι τα a_i^k δεν είναι σταθερά, αποκλιμακώνει τις διαφορές γειτονικών pixel σε περιοχές ασυνέχειας της εικόνας. Έχοντας ως αποτέλεσμα η prior να διατηρεί τις ακμές και να υποβαθμίζει το θόρυβο σε ομαλές περιοχές της εικόνας.

Ωστόσο, το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι απαιτούνται $4N$ παράμετροι a_i^k να εκτιμηθούν από N παρατηρήσεις. Είναι ξεκάθαρο ότι κάτι τέτοιο δεν είναι μια επιθυμητή κατάσταση όσο αφορά στους υπολογισμούς. Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό θεωρούμε τα a_i^k ως τυχαίες μεταβλητές αντί για παραμέτρους και βασιζόμενοι στην Μπεϋζιανή (Bayesian) λογική, εισάγουμε τη Γάμμα κατανομή γι'αυτές.

Οι λόγοι που χρησιμοποιούμε Γάμμα εκ των προτέρων πιθανότητα στο μη στάσιμο μοντέλο μας είναι τρεις. Ο πρώτος είναι ότι, η Γάμμα κατανομή είναι συζυγής ως προς το αντίστροφο της διακύμανσης μιας Κανονικής κατανομής και διευκολύνει την ανάλυση του Μπεϋζιανού μοντέλου. Δεύτερον, παρόμοια ιεραρχικά μοντέλα έχουν εφαρμοστεί με επιτυχία σε άλλα στατιστικά προβλήματα, όπου έχει χρησιμοποιηθεί η Μπεϋζιανή μοντελοποίηση. Τέλος, όπως θα δούμε και παρακάτω τα a_i^k δεν ορίζονται εμπειρικά αλλά ορίζονται και ενημερώνονται. Θεωρούμε τη παρακάτω παραμετροποίηση για την Γάμμα κατανομή σε κλειστή μορφή:

$$p(a_i^k | m_k, l_k) \propto (a_i^k)^{\frac{l_k-1}{2}} \exp -m_k(l_k - 2)a_i^k \quad (4.54)$$

με μέση τιμή και διακύμανση $E[a_i^k] = l_k(2m_k(l_k - 2))^{-1}$, $Var[a_i^k] = l_k(2m_k^2(l_k - 2)^2)^{-1}$.

Αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιείται διότι η τιμή της παραμέτρου l_k μπορεί να μεταφραστεί ως ο βαθμός εμπιστοσύνης στην εκ των προτέρων γνώση που παρέχει η Γάμμα κατανομή. Πιο αναλυτικά, καθώς $l_k \rightarrow \infty$ τότε έχουμε ότι:

$$E[a_i^k] \rightarrow (2m_k)^{-1} \quad (4.55)$$

$$Var[a_i^k] \rightarrow 0 \quad (4.56)$$

Με άλλα λόγια η εκ των προτέρων πιθανότητα μας αποφέρει πληροφορία σε πολύ μεγάλο βαθμό και γίνεται πολύ περιοριστική δίνοντας $a_i^k = (2m_k)^{-1}\forall i$, κάτι το οποίο σημαίνει παράλληλα ότι το μοντέλο είναι στάσιμο. Αντιθέτως, όταν $l_k \rightarrow 2$ τότε:

$$E[a_i^k] \rightarrow \infty \quad (4.57)$$

$$Var[a_i^k] \rightarrow \infty \quad (4.58)$$

Οπότε η prior δε μας δίνει καθόλου πληροφορία και δεν επηρεάζει καθόλου τα a_i^k με αποτέλεσμα οι τιμές τους να έχουν μεγάλο βαθμό μεταβλητότητας ακολουθώντας τα δεδομένα, κάτι που μετατρέπει το μοντέλο σε μη στάσιμο. Μετά από την παραπάνω ανάλυση, μπορούμε να πούμε ότι η παράμετρος l_k είναι ένας τρόπος να ρυθμίσουμε το βαθμό μη στασιμότητας του μοντέλου απεικόνισης.

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να επισημάνουμε ότι η μέθοδος που περιγράφηκε παραπάνω αφορά σε προβλήματα ανακατασκευής παρουσία προσθετικού θορύβου κανονικής κατανομής. Ωστόσο, το γενικό πλάνο αυτής της μεθόδου βρίσκει εφαρμογή και σε περιπτώσεις που ο θόρυβος ακολουθεί Poisson κατανομή. Στη παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο αλλά για την περίπτωση που ο θόρυβος ακολουθεί Poisson κατανομή. Για να βρούμε τις βέλτιστες τιμές των f και \tilde{a} ακολουθούμε τη MAP προσέγγιση. Αυτή βασίζεται στη μεγιστοποίηση της εκ των υστέρων πιθανότητας. Έτσι, έχουμε:

$$p(f; \tilde{a}|g; m, l) \propto p(g, f, \tilde{a}; m, l) = p(g|f, \tilde{a})p(f|\tilde{a})p(\tilde{a}; m, l) \quad (4.59)$$

όπου $m = [m_1, m_2, m_3, m_4]^T$, $l = [l_1, l_2, l_3, l_4]^T$. Η μεγιστοποίηση της ποσότητας $p(g, f, \tilde{a}, m, l)$ ως προς f και \tilde{a} είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση του αρνητικού λογαρίθμου:

$$\begin{aligned} J_{MAP}(f, \tilde{a}|g, m, l) &\propto -\log p(g, f, \tilde{a}, m, l) \\ &= -\log p(g|f, \tilde{a}) - \log p(f|\tilde{a}) - \log p(\tilde{a}|m, l) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας $p(g|f, \tilde{a})$ είναι ίδια με την (4.21), οπότε και ο λογάριθμός της είναι δίνεται από την (4.22) και έχουμε:

$$-\log p(g|f) \propto -C(g) + \frac{1}{2}(Hf - g)^T D^{-1}(Hf - g), \quad (4.61)$$

όπου $D = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_N)$. Ο λογάριθμος της πιθανότητας $\log p(f|\tilde{a})$ από την (4.51) δίνεται από την:

$$-\log p(f|\tilde{a}) = -\frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^N \log(a_i^k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^N (Q^k f)^T A^k Q^k f \quad (4.62)$$

και τέλος ο λογάριθμος της εκ των προτέρων πιθανότητας για τα a_i^k δίνεται από την:

$$-\log p(\tilde{a}|m, l) = -\sum_{k=1}^4 \frac{l_k - 2}{2} \sum_{i=1}^N \log(a_i^k) + \sum_{k=1}^4 m_k (l_k - 2) \sum_{i=1}^N a_i^k \quad (4.63)$$

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω η συνάρτηση που έχουμε να ελαχιστοποιήσουμε ως προς f και ως προς \tilde{a} είναι:

$$J_{MAP}(f, \tilde{a}|g, m, l) = -C(g) + \frac{1}{2}(Hf - g)^T D^{-1}(Hf - g) - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^N \log(a_i^k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^N (Q^k f)^T A^k Q^k f - \sum_{k=1}^4 \frac{l_k - 2}{2} \sum_{i=1}^N \log(a_i^k) + \sum_{k=1}^4 m_k (l_k - 2) \sum_{i=1}^N a_i^k \quad (4.64)$$

Για να την ελαχιστοποιήσουμε ως προς f και \tilde{a} θέτουμε τη παράγωγο ως προς a $\nabla_{\tilde{a}} J_{MAP}(f, \tilde{a}|g, m, l) = 0$ και ως προς f $\nabla_f J_{MAP}(f, \tilde{a}|g, m, l) = 0$ ίση με μηδέν και έχουμε αντίστοιχα:

$$(a_i^k)^* = \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{2}(l_k - 2)}{\frac{1}{2}(\varepsilon_i^k)^2 + m_k(l_k - 2)} \quad (4.65)$$

$$f_{MAP}^* = \left(H^T D^{-1} H + \sum_{k=1}^4 (Q^k)^T A^k Q^k \right)^{-1} H^T D^{-1} g \quad (4.66)$$

Ωστόσο, η σχέση (4.66) δεν μπορεί να επιλυθεί σε κλειστή μορφή διότι η αναλυτική αντιστροφή του $(H^T D^{-1} H + \sum_{k=1}^4 (Q^k)^T A^k Q^k)$ δεν είναι δυνατή εξαιτίας της μη κυκλωτικής (non-circulant) φύσης των πινάκων A^k δηλ εφόσον ο A^k δεν είναι κυκλωτικός πίνακας δεν διαγωνοποιείται. Έτσι καταφεύγουμε στη χρήση της μεθόδου των συζυγών κλίσεων, η οποία περιγράφεται λεπτομερώς στην ενότητα (4.2).

Η παρατήρηση που κάναμε για το γεγονός ότι οι παράμετροι l_k ελέγχουν το βαθμό της μη στασιμότητας του μοντέλου επιβεβαιώνεται από την εξίσωση (4.65) που δίνει τα $(a_i^k)^*$. Πιο συγκεκριμένα, όταν το $l_k \rightarrow \infty$ τότε $(a_i^k)^* = (2m_k)^{-1} \forall i$ και το μοντέλο γίνεται στάσιμο. Αντιθέτως, όταν $l_k \rightarrow 2$, τότε $(a_i^k)^* = ((\varepsilon_i^k)^2)^{-1} \forall i$, έτσι τα (a_i^k) παραμένουν εντελώς ανεπηρέαστα από τη Γάμμα prior και απλώς ακολουθούν τα δεδομένα.

4.6 Πειραματικά Αποτελέσματα

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε τρία μοντέλα για ανακατασκευή τομογραφικών εικόνων. Το Χωρικά Αμετάβλητο Μοντέλο και Χωρικά Μεταβαλλόμενο Μοντέλο, το οποίο διακρίνεται σε χωρικά σταθερό που θα το αναφέρουμε ως X.A και χωρικά μεταβαλλόμενο μοντέλο που θα το αναφέρουμε ως X.M. Στο πρώτο οι παραμέτροι a που ελέγχουν το αντίστροφο της διακύμανσης της κατανομής της εκ των προτέρων πιθανότητας παραμένουν σταθερές για όλα τα pixel της εικόνας αντίθετα στο δεύτερο μοντέλο τα a_i είναι μεταβλητές που ακολουθούν Γάμμα κατανομή και όταν η παράμετρος $p \rightarrow 2$ της Γάμμα κατανομής τότε αυτές μεταβάλλονται ανάλογα με τις τιμές των pixel της εικόνας. Επίσης παρουσιάσαμε το Χωρικά Μεταβαλλόμενο Μοντέλο ανά Κατεύθυνση, όπου η εκ των προτέρων πιθανότητα εξαρτάται από τις διαφορές των pixel της εικόνας, οι οποίες είναι μεταβλητές μια κανονικής κατανομής όπου οι παράμετροι που προσδιορίζουν την ακρίβεια a_i^k αυτής της κατανομής ακολουθούν



Σχήμα 4.1: Αρχική εικόνα.

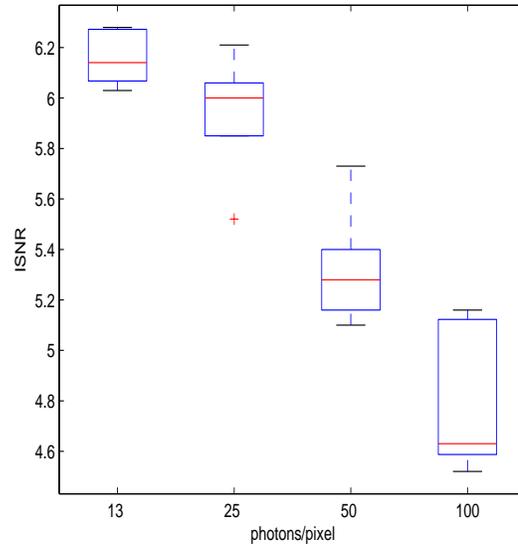
μια Γάμμα κατανομή. Στο μοντέλο αυτό όταν η παράμετρος $l_k \rightarrow 2$, οι μεταβλητές εξαρτώνται από τις τιμές των pixel της εικόνας και θα το αναφέρουμε ως X.M.K.

Ως αρχική εικόνα για τα πειράματά μας θεωρούμε, όπως και στο Κεφάλαιο 3, το Shepp-Logan phantom με διάσταση 256×256 , που φαίνεται στο σχήμα (4.1), και ισχύουν οι ίδιες μετρικές δηλ το ISNR που μας δείχνει τη ποιότητα της ανακατασκευασμένης εικόνας.

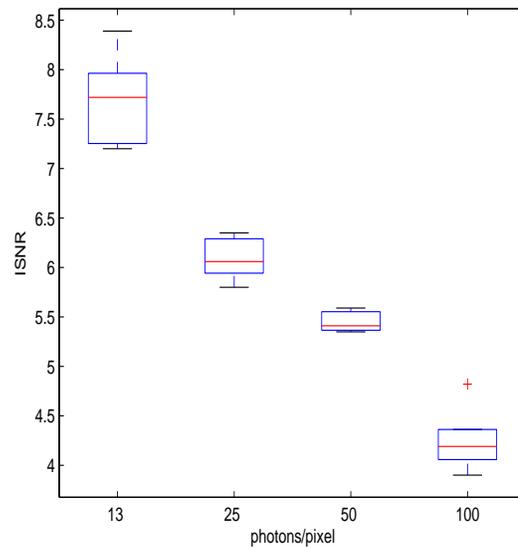
Στα σχήματα (4.2), (4.3) και (4.4) απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις του ISNR των τριών μοντέλων ανακατασκευής για τέσσερα διαφορετικά επίπεδα Poisson θορύβου, 13, 25, 50, 100 φωτόνια/pixel.

Για τα παραπάνω μοντέλα παρατίθενται για κάθε επίπεδο θορύβου οι ανακατασκευασμένες εικόνες και το μέσο ISNR από τα πειράματά μας αντίστοιχα. Επειδή παρατηρήσαμε ότι από τις επαναληπτικές μεθόδους η MAP-EMMP είχε λίγο καλύτερα αποτελέσματα από τις άλλες δυο θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των παραπάνω μοντέλων μεταξύ τους και με αυτά της MAP-EMMP για κάθε επίπεδο θορύβου αντίστοιχα.

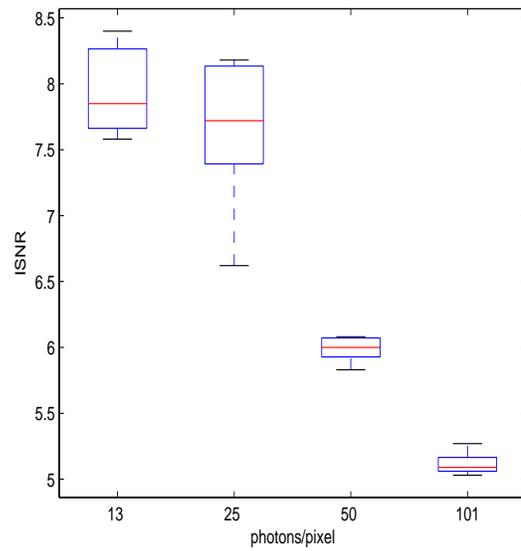
Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις και τις εικόνες για κάθε μέθοδο και για κάθε επίπεδο θορύβου καταλήγουμε ότι τα τρία προτεινόμενα μοντέλα παρουσιάζουν σίγουρα καλύτερα αποτελέσματα από τους επαναληπτικούς αλγορίθμους ανακατασκευής τομογραφικών εικόνων. Αναλυτικά το μοντέλο X.M.K εμφανίζεται καλύτερο από το MAP-EMMP και ακολουθούν με τα αμέσως καλύτερα αποτελέσματα το X.A και το X.M μοντέλο που δίνουν τις καλύτερες ποιοτικά ανακατασκευασμένες εικόνες από όλα τα μοντέλα που έχουμε υλοποιήσει. Μεταξύ των μοντέλων X.A και X.M διακρίνουμε το X.M ως καλύτερο διότι για όλες τις τιμές των φωτονίων παρουσιάζει καλύτερα αποτελέσματα ανακατασκευής. Επίσης μια παρατήρηση που καθιστά το X.M μοντέλο καλύτερο είναι ότι παρουσιάζει καλύτερα αποτελέσματα όχι μόνο για χαμηλά ποσοστά θορύβου αλλά και για αρκετά μικρό αριθμό φωτονίων/pixel.



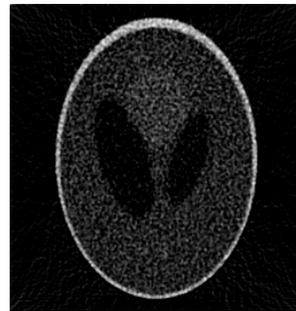
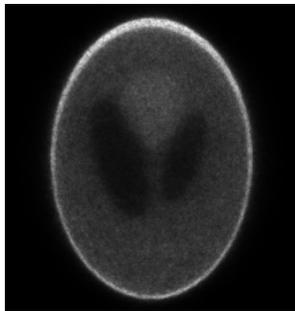
Σχήμα 4.2: Τιμές του $ISNR$ για το Χωρικά Μεταβαλλόμενο Μοντέλο ανά Κατεύθυνση για 13, 25, 50 και 100 φωτόνια/pixel.



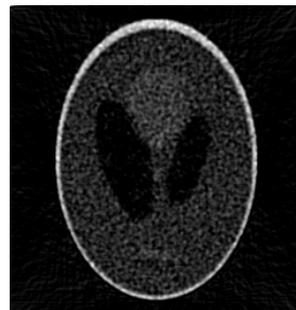
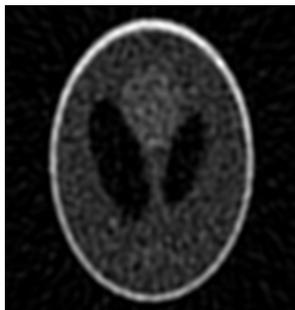
Σχήμα 4.3: Τιμές του $ISNR$ για το Χωρικά Αμετάβλητο Μοντέλο για 13, 25, 50 και 100 φωτόνια/pixel.



Σχήμα 4.4: Τιμές του $ISNR$ για το Χωρικά Μεταβαλλόμενο Μοντέλο για 13, 25, 50 και 100 φωτόνια/ $pixel$.

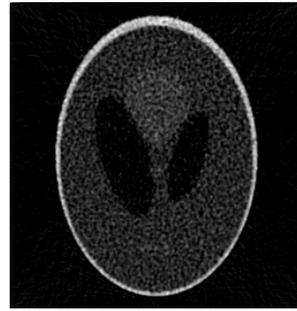
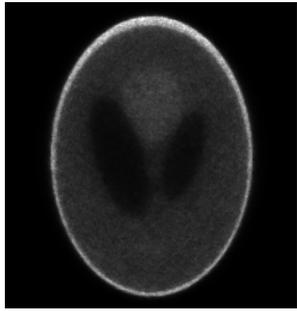


MAP-EMMP ($ISNR = 6.39$ dB) X.M.K ($ISNR = 6.14$ dB)

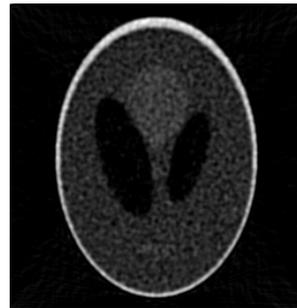
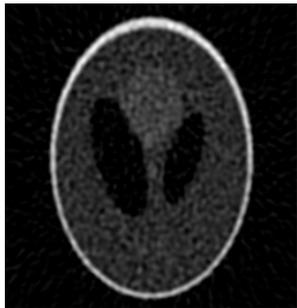


X.A ($ISNR = 7.72$ dB) X.M ($ISNR = 7.85$ dB)

Σχήμα 4.5: Ανακατασκευή εικόνας με 13 φωτόνια/ $pixel$.

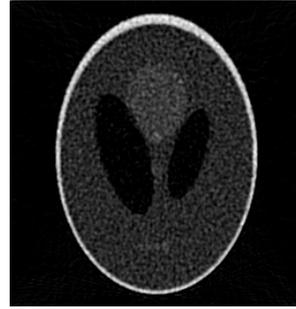
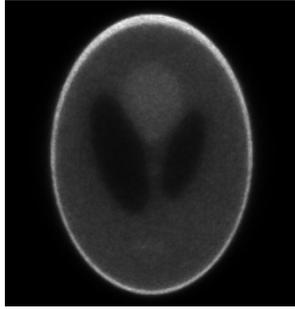


MAP-EMMP (ISNR = 5.39 dB) X.M.K (ISNR = 6.00 dB)

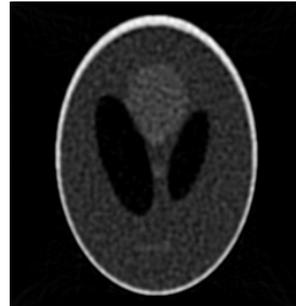
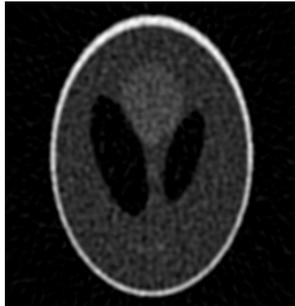


X.A (ISNR = 6.06 dB) X.M (ISNR = 7.72 dB)

Σχήμα 4.6: Ανακατασκευή εικόνας με 25 φωτόνια/pixel.

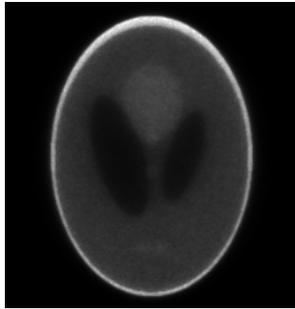


MAP-EMMP (ISNR = 4.01 dB) X.M.K (ISNR = 5.28 dB)

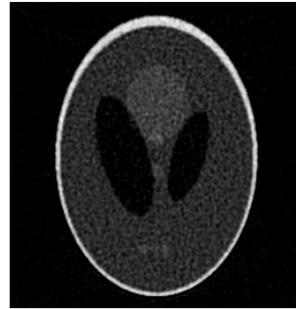


X.A (ISNR = 5.41 dB) X.M (ISNR = 6.00 dB)

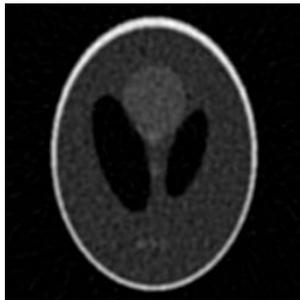
Σχήμα 4.7: Ανακατασκευή εικόνας με 50 φωτόνια/pixel.



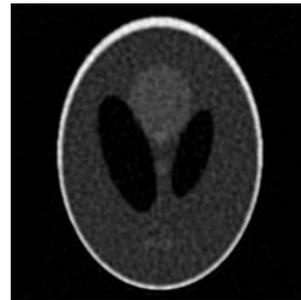
MAP-EMMP (ISNR = 2.93 dB)



X.M.K (ISNR = 4.63 dB)



X.A (ISNR = 4.19 dB)



X.M (ISNR = 5.09 dB)

Σχήμα 4.8: Ανακατασκευή εικόνας με 100 φωτόνια/pixel.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη παρούσα εργασία μελετήσαμε τις βασικές μεθόδους ανακατασκευής τομογραφικών εικόνων με κύρια την Φιλτραρισμένη Οπισθοπροβολή, οι οποίες υπολογίζουν τις αρχικές εικόνες αρκετά γρήγορα. Επειδή, όμως το μοντέλο της Φιλτραρισμένης Οπισθοπροβολής δεν περιγράφει με ακρίβεια τα πραγματικά δεδομένα τομογραφίας εκπομπής προσεγγίσαμε το πρόβλημα ανακα-τασκευής με στατιστικές και Μπεϋζιανές μεθόδους ανακατασκευής που ενσωματώνουν πιθανοτικά μοντέλα που περιγράφουν το θόρυβο και την εικόνα που θέλουμε να υπολογίσουμε αντίστοιχα. Μελετήσαμε τους αλγόριθμους EM, MAP-EM με εκ των προτέρων Gibbs κατανομή και το MAP-EM με Median εκ των προτέρων κατανομή. Οι τρεις αυτοί αλγόριθμοι ακολουθούν τη δομή των επαναληπτικών αλγορίθμων και παρουσιάζουν καλύτερα αποτε-λέσματα από τις βασικές μεθόδους παρουσία θορύβου.

Έχοντας ικανοποιητικά αποτελέσματα ανακατασκευής από τις επαναληπτικές μεθόδους προτείνουμε τρία μοντέλα για ανακατασκευή τομογραφικών εικόνων, τα χωρικά αμετάβλητο, χωρικά μεταβαλλόμενο και χωρικά μεταβαλλόμενο ανά κατεύθυνση μοντέλο. Τα τρία αυτά μοντέλα παρουσιάζουν αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα συγκριτικά με τις επαναληπτικές μεθόδους και συγκρινόμενα μεταξύ τους τις καλύτερες ανακατασκευασμένες εικόνες μας δίνει το χωρικά μεταβαλλόμενο μοντέλο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Jain A. K. "Fundamentals of Digital Image Processing". Prentice Hall, 1989.
- [2] IEEE Transactions on Nuclear Science. Special Issue on topics related to image reconstruction vol.21, No 3, 1974, vol.26, No. 2, April 1979, vol.27, No. 3, 1980.
- [3] IEEE Transaction on Biomedical Engineering. Special Issue on computerized medical imaging BME-28, No. 2, 1981.
- [4] Proceedings IEEE. Special Issue on Computerized Tomography 71, No. 3, 1983.
- [5] Kak A., C. "Image Reconstruction from Projections," in M., P., Ekstrom. Digital Image Processing Techniques, New York: Academic Press, pp 111-171, 1984.
- [6] Herman G., T. (ed.). Image Reconstruction from Projections, Topics in Applied Physics, vol 32, New York: Springer-Verlag, 1979.
- [7] Herman G., T. Image Reconstruction from Projections- The fundamentals of Computerized Tomography. New York: Academic Press, 1980.
- [8] Ludwig D. "The Radon Transform on Euclidean Space". Communications on pure and applied Mathematics, vol.19, pp 49-81, 1966.
- [9] Wernick M., N., D. S., Aarsvold J.."Emission Tomography: The Fundamentals of PET and SPECT". Prentice Hall, 2004.
- [10] Green P., J. "Bayesian reconstructions from emission tomography data using a modified EM algorithm", IEEE Transaction on Medical Imaging, vol.9, No.1, pp 84-93, 1990.
- [11] Dempster, A. P., Laird, N. M., and Rubin, D. B. "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm", Journal of the Royal Statistical Society B39: 1-38, 1977.
- [12] McLachlan, G. J., and Krishnan, T. The EM Algorithm and Extensions, John Wiley, New York, 1997
- [13] Lange, K., and Carson, R. EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. Journal of Computer Assisted Tomography. vol.8, pp 306-316, 1984.

- [14] Shepp, L.A., and Vardi, Y. Maximum Likelihood estimation for emission tomography. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, vol.1, No.2, pp 113-121, 1982.
- [15] Lucy, L., B. An iterative technique for the rectification of observed distribution, *The Astrophysical Journal*, vol.79, pp 745-754, 1974.
- [16] Richardson, W., H. Bayesian-based iterative method of image restoration. *Journal of the Optical Society of America (A)*, vol. 62, pp 55-59, 1972.
- [17] Christopher M. Bishop. *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer 2006.
- [18] Lange, K. Convergence of EM image reconstruction algorithms with Gibbs smoothing. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, vol.9, No. 4, pp 439-446, 1990.
- [19] Lalush, D., S., and Tsui, B., M., W. Simulation evaluation of Gibbs prior distributions for use in maximum a posteriori SPECT reconstructions. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, vol.11, No. 2, pp 267-275, 1992.
- [20] Fessler, J., A., Rogers, W., L. Spatial resolution properties of penalized-likelihood image reconstruction: Space-invariant tomographs. *IEEE Transactions on Image Processing* vol.5, No.9, pp 1346-1358, 1996.
- [21] Geman, S., and Geman, D. Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* vol.6, pp 721-741, 1984.
- [22] Levitan, E., and Herman G., T. A maximum a posteriori probability expectation maximization algorithm for image reconstruction in emission tomography. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, vol.6, No.3, pp 185-192, 1987.
- [23] Lee, S., J., Rangarajan , A., and Gindi, G. Bayesian image reconstruction in SPECT using higher order mechanical models as priors. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, vol.14, No.4, pp 669-680, 1995.
- [24] Fessler, J., A. Penalized weighted least squares image reconstruction for positron emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging* vol.13, No.2, pp 290-300, 1994.
- [25] Herbert, T. J., and Leahy, R. Statistic-based MAP image reconstruction from Poisson data using Gibbs priors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.40, No.9, pp 2290-2303, 1992.
- [26] Lalush, D. S., and Tsui, B. M., W. A generalized Gibbs prior for maximum a posteriori reconstruction in SPECT. *Physics in Medicine and Biology*, vol.38, pp 729-741, 1993.

- [27] Mumcuoglu, E. U., Leahy, R., Cherry, S. R., and Zhou, Z. Fast gradient-based methods for Bayesian reconstruction of transmission and emission PET images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol.13, No.4, pp 687-701, 1994.
- [28] Higdon, D. M., Bowsher, J. E., Johnson, V. E., Turkington, T. G., Gilland, D. R., and Jacyszak, R. J. Fully Bayesian estimation of Gibbs hyperparameters for emission computed tomography data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol.16, pp 516-526, 1997.
- [29] Ing-Tsung Hsiao, Anand Rangarajan, and Gene Gindi. A new Convex Edge-Preserving Median Prior with Applications to Tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol.22, No. 5, pp 580-585, 2003.
- [30] Alenius, S., and Ruotsalainen, U. "Bayesian image reconstruction for emission tomography based on median root prior". *European Journal of Nuclear Medicine*, vol.24, No.. 3, pp. 258-265, 1997.
- [31] Kalbfleisch, J. G. *Probability and Statistical Inference*, Vol. 1. Probability. 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [32] Edwin, K. P.Chong and Stanislaw, H. Zak. (1996). *An Introduction to Optimization*. Wiley-InterScience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Second Edition, 2001.
- [33] Fotiou E., Nikou C., Galatsanos N. "A Spatially Adaptive Hierarchical Stochastic Model for Non-Rigid Image Registration". *European Signal Processing Conference*, Lausanne, Switzerland, 2008.
- [34] Chantas, G. K., Galatsanos, N. P., and Likas, A. C. "Bayesian Restoration using a new Hierarchical Directional Continuous Edge Image Prior". *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.15, No. 10, 2006.

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ

Άρθρα σε διεθνή περιοδικά με σύστημα κριτών:

- A. Kampouraki, G. Manis, C. Nikou. "Heartbeat Time Series Classification with Support Vector Machines". Έγινε δεκτό στο περιοδικό IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine, 2008 και αναμένεται η δημοσίευσή του.

Άρθρα σε πρακτικά συνεδρίων με σύστημα κριτών:

- A. Kampouraki, C. Nikou, G. Manis. Classification of Heart Rate Signals using Support Vector Machines. Proceedings of the 18th Biosignal Conference, pp. 9-11, June, 2006, Brno, Czech Republic.
- A. Kampouraki, C. Nikou, G. Manis. Robustness of Support Vector Machine-based Classification of Heart Rate signals. Proceedings of the 28th IEEE EMBS Annual International Conference, pp. 2159-2162, Aug 30-Sept 3, 2006, New York City, USA.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ

Η Αργυρώ Καμπουράκη έλαβε το πτυχίο Πληροφορικής από το Τμήμα Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, το 2006. Από το 2006 είναι μεταπτυχιακή φοιτήτρια του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Τα ερευνητικά ενδιαφέροντα της περιλαμβάνουν μεθόδους τεχνητής νοημοσύνης για βιοϊατρική εικόνα, μεθόδους επεξεργασίας σήματος και στατιστικές μεθόδους για ανακατασκευή τομογραφικών εικόνων.