ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕ ΛΟΓΙΚΟΥΣ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Η
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Υποβάλλεται στην

ορισθείσα από την Γενική Συνέλευση Ειδικής Σύνθεσης
του Τμήματος Πληροφορικής
Εξεταστική Επιτροπή

από τον

Παύλο Παπαδογιάννη

ως μέρος των Υποχρεώσεων

για τη λήψη

του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΕ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Φεβρουάριος 2016

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελίδα
ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ	i
ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕ ΛΟΓΙΚΟΥΣ ΤΕΛΕΣΤΕΣ	i
Η	i
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ	i
Υποβάλλεται στην	i
ορισθείσα από την Γενική Συνέλευση Ειδικής Σύνθεσης	i
του Τμήματος Πληροφορικής	i
Εξεταστική Επιτροπή	i
από τον	i
Παύλο Παπαδογιάννη	i
ως μέρος των Υποχρεώσεων	i
για τη λήψη	i
του	i
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ	i
ΜΕ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ	i
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	ii
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ	iv
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	v
ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ	vi
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	viii
EXTENDED ABSTRACT IN ENGLISH	x
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΟΝΤΕΛΟΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ	7
2.1. Προκαταρκτικά	7
2.1.1. Βασικές έννοιες	7
2.1.2. Κατασκευή σύνθετων ΜΔΣ	12
2.2. Αληθοτιμές, γλώσσες και ερμηνείες	19
2.3. Μετασχηματισμοί όρων και τύπων	21
2.4. Σημασιολογία Kripke-Kleene	28
2.5. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία	29
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΕΣΩ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ	33
3.1. Προκαταρκτικά	33
3.2. Σημασιολογία Kripke-Kleene	42
3.3. Συνέχεια ως προς $\sqsubseteq$ με χρήση σταθερής ερμηνείας	44
3.4. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία	47

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΠΑΙΓΝΙΟΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ 56
4.1. Προκαταρκτικά 56
4.2. Κινήσεις και κανόνες των παιχνιδιών 60
4.3. Σημασιολογία Kripke-Kleene 62
4.4. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία 71
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΕΣΩ ΑΝΑΓΡΑΦΗΣ 77
5.1. Συστήματα απόφασης 77
5.1.1. Σημασιολογία Kripke-Kleene 77
5.1.2. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία 83
5.1.3. Αλγόριθμοι απόφασης 86
5.2. Συστήματα αναγνώρισης 90
5.2.1. Σημασιολογία Kripke-Kleene 90
5.2.2. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία 95
5.3. Συστήματα παραγωγής 99
5.3.1. Σημασιολογία Kripke-Kleene 99
5.3.2. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία 106
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ 112
ΑΝΑΦΟΡΕΣ 115
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 118

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

	Σελίδα
Πίνακας 4.1	61
Πίνακας 4.2	63
Πίνακας 4.3	64
Πίνακας 5.1	79
Πίνακας 5.2	84
Πίνακας 5.3	90
Πίνακας 5.4	92
Πίνακας 5.5	96
Πίνακας 5.6	97
Πίνακας 5.7	101
Πίνακας 5.8	103
Πίνακας 5.9	109
Πίνακας 5.10	110

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

	Σελίδα
Σχήμα 5.1	82
Σχήμα 5.2	86
Σχήμα 5.3	91
Σχήμα 5.4	94
Σχήμα 5.5	98
Σχήμα 5.6	102
Σχήμα 5.7	105
Σχήμα 5.8	111

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ

Το ακρωνύμιο “ΜΔΣ” σημαίνει “μερικά διατεταγμένο σύνολο”.

Συμβολίζουμε τη σχέση “υποακολουθία” ως $\leq_{\mathrm{sub}}$ και τη σχέση “πρόθεμα” ως $\leq_{\mathrm{pre}}$.

Γενικά, γράφουμε $x^{<\kappa}$ (αντίστοιχα $x^{\leq\kappa}$) εννοώντας $\bigcup_{n<\kappa} x^n$ (αντίστοιχα $\bigcup_{n\leq\kappa} x^n$) και x^* εννοώντας $x^{<\omega}$, με ό,τι (συμβατό) μπορεί να σημαίνει η χρήση βάσης και εκθέτη.

Συμβολίζουμε το i-οστό μέλος μιας πλειάδας t ως $t[i]$ και θεωρούμε ότι τα μέλη αρχίζουν από το 0.

Χρησιμοποιούμε παρενθέσεις για την αναπαράσταση τόσο πλειάδων όσο και ακολουθιών. Αυτό ισχύει και για πλειάδες ή ακολουθίες μήκους 1, π.χ. (x).

Για ένα σύνολο S γράφουμε $S(x)$ εννοώντας $x \in S$ (βλέποντας το S σαν κατηγόρημα και όχι σαν συνάρτηση).

Συμβολίζουμε το κενό σύνολο ως $\varnothing$ και ως ϵ, όταν λόγω των συμφραζομένων το βλέπουμε σαν την κενή ακολουθία.

Συμβολίζουμε το σύνολο των συναρτήσεων από το D στο R ως $D \to R$ και (κυρίως όταν πρόκειται για ακολουθίες) ως R^D.

Συμβολίζουμε το δυναμοσύνολο ενός συνόλου S ως 2^S (επειδή είναι ισομορφικό με το σύνολο των συναρτήσεων από το S στο $2 = \{0, 1\}$).

Συμβολίζουμε την πράξη του καρτεσιανού γινομένου ως $\times$ και θεωρούμε πως δέχεται ως όρισμα μια πεπερασμένη ακολουθία συνόλων. Γράφουμε S^n εννοώντας $\bigtimes_{i<n} S$.

Για μία συνάρτηση $\bigoplus \in 2^S \to S$:

- γράφουμε $\bigoplus_{\text{συνθήκη}} \text{έκφραση}$ εννοώντας $\bigoplus \{\text{έκφραση} \mid \text{συνθήκη}\}$
- γράφουμε $\text{έκφραση}_0 \oplus \ldots \oplus \text{έκφραση}_n$ εννοώντας $\bigoplus \{\text{έκφραση}_0, \ldots, \text{έκφραση}_n\}$

Για μία συνάρτηση $\bigoplus \in S^{<\kappa} \to S$:

- γράφουμε $\bigoplus_{\textit{συνθήκη}} \textit{έκφραση}$ εννοώντας $\bigoplus \left(\textit{έκφραση}\right)_{\textit{συνθήκη}}$
- γράφουμε $\textit{έκφραση}_0 \oplus \ldots \oplus \textit{έκφραση}_n$ εννοώντας $\bigoplus \left(\textit{έκφραση}_0, \ldots, \textit{έκφραση}_n\right)$

Για μία συνάρτηση $f \in D \to R$, ορίζουμε το $\mathrm{im}(f)$ (την εικόνα του f) ως εξής:

- για κάθε $d \in D$, $\mathrm{im}(f)(d) = f(d)$
- για κάθε $E \in 2^D$, $\mathrm{im}(f)(E) = \{f(d) \mid d \in E\}$
- για κάθε διατακτικό αριθμό κ και ακολουθία $d \in D^{<\kappa}$, $\mathrm{im}(f)(d) = \left(f\left(d(i)\right)\right)_{i<|d|}$
- για κάθε πλειάδα $d \in D^{<\omega}$, $\mathrm{im}(f)(d) = \left(f\left(d[i]\right)\right)_{i<|d|}$

Συμβολίζουμε την αντίστροφη μιας σχέσης ► ως $►^{-1}$ και ως ◄, όταν το σύμβολο που αναπαριστά τη σχέση το επιτρέπει. Η χρήση του αντεστραμμένου συμβόλου επεκτείνεται και για σχέσεις το σύμβολο που αναπαριστά τις οποίες περιλαμβάνει δείκτη ή εκθέτη.

Συμβολίζουμε την πράξη σύνθεσης σχέσεων ως $\circ$ και θεωρούμε πως δέχεται ως όρισμα μια πεπερασμένη ακολουθία σχέσεων. Γράφουμε r^n εννοώντας $\bigcirc_{i<n} r$.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Παύλος Παπαδογιάννης του Κωνσταντίνου και της Νιφορίτσας. MSc, Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. Φεβρουάριος, 2016. Σημασιολογικές Προσεγγίσεις για Γραμματικές με Λογικούς Τελεστές. Επιβλέποντας: Χρήστος Νομικός.

Στην παρούσα διατριβή μελετώνται δύο σημασιολογίες για τις γραμματικές με λογικούς τελεστές μέσω διαφορετικών χαρακτηρισμών τους. Οι γραμματικές με λογικούς τελεστές προκύπτουν από την προσθήκη τελεστών σύζευξης και άρνησης στις απλές ασυμφραστικές γραμματικές. Θεωρούμε το σύνολο κανόνων τους ως ένα λογικό τύπο, ειδικότερα ένα σύστημα γλωσσικών ανισώσεων, και τις εξετάζουμε από μια λογική σκοπιά. Οι σημασιολογίες που μελετάμε προέρχονται από την περιοχή του λογικού προγραμματισμού και συγκεκριμένα από τη σημασιολογία Kripke-Kleene και την καλά θεμελιωμένη σημασιολογία. Και στις δύο χρησιμοποιείται η έννοια της τριαδικής γλώσσας, στην οποία μια συμβολοσειρά μπορεί να ανήκει, να μην ανήκει ή το αν ανήκει να είναι αόριστο. Η πρώτη προσέγγιση των σημασιολογιών έχει μοντελοθεωρητικό χαρακτήρα, δηλαδή στηρίζεται σε ερμηνείες των μεταβλητών μιας γραμματικής ως γλώσσες και στην επιλογή της τομής των ερμηνειών που ικανοποιούν τους κανόνες της γραμματικής. Στη συνέχεια προσεγγίζουμε τις σημασιολογίες μέσω σταθερών σημείων συναρτήσεων. Εδώ σχετίζουμε γραμματικές με συναρτήσεις από ερμηνείες σε ερμηνείες και χρησιμοποιούμε τα ελάχιστα σταθερά σημεία αυτών των συναρτήσεων, τα οποία χαρακτηρίζουμε ως όρια κάποιων ακολουθιών προσεγγίσεων. Το τρίτο είδος σημασιολογικών προσεγγίσεων στηρίζεται σε συνδυαστικά παιχνίδια δύο παικτών. Έχουμε δηλαδή παιχνίδια όπου δύο παίκτες επιχειρηματολογούν με βάση τους κανόνες μιας γραμματικής για το αν ανήκουν διάφορες συμβολοσειρές στις γλώσσες που αντιπροσωπεύουν διάφοροι όροι και οι σημασιολογίες χαρακτηρίζονται μέσω της τιμής παιχνιδιών που σχετίζονται με γραμματικές. Παρουσιάζουμε μια άπειρη εκδοχή αυτών των παιχνιδιών (προϋπάρχουσα για την καλά θεμελιωμένη σημασιολογία) και εισάγουμε μια ισοδύναμη πεπερασμένη εκδοχή τους. Τέλος,

προτείνουμε κάποιες σημασιολογικές προσεγγίσεις που βασίζονται σε συστήματα αναγραφής όρων. Στο πρώτο είδος αναγραφής, αποφασίζεται το κατά πόσο ανήκουν διάφορες συμβολοσειρές σε διάφορες γλώσσες. Ο αιτιοκρατικός χαρακτήρας του (η χρησιμοποιούμενη σχέση αναγραφής έχει ως πυρήνα μια συνάρτηση) μας οδηγεί σε ένα γενικό, αναδρομικό, "από πάνω προς τα κάτω" αλγόριθμο απόφασης, παρόμοιο με τον αλγόριθμο του Unger για τις απλές ασυμφραστικές γραμματικές, και σε δύο τροποποιήσεις του, εκ των οποίων η μία μειώνει τον απαιτούμενο χρόνο και η άλλη τον απαιτούμενο χώρο. Στο δεύτερο είδος αναγραφής, αναγνωρίζονται μη αιτιοκρατικά συμβολοσειρές που ανήκουν ή δεν ανήκουν σε διάφορες γλώσσες. Από αυτό καταλήγουμε σε ένα ακόμη είδος αναγραφής όπου παράγονται συμβολοσειρές που ανήκουν ή δεν ανήκουν σε διάφορες γλώσσες, περίπου όπως στον κλασικό χαρακτηρισμό της σημασιολογίας των απλών ασυμφραστικών γραμματικών.

EXTENDED ABSTRACT IN ENGLISH

Papadoyannis, Pavlos, PP. MSc, Computer Science Department, University of Ioannina, Greece. February, 2016. Semantic Approaches for Boolean Grammars. Thesis Supervisor: Christos Nomikos.

In this thesis we study two kinds of semantics for Boolean grammars through different characterizations. Boolean grammars arise from adding conjunction and negation operators to simple context-free grammars. We see their set of rules as a logical formula, a system of language inequations in particular, and we examine them from a logical point of view. The kinds of semantics we study come from the area of logic programming, specifically from the Kripke-Kleene semantics and the well-founded one. Both of them use the notion of ternary languages, where a string can belong, not belong or have undefined membership. Our first approach to the semantics is of a model-theoretic nature. It relies on interpretations of the variables of a grammar as languages and on choosing the intersection of the interpretations that satisfy the rules. Next, we approach the semantics through fixpoints of functions. Now we relate grammars to functions from interpretations to interpretations and use the least fixpoints of these functions, which we characterize as limits of certain sequences of approximations. The third kind of semantic approaches used is based on combinatorial two-player games. Here we have games where two players argue, using the rules of a grammar, whether some strings belong to the languages that some terms stand for and the semantics is characterized using the values of games related to grammars. We show an infinite version of these games (already existing for the well-founded semantics) and we introduce an equivalent finite version of them. Finally, we propose some semantic approaches based on term-rewriting systems. In the first kind of rewriting, the membership of several strings in several languages is decided. Its deterministic character (the rewriting relation used has a function as a kernel) leads us to a general, recursive, “top-down” decision algorithm, similar to Unger's algorithm for simple

context-free grammars, and to two modifications of it, one reducing the time needed and one reducing the space needed. In the second kind of rewriting, strings that belong or do not belong to several laguages are recognized nondeterministically. From this kind we conclude in one more kind of rewriting, where strings that belong or do not belong to several laguages are generated, pretty much like what happens in the classical characterization of the semantics of simple context-free grammars.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ορισμός 1.1. Χρησιμοποιούμε τα :, ., ~, &, |, >=, <=, ==, !, ,, ;, <−, −>, <−>, (και) ως ειδικά σύμβολα, δηλαδή, όταν μιλάμε για σύνολα τα στοιχεία των όποιων χρησιμοποιούνται ως σταθερές ή μεταβλητές, θεωρούμε ότι δεν περιλαμβάνουν τα συγκεκριμένα σύμβολα. Ονομάζουμε όλα τα προηγούμενα σύμβολα εκτός από τα (και) *τελεστές*. Από τους τελεστές, ονομάζουμε:

- τα :, ., ~, & και | *συναρτησιακούς* τελεστές
- τα >=, <= και == *σχεσιακούς* τελεστές
- τα !, ,, ;, <−, −> και <−> *λογικούς συνδέσμους*

Από τους τελεστές, ονομάζουμε ακόμη:

- τα ~ και ! *μονομελείς* τελεστές
- τα >=, <=, ==, <−, −> και <−> *διμελείς* τελεστές
- τα : και . τελεστές *πεπερασμένων ακολουθιών*
- τα &, |, , και ; τελεστές *συνόλων*

Ορίζουμε μια σχέση προτεραιότητας μεταξύ συναρτησιακών τελεστών θεωρώντας τη φθίνουσα σειρά : . ~ & | και μια σχέση προτεραιότητας μεταξύ λογικών συνδέσμων θεωρώντας τη φθίνουσα σειρά ! , ; <− και ότι τα −> και <−> έχουν την ίδια προτεραιότητα με το <−.

Ορισμός 2.2. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τους (*τριαδικούς*) $(\Sigma,\ V)$-*όρους* (*γλωσσών*) ως εξής:

- κάθε στοιχείο του $\Sigma \cup V$ είναι απλός όρος
- για κάθε μονομελή συναρτησιακό τελεστή o και όρο τ, το $(o,\ \tau)$ είναι σύνθετος όρος

- για κάθε (συναρτησιακό) τελεστή πεπερασμένων ακολουθιών o και πεπερασμένη ακολουθία όρων τ, το $(o\,,\ \tau)$ είναι σύνθετος όρος
- για κάθε συναρτησιακό τελεστή συνόλων o και σύνολο όρων τ, το $(o\,,\ \tau)$ είναι σύνθετος όρος

Ορίζουμε τους (*τριαδικούς*) $(\Sigma\,,\ V)$-*τύπους* (*γλωσσών*) ως εξής:

- για κάθε (διμελή) σχεσιακό τελεστή o και ζευγάρι όρων τ, το $(o\,,\ \tau)$ είναι απλός τύπος
- για κάθε μονομελή λογικό σύνδεσμο o και τύπο φ το $(o\,,\ \varphi)$ είναι σύνθετος τύπος
- για κάθε διμελή λογικό σύνδεσμο o και ζευγάρι τύπων φ το $(o\,,\ \varphi)$ είναι σύνθετος τύπος
- για κάθε λογικό σύνδεσμο συνόλων o και σύνολο τύπων φ το $(o\,,\ \varphi)$ είναι σύνθετος τύπος

Σε έναν τέτοιο όρο ή τύπο ονομάζουμε τα στοιχεία του Σ *σταθερές* και τα στοιχεία του V *μεταβλητές*. Για έναν σύνθετο όρο ή τύπο x, ορίζουμε ότι $x^{\mathrm{op}} = x[0]$ και $x^{\mathrm{arg}} = x[1]$. Για ευκολία στην παρουσίαση, αναπαριστούμε ένα σύνθετο όρο ή τύπο $(o\,,\ x)$:

- αν το o είναι μονομελής τελεστής, ως $o(\,x\,)$ (προθεματική αναπαράσταση) και ως $(\,o\,x\,)$ (ενθεματική αναπαράσταση)
- αν το o είναι διμελής τελεστής, ως $o(\,x[0]\ x[1])$ (προθεματική αναπαράσταση) και ως $(\,x[0]\ o\ x[1])$ (ενθεματική αναπαράσταση)
- αν το o είναι τελεστής πεπερασμένων ακολουθιών, ως $o(\,x(0)\ \ldots\ x(|x| - 1))$ (προθεματική αναπαράσταση) και, αν $|x| \geq 2$, ως $(\,x(0)\ o\ \ldots\ o\ x(|x| - 1))$ (ενθεματική αναπαράσταση)
- αν το o είναι τελεστής συνόλων, για κάθε ακολουθία όρων ή τύπων y, όπου $x = \{\,y(i) \mid i < |y|\}$:
    - αν $|y| < \omega$, ως $o(\,y(0)\ \ldots\ y(|y| - 1))$ (προθεματική αναπαράσταση)
    - αν $2 \leq |y| < \omega$, ως $(\,y(0)\ o\ \ldots\ o\ y(|y| - 1))$ (ενθεματική αναπαράσταση)

Στην ενθεματική αναπαράσταση μπορούμε να παραλείψουμε κάποια (και) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις προτεραιότητας του ορισμού 1.1.

Παράδειγμα 1.1. Το παρακάτω είναι ένας $(\{a\,,\ b\,,\ c\},\ \{A\,,\ B\,,\ C\})$-τύπος:

$$\boxed{(->,\ ((,,\ \{(>=,\ (A,\ a)),\ (!,\ (;,\ \{(==,\ ((.,\ (B\,,\ b)),\ A),\ (<=,\ ((\&,\ \{C\,,\ (\sim,\ c)\}),\ (:,\ (A,\ (|,\ \{B\,,\ C\})))))))\}))\}),\ (==,\ (A\,,\ a))))}$$

Γενικά στα παραδείγματα θα χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για τις μεταβλητές και μικρά για τις σταθερές. Σε προθεματική αναπαράσταση ο παραπάνω τύπος γράφεται ως εξής:

$$\boxed{->(,(>=(A\ \ a)\ \ !(;(==(.(B\ \ b)\ \ A)\ \ <=(\&(C\ \ \sim(c))\ \ :(A\ \ |(B\ \ C))))))\ \ ==(A\ \ a))}$$

Η ενθεματική αναπαράστασή του είναι η ακόλουθη:

$$\boxed{(((A >= a)\ ,\ (!\ (((B\ .\ b) == A)\ ;\ ((C\ \&\ (\sim c)) <= (A : (B\ |\ C)))))) -> (A == a))}$$

Χρησιμοποιώντας τις προτεραιότητες των τελεστών, η ενθεματική αναπαράσταση γίνεται:

$$\boxed{A >= a\ ,\ !\ (B\ .\ b == A\ ;\ C\ \&\ \sim c <= A : (B\ |\ C)) -> A == a}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε προθεματική αναπαράσταση μέσα στην ενθεματική για να αναπαραστήσουμε κάποιο σύνθετο όρο ή τύπο x, όπου το x^{op} είναι τελεστής συνόλων ή πεπερασμένων ακολουθιών και $\left|x^{\mathrm{arg}}\right| < 2$.

Ορισμός 2.3. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V και Χ το σύνολο των $(\Sigma,\ V)$-όρων και $(\Sigma,\ V)$-τύπων. Για κάθε $x \in X$ που δεν είναι απλός όρος, ορίζουμε τα *ορίσματά* του ως εξής:

- αν το x^{op} είναι μονομελής τελεστής, το όρισμα του x είναι το x^{arg}
- αν το x^{op} είναι διμελής τελεστής, τα ορίσματα του x είναι τα $x^{\mathrm{arg}}[0]$ και $x^{\mathrm{arg}}[1]$
- αν το x^{op} είναι τελεστής πεπερασμένων ακολουθιών, τα ορίσματα του x είναι τα $x^{\mathrm{arg}}(0), \ldots, x^{\mathrm{arg}}(\left|x^{\mathrm{arg}}\right| - 1)$
- αν το x^{op} είναι τελεστής συνόλων, τα ορίσματα του x είναι τα στοιχεία του x^{arg}

Για κάθε $x \in X$, ορίζουμε το *βάθος* του ως εξής:

- αν το x είναι απλός όρος, τότε το βάθος του είναι 0
- αλλιώς, το βάθος του είναι $d + 1$, όπου d το μέγιστο από τα βάθη των ορισμάτων του

Για κάθε $x,\ y \in$ Χ, λέμε ότι το x *περιέχει* το y αν και μόνο αν ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

- $x = y$
- το x δεν είναι απλός όρος και κάποιο από τα ορίσματά του περιέχει το y

Για κάθε $x,\ y,\ u,\ v \in$ Χ, λέμε ότι το y *προκύπτει* από το x *αντικαθιστώντας* ένα u με v αν και μόνο αν ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

- $x = u$ και $y = v$
- το x δεν είναι απλός όρος, $y^{\mathrm{op}} = x^{\mathrm{op}}$ και:
  - αν το x^{op} είναι μονομελής τελεστής, το y^{arg} προκύπτει από το x^{arg} αντικαθιστώντας ένα u με v
  - αν το x^{op} είναι διμελής τελεστής, το $y^{\mathrm{arg}}[0]$ προκύπτει από το $x^{\mathrm{arg}}[0]$ αντικαθι-

στώντας ένα u με v και $x^{\text{arg}}[1] = y^{\text{arg}}[1]$ ή το $y^{\text{arg}}[1]$ προκύπτει από το $x^{\text{arg}}[1]$ αντικαθιστώντας ένα u με v και $x^{\text{arg}}[0] = y^{\text{arg}}[0]$

- αν το x^{op} είναι τελεστής πεπερασμένων ακολουθιών, υπάρχει $i < |x^{\text{arg}}|$, τέτοιο ώστε το $y^{\text{arg}}(i)$ να προκύπτει από το $x^{\text{arg}}(i)$ αντικαθιστώντας ένα u με v και, για κάθε $j < |x^{\text{arg}}|$ με $j \neq i$, $x^{\text{arg}}(j) = y^{\text{arg}}(j)$
- αν το x^{op} είναι τελεστής συνόλων, υπάρχουν $s \in x^{\text{arg}}$ και $t \in y^{\text{arg}}$, τέτοια ώστε το t να προκύπτει από το s αντικαθιστώντας ένα u με v και $x^{\text{arg}} - \{s, t\} = y^{\text{arg}} - \{t\}$

Παράδειγμα 1.2. Ο τύπος του παραδείγματος 1.1 έχει βάθος 7. Περιέχει το C και το $B\ .\ b == A$. Οι παρακάτω τύποι προκύπτουν από αυτόν αντικαθιστώντας ένα C με $\sim c$:

$$\boxed{A >= a\ ,!\ (B\ .\ b == A\ ;\ C\ \&\ \sim c <= A : (B\ |\ \sim c)) -> A == a}$$

$$\boxed{A >= a\ ,!\ (B\ .\ b == A\ ;\ \&(\sim c) <= A : (B\ |\ C)) -> A == c}$$

Ο παρακάτω τύπος προκύπτει αντικαθιστώντας ένα $B\ |\ C$ με A:

$$\boxed{A >= a\ ,!\ (B\ .\ b == A\ ;\ C\ \&\ \sim c <= A : A) -> A == a}$$

Ορισμός 2.4. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ονομάζουμε ένα (Σ, V)-τύπο φ:

- ανίσωση (αντίστοιχα εξίσωση) αν και μόνο αν $\varphi^{\text{op}} = \ >=$ (αντίστοιχα $\varphi^{\text{op}} = \ ==$)
- σύστημα ανισώσεων (αντίστοιχα εξισώσεων) αν και μόνο αν $\varphi^{\text{op}} = \ ,$ και το φ^{arg} αποτελείται από ανισώσεις (αντίστοιχα εξισώσεις)

Έστω ένα (Σ, V)-σύστημα φ και Τ το σύνολο των (Σ, V)-όρων. Ορίζουμε τη σχέση $\rightarrow_{\varphi} \subseteq \mathrm{T}^2$ (γράφουμε απλά $\rightarrow$ όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης). Για κάθε $\tau, \upsilon \in \mathrm{T}$, $\tau \rightarrow_{\varphi} \upsilon$ αν και μόνο αν υπάρχει $\psi \in \varphi^{\text{arg}}$, τέτοιο ώστε $\psi^{\text{arg}} = (\tau, \upsilon)$.

Παράδειγμα 1.3. Το παρακάτω είναι ένα σύστημα εξισώσεων:

$$\boxed{\begin{array}{l} A == a\ .\ b\ .\ A\ |\ a\ .\ b\ , \\ a\ .\ B == A\ .\ a\ , \\ C == a\ .\ (B\ |\ .())\ , \\ C == a\ .\ b\ .\ C\ .\ b\ .\ a\ |\ (a\ |\ a\ .\ b\ .\ a) \end{array}}$$

Όσον αφορά το $\rightarrow$, ισχύουν τα παρακάτω:

- $A \rightarrow a\ .\ b\ .\ A \mid a\ .\ b$
- $a\ .\ B \rightarrow A\ .\ a$
- $C \rightarrow a\ .\ (B \mid .())$
- $C \rightarrow a\ .\ b\ .\ C\ .\ b\ .\ a \mid (a \mid a\ .\ b\ .\ a)$

και δεν υπάρχουν άλλα ζευγάρια όρων τ και υ, τέτοια ώστε $\tau \rightarrow \upsilon$.

Ορισμός 2.5. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τους *κανονικούς* $(\Sigma\ ,\ V)$-όρους ως εξής:

- κάθε στοιχείο του $\Sigma \cup V$ είναι *κανονικός απλός όρος*
- για κάθε πεπερασμένη ακολουθία κανονικών απλών όρων τ, το $(.\ ,\ \tau)$ είναι *κανονικός όρος παράθεσης*
- για κάθε κανονικό όρο παράθεσης τ, το $(\sim\ ,\ \tau)$ είναι *κανονικός όρος άρνησης*
- για κάθε μη κενό και πεπερασμένο σύνολο κανονικών όρων παράθεσης ή άρνησης τ, το $(\&\ ,\ \tau)$ είναι *κανονικός όρος σύζευξης*

  Σε έναν κανονικό όρο σύζευξης τ ονομάζουμε *συζευκτέους* τα στοιχεία του $\tau^{\arg}$. Ειδικότερα, ονομάζουμε *αρνητικούς* τους συζευκτέους που είναι κανονικοί όροι άρνησης και *θετικούς* τους υπόλοιπους. Για έναν κανονικό όρο σύζευξης τ, ορίζουμε τα εξής:

  - $\tau^{+} = (\&,\ \{\upsilon \in \tau^{\arg} \mid \upsilon\ \textit{θετικός συζευκτέος}\})$
  - $\tau^{-} = (\&,\ \{\upsilon \in \tau^{\arg} \mid \upsilon\ \textit{αρνητικός συζευκτέος}\})$

Ορίζουμε τους *κανονικούς* $(\Sigma\ ,\ V)$-τύπους:

- για κάθε $A \in V$ και κανονικό όρο σύζευξης τ, το $(>=,\ (A\ ,\ \tau))$ είναι *κανονική ανίσωση*

  Σε μία κανονική ανίσωση φ ονομάζουμε *κεφαλή* το $\varphi^{\arg}[0]$ και *σώμα* το $\varphi^{\arg}[1]$.

- για κάθε μη κενό και πεπερασμένο σύνολο κανονικών ανισώσεων φ, όπου, για κάθε $A \in V$, υπάρχει στοιχείο του φ με κεφαλή A, το $(,\ ,\ \varphi)$ είναι *κανονικό σύστημα ανισώσεων*

  Σε ένα κανονικό σύστημα ανισώσεων φ ονομάζουμε *κανόνες* τα στοιχεία του $\varphi^{\arg}$.

Σε έναν κανονικό όρο ή τύπο, αναπαριστούμε κάθε όρο της μορφής $(o\ ,\ (x))$ ή $(o\ ,\ \{x\})$, που κάποιο όρισμά του περιέχει, και ως x.

Παράδειγμα 1.4. Το παρακάτω είναι ένα κανονικό σύστημα ανισώσεων:

$$\begin{array}{l} L >= \sim A \,.\, B \;\&\sim B \,.\, A \;\&\sim .(A) \;\&\sim .(B)\,, \\ A >= \&(X \,.\, A \,.\, X)\,, \\ A >= \&(.(a))\,, \\ B >= \&(X \,.\, B \,.\, X)\,, \\ B >= \&(.(b))\,, \\ X >= \&(.(a))\,, \\ X >= \&(.(b)) \end{array}$$

ή

$$\begin{array}{l} L >= \sim A \,.\, B \;\&\sim B \,.\, A \;\&\sim A \;\&\sim B\,, \\ A >= X \,.\, A \,.\, X\,, \\ A >= a\,, \\ B >= X \,.\, B \,.\, X\,, \\ B >= b\,, \\ X >= a\,, \\ X >= b \end{array}$$

Ορισμός 2.6. Ονομάζουμε (*ασυμφραστικές*) *γραμματικές* (*με λογικούς τελεστές*) τις τετράδες $(\Sigma\,,\ V\,,\ \varphi\,,\ A_0)$, όπου:

- τα Σ και V είναι ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα

  Ονομάζουμε τα στοιχεία των Σ και V *σταθερές* και *μεταβλητές* της γραμματικής, αντί-στοιχα.
- το φ είναι κανονικό $(\Sigma\,,\ V)$-σύστημα ανισώσεων

  Ονομάζουμε το φ *θεωρία* της γραμματικής.
- $A_0 \in V$

  Ονομάζουμε το A_0 *ορίζουσα* μεταβλητή της γραμματικής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΟΝΤΕΛΟΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

2.1. Προκαταρκτικά

2.2. Αληθοτιμές, γλώσσες και ερμηνείες

2.3. Μετασχηματισμοί όρων και τύπων

2.4. Σημασιολογία Kripke-Kleene

2.5. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία

2.1. Προκαταρκτικά

2.1.1. Βασικές έννοιες

Ορισμός 2.1. Έστω ένα ΜΔΣ $(S, \leq)$. Ορίζουμε την *πράξη ένωσης* του $(S, \leq)$ ως τη συνάρτηση $\bigoplus \in \{T \subseteq S \mid \textit{το } T \textit{ έχει ελάχιστο άνω φράγμα}\} \to S$, όπου, για κάθε κατάλληλο $T \subseteq S$, το $\bigoplus T$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του T. Ορίζουμε την *πράξη τομής* του $(S, \leq)$ ως τη συνάρτηση $\bigotimes \in \{T \subseteq S \mid \textit{το } T \textit{ έχει μέγιστο κάτω φράγμα}\} \to S$, όπου, για κάθε κατάλληλο $T \subseteq S$, το $\bigotimes T$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του T.

Ορισμός 2.2. Έστω ένα σύνολο S και κ, λ δύο διατακτικοί αριθμοί. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\cdot \in \left(S^{<\kappa}\right)^{<\lambda} \to S^{<\kappa \cdot \lambda}$. Για κάθε $s \in \left(S^{<\kappa}\right)^{<\lambda}$, $|\cdot s| = \sum_{i<|s|} |s(i)|$, και:

για κάθε $i < |s|$ και $j < |s(i)|$, $(\cdot s)(\sum_{k<i} |s(k)| + j) = s(i)(j)$

Ονομάζουμε το $\cdot$ *πράξη* (κ, λ)*-παράθεσης* του S ενώ ονομάζουμε απλά πράξη παράθεσης του S την πράξη (ω, ω)-παράθεσής του.

Π.χ., $(s_{1,1}, \ldots, s_{1,n_1}) \cdot \ldots \cdot (s_{m,1}, \ldots, s_{m,n_m}) = (s_{1,1}, \ldots, s_{1,n_1}, \ldots, s_{m,1}, \ldots, s_{m,n_m})$.

Ορισμός 2.3. Έστω δύο σύνολα D και S, κ ένας διατακτικός αριθμός, $\sigma \in D^{<\kappa} \to D$ και $\bigoplus, \bigotimes \in 2^S \to S$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\sigma^{\oplus, \otimes} \in (D \to S)^{<\kappa} \to (D \to S)$. Για κάθε $f \in (D \to S)^{<\kappa}$:

για κάθε $d \in D$, $\sigma^{\oplus, \otimes}(f)(d) = \bigoplus_{\substack{e \in D^{|f|}, \\ \sigma(e) = d}} \bigotimes_{i<|f|} f(i)(e(i))$

Ονομάζουμε το $\sigma^{\oplus, \otimes}$ $(\bigoplus, \bigotimes)$*-εκδοχή* του σ.

Ορισμός 2.4. Έστω ένα σύνολο S. Για κάθε $s \in S^2$, ορίζουμε ότι $s^T = s[0]$ και $s^F = s[1]$. Ορίζουμε την *πράξη αντιστροφής* του S ως τη συνάρτηση $\mathrm{r} \in S^2 \to S^2$, όπου, για κάθε $s \in S^2$, $\mathrm{r}(s) = (s^F, s^T)$.

Ορισμός 2.5. Έστω ένα σύνολο S και $\sigma \in S$. Ορίζουμε την *πράξη* σ*-ολίσθησης* του S ως τη συνάρτηση $\mathrm{u} \in S^\omega \to S^\omega$, όπου, για κάθε $s \in S^\omega$, $\mathrm{u}(s) = (\sigma) \cdot s$.

Ορισμός 2.6. Έστω ένα ΜΔΣ $(S, \leq)$ και $T \subseteq S$. Λέμε ότι το T είναι:

- *φραγμένο* αν και μόνο αν έχει άνω φράγμα
- *κατευθυνόμενο* αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένο $U \subseteq T$ έχει άνω φράγμα στο T

Ορισμός 2.7. Έστω ένα ΜΔΣ $(S, \leq)$. Λέμε ότι το $(S, \leq)$ είναι:

- *πλήρες* αν και μόνο αν κάθε $T \subseteq S$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα
- *φραγμένα πλήρες* αν και μόνο αν κάθε φραγμένο $T \subseteq S$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα
- *κατευθυνόμενα πλήρες* αν και μόνο αν κάθε κατευθυνόμενο $T \subseteq S$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα

Θεώρημα 2.1. Έστω ένα ΜΔΣ $(S, \leq)$. Ισχύουν τα παρακάτω:

- κάθε μη κενό $T \subseteq S$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα αν και μόνο αν το $(S, \leq)$ είναι φραγμένα πλήρες
- κάθε $T \subseteq S$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα αν και μόνο αν το $(S, \leq)$ είναι πλήρες

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο παράρτημα.

Ορισμός 2.8. Έστω ένα σύνολο S και $U \subseteq 2^S$. Ορίζουμε ότι:
$C(U) = \{c \in U \to S \mid \forall\ T \in U\ c(T) \in T\}$
και ονομάζουμε τα στοιχεία του $C(U)$ *συναρτήσεις επιλογής* για το U.

Ορισμός 2.9. Έστω ένα σύνολο S. Για μία συνάρτηση $\bigoplus \in 2^S \to S$, λέμε ότι είναι *προσεταιριστική* αν και μόνο αν, για κάθε $U \subseteq 2^S$, $\bigoplus_{T \in U} \bigoplus T = \bigoplus \bigcup U$.

Για δύο συναρτήσεις $\bigoplus$, $\bigotimes \in 2^S \to S$, λέμε ότι η συνάρτηση $\bigotimes$ είναι *επιμεριστική* ως προς τη συνάρτηση $\bigoplus$ αν και μόνο αν, για κάθε $U \subseteq 2^S$, $\bigotimes_{T \in U} \bigoplus T = \bigoplus_{c \in C(U)} \bigotimes_{T \in U} c(T)$.

Για ένα ΜΔΣ, λέμε ότι είναι *πλήρως επιμεριστικό* αν και μόνο αν είναι πλήρες και η πράξη τομής του είναι επιμεριστική ως προς την πράξη ένωσής του.

Θεώρημα 2.2. Έστω ένα σύνολο S και $\bigoplus \in 2^S \to S$ μία προσεταιριστική συνάρτηση τέτοια ώστε, για κάθε $s \in S$, $\bigoplus \{s\} = s$. Για κάθε $s \in S$ και $T \subseteq S$, $s \oplus \bigoplus T = \bigoplus_{t \in T} (s \oplus t)$.

Έστω ακόμη μία επιμεριστική ως προς το $\bigoplus$ συνάρτηση $\bigotimes \in 2^S \to S$. Για κάθε $s \in S$ και $T \subseteq S$, $s \otimes \bigoplus T = \bigoplus_{t \in T} (s \otimes t)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο παράρτημα.

Το παρακάτω θεώρημα δηλώνει την ισοδυναμία της διατύπωσης της προσεταιριστικότητας και της επιμεριστικότητας στον ορισμό 2.9 (για την επιμεριστικότητα αυτή η διατύπωση εμφανίζεται, π.χ., στο [22]) με μια κλασικότερη διατύπωσή τους, όπου χρησιμοποιούνται σύνολα "δεικτών".

Θεώρημα 2.3. Έστω ένα σύνολο S και $\bigoplus \in 2^S \to S$. Η συνάρτηση $\bigoplus$ είναι προσεταιριστική αν και μόνο αν, για κάθε σύνολο I και $s \in I \to S$:

για κάθε $U \subseteq 2^I$, $\bigoplus_{J \in U} \bigoplus_{i \in J} s(i) = \bigoplus_{i \in \bigcup U} s(i)$

Έστω ακόμη $\bigotimes \in 2^S \to S$. Η συνάρτηση $\bigotimes$ είναι επιμεριστική ως προς τη συνάρτηση $\bigoplus$ αν και μόνο αν, για κάθε σύνολο I και $s \in I \to S$:

για κάθε $U \subseteq 2^I$, $\bigotimes_{J \in U} \bigoplus_{i \in J} s(i) = \bigoplus_{c \in C(U)} \bigotimes_{J \in U} s(c(J))$

Ορισμός 2.10. Έστω ένα πλήρες ΜΔΣ $(S, \leq)$, $\bigvee$ και $\bigwedge$ οι πράξεις ένωσης και τομής του, αντίστοιχα, και $s, t \in S$. Λέμε ότι το (s, t) είναι (ως προς $\leq$):

- *συνεπές* αν και μόνο αν $s \wedge t = \bigvee \varnothing$
- *πλήρες* αν και μόνο αν είναι συνεπές ως προς $\geq$

Ορισμός 2.11. Έστω ένα πλήρως επιμεριστικό ΜΔΣ $(S, \leq)$, $\bigvee$ και $\bigwedge$ οι πράξεις ένωσης και τομής του, αντίστοιχα, και $\neg \in S \to S$. Λέμε ότι το $(S, \leq)$ είναι *δικτυωτό Boole* με *πράξη συμπλήρωσης* το $\neg$ αν και μόνο αν, για κάθε $s \in S$, το $(s, \neg s)$ είναι συνεπές και πλήρες. Λέμε ότι το $(S, \leq, \neg)$ είναι *δικτυωτό Kleene* αν και μόνο αν:

- για κάθε $s \in S$, $\neg\neg s = s$
- για κάθε $T \subseteq S$, $\neg \bigvee T = \bigwedge_{s \in T} \neg s$
- για κάθε $s, t \in S$, $s \wedge \neg s \leq t \vee \neg t$

Θεώρημα 2.4. Έστω ένα πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό Boole $(S, \leq)$ με πράξη συμπλήρωσης κάποιο $\neg \in S \to S$. Ισχύουν τα εξής:

- για κάθε $s, t \in S$ τέτοια ώστε το (s, t) να είναι συνεπές και πλήρες, $t = \neg s$
- κάθε πράξη συμπλήρωσης του $(S, \leq)$ ταυτίζεται με το $\neg$
- το $(S, \leq, \neg)$ είναι δικτυωτό Kleene

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο παράρτημα.

Ορισμός 2.12. Έστω δύο ΜΔΣ $(S_0, \leq_0)$ και $(S_1, \leq_1)$ και $f \in S_0 \to S_1$. Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι (ως προς $(\leq_0, \leq_1)$ ή απλά $\leq_1$, αν $\leq_0 = \leq_1$ ή $\leq_0 = \overset{\mathrm{pw}:\kappa}{\leq_1}$ [1] για κάποιο διατακτικό

1 Ο συγκεκριμένος συμβολισμός εξηγείται στον ορισμό 2.13.

αριθμό κ ή το $\leq_0$ είναι η συνήθης αριθμητική διάταξη):

- *μονότονη* αν και μόνο αν, για κάθε $s,\ t \in S_0$ με $s \leq_0 t$, $f(s) \leq_1 f(t)$
- *αντιμονότονη* αν και μόνο αν είναι μονότονη ως προς $(\leq_0, \geq_1)$

Θεώρημα 2.5. Έστω δύο ΜΔΣ $(S_0, \leq_0)$ και $(S_1, \leq_1)$, $f \in S_0 \to S_1$ μία μονότονη συνάρτηση και $T \subseteq S_0$ ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Το $\mathrm{im}(f)(T)$ είναι κατευθυνόμενο.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο παράρτημα.

Βλέποντας ότι το $\mathbb{N}$ είναι κατευθυνόμενο, καταλήγουμε στην επόμενη διαπίστωση.

Πόρισμα 2.6. Έστω ένα ΜΔΣ $(S, \leq)$ και $s \in S^\omega$ μία μονότονη ακολουθία. Το $\{s(i) \mid i < \omega\}$ είναι κατευθυνόμενο.

2.1.2. Κατασκευή σύνθετων ΜΔΣ

Ορισμός 2.13. Έστω δύο σύνολα D και S, $\blacktriangleright \subseteq S^2$, $U \subseteq 2^S$ και $\bigoplus \in U \to S$. Ορίζουμε τα εξής:

- $\overset{\mathrm{pw}:D}{\blacktriangleright} \subseteq (D \to S)^2$, όπου, για κάθε $f,\ g \in D \to S$, $f \overset{\mathrm{pw}:D}{\blacktriangleright} g$ αν και μόνο αν, για κάθε $d \in D$, $f(d) \blacktriangleright g(d)$
- $\overset{\mathrm{pw}}{\blacktriangleright} = \overset{\mathrm{pw}:\omega}{\blacktriangleright}$
- $\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigoplus} \in \{F \subseteq D \to S \mid \forall\ d \in D\ \{f(d) \mid f \in F\} \in U\} \to (D \to S)$, όπου, για κάθε κατάλληλο $F \subseteq D \to S$:

για κάθε $d \in D$, $\left(\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigoplus} F\right)(d) = \bigoplus_{f \in F} f(d)$

- $\overset{\mathrm{pw}}{\bigoplus} = \overset{\mathrm{pw}:\omega}{\bigoplus}$

Ονομάζουμε τα $\overset{\mathrm{pw}:D}{\blacktriangleright}$ και $\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigoplus}$ *κατά σημείο εκδοχές* ως προς D των $\blacktriangleright$ και $\bigoplus$, αντίστοιχα, και τα $\overset{\mathrm{pw}}{\blacktriangleright}$ και $\overset{\mathrm{pw}}{\bigoplus}$ απλά κατά σημείο εκδοχές τους.

Θεώρημα 2.7. Έστω ένα σύνολο D, ένα ΜΔΣ $(S, \leq)$ και $\bigvee$, $\bigwedge$ οι πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(S, \leq)$. Το $(D \to S, \overset{\mathrm{pw}:D}{\leq})$ είναι ΜΔΣ με πράξεις ένωσης και τομής τα $\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee}$ και $\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigwedge}$ αντίστοιχα.

Αν το $(S, \leq)$ είναι κάτι από τα παρακάτω:

- πλήρες
- φραγμένα πλήρες
- κατευθυνόμενα πλήρες
- πλήρως επιμεριστικό

τότε το $(D \to S, \overset{\mathrm{pw}:D}{\leq})$ είναι το ίδιο.

Έστω ακόμη κάποιο $\neg \in S \to S$. Ισχύουν τα εξής:

- αν το $(S, \leq)$ είναι πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό Boole με πράξη συμπλήρωσης το $\neg$, το $(D \to S, \overset{\mathrm{pw}:D}{\leq})$ είναι πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό Boole με πράξη συμπλήρωσης το $\overset{\mathrm{pw}:D}{\neg}$
- αν το $(S, \leq, \neg)$ είναι πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό Kleene, το $(D \to S, \overset{\mathrm{pw}:D}{\leq}, \overset{\mathrm{pw}:D}{\neg})$ είναι πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό Kleene

---

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο παράρτημα.

Ορισμός 2.14. Έστω ένα σύνολο S, $\blacktriangleright \subseteq S^2$ και $\bigoplus \in 2^S \to S$. Ορίζουμε τα εξής:

- $\overset{\text{lex}}{\blacktriangleright} \subseteq \left(S^\omega\right)^2$, όπου, για κάθε $f\,,\ g \in S^\omega$, $f \overset{\text{lex}}{\blacktriangleright} g$ αν και μόνο αν ισχύει κάτι από τα εξής:
    - $f = g$
    - υπάρχει $i < \omega$, τέτοιο ώστε:
        - για κάθε $j < i$, $f(j) = g(j)$
        - $f(i) \neq g(i)$
        - $f(i) \blacktriangleright g(i)$
- $\overset{\text{lex}}{\bigoplus} \in 2^{S^\omega} \to S^\omega$, όπου, για κάθε $F \subseteq S^\omega$:

  για κάθε $i < \omega$, $\left(\overset{\text{lex}}{\bigoplus} F\right)(i) = \bigoplus\limits_{\substack{f \in F,\\ \forall\, j < i\ \ f(j) = \left(\overset{\text{lex}}{\bigoplus} F\right)(j)}} f(i)$

Ονομάζουμε τα $\overset{\text{lex}}{\blacktriangleright}$ και $\overset{\text{lex}}{\bigoplus}$ *λεξικογραφικές εκδοχές* των $\blacktriangleright$ και $\bigoplus$, αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.8. Έστω ένα σύνολο D, ένα πλήρες ΜΔΣ $(S\,,\leq)$ και $\bigvee$, $\bigwedge$ οι πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(S\,,\leq)$. Το $(S^\omega\,,\overset{\text{lex}}{\leq})$ είναι πλήρες ΜΔΣ με πράξεις ένωσης και τομής τα $\overset{\text{lex}}{\bigvee}$ και $\overset{\text{lex}}{\bigwedge}$, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο παράρτημα.

Ορισμός 2.15. Έστω ένα πλήρες ΜΔΣ $(S\,,\leq)$ και $\bigvee$, $\bigwedge$ οι πράξεις ένωσης και τομής του, αντίστοιχα. Ορίζουμε τα εξής:

- $\leq^{\text{t}} \subseteq \left(S^2\right)^2$, όπου, για κάθε $s\,,\ t \in S^2$, $s \leq^{\text{t}} t$ αν και μόνο αν $s^T \leq t^T$ και $s^F \geq t^F$
- $\bigvee^{\text{t}} \in 2^{S^2} \to S^2$, όπου, για κάθε $T \subseteq S^2$, $\bigvee^{\text{t}} T = (\bigvee\limits_{s \in T} s^T,\ \bigwedge\limits_{s \in T} s^F)$
- $\bigwedge^{\text{t}} \in 2^{S^2} \to S^2$, όπου, για κάθε $T \subseteq S^2$, $\bigwedge^{\text{t}} T = (\bigwedge\limits_{s \in T} s^T,\ \bigvee\limits_{s \in T} s^F)$

- $\leq^{\mathrm{i}} \subseteq \left(S^2\right)^2$, όπου, για κάθε $s\,,\ t \in S^2$, $s \leq^{\mathrm{i}} t$ αν και μόνο αν $s^T \leq t^T$ και $s^F \leq t^F$
- $\bigvee^{\mathrm{i}} \in 2^{S^2} \to S^2$, όπου, για κάθε $T \subseteq S^2$, $\bigvee^{\mathrm{i}} T = (\bigvee_{s \in T} s^T\,,\ \bigvee_{s \in T} s^F)$
- $\bigwedge^{\mathrm{i}} \in 2^{S^2} \to S^2$, όπου, για κάθε $T \subseteq S^2$, $\bigwedge^{\mathrm{i}} T = (\bigwedge_{s \in T} s^T\,,\ \bigwedge_{s \in T} s^F)$

Ονομάζουμε τα $\leq^{\mathrm{t}}$, $\bigvee^{\mathrm{t}}$ και $\bigwedge^{\mathrm{t}}$ *εκδοχές αλήθειας* και τα $\leq^{\mathrm{i}}$, $\bigvee^{\mathrm{i}}$ και $\bigwedge^{\mathrm{i}}$ *εκδοχές πληροφορίας* των $\leq$, $\bigvee$ και $\bigwedge$, αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.9. Έστω ένα πλήρως επιμεριστικό ΜΔΣ $(S\,,\ \leq)$, $\bigvee$ και $\bigwedge$ οι πράξεις ένωσης και τομής του, αντίστοιχα, r η πράξη αντιστροφής του S, $S_{(3)}$ το σύνολο των συνεπών στοιχείων του S^2 και $S_{(\infty)}$ το σύνολο των μονότονων ως προς $\leq^{\mathrm{i}}$ στοιχείων του $S^{\omega}_{(3)}$. Ισχύουν τα εξής:

- το $(S_{(3)},\ \leq^{\mathrm{t}},\ \mathrm{r}|_{S_{(3)}})$ είναι πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό Kleene με πράξεις ένωσης και τομής τα $\bigvee^{\mathrm{t}}|_{2^{S_{(3)}}}$ και $\bigwedge^{\mathrm{t}}|_{2^{S_{(3)}}}$, αντίστοιχα
- το $(S_{(3)},\ \leq^{\mathrm{i}})$ είναι φραγμένα και κατευθυνόμενα πλήρες ΜΔΣ και, για κάθε $T \subseteq S_{(3)}$:
  - αν το T έχει ελάχιστο άνω (αντίστοιχα μέγιστο κάτω) φράγμα, τότε $\bigvee^{\mathrm{i}} T \in S_{(3)}$ (αντίστοιχα $\bigwedge^{\mathrm{i}} T \in S_{(3)}$)
  - αν $\bigvee^{\mathrm{i}} T \in S_{(3)}$ (αντίστοιχα $\bigwedge^{\mathrm{i}} T \in S_{(3)}$), τότε το $\bigvee^{\mathrm{i}} T$ (αντίστοιχα $\bigwedge^{\mathrm{i}} T$) είναι το ελάχιστο άνω (αντίστοιχα μέγιστο κάτω) φράγμα του T
- το $(S_{(\infty)},\ \overset{\mathrm{pw}}{\leq^{\mathrm{t}}},\ \overset{\mathrm{pw}}{\mathrm{r}}|_{S_{(\infty)}})$ είναι πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό Kleene με πράξεις ένωσης και τομής τα $\overset{\mathrm{pw}}{\bigvee}{}^{\mathrm{t}}|_{2^{S_{(\infty)}}}$ και $\overset{\mathrm{pw}}{\bigwedge}{}^{\mathrm{t}}|_{2^{S_{(\infty)}}}$, αντίστοιχα, και η πράξη $\bigvee^{\mathrm{i}}$ $\varnothing$-ολίσθησης του $S_{(3)}$ είναι κλειστή στο $S_{(\infty)}$

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο παράρτημα.

Θεώρημα 2.10. Έστω ένα πλήρως επιμεριστικό ΜΔΣ $(S, \leq)$, $\bigvee$ και $\bigwedge$ οι πράξεις ένωσης και τομής του, αντίστοιχα, r η πράξη αντιστροφής του S, $S_{(3)}$ το σύνολο των συνεπών στοιχείων του S^2 και S' το σύνολο των πλήρων στοιχείων του $S_{(3)}$. Ισχύουν τα εξής:

- το $(S', \leq^{\mathrm{t}})$ είναι πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό Boole με πράξεις ένωσης και τομής τα $\bigvee^{\mathrm{t}}|_{2^{S'}}$ και $\bigwedge^{\mathrm{t}}|_{2^{S'}}$, αντίστοιχα, και πράξη συμπλήρωσης το $\mathrm{r}|_{S'}$
- αν το $(S, \leq)$ είναι δικτυωτό Boole, τότε το $(S', \leq^{\mathrm{t}})$ είναι ισομορφικό με το $(S, \leq)$
- αν το $(S, \leq)$ είναι δικτυωτό Boole, τότε το S' είναι το σύνολο των μεγιστικών ως προς $\leq^{\mathrm{i}}$ στοιχείων του $S_{(3)}$

Έστω τώρα ένα ΜΔΣ $(U, \leq_{\mathscr{F}})$, $\blacktriangleright \subseteq U^2$ και U' το σύνολο των μονότονων και (ταυτόχρονα) αντιμονότονων ως προς $\leq_{\mathscr{F}}$ στοιχείων του U^{ω}. Τα $(U', \overset{\mathrm{pw}}{\blacktriangleright})$ και $(U', \overset{\mathrm{lex}}{\blacktriangleright})$ είναι ισομορφικά με το $(U, \blacktriangleright)$.

Απόδειξη (σκιαγράφηση). Οι αποδείξεις της πρώτης και της τρίτης πρότασης βρίσκονται στο παράρτημα.

Για τη δεύτερη πρόταση, αν το $(S, \leq)$ είναι δικτυωτό Boole με πράξη συμπλήρωσης κάποιο $\neg$, μπορούμε να δούμε πως η συνάρτηση $f \in S \to S'$, όπου, για κάθε $s \in S$, $f(s) = (s, \neg s)$, είναι ένας κατάλληλος ισομορφισμός. Η συνάρτηση $f' \in S' \to S$, όπου, για κάθε $s \in S'$, $f'(s) = s^T$, είναι η αντίστροφή της.

Για την τελευταία πρόταση, μπορεί να αποδειχτεί πως η συνάρτηση $f \in U' \to U$, όπου, για κάθε $s \in U'$, $f(s) = s(0)$, είναι ένας κατάλληλος ισομορφισμός. Η συνάρτηση $f' \in U \to U'$, όπου, για κάθε $s \in U$, $f'(s) = (s)_{i < \omega}$, είναι η αντίστροφή της.

Θεώρημα 2.11. Έστω ένα σύνολο D, ένα πλήρες ΜΔΣ $(S, \leq)$ και τα εξής:

- r_S η πράξη αντιστροφής του S
- $\mathrm{r}_{D \to S}$ η πράξη αντιστροφής του $D \to S$
- $S_{(3)}$ το σύνολο των συνεπών (ως προς $\leq$) στοιχείων του S^2
- $(D \to S)_{(3)}$ το σύνολο των συνεπών ως προς $\overset{\mathrm{pw}:D}{\leq}$ στοιχείων του $(D \to S)^2$

Το $\left(D \to S_{(3)},\ \overset{\mathrm{pw}:D}{\leq^{\mathrm{t}}},\ \overset{\mathrm{pw}:D}{\leq^{\mathrm{i}}},\ \overset{\mathrm{pw}:D}{\mathrm{r}_S}\right)$ είναι ισομορφικό με το $\left(\left(D \to S\right)_{(3)},\ \left(\overset{\mathrm{pw}:D}{\leq}\right)^{\mathrm{t}},\ \left(\overset{\mathrm{pw}:D}{\leq}\right)^{\mathrm{i}},\ \mathrm{r}_{D \to S}\right)$.

Έστω ακόμη ένα ΜΔΣ $\left(U,\ \leq_{\mathscr{F}}\right)$, $\blacktriangleright \subseteq U^2$, $\sigma \in U$, $\varphi \in D \to \{\sigma\}$ και τα εξής:

- u_U η πράξη σ-ολίσθησης του U
- $\mathrm{u}_{D \to U}$ η πράξη φ-ολίσθησης του $D \to U$
- $U_{(\infty)}$ το σύνολο των μονότονων ως προς $\leq_{\mathscr{F}}$ στοιχείων του U^{ω}
- $\left(D \to U\right)_{(\infty)}$ το σύνολο των μονότονων ως προς $\overset{\mathrm{pw}:D}{\leq_{\mathscr{F}}}$ στοιχείων του $\left(D \to U\right)^{\omega}$

Το $\left(D \to U_{(\infty)},\ \overset{\mathrm{pw}:D}{\overset{\mathrm{pw}}{\blacktriangleright}},\ \overset{\mathrm{pw}:D}{\mathrm{u}_U}\right)$ είναι ισομορφικό με το $\left(\left(D \to U\right)_{(\infty)},\ \overset{\mathrm{pw}}{\overset{\mathrm{pw}:D}{\blacktriangleright}},\ \mathrm{u}_{D \to U}\right)$.

Απόδειξη (σκιαγράφηση). Για την πρώτη πρόταση, ένας κατάλληλος ισομορφισμός είναι η συνάρτηση $f \in \left(D \to S_{(3)}\right) \to \left(D \to S\right)_{(3)}$, όπου, για κάθε $g \in \left(D \to S_{(3)}\right)$, για κάθε $i \in \{0,\ 1\}$ και $d \in D$, $f(g)[i](d) = g(d)[i]$. Η συνάρτηση $f' \in \left(D \to S\right)_{(3)} \to \left(D \to S_{(3)}\right)$, όπου, για κάθε $g \in \left(D \to S\right)_{(3)}$, για κάθε $d \in D$ και $i \in \{0,\ 1\}$, $f'(g)(d)[i] = g[i](d)$, είναι η αντίστροφή της.

Για τη δεύτερη πρόταση, ένας κατάλληλος ισομορφισμός είναι η συνάρτηση $f \in \left(D \to U_{(\infty)}\right) \to \left(D \to U\right)_{(\infty)}$, όπου, για κάθε $g \in \left(D \to U_{(\infty)}\right)$, για κάθε $i < \omega$ και $d \in D$, $f(g)(i)(d) = g(d)(i)$. Η συνάρτηση $f' \in \left(D \to U\right)_{(\infty)} \to \left(D \to U_{(\infty)}\right)$, όπου, για κάθε $g \in \left(D \to U\right)_{(\infty)}$, για κάθε $d \in D$ και $i < \omega$, $f'(g)(d)(i) = g(i)(d)$, είναι η αντίστροφή της.

Θεώρημα 2.12. Έστω ένα σύνολο D, $S = \{0,\ 1\}$ και $\leq$ η συνήθης αριθμητική διάταξη. Το $\left(D \to S,\ \overset{\mathrm{pw}:D}{\leq}\right)$ είναι ισομορφικό με το $\left(2^D,\ \subseteq\right)$.

Απόδειξη (σκιαγράφηση). Ένας κατάλληλος ισομορφισμός είναι η συνάρτηση $f \in \left(D \to S\right) \to 2^D$, όπου, για κάθε $g \in D \to S$, $f(g) = \{d \in D \mid g(d) = 1\}$. Η συνάρτηση $f' \in 2^D \to \left(D \to S\right)$, όπου, για κάθε $E \subseteq D$, για κάθε $d \in D$, $f'(E)(d) = 1$ αν και μόνο αν $d \in E$, είναι η αντίστροφή της.

Θεώρημα 2.13. Έστω $S = \{0,\ 1\}$, $\leq$ η συνήθης αριθμητική διάταξη και τα ακόλουθα:

- $S_{(3)}$ το σύνολο των συνεπών (ως προς $\leq$) στοιχείων του S^2
- $S_{(\infty)}$ το σύνολο των μονότονων ως προς $\leq^{\mathrm{i}}$ στοιχείων του $S_{(3)}^{\omega}$
- r η πράξη αντιστροφής του S
- u η πράξη $(0,\ 0)$-ολίσθησης του $S_{(3)}$
- $[0,\ 1]_{(3)} = \{0.5 + \sigma \cdot 0.5 \mid \sigma \in \{-1,\ 0,\ 1\}\}$
- $[0,\ 1]_{(\infty)} = \{0.5 + \sigma \cdot 0.5^n \mid \sigma \in \{-1,\ 0,\ 1\},\ n \geq 1\}$
- $\neg \in [0,\ 1] \to [0,\ 1]$, όπου, για κάθε $x \in [0,\ 1]$, $\neg x = 1 - x$
- $\uparrow \in [0,\ 1] \to [0,\ 1]$, όπου, για κάθε $x \in [0,\ 1]$, $\uparrow x = x + (0.5 - x) / 2$
- $\leq_{\mathscr{F}} \subseteq [0,\ 1]^2$, όπου, για κάθε $x,\ y \in [0,\ 1]$, $x \leq_{\mathscr{F}} y$ αν και μόνο αν $0.5 \leq x \leq y$ ή $0.5 \geq x \geq y$

Ισχύουν τα εξής:

- το $(S_{(3)},\ \leq^{\mathrm{t}},\ \mathrm{r},\ \leq^{\mathrm{i}})$ είναι ισομορφικό με το $([0,\ 1]_{(3)},\ \leq,\ \neg,\ \leq_{\mathscr{F}})$
- το $(S_{(\infty)},\ \overset{\mathrm{pw}}{\leq^{\mathrm{t}}},\ \overset{\mathrm{pw}}{\mathrm{r}},\ \mathrm{u},\ \overset{\mathrm{pw}}{\leq^{\mathrm{i}}})$ είναι ισομορφικό με το $([0,\ 1]_{(\infty)},\ \leq,\ \neg,\ \uparrow,\ \leq_{\mathscr{F}})$

Απόδειξη (σκιαγράφηση). Για την πρώτη πρόταση, ένας κατάλληλος ισομορφισμός είναι η συνάρτηση $f \in S_{(3)} \to [0,\ 1]_{(3)}$, όπου, για κάθε $s \in S_{(3)}$, $f(s) = 0.5 + (s^T - s^F) \cdot 0.5$. Η συνάρτηση $f' \in [0,\ 1]_{(3)} \to S_{(3)}$, όπου, για κάθε $x \in [0,\ 1]_{(3)}$, $f'(x) = (\lceil x - 0.5 \rceil,\ \lceil 0.5 - x \rceil)$, είναι η αντίστροφή της.

Για τη δεύτερη πρόταση, ένας κατάλληλος ισομορφισμός είναι η συνάρτηση $f \in S_{(\infty)} \to [0,\ 1]_{(\infty)}$, όπου, για κάθε $s \in S_{(\infty)}$, θεωρώντας ότι $n = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \forall\ j \geq i\ \ s(j) = s(i)\}$, $f(s) = 0.5 + (s(n)^T - s(n)^F) \cdot 0.5^{n+1}$. Η συνάρτηση $f' \in [0,\ 1]_{(\infty)} \to S_{(\infty)}$, όπου, για κάθε $x \in [0,\ 1]_{(\infty)}$, θεωρώντας ότι $n = 0$ αν $x = 0.5$ και $n = \log_{0.5}|0.5 - x| - 1$ αλλιώς, $f'(x) = ((0,\ 0))_{i<n} \cdot ((\lceil x - 0.5 \rceil,\ \lceil 0.5 - x \rceil))_{i<\omega}$, είναι η αντίστροφή της.

Ορισμός 2.16. Ταυτίζουμε όλα τα ισομορφικά σύνολα που αναφέραμε στα θεωρήματα 2.10, 2.11, 2.12 και 2.13, ταυτίζοντας τα στοιχεία τους όπως υπονοούν οι ισομορφισμοί που παρουσιάσαμε στις αποδείξεις.

2.2. Αληθοτιμές, γλώσσες και ερμηνείες

Ορισμός 2.17. Έστω $V_{(2)} = \{0, 1\}$ και $V_{(3)}$ το σύνολο των συνεπών (ως προς τη συνήθη αριθμητική διάταξη) στοιχείων του $V_{(2)}^2$. Ονομάζουμε (*τριαδικές*) *αληθοτιμές* (αντίστοιχα *δυαδικές αληθοτιμές*) τα στοιχεία του $V_{(3)}$ (αντίστοιχα $V_{(2)}$). Συμβολίζουμε με $\neg$ τον περιορισμό της πράξης αντιστροφής του $V_{(2)}$ στο $V_{(3)}$. Συμβολίζουμε με $\leq$ την εκδοχή αλήθειας της συνήθους αριθμητικής διάταξης και με $\bigvee$ και $\bigwedge$ τις πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(V_{(3)}, \leq)$. Συμβολίζουμε με $\leq_{\mathscr{F}}$ την εκδοχή πληροφορίας της συνήθους αριθμητικής διάταξης και με $\bigvee_{\mathscr{F}}$ και $\bigwedge_{\mathscr{F}}$ τις πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(V_{(3)}, \leq_{\mathscr{F}})$.

Λόγω του θεωρήματος 2.13, οι τριαδικές αληθοτιμές είναι τα στοιχεία του $\{0, 0.5, 1\}$.

Ορισμός 2.18. Έστω ένα μη κενό και πεπερασμένο σύνολο Σ, $V_{(2)}$ και $V_{(3)}$ τα σύνολα των δυαδικών και τριαδικών, αντίστοιχα, αληθοτιμών, $L_{(2)} = \Sigma^* \to V_{(2)}$ και $L_{(3)} = \Sigma^* \to V_{(3)}$. Ονομάζουμε (*τριαδικές*) *γλώσσες* (αντίστοιχα *δυαδικές γλώσσες*) επί του Σ τα στοιχεία του $L_{(3)}$ (αντίστοιχα $L_{(2)}$). Συμβολίζουμε με $\cdot$ και $\odot$ την $(\bigvee, \bigwedge)$-εκδοχή και την $(\bigwedge, \bigvee)$-εκδοχή, αντίστοιχα, της πράξης παράθεσης του Σ. Συμβολίζουμε με $\overline{}$ την κατά σημείο εκδοχή ως προς Σ^* του $\neg$. Συμβολίζουμε με $\subseteq$ την κατά σημείο εκδοχή ως προς Σ^* του $\leq$ και με $\bigcup$ και $\bigcap$ τις πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(L_{(3)}, \subseteq)$. Συμβολίζουμε με $\subseteq_{\mathscr{F}}$ την κατά σημείο εκδοχή ως προς Σ^* του $\leq_{\mathscr{F}}$ και με $\bigcup_{\mathscr{F}}$ και $\bigcap_{\mathscr{F}}$ τις πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(L_{(3)}, \subseteq_{\mathscr{F}})$.

Λόγω του θεωρήματος 2.12, οι δυαδικές γλώσσες είναι τα υποσύνολα του Σ*. Λόγω του θεωρήματος 2.11, οι τριαδικές γλώσσες είναι τα συνεπή ζευγάρια δυαδικών. Λόγω του θεωρήματος 2.10, οι δυαδικές γλώσσες είναι οι πλήρεις τριαδικές.

Ορισμός 2.19. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V, $\mathrm{L}_{(2)}$ και $\mathrm{L}_{(3)}$ τα σύνολα των δυαδικών και τριαδικών, αντίστοιχα, γλωσσών επί του Σ, $\mathrm{I}_{(2)} = V \to \mathrm{L}_{(2)}$ και $\mathrm{I}_{(3)} = V \to \mathrm{L}_{(3)}$. Ονομάζουμε (*τριαδικές*) *ερμηνείες* (αντίστοιχα *δυαδικές ερμηνείες*) του V με βάση το Σ τα στοιχεία του $\mathrm{I}_{(3)}$ (αντίστοιχα $\mathrm{I}_{(2)}$). Συμβολίζουμε με $\Subset$ την κατά σημείο εκδοχή ως προς V του $\subseteq$ και με $\bigcup$ και $\bigcap$ τις πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(\mathrm{I}_{(3)}, \Subset)$. Συμβολίζουμε με $\Subset_{\mathscr{T}}$ την κατά σημείο εκδοχή ως προς V του $\subseteq_{\mathscr{T}}$ και με $\bigcup_{\mathscr{T}}$ και $\bigcap_{\mathscr{T}}$ τις πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(\mathrm{I}_{(3)}, \Subset_{\mathscr{T}})$.
Για μία γραμματική $(\Sigma, V, \varphi, A_0)$, ονομάζουμε (δυαδικές/τριαδικές) ερμηνείες της τις (δυαδικές/τριαδικές) ερμηνείες του V με βάση το Σ.

Λόγω του θεωρήματος 2.11, οι τριαδικές ερμηνείες είναι τα συνεπή ζευγάρια δυαδικών. Λόγω του θεωρήματος 2.10, οι δυαδικές ερμηνείες είναι οι πλήρεις τριαδικές.

Ορισμός 2.20. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V, Τ και Φ τα σύνολα των (Σ, V)-όρων και (Σ, V)-τύπων, αντίστοιχα, Ι το σύνολο των ερμηνειών του V με βάση το Σ και L το σύνολο των γλωσσών επί του Σ. Ορίζουμε τα ακόλουθα:

- για κάθε $a \in \Sigma$, $[\![a]\!] = \{(a)\}$
- $[\![.]\!] = \cdot$, $[\![:]\!] = \odot$, $[\![\sim]\!] = {}^{-}$, $[\![\&]\!] = \bigcap$, $[\![|]\!] = \bigcup$
- $[\![<=]\!] = \subseteq$, $[\![>=]\!] = \supseteq$

και ονομάζουμε τη συνάρτηση $[\![\ ]\!]$ *επιδιωκόμενη ερμηνεία* των σταθερών και των τελεστών.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $[\ ] \in \mathrm{I} \to (\mathrm{T} \to \mathrm{L})$. Για κάθε $I \in \mathrm{I}$:

- για κάθε απλό όρο χ:
  - αν $\chi \in V$, $[I](\chi) = I(\chi)$
  - αν $\chi \in \Sigma$, $[I](\chi) = [\![\chi]\!]$
- για κάθε σύνθετο όρο τ, $[I](\tau) = [\![\tau^{\mathrm{op}}]\!](\mathrm{im}([I])(\tau^{\mathrm{arg}}))$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\langle\ \rangle \in \mathrm{I} \to 2^{\Phi}$. Για κάθε $I \in \mathrm{I}$:

- για κάθε απλό τύπο φ:
    - αν $\varphi^{\mathrm{op}} = ==$, τότε $\langle I \rangle(\varphi)$ αν και μόνο αν $[I](\varphi^{\mathrm{arg}}[0]) = [I](\varphi^{\mathrm{arg}}[1])$
    - αλλιώς, $\langle I \rangle(\varphi)$ αν και μόνο αν $[\![\varphi^{\mathrm{op}}]\!](\mathrm{im}([I])(\varphi^{\mathrm{arg}}))$
- για κάθε σύνθετο τύπο φ:
    - αν $\varphi^{\mathrm{op}} = !$, τότε $\langle I \rangle(\varphi)$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι $\langle I \rangle(\varphi^{\mathrm{arg}})$
    - αν $\varphi^{\mathrm{op}} = ,$, τότε $\langle I \rangle(\varphi)$ αν και μόνο αν, για κάθε $\psi \in \varphi^{\mathrm{arg}}$, $\langle I \rangle(\psi)$
    - αν $\varphi^{\mathrm{op}} = ;$, τότε $\langle I \rangle(\varphi)$ αν και μόνο αν υπάρχει $\psi \in \varphi^{\mathrm{arg}}$, τέτοιο ώστε $\langle I \rangle(\psi)$
    - αν $\varphi^{\mathrm{op}} = <-$, τότε $\langle I \rangle(\varphi)$ αν και μόνο αν:
      $\langle I \rangle(\varphi^{\mathrm{arg}}[0])$ αν $\langle I \rangle(\varphi^{\mathrm{arg}}[1])$
    - αν $\varphi^{\mathrm{op}} = ->$, τότε $\langle I \rangle(\varphi)$ αν και μόνο αν:
      $\langle I \rangle(\varphi^{\mathrm{arg}}[0])$ μόνο αν $\langle I \rangle(\varphi^{\mathrm{arg}}[1])$
    - αν $\varphi^{\mathrm{op}} = <->$, τότε $\langle I \rangle(\varphi)$ αν και μόνο αν:
      $\langle I \rangle(\varphi^{\mathrm{arg}}[0])$ αν και μόνο αν $\langle I \rangle(\varphi^{\mathrm{arg}}[1])$

Για έναν τύπο φ, λέμε για μία ερμηνεία I ότι είναι *μοντέλο* του αν και μόνο αν $\langle I \rangle(\varphi)$. Για μία γραμματική, λέμε για μία ερμηνεία ότι είναι μοντέλο της αν και μόνο αν είναι μοντέλο της θεωρίας της.

2.3. Μετασχηματισμοί όρων και τύπων

Παρουσιάζουμε τώρα μια σειρά μετασχηματισμών που μπορούν να εφαρμοστούν πάνω σε όρους και τύπους, οι οποίοι εκφράζουν "συντακτικά" κάποιες ιδιότητες των αληθοτιμών και των γλωσσών. Τους θεωρούμε ως συναρτήσεις και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιούμε σε αυτούς τα im, $\circ$ και $^{-1}$. Οι μετασχηματισμοί αυτοί θα φανούν περισσότερο χρήσιμοι στο κεφάλαιο 5, όπου συνδυάζονται πολλοί μετασχηματισμοί για τον ορισμό σχέσεων αναγραφής όρων.

Ορισμός 2.21. Ορίζουμε τα παρακάτω:

- $:^{\mathrm{d}} \ = \ .$ και $.^{\mathrm{d}} \ = \ :$ και $\&^{\mathrm{d}} \ = \ |$ και $|^{\mathrm{d}} \ = \ \&$
- $>=^{\mathrm{d}} \ = \ <=$ και $<=^{\mathrm{d}} \ = \ >=$ και $==^{\mathrm{d}} \ = \ ==$
- $\sim^{\mathrm{cl}} \ = \ !$ και $\&^{\mathrm{cl}} \ = \ ,$ και $|^{\mathrm{cl}} \ = \ ;$
- $>=^{\mathrm{cl}} \ = \ <-$ και $<=^{\mathrm{cl}} \ = \ ->$ και $==^{\mathrm{cl}} \ = \ <->$

Ορισμός 2.22. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τους (τριαδικούς) $(\Sigma,\ V)$-όρους και $(\Sigma,\ V)$-τύπους *αληθοτιμών* ανάλογα με τους (τριαδικούς) όρους και τύπους γλωσσών, θεωρώντας ότι, για κάθε απλό όρο γλωσσών χ και $w \in \Sigma^*$, το $(\chi,\ w)$ είναι απλός όρος αληθοτιμών (το αναπαριστούμε και ως $\chi(w)$) και ότι για το σχηματισμό σύνθετων όρων χρησιμοποιούνται όλοι οι τελεστές εκτός από τα . και :. Ορίζουμε ακόμη τα εξής:

- $[\![\sim]\!]_{\mathrm{tv}} = \neg$, $[\![\&]\!]_{\mathrm{tv}} = \bigwedge$, $[\![|]\!]_{\mathrm{tv}} = \bigvee$
- $[\![<=]\!]_{\mathrm{tv}} = \leq$, $[\![>=]\!]_{\mathrm{tv}} = \geq$

και, για κάθε ερμηνεία I, επεκτείνουμε τα $[I]$ και $\langle I\rangle$ για όρους και τύπους αληθοτιμών ορίζοντας ότι, για κάθε απλό όρο γλωσσών χ και $w \in \Sigma^*$, $[I]((\chi,\ w)) = [I](\chi)(w)$ και χρησιμοποιώντας το $[\![\ \ ]\!]_{\mathrm{tv}}$ για την ερμηνεία των παραπάνω τελεστών.

Όσον αφορά τους (τριαδικούς) όρους και τύπους γλωσσών, ορίζουμε τα παρακάτω:

- για κάθε απλό όρο χ, για κάθε $w \in \Sigma^*$, $\chi^{\langle w\rangle} = (\chi,\ w)$
- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (.,\ \upsilon)$, για κάθε $w \in \Sigma^*$:
  $\tau^{\langle w\rangle} = (|,\ \{(\&,\ \{\upsilon(i)^{\langle v(i)\rangle} \mid i < |\upsilon|\}) \mid v \in (\Sigma^*)^{|\upsilon|},\ \bullet v = w\})$
- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (:,\ \upsilon)$, για κάθε $w \in \Sigma^*$:
  $\tau^{\langle w\rangle} = (\&,\ \{(|,\ \{\upsilon(i)^{\langle v(i)\rangle} \mid i < |\upsilon|\}) \mid v \in (\Sigma^*)^{|\upsilon|},\ \bullet v = w\})$
- για κάθε σύνθετο όρο που δεν είναι των παραπάνω μορφών ή απλό τύπο $x{=}(o,\ y)$, για κάθε $w \in \Sigma^*$, $x^{\langle w\rangle} = (o,\ y^{\mathrm{im}(\langle w\rangle)})$
- για κάθε απλό τύπο φ, $\varphi^{\mathrm{tv}} = (,,\ \{\varphi^{\langle w\rangle} \mid w \in \Sigma^*\})$
- για κάθε σύνθετο τύπο $\varphi = (o,\ \psi)$, $\varphi^{\mathrm{tv}} = (o,\ \psi^{\mathrm{im}(\mathrm{tv})})$

Ο μετασχηματισμός $^{\text{tv}}$ μετατρέπει έναν τύπο γλωσσών σε τύπο αληθοτιμών.

Παράδειγμα 2.1.

$\varphi = A >= A : (B \,.\, b) \mid \sim C$

$$\begin{aligned}\varphi^{\langle ab \rangle} = A(ab) >= \;& (A(\epsilon) \mid (B(\epsilon)\ \&\ b(ab) \mid B(a)\ \&\ b(b) \mid B(ab)\ \&\ b(\epsilon)))\ \& \\ & (A(a) \mid (B(\epsilon)\ \&\ b(b) \mid B(b)\ \&\ b(\epsilon)))\ \& \\ & (A(ab) \mid\mid (B(\epsilon)\ \&\ b(\epsilon))) \mid \\ & \sim C(ab)\end{aligned}$$

Ορισμός 2.23. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τους *δυαδικούς* (Σ, V)-όρους και (Σ, V)-τύπους ανάλογα με τους τριαδικούς, θεωρώντας ότι, για κάθε απλό τριαδικό όρο χ και $i \in \{F, T\}$, το (χ, i) είναι απλός δυαδικός όρος (το αναπαριστούμε και ως $\chi(i)$). Για κάθε ερμηνεία I, επεκτείνουμε τα $[I]$ και $\langle I \rangle$ για δυαδικούς όρους και τύπους ορίζοντας ότι, για κάθε απλό τριαδικό όρο χ, $[I]((\chi, T)) = [I](\chi)^T$ και $[I]((\chi, F))=[I](\chi)^F$.

Όσον αφορά τους τριαδικούς όρους και τύπους, ορίζουμε τα παρακάτω:

- για κάθε απλό όρο χ, $\chi^T = (\chi, T)$ και $\chi^F = (\chi, F)$
- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (\sim, \upsilon)$, $\tau^T = \upsilon^F$ και $\tau^F = \upsilon^T$
- για κάθε σύνθετο όρο που δεν είναι της παραπάνω μορφής ή απλό τύπο $x = (o, y)$, $x^T = (o, y^{\mathrm{im}(T)})$ και $x^F = (o^{\mathrm{d}}, y^{\mathrm{im}(F)})$
- για κάθε απλό τύπο φ, $\varphi^{\mathrm{bin}} = (,, \{\varphi^T, \varphi^F\})$
- για κάθε σύνθετο τύπο $\varphi = (o, \psi)$, $\varphi^{\mathrm{bin}} = (o, \psi^{\mathrm{im}(\mathrm{bin})})$

Ο μετασχηματισμός $^{\text{bin}}$ μετατρέπει έναν τριαδικό τύπο σε δυαδικό.

Παράδειγμα 2.2.

$\varphi = A\ \&\ \sim a >= A \,.\, B \mid \sim (B : b\ \&\ \sim C)$

$\varphi^{T} = A(T)\ \&\ a(F) >= A(T)\ .\ B(T)\ |\ (B(F)\ .\ b(F)\ |\ C(T))$

$\varphi^{F} = A(F)\ |\ a(T) <= A(F) : B(F)\ \&\ (B(T) : b(T)\ \&\ C(F))$

Ορισμός 2.24. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τους *κλασικούς* $(\Sigma,\ V)$-τύπους, θεωρώντας ότι κάθε απλός δυαδικός όρος αληθοτιμών είναι απλός κλασικός τύπος και χρησιμοποιώντας τους λογικούς συνδέσμους για το σχηματισμό σύνθετων τύπων. Για κάθε ερμηνεία I, επεκτείνουμε το $\langle I\rangle$ για κλασικούς τύπους ορίζοντας ότι, για κάθε απλό δυαδικό όρο αληθοτιμών χ, $\langle I\rangle(\chi)$ αν και μόνο αν $[I](\chi) = 1$. Όσον αφορά τους δυαδικούς όρους και τύπους αληθοτιμών, ορίζουμε τα παρακάτω:

- για κάθε απλό όρο χ, $\chi^{\mathrm{cl}} = \chi$
- για κάθε σύνθετο όρο ή απλό τύπο $x = (o,\ y)$, $x^{\mathrm{cl}} = \left(o^{\mathrm{cl}},\ y^{\mathrm{im(cl)}}\right)$
- για κάθε σύνθετο τύπο $\varphi = (o,\ \psi)$, $\varphi^{\mathrm{cl}} = \left(o,\ \psi^{\mathrm{im(cl)}}\right)$

Ο μετασχηματισμός $^{\mathrm{cl}}$ μετατρέπει ένα δυαδικό τύπο αληθοτιμών σε κλασικό (που χρησιμοποιεί δηλαδή μόνο λογικούς συνδέσμους).

Παράδειγμα 2.3.

$\varphi = A(ab)(T)\ \&\ \sim a(\epsilon)(F) >= \sim (B(bb)(T)\ |\ \sim C(a)(F))$

$\varphi^{\mathrm{cl}} = A(ab)(T)\ ,\ !\ a(\epsilon)(F) <-\ !\ (B(b)(T)\ ;\ !\ C(a)(F))$

Θεώρημα 2.14. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Όσον αφορά τους σχετικούς τριαδικούς όρους και τύπους γλωσσών, ισχύουν τα εξής:

- για κάθε όρο τ, για κάθε ερμηνεία I, για κάθε $w \in \Sigma^*$, $[I]\left(\tau^{\langle w\rangle}\right) = [I](\tau)(w)$
- για κάθε τύπο φ, για κάθε ερμηνεία I, $\langle I\rangle\left(\varphi^{\mathrm{tv}}\right)$ αν και μόνο αν $\langle I\rangle(\varphi)$

Όσον αφορά τους σχετικούς τριαδικούς όρους και τύπους, ισχύουν τα εξής:

- για κάθε όρο τ, για κάθε ερμηνεία I, $[I]\left(\tau^{T}\right) = [I](\tau)^{T}$ και $[I]\left(\tau^{F}\right) = [I](\tau)^{F}$
- για κάθε τύπο φ, για κάθε ερμηνεία I, $\langle I\rangle\left(\varphi^{\mathrm{bin}}\right)$ αν και μόνο αν $\langle I\rangle(\varphi)$

Όσον αφορά τους σχετικούς δυαδικούς όρους και τύπους αληθοτιμών, ισχύουν τα εξής:

- για κάθε όρο τ, για κάθε ερμηνεία I, $\langle I\rangle(\varphi^{\mathrm{cl}})$ αν και μόνο αν $[I](\varphi) = 1$
- για κάθε τύπο φ, για κάθε ερμηνεία I, $\langle I\rangle(\varphi^{\mathrm{cl}})$ αν και μόνο αν $\langle I\rangle(\varphi)$

Απόδειξη (σκιαγράφηση). Όλες οι προτάσεις μπορούν να αποδειχτούν μέσω επαγωγής στο βάθος των όρων και τύπων, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των αληθοτιμών, των γλωσσών και των σχετικών σχέσεων και συναρτήσεων, που προκύπτουν από τους ορισμούς 2.17 και 2.18 και τα θεωρήματα 2.7, 2.9, 2.10 και 2.11. Η πρώτη πρόταση βασίζεται στον ορισμό των γλωσσών και το θεώρημα 2.7. Για τη δεύτερη πρόταση, όσον αφορά τους τύπους αληθοτιμών, στηριζόμαστε στον ορισμό των αληθοτιμών και τα θεωρήματα 2.9 και 2.10. Όσον αφορά τους τύπους γλωσσών στηριζόμαστε στον ορισμό των γλωσσών και τα θεωρήματα 2.7, 2.9, 2.10 και 2.11, έχοντας υπ' όψιν και το γεγονός ότι, για κάθε πεπερασμένη ακολουθία γλωσσών L, $\bullet\, L = \left(\bullet_{i<|L|} L(i)^{T}, \bigodot_{i<|L|} L(i)^{F}\right)$ και $\bigodot L = \left(\bigodot_{i<|L|} L(i)^{T}, \bullet_{i<|L|} L(i)^{F}\right)$, που προκύπτει από τα σχε-τικά με τις αληθοτιμές. Για την τρίτη πρόταση, χρησιμοποιούμε τα παρακάτω γεγονότα:

- για κάθε σύνολο δυαδικών αληθοτιμών V, υπάρχει $v \in V$, τέτοιο ώστε $v = 1$, αν και μόνο αν $\bigvee V = 1$
- για κάθε σύνολο δυαδικών αληθοτιμών V, για κάθε $v \in V$, $v = 1$ αν και μόνο αν $\bigwedge V = 1$
- για κάθε δυαδική αληθοτιμή v, δεν ισχύει ότι $v = 1$, αν και μόνο αν $\neg v = 1$
- για κάθε δυαδικές αληθοτιμές u και v, $u = 1$ αν (αντίστοιχα μόνο αν, αν και μόνο αν) $v = 1$, αν και μόνο αν $u \geq v$ (αντίστοιχα $u \leq v$, $u = v$)

Ορισμός 2.25. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V και Φ το σύνολο των σχετικών τύπων. Όσον αφορά τους σχετικούς τύπους, ορίζουμε τα εξής:

- για κάθε απλό τύπο φ, $\varphi^{\mathrm{and}} = \varphi$
- για κάθε (σύνθετο) τύπο $\varphi = (,, \{(,, \psi) \mid \psi \in U\})$, όπου $U \subseteq 2^{\Phi}$: $\varphi^{\mathrm{and}} = \left(,, \left(\bigcup U\right)^{\mathrm{im}(\mathrm{and})}\right)$
- για κάθε σύνθετο τύπο που δεν είναι της παραπάνω μορφής $\varphi = (o, \psi)$, $\varphi^{\mathrm{and}} = \left(o, \psi^{\mathrm{im}(\mathrm{and})}\right)$

Ο μετασχηματισμός $^{\text{and}}$ ενοποιεί πολλά επίπεδα “λογικού και”.

Παράδειγμα 2.4.

$\varphi = (\, A == \sim a \ ,\ B == a \,)\ ,\ (\, C == \sim C \ ,\ B == a \,)$	$\varphi^{\text{and}} = A == \sim a \ ,\ B == a \ ,\ C == \sim C$

Ορισμός 2.26. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V και φ ένα σύστημα ανισώσεων. Ορίζουμε ότι:

$\varphi^{\text{eq}} = \big(,, \{(==,\ (r^{\text{arg}}[0],\ (|,\ \{d \mid r^{\text{arg}}[0] \to d\}))) \mid r \in \varphi^{\text{arg}}\}\big)$

Για μία γραμματική $(\Sigma\ ,\ V\ ,\ \varphi\ ,\ A_0)$, ονομάζουμε *εξισωτικά μοντέλα* της τα μοντέλα του φ^{eq}.

Ο μετασχηματισμός $^{\text{eq}}$ μετατρέπει ένα σύστημα ανισώσεων σε σύστημα εξισώσεων.

Παράδειγμα 2.5.

$\varphi = \quad A >= B \ .\ C \ \&\ \sim .(\,)\ ,$ $\quad A >= a\ ,$ $\quad B >= C$	$\varphi^{\text{eq}} = \quad A == B \ .\ C \ \&\ \sim .(\,) \mid a\ ,$ $\quad B == |(C)$

Ορισμός 2.27. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V και Τ το σύνολο των σχετικών όρων. Όσον αφορά τους σχετικούς όρους και τύπους, ορίζουμε ότι:

- για κάθε απλό όρο χ, $\chi^{\text{disj}} = \chi$
- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (\&,\ \upsilon)$, όπου $U \subseteq 2^{\mathrm{T}}$ και $\upsilon^{\text{im}(\text{disj})} = \{(|,\ \sigma) \mid \sigma \in U\}$:
  $\tau^{\text{disj}} = (|,\ \{(\&,\ \{c(\sigma) \mid \sigma \in U\}) \mid c \in C(U)\})$
- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (|,\ \upsilon)$, όπου $U \subseteq 2^{\mathrm{T}}$ και $\upsilon^{\text{im}(\text{disj})} = \{(|,\ \sigma) \mid \sigma \in U\}$:
  $\tau^{\text{disj}} = (|,\ \bigcup U)$
- για κάθε σύνθετο όρο που δεν είναι των παραπάνω μορφών ή τύπο $x = (o,\ y)$, $x^{\text{disj}} = (o,\ y^{\text{im}(\text{disj})})$

Ο μετασχηματισμός $^{\text{disj}}$, εφαρμοζόμενος σε κατάλληλους όρους, δημιουργεί μια εξωτερική διάζευξη ενός επιπέδου, μεταφέροντας όλη τη διάζευξη προς τα έξω.

Παράδειγμα 2.6.

$$\boxed{\tau = \&(\&(|(A))) \mid (B \,\&\, C \mid \&(D)) \,\&\, ((E \mid F) \,\&\, |(G))}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\tau^{\text{disj}} = \quad & \&(\&(A)) \mid \\ & (B \,\&\, C) \,\&\, (E \,\&\, G) \mid (B \,\&\, C) \,\&\, (F \,\&\, G) \mid \\ & \&(D) \,\&\, (E \,\&\, G) \mid \&(D) \,\&\, (F \,\&\, G)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\upsilon = |(\&(|(A))) \,\&\, ((B \,\&\, C \mid \&(D)) \mid (E \mid F) \,\&\, |(G))}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\upsilon^{\text{disj}} = \quad & \&(A) \,\&\, (B \,\&\, C) \mid \&(A) \,\&\, \&(D) \mid \\ & \&(A) \,\&\, (E \,\&\, G) \mid \&(A) \,\&\, (F \,\&\, G)\end{aligned}}$$

Ορισμός 2.28. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V και Φ το σύνολο των σχετικών τύπων (συγκεκριμένου είδους). Για κάθε τύπο στο Φ, λέμε ότι είναι:

- *ικανοποιήσιμος* αν και μόνο αν υπάρχει ερμηνεία που να είναι μοντέλο του
- *έγκυρος* αν και μόνο αν κάθε ερμηνεία είναι μοντέλο του

Ορίζουμε τη σχέση $\vDash \subseteq \Phi^2$. Για κάθε $\varphi, \psi \in \Phi$, $\varphi \vDash \psi$ (λέμε ότι το φ *συνεπάγεται* το ψ) αν και μόνο αν κάθε ερμηνεία, αν είναι μοντέλο του φ, τότε είναι μοντέλο του ψ.

Ορίζουμε τη σχέση $\equiv \subseteq \Phi^2$. Για κάθε $\varphi, \psi \in \Phi$, $\varphi \equiv \psi$ (λέμε ότι το φ *ισοδυναμεί* με το ψ) αν και μόνο αν κάθε ερμηνεία είναι μοντέλο του φ αν και μόνο αν είναι μοντέλο του ψ.

Θεώρημα 2.15. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Όσον αφορά τους σχετικούς όρους και τύπους, ισχύουν τα εξής:

- για κάθε τύπο φ, $\varphi^{\text{and}} \equiv \varphi$
- για κάθε σύστημα ανισώσεων φ, $\varphi^{\text{eq}} \vDash \varphi$
- για κάθε όρο τ, για κάθε ερμηνεία I, $[I](\tau^{\text{disj}}) = [I](\tau)$

- για κάθε τύπο φ, $\varphi^{\mathrm{disj}} \equiv \varphi$

Απόδειξη (σκιαγράφηση). Όλες οι προτάσεις μπορούν να αποδειχτούν μέσω επαγωγής στο βάθος των όρων και τύπων. Η πρώτη πρόταση προκύπτει από το γεγονός ότι, για κάθε σύνολο D, $p \subseteq D$ και $U \subseteq 2^D$:
[για κάθε $E \in U$, για κάθε $d \in E$, $p(d)$] αν και μόνο αν [για κάθε $d \in \bigcup U$, $p(d)$]
(Το γεγονός αυτό αντιστοιχεί στην προσεταιριστικότητα της πράξης τομής πλήρων ΜΔΣ.) Για τη δεύτερη πρόταση, για την περίπτωση των τύπων αληθοτιμών, παρατηρούμε ότι, για κάθε αληθοτιμή v και σύνολο αληθοτιμών V, αν $v = \bigvee V$, τότε, για κάθε $u \in V$, $v \geq u$. Για την περίπτωση των τύπων γλωσσών, βλέπουμε αντίστοιχα ότι, για κάθε γλώσσα L και σύνολο γλωσσών L, αν $L = \bigcup \mathrm{L}$, τότε, για κάθε $K \in \mathrm{L}$, $L \supseteq K$. Η τρίτη πρόταση στηρίζεται, στην περίπτωση των όρων αληθοτιμών (αντίστοιχα γλωσσών), στο ότι το $\bigwedge$ (αντίστοιχα $\bigcap$) είναι επιμεριστικό ως προς το $\bigvee$ (αντίστοιχα $\bigcup$) και το $\bigvee$ (αντίστοιχα $\bigcup$) είναι προσεταιριστικό ενώ από τη συγκεκριμένη πρόταση προκύπτει και η τέταρτη.

2.4. Σημασιολογία Kripke-Kleene

Ορισμός 2.29. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$ και Μ το σύνολο των εξισωτικών μοντέλων της. Αν το φ είναι ικανοποιήσιμο, ορίζουμε τα παρακάτω:

- $m_G = \bigcap_{\mathscr{F}} \mathrm{M}$
- $l_G = m_G(A_0)$

Λέμε ότι η γραμματική G *ορίζει* τη γλώσσα l_G σύμφωνα με τη *σημασιολογία Kripke-Kleene*.

Από τον παραπάνω ορισμό δε γίνεται φανερό το αν η σημασιολογία Kripke-Kleene είναι γενική και το αν το m_G είναι μοντέλο του G. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι ισχύουν και τα δύο, αποδεικνύοντας κατασκευαστικά ότι κάθε γραμματική έχει ελάχιστο ως προς $\subseteq_{\mathscr{F}}$ εξισωτικό μοντέλο.

Παρατηρούμε τώρα πως, για κάθε $A \in V$ και $w \in \Sigma^*$, $m_G(A)(w)^T = \bigwedge_{I \in \mathrm{M}} I(A)(w)^T$, δηλαδή $m_G(A)(w)^T = 1$ αν και μόνο αν, για κάθε $I \in \mathrm{M}$, $I(A)(w)^T = 1$ ενώ κάτι αντίστοιχο ισχύει και για το $m_G(A)(w)^F$. Συμπεραίνουμε έτσι τα παρακάτω.

Πόρισμα 2.16. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$, όπου το m_G ορίζεται. Για κάθε $A \in V$, ισχύουν τα ακόλουθα:

- $m_G(A)^T = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi^{\mathrm{cl} \circ \mathrm{bin} \circ \mathrm{tv} \circ \mathrm{eq}} \vDash A(w)(T)\}$
- $m_G(A)^F = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi^{\mathrm{cl} \circ \mathrm{bin} \circ \mathrm{tv} \circ \mathrm{eq}} \vDash A(w)(F)\}$

2.5. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία

Ορισμός 2.30. Έστω $\mathrm{V}_{(3)}$ το σύνολο των τριαδικών αληθοτιμών και $\mathrm{V}_{(\infty)}$ το σύνολο των μονότονων ως προς $\leq_{\mathscr{F}}$ στοιχείων του $\mathrm{V}_{(3)}^{\omega}$. Ονομάζουμε *απειρικές αληθοτιμές* τα στοιχεία του $\mathrm{V}_{(\infty)}$. Συμβολίζουμε με $\uparrow$ τον περιορισμό της πράξης $\bigvee_{\mathscr{F}}$ $\emptyset$-ολίσθησης του $\mathrm{V}_{(3)}$ στο $\mathrm{V}_{(\infty)}$. Συμβολίζουμε επίσης με $\neg$ το $\overset{\mathrm{pw}}{\neg}|_{\mathrm{V}_{(\infty)}}$. Συμβολίζουμε επίσης με $\leq$ το $\overset{\mathrm{pw}}{\leq}$ και με $\bigvee$ και $\bigwedge$ τις πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(\mathrm{V}_{(\infty)}, \leq)$.
Έστω ένα μη κενό και πεπερασμένο σύνολο Σ και $\mathrm{L}_{(\infty)} = \Sigma^* \to \mathrm{V}_{(\infty)}$. Ονομάζουμε *απειρικές γλώσσες* επί του Σ τα στοιχεία του $\mathrm{L}_{(\infty)}$. Συμβολίζουμε με $\vec{\ }$ την κατά σημείο εκδοχή ως προς Σ^* του $\uparrow$. Συμβολίζουμε με $\cdot$ και $\odot$ την ($\bigvee$, $\bigwedge$)-εκδοχή και την ($\bigwedge$, $\bigvee$)-εκδοχή, αντίστοιχα, της πράξης παράθεσης του Σ. Συμβολίζουμε με $\overline{\ }$ την κατά σημείο εκδοχή ως προς Σ^* του $\neg$. Συμβολίζουμε με $\subseteq$ την κατά σημείο εκδοχή ως προς Σ^* του $\leq$ και με $\bigcup$ και $\bigcap$ τις πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(\mathrm{L}_{(\infty)}, \subseteq)$.
Έστω ένα ξένο με το Σ, μη κενό και πεπερασμένο σύνολο V, $\mathrm{I}_{(3)}$ το σύνολο των τριαδικών ερμηνειών του V με βάση το Σ και $\mathrm{I}_{(\infty)}$ το σύνολο των μονότονων ως προς $\subseteq_{\mathscr{F}}$ στοιχείων του $\mathrm{I}_{(3)}^{\omega}$. Ονομάζουμε *απειρικές ερμηνείες* του V με βάση το Σ τα στοιχεία του $\mathrm{I}_{(\infty)}$. Συμβολίζουμε

επίσης με $\subseteq$ το $\overset{\text{lex}}{\subseteq}$ και με $\bigcup$ και $\bigcap$ τις πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $\left(\mathrm{I}_{(3)}^{\omega},\ \subseteq\right)$.

Και εδώ τα θεωρήματα 2.10, 2.11, 2.12 και 2.13 παρέχουν ισοδύναμους ορισμούς.

Ορισμός 2.31. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα συμβόλων Σ και V. Ορίζουμε τους σχετικούς *καλά θεμελιωμένους* $(\Sigma,\ V)$-όρους και $(\Sigma,\ V)$-τύπους ανάλογα με τους προηγούμενους, με τη διαφορά ότι χρησιμοποιούν επιπλέον ένα μονομελή συναρτησιακό τελεστή ^. Ορίζουμε ότι $[\![\,\hat{}\,]\!] = \rightarrow$ και, για κάθε ερμηνεία I, επεκτείνουμε τα $[I]$ και $\langle I\rangle$ για καλά θεμελιωμένους όρους και τύπους.

Όσον αφορά τους προηγούμενους όρους και τύπους, ορίζουμε τα εξής:

- για κάθε (απλό όρο) $A \in V$, $A^{\mathrm{u}} = (\hat{}\,,\ A)$
- για κάθε (απλό όρο) $a \in \Sigma$, $a^{\mathrm{u}} = a$
- για κάθε σύνθετο όρο $\tau = (o\,,\ \upsilon)$, $\tau^{\mathrm{u}} = \left(o\,,\ \upsilon^{\mathrm{im(u)}}\right)$
- για κάθε απλό όρο χ, $\chi^{\mathrm{wf}} = \chi$
- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (\sim,\ \upsilon)$, $\tau^{\mathrm{wf}} = \left(\sim,\ \upsilon^{\mathrm{u}\,\circ\,\mathrm{wf}}\right)$
- για κάθε σύνθετο όρο που δεν είναι της παραπάνω μορφής ή τύπο $x = (o\,,\ y)$, $x^{\mathrm{wf}} = \left(o\,,\ y^{\mathrm{im(wf)}}\right)$

Για μία γραμματική $(\Sigma\,,\ V\,,\ \varphi\,,\ A_0)$, ονομάζουμε *καλά θεμελιωμένα μοντέλα* της τα μοντέλα του φ^{wf}.

Ο μετασχηματισμός $^{\mathrm{wf}}$ δίνει σε κάθε μεταβλητή τόσα επίπεδα “αοριστοποίησης” (^) όσα είναι τα επίπεδα άρνησης από πάνω της.

Παράδειγμα 2.7. Για την αναπαράσταση καλά θεμελιωμένων όρων και τύπων, θέτουμε στον τελεστή ^ τη μέγιστη προτεραιότητα.

$\boxed{\tau = A\ \&\ \sim .()\ \&\ \sim (\ B\ .\ a \mid \sim\ \sim C\,)}$

$\boxed{\tau^{\mathrm{wf}} = A\ \&\ \sim .()\ \&\ \sim (\ \hat{}\ B\ .\ a \mid \sim\ \sim\ \hat{}\ \hat{}\ \hat{}\ C\,)}$

$\boxed{\tau^{\mathrm{u}} = \hat{}\ A\ \&\ \sim .()\ \&\ \sim (\ \hat{}\ B\ .\ a \mid \sim\ \sim\ \hat{}\ C\,)}$

Ορισμός 2.32. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma,\ V,\ \varphi,\ A_0)$ και Μ το σύνολο των καλά θεμελιωμένων μοντέλων της. Αν το $\bigcap \mathrm{M}$ είναι απειρική ερμηνεία, ορίζουμε τα παρακάτω:

- $M_G = \bigcup_{i<\omega}^{\mathscr{F}} \left(\bigcap \mathrm{M}\right)(i)$
- $L_G = M_G(A_0)$

Λέμε ότι η γραμματική G *ορίζει* τη γλώσσα L_G σύμφωνα με την *καλά θεμελιωμένη σημασιολογία*.

Και σε αυτή την περίπτωση δε γίνεται φανερή η γενικότητα της σημασιολογίας ούτε αν το M_G είναι μοντέλο. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πως κάθε γραμματική έχει ελάχιστο καλά θεμελιωμένο μοντέλο (οπότε το $\bigcap \mathrm{M}$ είναι αυτό το μοντέλο) καθώς και ότι το M_G είναι ελαχιστικό ως προς $\sqsubseteq$ μοντέλο της. Μάλιστα στην περίπτωση που η θεωρία της δεν περιέχει όρους άρνησης το M_G είναι το ελάχιστο ως προς $\sqsubseteq$ μοντέλο της και είναι δυαδικό. Αντίθετα, αν επιτρέπαμε να χρησιμοποιούνται πάνω από ένα επίπεδα άρνησης και γενικεύαμε τη συγκεκριμένη σημασιολογία για τέτοιες γραμματικές, η ελαχιστικότητα του M_G δε θα ήταν εγκυημένη. Παραδείγματος χάριν, για τον τύπο $A >= \sim\sim A$, θεωρώντας πως τα Μ και M_{wf} είναι τα σύνολα των μοντέλων και καλά θεμελιωμένων μοντέλων του, αντίστοιχα, μπορούμε να δούμε πως $\left(\bigcup_{i<\omega}^{\mathscr{F}} \left(\bigcap \mathrm{M}_{\mathrm{wf}}\right)(i)\right)(A) = \bigcup^{\mathscr{F}} \varnothing$ ενώ $\bigcap \mathrm{M} \in \mathrm{M}$ και $\left(\bigcap \mathrm{M}\right)(A) = \bigcup \varnothing$.

Πόρισμα 2.17. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma,\ V,\ \varphi,\ A_0)$, όπου το M_G ορίζεται, και Ι το σύνολο των απειρικών ερμηνειών της. Έστω ακόμη $M_\infty \in \mathrm{I}$, όπου, για κάθε $A \in V$ και $i < \omega$:

$M_\infty(A)(i)^T = \{w \in \Sigma^* \mid \forall\ I \in \mathrm{I}\ \ \mathit{av}\ \langle I\rangle(\varphi^{\mathrm{wf}})\ \mathit{\kappa\alpha\iota}\ \forall\ j < i\ \ I(j) = M_\infty(j)\ \mathit{\tau\acute{o}\tau\varepsilon}\ w \in I(A)(i)^T\}$

$M_\infty(A)(i)^F = \{w \in \Sigma^* \mid \exists\ I \in \mathrm{I}\ \ \langle I\rangle(\varphi^{\mathrm{wf}}),\ \forall\ j < i\ \ I(j) = M_\infty(j),\ w \in I(A)(i)^F\}$

Για κάθε $A \in V$, ισχύουν τα ακόλουθα:

- $M_G(A)^T = \{w \in \Sigma^* \mid \exists\ i < \omega\ \ w \in M_\infty(A)(i)^T\}$
- $M_G(A)^F = \{w \in \Sigma^* \mid \exists\ i < \omega\ \ w \in M_\infty(A)(i)^F\}$

Ας δούμε σε αυτό το σημείο και μία διαφορετική προσέγγιση για τον ορισμό των καλά θεμελιωμένων μοντέλων και, κατ' επέκταση, της καλά θεμελιωμένης σημασιολογίας. Θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε το $\sim$ ως τη σύνθεση του $\overline{\ }$ με το $\overrightarrow{\ }$, ορίζοντας έτσι μία “καλά θεμελιωμένη” ερμηνεία όρων και τύπων και ονομάζοντας καλά θεμελιωμένα μοντέλα τα μοντέλα με βάση αυτή την ερμηνεία. Η συγκεκριμένη προσέγγιση, η οποία ακολουθείται στο [21], αποφεύγει την εισαγωγή νέου τελεστή, νέου είδους όρων και τύπων και μετασχηματισμού προηγούμενων όρων και τύπων σε τέτοιους (έχει έτσι περισσότερο μοντελοθεωρητικό χαρακτήρα) ενώ παράλληλα για την ερμηνεία της άρνησης χρησιμοποιεί μια πράξη που, κατά τους συγγραφείς του [21], εκφράζει την έννοια “άρνηση ως αποτυχία”. Από την άλλη, η προσέγγιση που χρησιμοποιείται εδώ διατηρεί τη συμμετρία της άρνησης, αφήνει να ερμηνεύονται οι συνήθεις όροι και τύποι με τον προηγούμενο τρόπο, χρησιμοποιεί το $\overrightarrow{\ }$ εκεί που είναι ουσιαστικότερα απαραίτητο για την καλά θεμελιωμένη σημασιολογία (δηλαδή στις μεταβλητές) και, κυρίως, φέρνει το μοντελοθεωρητικό χαρακτηρισμό αυτής της σημασιολογίας πιο κοντά σε έναν αρκετά απλό ισοδύναμο χαρακτηρισμό της που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, διευκολύνοντας έτσι την απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο χαρακτηρισμών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΕΣΩ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

3.1. Προκαταρκτικά
3.2. Σημασιολογία Kripke-Kleene
3.3. Συνέχεια ως προς $\sqsubseteq$ με χρήση σταθερής ερμηνείας
3.4. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία

3.1. Προκαταρκτικά

Ορισμός 3.1. Έστω δύο ΜΔΣ $(S_0, \leq_0)$ και $(S_1, \leq_1)$, $\bigvee_0$ και $\bigvee_1$ οι πράξεις ένωσής τους, αντίστοιχα, και $f \in S_0 \to S_1$. Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι (ως προς $(\leq_0, \leq_1)$ ή απλά $\leq_1$, αν $\leq_0 = \leq_1$ ή $\leq_0 = \overset{\mathrm{pw}:\kappa}{\leq_1}$ για κάποιο διατακτικό αριθμό κ ή το $\leq_0$ είναι η συνήθης αριθμητική διάταξη):

- *οριοδιατηρητική* αν και μόνο αν, για κάθε $T \subseteq S_0$, αν το $\bigvee_0 T$ ορίζεται, τότε το $\bigvee_1 \mathrm{im}(f)(T)$ ορίζεται και $f(\bigvee_0 T) = \bigvee_1 \mathrm{im}(f)(T)$
- *συνεχής* αν και μόνο αν, για κάθε κατευθυνόμενο $T \subseteq S_0$, αν το $\bigvee_0 T$ ορίζεται, τότε το $\bigvee_1 \mathrm{im}(f)(T)$ ορίζεται και $f(\bigvee_0 T) = \bigvee_1 \mathrm{im}(f)(T)$

Θεώρημα 3.1. Έστω δύο ΜΔΣ $(S_0, \leq_0)$ και $(S_1, \leq_1)$ και $f \in S_0 \to S_1$. Ισχύουν τα εξής:

- αν η συνάρτηση f είναι οριοδιατηρητική, τότε είναι συνεχής
- αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε είναι μονότονη

Απόδειξη. Η πρώτη πρόταση προκύπτει άμεσα από τον ορισμό 3.1. Για τη δεύτερη, έστω $\bigvee_0$ και $\bigvee_1$ οι πράξεις ένωσης των $(S_0, \leq_0)$ και $(S_1, \leq_1)$, αντίστοιχα. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε, για κάθε $s, t \in S_0$ με $s \leq_0 t$, έχουμε $f(t) = f(s \vee_0 t) = f(s) \vee_1 f(t)$, οπότε $f(s) \leq_1 f(t)$.

Θεώρημα 3.2. Έστω ένα ΜΔΣ με ελάχιστο στοιχείο $(S, \leq)$, $\bigvee$ η πράξη ένωσής του και $f \in S \to S$ μία μονότονη συνάρτηση. Η ακολουθία $(f^i(\bigvee \varnothing))_{i < \omega}$ είναι μονότονη.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μέσω επαγωγής ότι, για κάθε $i < \omega$, για κάθε $j \geq i$, $f^i(\bigvee \varnothing) \leq f^j(\bigvee \varnothing)$. Για την επαγωγική βάση, έχουμε ότι, για κάθε $j \geq 0$, $f^0(\bigvee \varnothing) = \bigvee \varnothing \leq f^j(\bigvee \varnothing)$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας πως η πρόταση ισχύει για το i, παίρνουμε τα παρακάτω, για κάθε $j \geq i + 1$:

$$f^{i+1}(\bigvee \varnothing) = f(f^i(\bigvee \varnothing)) \leq f(f^{j-1}(\bigvee \varnothing)) = f^j(\bigvee \varnothing)$$

Η ανισότητα ισχύει λόγω του ότι $j - 1 \geq i$, της υπόθεσης και της μονοτονίας του f.

Θεώρημα 3.3. Έστω ένα κατευθυνόμενα πλήρες ΜΔΣ με ελάχιστο στοιχείο $(S, \leq)$, $\bigvee$ η πράξη ένωσής του και $f \in S \to S$ μία συνεχής συνάρτηση. Το $\bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing)$ είναι:

- σταθερό σημείο του f
- το ελάχιστο προσταθερό σημείο του f

Απόδειξη. Από τη συνέχεια του f, τα θεωρήματα 3.1 και 3.2 και το πόρισμα 2.5 συμπεραίνουμε πως το $\{f^i(\bigvee \varnothing) \mid i < \omega\}$ είναι κατευθυνόμενο. Για την πρώτη πρόταση, έχουμε τα εξής:

$f(\bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing)) = \bigvee_{i<\omega} f(f^i(\bigvee \varnothing)) = \bigvee_{i<\omega} f^{i+1}(\bigvee \varnothing) = \bigvee_{i<\omega} f^{i+1}(\bigvee \varnothing) \vee \bigvee \varnothing =$

$\bigvee_{i<\omega} f^{i+1}(\bigvee \varnothing) \vee \bigvee \{\bigvee \varnothing\} = \bigvee (\{f^{i+1}(\bigvee \varnothing) \mid i<\omega\} \cup \{f^0(\bigvee \varnothing)\}) = \bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing)$

Για τη δεύτερη πρόταση, έστω κάποιο προσταθερό σημείο του f, s. Θα αποδείξουμε μέσω επαγωγής ότι, για κάθε $i<\omega$, $f^i(\bigvee \varnothing) \le s$, κάτι που συνεπάγεται ότι $\bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing) \le s$. Για την επαγωγική βάση, βλέπουμε πως $f^0(\bigvee \varnothing) = \bigvee \varnothing \le s$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας πως $f^i(\bigvee \varnothing) \le s$, παίρνουμε ότι $f^{i+1}(\bigvee \varnothing) = f(f^i(\bigvee \varnothing)) \le f(s) \le s$ (η πρώτη ανισότητα ισχύει λόγω της υπόθεσης και της μονοτονίας του f και η δεύτερη επειδή το s είναι προσταθερό σημείο του f).

Θεώρημα 3.4. Έστω ένα πλήρες ΜΔΣ $(S, \le)$, $\bigvee$ η πράξη ένωσής του, $f \in S \to S$ μία συνεχής συνάρτηση και $s \in S$ με $s \le \bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing)$. Ισχύει ότι $\bigvee_{i<\omega} f^i(s) = \bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing)$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μέσω επαγωγής ότι, για κάθε $i<\omega$, $f^i(s) \le \bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing)$, κάτι που συνεπάγεται ότι $\bigvee_{i<\omega} f^i(s) \le \bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing)$. Η επαγωγική βάση ισχύει, αφού $f^0(s) = s \le \bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing)$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας ότι $f^i(s) \le \bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing)$, έχουμε:

$f^{i+1}(s) = f(f^i(s)) \le f(\bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing)) = \bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing)$

Η ανισότητα ισχύει λόγω της υπόθεσης και της μονοτονίας του f και η τελευταία ισότητα επειδή το $\bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing)$ είναι σταθερό σημείο του f.

Θα αποδείξουμε ακόμη μέσω επαγωγής ότι, για κάθε $i<\omega$, $f^i(\bigvee \varnothing) \le f^i(s)$, κάτι που συνεπάγεται ότι $\bigvee_{i<\omega} f^i(\bigvee \varnothing) \le \bigvee_{i<\omega} f^i(s)$. Η επαγωγική βάση ισχύει, αφού $f^0(\bigvee \varnothing) = \bigvee \varnothing \le f^0(s)$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας ότι $f^i(\bigvee \varnothing) \le f^i(s)$, έχουμε:

$f^{i+1}(\bigvee \varnothing) = f(f^i(\bigvee \varnothing)) \le f(f^i(s)) = f^{i+1}(s)$

Η ανισότητα ισχύει λόγω της υπόθεσης και της μονοτονίας του f.

Ορισμός 3.2. Έστω ένα σύνολο S, κ ένας διατακτικός αριθμός και $\bigoplus \in 2^S \to S$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\bigoplus^{(\kappa)} \in S^\kappa \to S$. Για κάθε $s \in S^\kappa$, $\bigoplus^{(\kappa)} s = \bigoplus_{i<\kappa} s(i)$.

Έστω ακόμη ένας διατακτικός αριθμός $\lambda > \kappa$ και $\sigma \in S^{<\lambda} \to S$. Ορίζουμε ότι $\sigma^{(\kappa)} = \sigma|_{S^\kappa}$.

Θεώρημα 3.5. Έστω ένα πλήρως επιμεριστικό ΜΔΣ $(S, \leq)$ και $\bigvee$, $\bigwedge$ οι πράξεις ένωσης και τομής του, αντίστοιχα. Ισχύουν τα παρακάτω:

- για κάθε διατακτικό αριθμό κ, η συνάρτηση $\bigvee^{(\kappa)}$ είναι οριοδιατηρητική
- για κάθε διατακτικό αριθμό κ, η συνάρτηση $\bigwedge^{(\kappa)}$ είναι μονότονη
- για κάθε $\kappa < \omega$, η συνάρτηση $\bigwedge^{(\kappa)}$ είναι συνεχής

Έστω ακόμη μία συνάρτηση $\neg \in S \to S$ τέτοια ώστε το $(S, \leq, \neg)$ να είναι δικτυωτό Kleene. Η συνάρτηση $\neg$ είναι οριοδιατηρητική ως προς $(\leq, \geq)$.

Απόδειξη. Για την πρώτη πρόταση έχουμε ότι, για κάθε διατακτικό αριθμό κ και $T \subseteq S^\kappa$:

$$\bigvee^{(\kappa)} \overset{\mathrm{pw}:\kappa}{\bigvee} T = \bigvee_{i<\kappa} \bigvee_{s \in T} s(i) = \bigvee_{i<\kappa,\, s\in T} s(i) = \bigvee_{s\in T} \bigvee_{i<\kappa} s(i) = \bigvee \mathrm{im}(\bigvee^{(\kappa)})(T)$$

Η δεύτερη και η τρίτη ισότητα ισχύουν επειδή το $\bigvee$ είναι προσεταιριστικό.

Για τη δεύτερη πρόταση βλέπουμε ότι, για κάθε διατακτικό αριθμό κ και $s, t \in S^\kappa$ με $s \overset{\mathrm{pw}:\kappa}{\leq} t$:

$$\bigwedge^{(\kappa)} s = \bigwedge_{i<\kappa} s(i) \leq \bigwedge_{i<\kappa} t(i) = \bigwedge^{(\kappa)} t$$

Η ανισότητα ισχύει επειδή το $\bigwedge_{i<\kappa} s(i)$ είναι κάτω φράγμα του $\{s(i) \mid i<\kappa\}$ και, για κάθε κάτω φράγμα του συγκεκριμένου συνόλου, u, ισχύει ότι, για κάθε $i<\kappa$, $u \leq s(i) \leq t(i)$, δηλαδή ότι το u είναι κάτω φράγμα του $\{t(i) \mid i<\kappa\}$ και έτσι $u \leq \bigwedge_{i<\kappa} t(i)$.

Για την τρίτη πρόταση έχουμε ότι, για κάθε $\kappa < \omega$ και κατευθυνόμενο $T \subseteq S^\kappa$:

$$\bigwedge^{(\kappa)} \overset{\mathrm{pw}:\kappa}{\bigvee} T = \bigwedge_{i<\kappa} \bigvee_{s \in T} s(i) = \bigvee_{c \in T^\kappa} \bigwedge_{i<\kappa} c(i)(i) = \bigvee_{s\in T} \bigwedge_{i<\kappa} s(i) = \bigvee \mathrm{im}(\bigwedge^{(\kappa)})(T)$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει επειδή το $\bigwedge$ είναι επιμεριστικό ως προς το $\bigvee$ (προκύπτει λαμβάνοντας υπ' όψιν το θεώρημα 2.3 και θεωρώντας ότι $I = \kappa \times T$, $s \in I \to S$, όπου, για κάθε $i < \kappa$ και $t \in T$, $s(i, t) = t(i)$ και $U = \{\{(i, t) \mid t \in T\} \mid i < \kappa\}$). Για την αιτιολόγηση της τρίτης ισότητας βασιζόμαστε στα παρακάτω:

- για κάθε $s \in T$, $(s)_{i<\kappa} \in T^{\kappa}$ και $\bigwedge\limits_{i<\kappa} s(i) = \bigwedge\limits_{i<\kappa} (s)_{i<\kappa}(i)(i)$, οπότε:

  $\bigvee\limits_{c \in T^{\kappa}} \bigwedge\limits_{i<\kappa} c(i)(i) \geq \bigvee\limits_{s \in T} \bigwedge\limits_{i<\kappa} s(i)$

- για κάθε $c \in T^{\kappa}$, δεδομένου ότι το T είναι κατευθυνόμενο, $\{c(i) \mid i < \kappa\} \subseteq T$ και $|\{c(i) \mid i < \kappa\}| \leq \kappa < \omega$, υπάρχει $s \in T$, τέτοιο ώστε, για κάθε $i < \kappa$, $s \overset{\mathrm{pw}:\kappa}{\geq} c(i)$ και συνεπώς $s(i) \geq c(i)(i)$, κάτι που σημαίνει ότι $\bigwedge\limits_{i<\kappa} s(i) \geq \bigwedge\limits_{i<\kappa} c(i)(i)$, οπότε:

  $\bigvee\limits_{c \in T^{\kappa}} \bigwedge\limits_{i<\kappa} c(i)(i) \leq \bigvee\limits_{s \in T} \bigwedge\limits_{i<\kappa} s(i)$

Η τελευταία πρόταση ισχύει επειδή, για κάθε $T \subseteq S$, $\neg \bigvee T = \bigwedge\limits_{s \in T} \neg s = \bigwedge \mathrm{im}(\neg)(T)$ (και το $\bigwedge$ είναι η πράξη ένωσης του $(S, \geq)$).

Θεώρημα 3.6. Έστω ένα πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό $(S, \leq)$, $S_{(3)}$ το σύνολο των συνεπών στοιχείων του S^2, $\neg$ ο περιορισμός της πράξης αντιστροφής του S στο $S_{(3)}$ και $\bigvee_{(3)}$, $\bigwedge_{(3)}$ οι πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(S_{(3)}, \leq^{\mathrm{t}})$. Ισχύουν τα παρακάτω, ως προς $\leq^{\mathrm{i}}$:

- η συνάρτηση $\neg$ είναι οριοδιατηρητική
- για κάθε διατακτικό αριθμό κ, οι συναρτήσεις $\bigvee\nolimits_{(3)}^{(\kappa)}$ και $\bigwedge\nolimits_{(3)}^{(\kappa)}$ είναι μονότονες
- για κάθε $\kappa < \omega$, οι συναρτήσεις $\bigvee\nolimits_{(3)}^{(\kappa)}$ και $\bigwedge\nolimits_{(3)}^{(\kappa)}$ είναι συνεχείς

Απόδειξη. Έστω $\bigvee_{\mathscr{F}}$ η πράξη ένωσης του $(S_{(3)}, \leq^{\mathrm{i}})$. Για την πρώτη πρόταση έχουμε ότι, για κάθε $T \subseteq S_{(3)}$, τέτοιο ώστε το $\bigvee_{\mathscr{F}} T$ να ορίζεται:

$\neg \bigvee_{\mathscr{F}} T = \neg \bigvee^{\mathrm{i}} T = \left(\left(\bigvee^{\mathrm{i}} T\right)^{F}, \left(\bigvee^{\mathrm{i}} T\right)^{T}\right) = \left(\bigvee\limits_{s \in T} s^{F}, \bigvee\limits_{s \in T} s^{T}\right) = \bigvee\limits_{s \in T}^{\mathrm{i}} \left(s^{F}, s^{T}\right) =$
$\bigvee\limits_{s \in T}^{\mathrm{i}} \neg s = \bigvee^{\mathrm{i}} \mathrm{im}(\neg)(T) = \bigvee_{\mathscr{F}} \mathrm{im}(\neg)(T)$

Η πρώτη και η τελευταία ισότητα στηρίζονται στο θεώρημα 2.9 (στην τελευταία χρησιμοποιείται και το γεγονός ότι $\bigvee^{\mathrm{i}} \mathrm{im}(\neg)(T) = \neg \bigvee_{\mathscr{F}} T \in S_{(3)}$).

Για τη δεύτερη πρόταση βλέπουμε ότι, για κάθε διατακτικό αριθμό κ και $s, t \in S_{(3)}^{\kappa}$ με $s \overset{\mathrm{pw}:\kappa}{\leq^{\mathrm{i}}} t$:

$$\bigvee{}^{(\kappa)}_{(3)} s = \bigvee_{i<\kappa}{}^{\mathrm{t}} s(i) = (\bigvee_{i<\kappa} s(i)^T, \bigwedge_{i<\kappa} s(i)^F) \leq^{\mathrm{i}} (\bigvee_{i<\kappa} t(i)^T, \bigwedge_{i<\kappa} t(i)^F) = \bigvee_{i<\kappa}{}^{\mathrm{t}} t(i) = \bigvee{}^{(\kappa)}_{(3)} t$$

Η ανισότητα ισχύει λόγω της μονοτονίας των $\bigvee^{(\kappa)}$ και $\bigwedge^{(\kappa)}$, δεδομένου και ότι, για κάθε $i < \kappa$, $s(i)^T \leq t(i)^T$ και $s(i)^F \leq t(i)^F$. Έτσι αποδεικνύεται η μονοτονία του $\bigvee{}^{(\kappa)}_{(3)}$ ενώ με ανάλογο τρόπο προκύπτει και η μονοτονία του $\bigwedge{}^{(\kappa)}_{(3)}$.

Για την τρίτη πρόταση έχουμε ότι, για κάθε $\kappa < \omega$ και κατευθυνόμενο $T \subseteq S^{\kappa}_{(3)}$:

$$\bigvee{}^{(\kappa)}_{(3)} \overset{\mathrm{pw}:\kappa}{\bigvee}_{\mathscr{T}} T = \bigvee_{i<\kappa}{}^{\mathrm{t}} \bigvee_{s\in T}{}^{\mathrm{i}} s(i) = (\bigvee_{i<\kappa} \bigvee_{s\in T} s(i)^T, \bigwedge_{i<\kappa} \bigvee_{s\in T} s(i)^F) =$$

$$(\bigvee_{s\in T} \bigvee_{i<\kappa} s(i)^T, \bigvee_{s\in T} \bigwedge_{i<\kappa} s(i)^F) = \bigvee_{s\in T}{}^{\mathrm{i}} \bigwedge_{i<\kappa}{}^{\mathrm{t}} s(i) = \bigvee_{\mathscr{T}} \mathrm{im}(\bigwedge{}^{(\kappa)}_{(3)})(T)$$

Η πρώτη και η τελευταία ισότητα στηρίζονται στο θεώρημα 2.9 (στην τελευταία χρησιμοποιείται και το γεγονός ότι $\bigvee_{s\in T}{}^{\mathrm{i}} \bigwedge_{i<\kappa}{}^{\mathrm{t}} s(i) = \bigvee{}^{(\kappa)}_{(3)} \overset{\mathrm{pw}:\kappa}{\bigvee}_{\mathscr{T}} T \in S_{(3)}$). Η τρίτη στηρίζεται στο ότι η συνάρτηση $\bigvee^{(\kappa)}$ είναι οριοδιατηρητική και η συνάρτηση $\bigwedge^{(\kappa)}$ είναι συνεχής (και, αφού το T είναι κατευθυνόμενο, το $\{(s(i)^F)_{i<\kappa} \mid s \in T\}$ είναι επίσης κατευθυνόμενο).

Θεώρημα 3.7. Έστω ένα σύνολο D, λ ένας διατακτικός αριθμός και $\sigma \in D^{<\lambda} \to D$. Έστω ακόμη ένα ΜΔΣ $(S, \leq)$ και $\bigoplus$, $\bigotimes \in 2^S \to S$, όπου, για κάθε $\kappa < \lambda$:

- για κάθε $d \in D$, η συνάρτηση $\bigoplus^{(|\{e \in D^{\kappa} \mid \sigma(e) = d\}|)}$ είναι συνεχής
- η συνάρτηση $\bigotimes^{(\kappa)}$ είναι συνεχής

Για κάθε $\kappa < \lambda$, η συνάρτηση $(\sigma^{\bigoplus, \bigotimes})^{(\kappa)}$ είναι συνεχής ως προς $\overset{\mathrm{pw}:D}{\leq}$.

Απόδειξη. Έστω $\bigvee$ η πράξη ένωσης του $(S, \leq)$. Για κάθε $\kappa < \lambda$ και κατευθυνόμενο (ως προς $\overset{\mathrm{pw}:\kappa}{\overset{\mathrm{pw}:D}{\leq}}$) $F \subseteq (D \to S)^{\kappa}$ που έχει ελάχιστο άνω φράγμα (αυτό είναι το $\overset{\mathrm{pw}:\kappa}{\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee}} F$), έχουμε ότι, για κάθε $d \in D$:

$$\left(\sigma^{\bigoplus, \bigotimes}(\overset{\mathrm{pw}:\kappa}{\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee}} F)\right)(d) = \bigoplus_{\substack{e\in D^{\kappa},\\ \sigma(e)=d}} \bigotimes_{i<\kappa} \left(\overset{\mathrm{pw}:\kappa}{\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee}} F\right)(i)(e(i)) = \bigoplus_{\substack{e\in D^{\kappa},\\ \sigma(e)=d}} \bigotimes_{i<\kappa} \left(\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee_{f\in F}} f(i)\right)(e(i)) =$$

$$\bigoplus_{\substack{e\in D^{\kappa},\\ \sigma(e)=d}} \bigotimes_{i<\kappa} \bigvee_{f\in F} f(i)(e(i)) = \bigoplus_{\substack{e\in D^{\kappa},\\ \sigma(e)=d}} \bigvee_{f\in F} \bigotimes_{i<\kappa} f(i)(e(i)) = \bigvee_{f\in F} \bigoplus_{\substack{e\in D^{\kappa},\\ \sigma(e)=d}} \bigotimes_{i<\kappa} f(i)(e(i)) =$$

$$\bigvee_{f \in F} \sigma^{\oplus, \otimes}(f)(d) = \left(\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee_{f \in F}} \sigma^{\oplus, \otimes}(f) \right)(d) = \left(\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee} \mathrm{im}(\sigma^{\oplus, \otimes})(F) \right)(d)$$

Η τέταρτη ισότητα στηρίζεται στο ότι η συνάρτηση $\bigotimes^{(\kappa)}$ είναι συνεχής (και το σχετικό σύνολο είναι κατευθυνόμενο, αφού το F είναι κατευθυνόμενο). Η πέμπτη ισότητα στηρίζεται στο ότι η συνάρτηση $\bigoplus^{(|\{e \in D^{\kappa} \mid \sigma(e) = d\}|)}$ είναι συνεχής (και το σχετικό σύνολο είναι κατευθυνόμενο, αφού το F είναι κατευθυνόμενο και η συνάρτηση $\bigotimes^{(\kappa)}$ είναι μονότονη).

Πόρισμα 3.8. Όσον αφορά τις σχέσεις και τις συναρτήσεις που έχουμε ορίσει για αληθοτιμές και γλώσσες, ισχύουν τα παρακάτω:

- η συνάρτηση $\neg$ (αντίστοιχα $\overline{}$) είναι οριοδιατηρητική ως προς $(\leq, \geq)$ (αντίστοιχα $(\subseteq, \supseteq)$) και $\leq_{\mathscr{F}}$ (αντίστοιχα $\subseteq_{\mathscr{F}}$)
- για κάθε διατακτικό αριθμό κ:
    - ως προς $\leq$ (αντίστοιχα $\subseteq$):
        - η συνάρτηση $\bigvee^{(\kappa)}$ (αντίστοιχα $\bigcup^{(\kappa)}$) είναι οριοδιατηρητική
        - η συνάρτηση $\bigwedge^{(\kappa)}$ (αντίστοιχα $\bigcap^{(\kappa)}$) είναι μονότονη
        - αν $\kappa < \omega$, η συνάρτηση $\bigwedge^{(\kappa)}$ (αντίστοιχα $\bigcap^{(\kappa)}$) είναι συνεχής
    - ως προς $\leq_{\mathscr{F}}$ (αντίστοιχα $\subseteq_{\mathscr{F}}$):
        - οι συναρτήσεις $\bigvee^{(\kappa)}$ (αντίστοιχα $\bigcup^{(\kappa)}$) και $\bigwedge^{(\kappa)}$ (αντίστοιχα $\bigcap^{(\kappa)}$) είναι μονότονες
        - αν $\kappa < \omega$, οι συναρτήσεις $\bigvee^{(\kappa)}$ (αντίστοιχα $\bigcup^{(\kappa)}$) και $\bigwedge^{(\kappa)}$ (αντίστοιχα $\bigcap^{(\kappa)}$) είναι συνεχείς
- για κάθε $\kappa < \omega$, οι συναρτήσεις $\cdot^{(\kappa)}$ και $\bigodot^{(\kappa)}$ είναι συνεχείς ως προς $\subseteq$ και $\subseteq_{\mathscr{F}}$

Θεώρημα 3.9. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V και T το σύνολο των (Σ, V)-όρων. Η συνάρτηση $[\ ]$ είναι συνεχής ως προς $(\subseteq_{\mathscr{F}}, \overset{\mathrm{pw}:\mathrm{T}}{\subseteq_{\mathscr{F}}})$.
Έστω ακόμη I το σύνολο των ερμηνειών του V με βάση το Σ, L το σύνολο των γλωσσών επί του Σ, T_+ το σύνολο των (Σ, V)-όρων οι οποίοι δεν περιέχουν όρους της μορφής $\sim \tau$ και $[\ ]_+ \in \mathrm{I} \to (\mathrm{T}_+ \to \mathrm{L})$, όπου, για κάθε $I \in \mathrm{I}$, $[I]_+ = [I]|_{\mathrm{T}_+}$. Η συνάρτηση $[\ ]_+$ είναι συνεχής

ως προς $(\subseteq, \overset{\mathrm{pw:T}_+}{\subseteq})$.

Απόδειξη. Για την πρώτη πρόταση, έστω ότι, για κάθε $d < \omega$, το T_d είναι το σύνολο των όρων βάθους $\leq d$ και $[\ ]_d \in \mathrm{I} \to (T_d \to \mathrm{L})$, όπου, για κάθε $I \in \mathrm{I}$, $[I]_d = [I]|_{\mathrm{T}_d}$. Θα αποδείξουμε μέσω επαγωγής ότι, για κάθε $d < \omega$, η συνάρτηση $[\ ]_d$ είναι συνεχής ως προς $(\subseteq, \overset{\mathrm{pw:T}_d}{\subseteq})$. Για την επαγωγική βάση, έχουμε ότι, για κάθε κατευθυνόμενο $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$, για κάθε $\chi \in \mathrm{T}_0$ (το χ είναι απλός όρος):

- αν $\chi \in V$, τότε:
  $$[\bigcup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}]_0(\chi) = \left(\bigcup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}\right)(\chi) = \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, I(\chi) = \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, [I]_0(\chi) = \left(\overset{\mathrm{pw:T}_0}{\bigcup_{I \in \mathrm{J}}}{}_{\mathscr{F}}\, [I]_0\right)(\chi)$$
- αν $\chi \in \Sigma$, τότε $[\bigcup \mathrm{J}]_0(\chi) = [\![\chi]\!] = \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, [\![\chi]\!] = \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, [I]_0(\chi) = \left(\overset{\mathrm{pw:T}_0}{\bigcup_{I \in \mathrm{J}}}{}_{\mathscr{F}}\, [I]_0\right)(\chi)$

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας ότι η πρόταση ισχύει για το d, παίρνουμε ότι, για κάθε κατευθυνόμενο $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$, για κάθε $\tau \in \mathrm{T}_{d+1}$ (το τ είναι σύνθετος όρος):

- αν $\tau = (., \upsilon)$, τότε:
  $$[\bigcup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}]_{d+1}(\tau) = \mathop{\bullet}_{i<|\upsilon|}[\bigcup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}]_d(\upsilon(i)) = \mathop{\bullet}_{i<|\upsilon|} \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, [I]_d(\upsilon(i)) =$$
  $$\bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}} \mathop{\bullet}_{i<|\upsilon|}[I]_d(\upsilon(i)) = \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, [I]_{d+1}(\tau) = \left(\overset{\mathrm{pw:T}_{d+1}}{\bigcup_{I \in \mathrm{J}}}{}_{\mathscr{F}}\, [I]_{d+1}\right)(\tau)$$
  Η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της υπόθεσης και η τρίτη λόγω της συνέχειας ως προς $\subseteq_{\mathscr{F}}$ του $\bullet^{(|\upsilon|)}$ (και του γεγονότος ότι το $\{(([I]_d(\upsilon(i)))_{i<|\upsilon|} \mid I \in \mathrm{J}\}$ είναι κατευθυνόμενο, αφού το J είναι κατευθυνόμενο και η συνάρτηση $[\ ]_d$ είναι μονότονη).
- με παρόμοιο τρόπο προκύπτει το ζητούμενο και για τους υπόλοιπους τελεστές

Έτσι συμπεραίνουμε ότι, για κάθε κατευθυνόμενο $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$, για κάθε $\tau \in \mathrm{T}$, θεωρώντας πως το d είναι το βάθος του τ:

$$[\bigcup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}](\tau) = [\bigcup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}]_d(\tau) = \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, [I]_d(\tau) = \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, [I](\tau) = \left(\overset{\mathrm{pw:T}}{\bigcup_{I \in \mathrm{J}}}{}_{\mathscr{F}}\, [I]\right)(\tau)$$

Η δεύτερη πρόταση αποδεικνύεται ανάλογα με την πρώτη, χρησιμοποιώντας τη συνέχεια ως προς $\subseteq$ των διάφορων $\bigcup^{(\kappa)}$, $\bigcap^{(\kappa)}$, $\bullet^{(\kappa)}$ και $\bigodot^{(\kappa)}$.

Ορισμός 3.3. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Όσον αφορά τους σχετικούς όρους και τύπους, ορίζουμε τα παρακάτω:

- για κάθε $A \in V$, $A^t = A^f = A$
- για κάθε $a \in \Sigma$, $a^t = a$ και $a^f = \sim a$
- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = \sim \upsilon$, $\tau^t = \upsilon^f$ και $\tau^f = \upsilon^t$
- για κάθε σύνθετο όρο που δεν είναι της παραπάνω μορφής $\tau = (o, \upsilon)$, $\tau^t = \left(o, \upsilon^{\mathrm{im}(t)}\right)$ και $\tau^f = \left(o^{\mathrm{d}}, \upsilon^{\mathrm{im}(f)}\right)$

Θεώρημα 3.10. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V και I μία ερμηνεία του V με βάση το Σ. Για κάθε κανονικό (Σ, V)-όρο σύζευξης d:

- $[I^T]\left((d^+)^t\right) = [I](d^+)^T$
- $[I^F]\left((d^+)^f\right) = [I](d^+)^F$
- $[I^F]\left((d^-)^t\right) = [I](d^-)^T$
- $[I^T]\left((d^-)^f\right) = [I](d^-)^F$

Απόδειξη. Ακολουθούμε την εξής σειρά συλλογισμών:

- για κάθε $A \in V$:
    - $[I^T](A^t) = [I^T](A) = I^T(A) = I(A)^T = [I](A)^T$
    - $[I^F](A^f) = [I^F](A) = I^F(A) = I(A)^F = [I](A)^F$
- για κάθε $a \in \Sigma$:
    - $[I^T](a^t) = [I^T](a) = [\![a]\!] = [\![a]\!]^T = [I](a)^T$
    - $[I^F](a^f) = [I^F]((\sim, a)) = \overline{[I^F](a)} = \overline{[\![a]\!]} = [\![a]\!]^F = [I](a)^F$
- για κάθε κανονικό όρο παράθεσης $\alpha = (., \chi)$:
    - $[I^T](\alpha^t) = [I^T]\left(\left(., \chi^{\mathrm{im}(t)}\right)\right) = \bullet_{i < |\alpha|}[I^T](\chi(i)^t) = \bullet_{i < |\alpha|}[I](\chi(i))^T = \left(\bullet_{i < |\alpha|}[I](\chi(i))\right)^T = [I](\alpha)^T$
    - $[I^F](\alpha^f) = [I^F]\left(\left(:, \chi^{\mathrm{im}(f)}\right)\right) = \bigodot_{i < |\alpha|}[I^F](\chi(i)^f) = \bigodot_{i < |\alpha|}[I](\chi(i))^F =$

$$\left(\dot{\bigsqcup}_{i<|\alpha|}[I](\chi(i))\right)^F = [I](\alpha)^F$$

- για κάθε κανονικό όρο άρνησης $c = (\sim, \alpha)$:
  - $[I^F](c^t) = [I^F](\alpha^f) = [I](\alpha)^F = \overline{[I](\alpha)}^T = [I](c)^T$
  - $[I^T](c^f) = [I^T](\alpha^t) = [I](\alpha)^T = \overline{[I](\alpha)}^F = [I](c)^F$
- για κάθε κανονικό όρο σύζευξης d, θεωρώντας ότι $(d^+)^{\mathrm{arg}} = c_+$ και $(d^-)^{\mathrm{arg}} = c_-$:
  - $[I^T]((d^+)^t) = [I^T]((\&, c_+^{\mathrm{im}(t)})) = \bigcap_{c \in c_+} [I^T](c^t) = \bigcap_{c \in c_+} [I](c)^T =$

    $\left(\bigcap_{c \in c_+} [I](c)\right)^T = [I](d^+)^T$
  - $[I^F]((d^+)^f) = [I^F]((|, c_+^{\mathrm{im}(f)})) = \bigcup_{c \in c_+} [I^F](c^f) = \bigcup_{c \in c_+} [I](c)^F =$

    $\left(\bigcap_{c \in c_+} [I](c)\right)^F = [I](d^+)^F$
  - $[I^F]((d^-)^t) = [I^F]((\&, c_-^{\mathrm{im}(t)})) = \bigcap_{c \in c_-} [I^F](c^t) = \bigcap_{c \in c_-} [I](c)^T =$

    $\left(\bigcap_{c \in c_-} [I](c)\right)^T = [I](d^-)^T$
  - $[I^T]((d^-)^f) = [I^T]((|, c_-^{\mathrm{im}(f)})) = \bigcup_{c \in c_-} [I^T](c^f) = \bigcup_{c \in c_-} [I](c)^F =$

    $\left(\bigcap_{c \in c_+} [I](c)\right)^F = [I](d^+)^F$

3.2. Σημασιολογία Kripke-Kleene

Ορισμός 3.4. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$, I το σύνολο των ερμηνειών της, $\psi = \varphi^{\mathrm{eq}}$ και $\tau = \rightarrow_\psi$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\theta_G \in \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{I}$. Για κάθε $I \in \mathrm{I}$:
για κάθε $A \in V$, $\theta_G(I)(A) = [I](\tau(A))$

Ορίζουμε επίσης τα παρακάτω:

- για κάθε $i < \omega$, $\theta_G^{\uparrow i} = \theta_G^i(\bigcup_{\mathscr{F}} \varnothing)$
- $\theta_G^{\uparrow\omega} = \bigcup_{\mathscr{F}\, i<\omega} \theta_G^{\uparrow i}$

Θεώρημα 3.11. Έστω μία γραμματική G. Η συνάρτηση θ_G είναι συνεχής ως προς $\sqsubseteq_{\mathscr{F}}$.

Απόδειξη. Έστω $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$, $\psi = \varphi^{\mathrm{eq}}$ και $\tau = \rightarrow_{\psi}$. Για κάθε κατευθυνόμενο σύνολο ερμηνειών I, εχούμε ότι, για κάθε $A \in V$:

$$\theta_G(\bigsqcup_{\mathscr{F}} \mathrm{I})(A) = [\bigsqcup_{\mathscr{F}} \mathrm{I}](\tau(A)) = \bigsqcup_{\substack{\mathscr{F} \\ I \in \mathrm{I}}} [I](\tau(A)) = \bigsqcup_{\substack{\mathscr{F} \\ I \in \mathrm{I}}} \theta_G(I)(A) = \Big(\bigsqcup_{\substack{\mathscr{F} \\ I \in \mathrm{I}}} \theta_G(I)\Big)(A)$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την πρώτη πρόταση του θεωρήματος 3.9.

Έτσι, χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.3 και παρατηρώντας ότι τα εξισωτικά μοντέλα του G είναι τα σταθερά σημεία του θ_G, φτάνουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα.

Πόρισμα 3.12. Έστω μία γραμματική G. Ισχύουν τα ακόλουθα:

- το $\theta_G^{\uparrow\omega}$ είναι σταθερό σημείο του θ_G
- το $\theta_G^{\uparrow\omega}$ είναι το ελάχιστο προσταθερό σημείο ως προς $\sqsubseteq_{\mathscr{F}}$ του θ_G
- το $\theta_G^{\uparrow\omega}$ είναι το ελάχιστο ως προς $\sqsubseteq_{\mathscr{F}}$ εξισωτικό μοντέλο του G
- $\theta_G^{\uparrow\omega} = m_G$

Ορισμός 3.5. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$ και I το σύνολο των δυαδικών ερμηνειών της. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\theta_G^T, \theta_G^F \in \mathrm{I}^2 \rightarrow \mathrm{I}$. Για κάθε $I, J \in \mathrm{I}$:

- για κάθε $A \in V$, $\theta_G^T(I, J)(A) = \bigcup_{A \rightarrow d} \big([I]((d^+)^t) \cap [J]((d^-)^t)\big)$
- για κάθε $A \in V$, $\theta_G^F(I, J)(A) = \bigcap_{A \rightarrow d} \big([J]((d^+)^f) \cup [I]((d^-)^f)\big)$

Ορίζουμε επίσης τα παρακάτω:

- $\theta_G^{T\uparrow 0} = \theta_G^{F\uparrow 0} = \bigsqcup \varnothing$
- για κάθε $i < \omega$, $\theta_G^{T\uparrow i+1} = \theta_G^T(\theta_G^{T\uparrow i}, \theta_G^{F\uparrow i})$ και $\theta_G^{F\uparrow i+1} = \theta_G^F(\theta_G^{T\uparrow i}, \theta_G^{F\uparrow i})$
- $\theta_G^{T\uparrow\omega} = \bigsqcup_{i<\omega} \theta_G^{T\uparrow i}$ και $\theta_G^{F\uparrow\omega} = \bigsqcup_{i<\omega} \theta_G^{F\uparrow i}$

Θεώρημα 3.13. Έστω μία γραμματική G. Ισχύουν τα εξής:

- για κάθε ερμηνεία I, $(\theta_G^T(I^T, I^F), \theta_G^F(I^T, I^F)) = \theta_G(I)$
- για κάθε $i \le \omega$, $(\theta_G^{T\uparrow i}, \theta_G^{F\uparrow i}) = \theta_G^{\uparrow i}$

Απόδειξη. Έστω $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$. Για την πρώτη πρόταση, για κάθε ερμηνεία I και $A \in V$, έχουμε:

$$(\theta_G^T(I^T, I^F)(A), \theta_G^F(I^T, I^F)(A)) =$$

$$(\bigcup_{A \to d}\left([I^T]((d^+)^t) \cap [I^F]((d^-)^t)\right), \bigcap_{A \to d}\left([I^F]((d^+)^f) \cup [I^T]((d^-)^f)\right)) =$$

$$(\bigcup_{A \to d}\left(([I](d^+))^T \cap ([I](d^-))^T\right), \bigcap_{A \to d}\left(([I](d^+))^F \cup ([I](d^-))^F\right)) =$$

$$\bigcup_{A \to d}\left([I](d^+) \cap [I](d^-)\right) = \bigcup_{A \to d}[I](d) = \theta_G(I)(A)$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το θεώρημα 3.10.

Για τη δεύτερη πρόταση, αποδεικνύουμε μέσω επαγωγής ότι $(\theta_G^{T\uparrow i}, \theta_G^{F\uparrow i}) = \theta_G^{\uparrow i}$, για κάθε $i < \omega$. Για την επαγωγική βάση έχουμε ότι $(\theta_G^{T\uparrow 0}, \theta_G^{F\uparrow 0}) = (\bigcup \emptyset, \bigcup \emptyset) = \bigcup_{\mathscr{F}} \emptyset = \theta_G^{\uparrow 0}$ και για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας ότι η πρόταση ισχύει για το i:

$$(\theta_G^{T\uparrow i+1}, \theta_G^{F\uparrow i+1}) = (\theta_G^T(\theta_G^{T\uparrow i}), \theta_G^F(\theta_G^{F\uparrow i})) = (\theta_G^T((\theta_G^{\uparrow i})^T), \theta_G^F((\theta_G^{\uparrow i})^F)) = \theta_G(\theta_G^{\uparrow i}) = \theta_G^{\uparrow i+1}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν και ότι:

$$(\theta_G^{T\uparrow\omega}, \theta_G^{F\uparrow\omega}) = (\bigcup_{i<\omega}\theta_G^{T\uparrow i}, \bigcup_{i<\omega}\theta_G^{F\uparrow i}) = (\bigcup_{i<\omega}(\theta_G^{\uparrow i})^T, \bigcup_{i<\omega}(\theta_G^{\uparrow i})^F) = \bigcup_{i<\omega}{}_{\mathscr{F}}\, \theta_G^{\uparrow i} = \theta_G^{\uparrow\omega}$$

3.3. Συνέχεια ως προς ⊑ με χρήση σταθερής ερμηνείας

Ορισμός 3.6. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$ και Ι το σύνολο των ερμηνειών της. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\Theta_G \in \mathrm{I}^2 \to \mathrm{I}$. Για κάθε $I, J \in \mathrm{I}$:

για κάθε $A \in V$, $\Theta_G(I, J)(A) = \bigcup_{A \to d}\left([I](d^+) \cap [J](d^-)\right)$

Ορισμός 3.7. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma,\ V,\ \varphi,\ A_0)$, I το σύνολο των ερμηνειών της και $J \in \mathrm{I}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση ${}_J\Theta_G \in \mathrm{I} \to \mathrm{I}$. Για κάθε $I \in \mathrm{I}$, ${}_J\Theta_G(I) = \Theta_G(I,\ J)$.

Ορίζουμε επίσης τα παρακάτω:

- για κάθε $i < \omega$, ${}_J\Theta_G^{\uparrow i} = {}_J\Theta_G^{i}(\bigcup \varnothing)$
- ${}_J\Theta_G^{\uparrow \omega} = \bigcup_{i < \omega} {}_J\Theta_G^{\uparrow i}$
- για κάθε $i < \omega$, ${}_J\Theta_G^{\uparrow\uparrow i} = {}_J\Theta_G^{i}((J^T,\ \overline{J^T}^{\mathrm{pw}:V}))$
- ${}_J\Theta_G^{\uparrow\uparrow \omega} = \bigcup_{i < \omega} {}_J\Theta_G^{\uparrow\uparrow i}$

Θεώρημα 3.14. Έστω μία γραμματική G και J μία ερμηνεία της. Η συνάρτηση ${}_J\Theta_G$ είναι συνεχής ως προς $\sqsubseteq$.

Απόδειξη. Έστω $G = (\Sigma,\ V,\ \varphi,\ A_0)$. Για κάθε κατευθυνόμενο σύνολο ερμηνειών I, εχούμε ότι, για κάθε $A \in V$:

$$
{}_J\Theta_G(\bigcup \mathrm{I})(A) = \bigcup_{A \to d}\left([\bigcup \mathrm{I}](d^+) \cap [J](d^-)\right) = \bigcup_{A \to d}\left(\bigcup_{I \in \mathrm{I}} [I](d^+) \cap [J](d^-)\right) =
$$

$$
\bigcup_{A \to d}\ \bigcup_{I \in \mathrm{I}}\left([I](d^+) \cap [J](d^-)\right) = \bigcup_{A \to d,\ I \in \mathrm{I}}\left([I](d^+) \cap [J](d^-)\right) =
$$

$$
\bigcup_{I \in \mathrm{I}}\ \bigcup_{A \to d}\left([I](d^+) \cap [J](d^-)\right) = \bigcup_{I \in \mathrm{I}} {}_J\Theta_G(I)(A) = \left(\bigcup_{I \in \mathrm{I}} {}_J\Theta_G(I)\right)(A)
$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τη δεύτερη πρόταση του θεωρήματος 3.9.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.3 συμπεραίνουμε λοιπόν τα παρακάτω.

Πόρισμα 3.15. Έστω μία γραμματική G και J μία ερμηνεία της. Το ${}_J\Theta_G^{\uparrow \omega}$ είναι:

- σταθερό σημείο του ${}_J\Theta_G$
- το ελάχιστο προσταθερό σημείο ως προς $\sqsubseteq$ του ${}_J\Theta_G$

Ορισμός 3.8. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma\,,\ V\,,\ \varphi,\ A_0)$, I το σύνολο των δυαδικών ερμηνειών της και $J \in \mathrm{I}$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις ${}_J\theta_G^T,\ {}^J\theta_G^F \in \mathrm{I} \to \mathrm{I}$. Για κάθε $I \in \mathrm{I}$:

- ${}_J\theta_G^T(I) = \theta_G^T(I,\ J)$
- ${}^J\theta_G^F(I) = \theta_G^F(J\,,\ I)$

Ορίζουμε επίσης τα παρακάτω:

- για κάθε $i < \omega$, ${}_J\theta_G^{T\uparrow i} = \left({}_J\theta_G^T\right)^i(\bigcup \varnothing)$ και ${}^J\theta_G^{F\downarrow i} = \left({}^J\theta_G^F\right)^i(\bigcap \varnothing)$
- ${}_J\theta_G^{T\uparrow\omega} = \bigcup_{i<\omega} {}_J\theta_G^{T\uparrow i}$ και ${}^J\theta_G^{F\downarrow\omega} = \bigcap_{i<\omega} {}^J\theta_G^{F\downarrow i}$

Θεώρημα 3.16. Έστω μία γραμματική G και J μία ερμηνεία της. Ισχύουν τα εξής:

- για κάθε ερμηνεία I, $({}_{J^F}\theta_G^T(I^T),\ {}^{J^T}\theta_G^F(I^F)) = {}_J\Theta_G(I)$
- για κάθε $i \leq \omega$, $({}_{J^F}\theta_G^{T\uparrow i},\ {}^{J^T}\theta_G^{F\downarrow i}) = {}_J\Theta_G^{\uparrow i}$

Απόδειξη. Έστω $G = (\Sigma\,,\ V\,,\ \varphi,\ A_0)$. Για την πρώτη πρόταση, για κάθε ερμηνεία I και $A \in V$, έχουμε:

$$({}_{J^F}\theta_G^T(I^T)(A),\ {}^{J^T}\theta_G^F(I^F)(A)) =$$

$$\Big(\bigcup_{A\to d}\left([I^T]((d^+)^t) \cap [J^F]((d^-)^t)\right),\ \bigcap_{A\to d}\left([I^F]((d^+)^f) \cup [J^T]((d^-)^f)\right)\Big) =$$

$$\Big(\bigcup_{A\to d}\left(([I](d^+))^T \cap ([J](d^-))^T\right),\ \bigcap_{A\to d}\left(([I](d^+))^F \cup ([J](d^-))^F\right)\Big) =$$

$$\bigcup_{A\to d}\left([I](d^+) \cap [J](d^-)\right) = {}_J\Theta_G(I)(A)$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το θεώρημα 3.10.

Για τη δεύτερη πρόταση, αποδεικνύουμε μέσω επαγωγής πως $({}_{J^F}\theta_G^{T\uparrow i},\ {}^{J^T}\theta_G^{F\downarrow i}) = {}_J\Theta_G^{\uparrow i}$, για κάθε $i < \omega$. Η επαγωγική βάση ισχύει επειδή $({}_{J^F}\theta_G^{T\uparrow 0},\ {}^{J^T}\theta_G^{F\downarrow 0}) = (\bigcup \varnothing\,,\ \bigcap \varnothing) = \bigcup \varnothing = {}_J\Theta_G^{\uparrow 0}$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας ότι η πρόταση ισχύει για το i, έχουμε:

$$({}_{J^F}\theta_G^{T\uparrow i+1},\ {}^{J^T}\theta_G^{F\downarrow i+1}) = ({}_{J^F}\theta_G^T({}_{J^F}\theta_G^{T\uparrow i}),\ {}^{J^T}\theta_G^F({}_{J^T}\theta_G^{F\downarrow i})) = ({}_{J^F}\theta_G^T(({}_J\Theta_G^{\uparrow i})^T),\ {}^{J^T}\theta_G^F(({}_J\Theta_G^{\uparrow i})^F)) =$$

$_J\Theta_G\big({}_J\Theta_G^{\uparrow i}\big) = {}_J\Theta_G^{\uparrow i+1}$

Συμπεραίνουμε έτσι και ότι:

$$\big({}_{J^F}\theta_G^{T\uparrow\omega},\ {}^{J^T}\theta_G^{F\downarrow\omega}\big) = \big(\bigcup_{i<\omega} {}_{J^F}\theta_G^{T\uparrow i},\ \bigcap_{i<\omega} {}^{J^T}\theta_G^{F\downarrow i}\big) = \bigcup_{i<\omega}\big({}_{J^F}\theta_G^{T\uparrow i},\ {}^{J^T}\theta_G^{F\downarrow i}\big) = \bigcup_{i<\omega} {}_J\Theta_G^{\uparrow i} = {}_J\Theta_G^{\uparrow\omega}$$

4. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία

Ορισμός 3.9. Έστω μία γραμματική G και Ι το σύνολο των ερμηνειών της. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\Omega_G \in \mathrm{I} \to \mathrm{I}$. Για κάθε $I \in \mathrm{I}$, $\Omega_G(I) = {}_I\Theta_G^{\uparrow\omega}$. Ορίζουμε επίσης τα παρακάτω:

- για κάθε $i < \omega$, $\Omega_G^{\uparrow i} = \Omega_G^{i}\big(\bigcup_{\mathscr{F}} \varnothing\big)$
- $\Omega_G^{\uparrow\omega} = \bigcup_{i<\omega}{}_{\mathscr{F}}\ \Omega_G^{\uparrow i}$

Θεώρημα 3.17. Έστω μία γραμματική G και I ένα σταθερό σημείο του Ω_G. Το I είναι:

- εξισωτικό μοντέλο του G
- ελαχιστικό ως προς $\subseteq$ μοντέλο του G

Απόδειξη. Έστω $G = (\Sigma,\ V,\ \varphi,\ A_0)$. Για την πρώτη πρόταση παρατηρούμε πως, αφού $I = \Omega_G(I) = {}_I\Theta_G^{\uparrow\omega}$, το I είναι σταθερό σημείο του ${}_I\Theta_G$ και έτσι, για κάθε $A \in V$:

$$I(A) = {}_I\Theta_G(A) = \bigcup_{A\to d}\big([I](d^+) \cap [I](d^-)\big) = \bigcup_{A\to d}[I](d)$$

Για τη δεύτερη πρόταση έστω κάποιο μοντέλο J με $J \subset I$. Θα αποδείξουμε μέσω επαγωγής ότι, για κάθε $i < \omega$, $J \supseteq {}_I\Theta_G^{\uparrow i}$. Για την επαγωγική βάση, βλέπουμε ότι $J \supseteq \bigcup \varnothing = {}_I\Theta_G^{\uparrow 0}$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας ότι η πρόταση ισχύει για το i, έχουμε τα παρακάτω, για κάθε $A \in V$:

$$J(A) \supseteq \bigcup_{A\to d}[J](d) = \bigcup_{A\to d}\Big([J](d^+) \cap \bigcap_{c\in (d^-)^{\arg}} \overline{[J](c^{\arg})}\Big) \supseteq \bigcup_{A\to d}\Big([{}_I\Theta_G^{\uparrow i}](d^+) \cap \bigcap_{c\in (d^-)^{\arg}} \overline{[I](c^{\arg})}\Big) =$$

$$\bigcup_{A\to d}\big([{}_I\Theta_G^{\uparrow i}](d^+) \cap [I](d^-)\big) = {}_I\Theta_G\big({}_I\Theta_G^{\uparrow i}\big) = {}_I\Theta_G^{\uparrow i+1}$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει επειδή το J είναι μοντέλο. Η δεύτερη προκύπτει από την αντιμονοτονία του $\overline{}$, τη μονοτονία των $\bigcap^{(|(d^-)^{\mathrm{arg}}|)}$ και $\bigcap^{(2)}$ και τα παρακάτω, για κάθε κανονικό όρο σύζευξης d:

- αφού $J \supseteq {}_I\Theta_G^{\uparrow i}$ (λόγω της επαγωγικής υπόθεσης), από το θεώρημα 3.9:
  $[J](d^+) \supseteq [{}_I\Theta_G^{\uparrow i}](d^+)$
- για κάθε $c \in (d^-)^{\mathrm{arg}}$, αφού $J \subseteq I$ (λόγω της υπόθεσης για το J), από το θεώρημα 3.9:
  $[J](c^{\mathrm{arg}}) \subseteq [I](c^{\mathrm{arg}})$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $J \supseteq \bigcup_{i < \omega} {}_I\Theta_G^{\uparrow i} = {}_I\Theta_G^{\uparrow \omega} = \Omega_G(I) = I$, που είναι άτοπο.

Θεώρημα 3.18. Έστω μία γραμματική G, I το σύνολο των ερμηνειών της και, για κάθε $i < \omega$, $\Omega_i \in \mathrm{I} \to \mathrm{I}$, όπου, για κάθε $I \in \mathrm{I}$, $\Omega_i(I) = {}_I\Theta_G^{\uparrow i}$. Για κάθε $i < \omega$, η συνάρτηση Ω_i είναι συνεχής ως προς $\subseteq_{\mathscr{F}}$.

Απόδειξη. Έστω $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$. Αποδεικνύουμε την πρόταση μέσω επαγωγής. Για την επαγωγική βάση, βλέπουμε πως, για κάθε κατευθυνόμενο $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$:

$$\Omega_0\left(\bigcup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}\right) = {}_{\cup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}}\Theta_G^{\uparrow 0} = \bigcup_{\mathscr{F}} \varnothing = \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}} \left(\bigcup_{\mathscr{F}} \varnothing\right) = \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, {}_I\Theta_G^{\uparrow 0} = \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, \Omega_0(I)$$

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας πως η πρόταση ισχύει για το i, έχουμε ότι, για κάθε κατευθυνόμενο $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$, για κάθε $A \in V$:

$$\Omega_{i+1}\left(\bigcup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}\right)(A) = {}_{\cup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}}\Theta_G^{\uparrow i+1}(A) = {}_{\cup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}}\Theta_G\left({}_{\cup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}}\Theta_G^{\uparrow i}\right)(A) = {}_{\cup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}}\Theta_G\left(\bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, {}_I\Theta_G^{\uparrow i}\right)(A) =$$

$$\bigcup_{A \to d}\left(\left[\bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, {}_I\Theta_G^{\uparrow i}\right](d^+) \cap \left[\bigcup_{\mathscr{F}} \mathrm{J}\right](d^-)\right) = \bigcup_{A \to d}\left(\bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}} [{}_I\Theta_G^{\uparrow i}](d^+) \cap \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}} [I](d^-)\right) =$$

$$\bigcup_{A \to d}\left(\bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}} \left([{}_I\Theta_G^{\uparrow i}](d^+) \cap [I](d^-)\right)\right) = \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}} \left(\bigcup_{A \to d}\left([{}_I\Theta_G^{\uparrow i}](d^+) \cap [I](d^-)\right)\right) =$$

$$\bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, {}_I\Theta_G\left({}_I\Theta_G^{\uparrow i}\right)(A) = \bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, {}_I\Theta_G^{\uparrow i+1}(A) = \left(\bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, {}_I\Theta_G^{\uparrow i+1}\right)(A) = \left(\bigcup_{I \in \mathrm{J}}{}_{\mathscr{F}}\, \Omega_{i+1}(I)\right)(A)$$

Η τρίτη ισότητα ισχύει λόγω της υπόθεσης. Η πέμπτη ισότητα ισχύει λόγω της συνέχειας του $[\ ]$, της μονοτονίας του Ω_i και του ότι το J είναι κατευθυνόμενο. Η έκτη ισότητα ισχύει λόγω της συνέχειας του $\bigcap^{(2)}$, της μονοτονίας του $[\ ]$, της μονοτονίας του Ω_i και του ότι το J είναι κατευθυνόμενο. Η έβδομη ισότητα ισχύει λόγω της συνέχειας του $\bigcup^{(|\{d \mid A \to d\}|)}$, της μονοτονίας του $\bigcap^{(2)}$, της μονοτονίας του [ ], της μονοτονίας του Ω_i και του ότι το J είναι κατευθυνόμενο.

Θεώρημα 3.19. Έστω μία γραμματική G. Η συνάρτηση Ω_G είναι συνεχής ως προς $\subseteq_{\mathscr{F}}$.

Απόδειξη. Έστω $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$. Για κάθε ερμηνεία I και $w \in \Sigma^*$, ορίζουμε την ερμηνεία $I^{\cap w}$, θεωρώντας ότι, για κάθε $A \in V$, $I^{\cap w}(A) = I(A) \cap \{v \in \Sigma^* \mid v \leq_{\text{sub}} w\}$. Έστω μία ερμηνεία I και $w \in \Sigma^*$. Θα αποδείξουμε μέσω επαγωγής ότι, για κάθε $i < \omega$, για κάθε $A \in V$ και $v \in \Sigma^*$ με $v \leq_{\text{sub}} w$, ${}_I\Theta_G^{\uparrow i}(A)(v) = {}_{I^{\cap w}}\Theta_G^{\uparrow i}(A)(v)$ (1). Για την επαγωγική βάση, έχουμε ότι, για κάθε $A \in V$ και $v \in \Sigma^*$, ${}_I\Theta_G^{\uparrow 0}(A)(v) = 0 = {}_{I^{\cap w}}\Theta_G^{\uparrow 0}(A)(v)$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας ότι το ζητούμενο ισχύει για το i, αρχικά αποδεικνύουμε μέσω επαγωγής στο βάθος των όρων ότι, για κάθε όρο τ, για κάθε $v \in \Sigma^*$ με $v \leq_{\text{sub}} w$, $[I](\tau)(v) = [I^{\cap w}](\tau)(v)$ και $[{}_I\Theta_G^{\uparrow i}](\tau)(v) = [{}_{I^{\cap w}}\Theta_G^{\uparrow i}](\tau)(v)$ (2). Για την επαγωγική βάση, έχουμε ότι, για κάθε όρο βάθους 0, χ (το χ είναι απλός όρος), για κάθε $v \in \Sigma^*$ με $v \leq_{\text{sub}} w$:

- αν $\chi \in V$, τότε:
  - $[I](\chi)(v) = I(\chi)(v) = I(\chi)(v) \wedge 1 = I(\chi)(v) \wedge \{u \in \Sigma^* \mid u \leq_{\text{sub}} w\}(v) = \left(I(\chi) \cap \{u \in \Sigma^* \mid u \leq_{\text{sub}} w\}\right)(v) = I^{\cap w}(\chi)(v) = [I^{\cap w}](\chi)(v)$
  - $[{}_I\Theta_G^{\uparrow i}](\chi)(v) = {}_I\Theta_G^{\uparrow i}(\chi)(v) = {}_{I^{\cap w}}\Theta_G^{\uparrow i}(\chi)(v) = [{}_{I^{\cap w}}\Theta_G^{\uparrow i}](\chi)(v)$

    Η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της υπόθεσης για το i.
- αν $\chi \in \Sigma$, τότε:
  - $[I](\chi)(v) = [\![\chi]\!](v) = [I^{\cap w}](\chi)(v)$
  - $[{}_I\Theta_G^{\uparrow i}](\chi)(v) = [\![\chi]\!](v) = [{}_{I^{\cap w}}\Theta_G^{\uparrow i}](\chi)(v)$

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε όρο βάθους $\leq d$, συμπεραίνουμε ότι, για κάθε όρο βάθους $d + 1$, τ (το τ είναι σύνθετος όρος), για κάθε $v \in \Sigma^*$ με $v \leq_{\text{sub}} w$:

- αν $\tau = (., \upsilon)$, τότε:
  - $[I](\tau)(v) = \left(\dot{\prod}_{i < |\upsilon|} [I](\upsilon(i))\right)(v) = \bigvee_{\substack{u \in (\Sigma^*)^{|\upsilon|},\\ \cdot u = w}} \bigwedge_{i < |\upsilon|} [I](\upsilon(i))(u(i)) =$

$$\bigvee_{\substack{u \in (\Sigma^*)^{|v|}, \\ \bullet u = w}} \bigwedge_{i < |v|} [I^{\cap w}](v(i))(u(i)) = \left(\bullet_{i < |v|}[I^{\cap w}](v(i))\right)(v) = [I^{\cap w}](\tau)(v)$$

Η τρίτη ισότητα ισχύει λόγω της υπόθεσης για το d και του γεγονότος ότι, για κάθε $u \in (\Sigma^*)^{|v|}$ με $\bullet\, u = v$, για κάθε $i < |v|$, $u(i) \leq_{\text{sub}} v \leq_{\text{sub}} w$.

- ανάλογα με πριν βλέπουμε και ότι $[{}_I\Theta_G^{\uparrow i}](\tau)(v) = [{}_{I^{\cap w}}\Theta_G^{\uparrow i}](\tau)(v)$

- με παρόμοιο τρόπο προκύπτει το ζητούμενο και για τους υπόλοιπους τελεστές

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, για κάθε $A \in V$ και $v \in \Sigma^*$ με $v \leq_{\text{sub}} w$:

$${}_I\Theta_G^{\uparrow i+1}(A)(v) = {}_I\Theta_G({}_I\Theta_G^{\uparrow i})(A)(v) = \bigvee_{A \to d}\left([{}_I\Theta_G^{\uparrow i}](d^+)(v) \wedge [I](d^-)(v)\right) =$$

$$\bigvee_{A \to d}\left([{}_{I^{\cap w}}\Theta_G^{\uparrow i}](d^+)(v) \wedge [I^{\cap w}](d^-)(v)\right) = {}_{I^{\cap w}}\Theta_G({}_{I^{\cap w}}\Theta_G^{\uparrow i})(A)(v) = {}_{I^{\cap w}}\Theta_G^{\uparrow i+1}(A)(v)$$

Η τρίτη ισότητα προκύπτει από το (2).

Έτσι, για κάθε κατευθυνόμενο σύνολο ερμηνειών I, για κάθε $A \in V$ και $w \in \Sigma^*$, θεωρώντας:

$$n = \min\{ j < \omega \mid \forall\, J \in \{\textstyle\bigcup_{\mathscr{F}} \mathrm{I}\} \cup \{I^{\cap w} \mid I \in \mathrm{I}\}\ \ {}_J\Theta_G^{\uparrow j}(A)(w) = \bigvee_{i < \omega} {}_J\Theta_G^{\uparrow i}(A)(w)\}$$

(το n ορίζεται επειδή, για κάθε ερμηνεία J, υπάρχει $k < \omega$, τέτοιο ώστε, για κάθε $k \leq j < \omega$, ${}_J\Theta_G^{\uparrow j}(A)(w) = \bigvee_{i < \omega} {}_J\Theta_G^{\uparrow i}(A)(w)$, και επιπλέον το $\{I^{\cap w} \mid I \in \mathrm{I}\}$ είναι πεπερασμένο), έχουμε ότι:

$$\Omega_G(\textstyle\bigcup_{\mathscr{F}} \mathrm{I})(A)(w) = {}_{\cup_{\mathscr{F}} \mathrm{I}}\Theta_G^{\uparrow \omega}(A)(w) = \displaystyle\bigvee_{i < \omega} {}_{\cup_{\mathscr{F}} \mathrm{I}}\Theta_G^{\uparrow i}(A)(w) \overset{[1]}{=} {}_{\cup_{\mathscr{F}} \mathrm{I}}\Theta_G^{\uparrow n}(A)(w) \overset{[2]}{=}$$

$$\left(\bigcup_{I \in \mathrm{I}}^{\mathscr{F}} {}_I\Theta_G^{\uparrow n}\right)(A)(w) = \bigvee_{I \in \mathrm{I}}^{\mathscr{F}} {}_I\Theta_G^{\uparrow n}(A)(w) \overset{[3]}{=} \bigvee_{I \in \mathrm{I}}^{\mathscr{F}} {}_{I^{\cap w}}\Theta_G^{\uparrow n}(A)(w) \overset{[4]}{=} \bigvee_{I \in \mathrm{I}}^{\mathscr{F}}\left(\bigvee_{i < \omega} {}_{I^{\cap w}}\Theta_G^{\uparrow i}(A)(w)\right) \overset{[5]}{=}$$

$$\bigvee_{I \in \mathrm{I}}^{\mathscr{F}}\left(\bigvee_{i < \omega} {}_I\Theta_G^{\uparrow i}(A)(w)\right) = \bigvee_{I \in \mathrm{I}}^{\mathscr{F}} {}_I\Theta_G^{\uparrow \omega}(A)(w) = \left(\bigcup_{I \in \mathrm{I}}^{\mathscr{F}} {}_I\Theta_G^{\uparrow \omega}\right)(A)(w) = \left(\bigcup_{I \in \mathrm{I}}^{\mathscr{F}} \Omega_G(I)\right)(A)(w)$$

Αιτιολογούμε τις σημειωμένες ισότητες ως εξής:

- τα [1] και [4] προκύπτουν από τον ορισμό του n
- το [2] προκύπτει από το θεώρημα 3.18
- τα [3] και [5] προκύπτουν από το (1)

Θεώρημα 3.20. Έστω μία γραμματική G. Το $(\Omega_G^{\uparrow i+1})_{i<\omega}$ είναι:

- εξισωτικό καλά θεμελιωμένο μοντέλο του G
- το ελάχιστο καλά θεμελιωμένο μοντέλο του G

Απόδειξη. Έστω $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι, για κάθε απειρική ερμηνεία I, $A \in V$ και $i < \omega$, ${}_{\overset{\text{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(i)}\Theta_G(I(i))(A) = \left(\bigcup_{A \to d}[I](d^{\text{wf}})\right)(i)$ (1). Έχουμε τα παρακάτω:

$$
{}_{\overset{\text{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(i)}\Theta_G(I(i))(A) = \bigcup_{A \to d}\left([I(i)](d^{+}) \cap [\overset{\text{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(i)](d^{-})\right) = \bigcup_{A \to d}\left(\bigcap_{c \in (d^{+})^{\text{arg}}}[I(i)](c) \cap \bigcap_{c \in (d^{-})^{\text{arg}}}[\overset{\text{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(i)](c)\right) =
$$

$$
\bigcup_{A \to d}\left(\bigcap_{c \in (d^{+})^{\text{arg}}}\left([I](c^{\text{wf}})(i)\right) \cap \bigcap_{c \in (d^{-})^{\text{arg}}}\left([I](c^{\text{wf}})(i)\right)\right) = \bigcup_{A \to d}\left(\bigcap_{c \in d^{\text{arg}}}\left([I](c^{\text{wf}})(i)\right)\right) = \bigcup_{A \to d}\left(\left(\bigcap_{c \in d^{\text{arg}}}[I](c^{\text{wf}})\right)(i)\right) =
$$

$$
\bigcup_{A \to d}\left([I]((\&, (d^{\text{arg}})^{\text{im}(\text{wf})}))(i)\right) = \bigcup_{A \to d}\left([I](d^{\text{wf}})(i)\right) = \left(\bigcup_{A \to d}[I](d^{\text{wf}})\right)(i)
$$

Για να αιτιολογήσουμε την τρίτη ισότητα ακολουθούμε την εξής σειρά συλλογισμών:

- για κάθε $A \in V$:
  - $[I(i)](A) = I(i)(A) = I(A)(i) = [I](A)(i) = [I](A^{\text{wf}})(i)$
  - $[\overset{\text{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(i)](A) = \overset{\text{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(i)(A) = \overset{\text{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(A)(i) = \overline{I(A)}(i) = \overline{[I](A)}(i) =$ $[I]((\wedge, A))(i) = [I](A^{\text{u} \circ \text{wf}})(i)$
- για κάθε $a \in \Sigma$:
  - $[I(i)](a) = [\![a]\!] = [\![a]\!](i) = [I](a)(i) = [I](a^{\text{wf}})(i)$
  - $[\overset{\text{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(i)](a) = [\![a]\!] = [\![a]\!](i) = [I](a)(i) = [I](a^{\text{u} \circ \text{wf}})(i)$
- για κάθε κανονικό όρο παράθεσης $\alpha = (., \chi)$:
  - $[I(i)](\alpha) = \bullet_{k \le |\chi|}[I(i)](\chi(k)) = \bullet_{k \le |\chi|}\left([I](\chi(k)^{\text{wf}})(i)\right) =$ $\left(\bullet_{k \le |\chi|}[I](\chi(k)^{\text{wf}})\right)(i) = [I]((., \chi^{\text{im}(\text{wf})}))(i) = [I](\alpha^{\text{wf}})(i)$
  - $[\overset{\text{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(i)](\alpha) = \bullet_{k \le |\chi|}[\overset{\text{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(i)](\chi(k)) = \bullet_{k \le |\chi|}\left([I](\chi(k)^{\text{u} \circ \text{wf}})(i)\right) =$ $\left(\bullet_{k \le |\chi|}[I](\chi(k)^{\text{u} \circ \text{wf}})\right)(i) = [I]((., \chi^{\text{im}(\text{u} \circ \text{wf})}))(i) = [I](\alpha^{\text{u} \circ \text{wf}})(i)$
- για κάθε κανονικό όρο άρνησης $c = (\sim, \alpha)$:

$$
[\overset{\text{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(i)](c) = \overline{[\overset{\text{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(i)](\alpha)} = \overline{[I](\alpha^{\text{u} \circ \text{wf}})(i)} = \overline{[I](\alpha^{\text{u} \circ \text{wf}})}(i) = [I]((\sim, \alpha^{\text{u} \circ \text{wf}}))(i) = [I](c^{\text{wf}})(i)
$$

Για την πρώτη πρόταση, βλέπουμε πως, για κάθε $A \in V$:

$$
(\Omega_G^{\uparrow i+1})_{i<\omega}(A) = (\Omega_G^{\uparrow i+1}(A))_{i<\omega} = ({}_{\Omega_G^{\uparrow i}}\Theta_G(\Omega_G^{\uparrow i+1})(A))_{i<\omega} = ({}_{(\Omega_G^{\uparrow j})_{j<\omega}(i)}\Theta_G((\Omega_G^{\uparrow j+1})_{j<\omega}(i))(A))_{i<\omega} =
$$

$$
({}_{\overset{\text{pw}:V}{\overrightarrow{(\Omega_G^{\uparrow j+1})_{j<\omega}}}(i)}\Theta_G((\Omega_G^{\uparrow j+1})_{j<\omega}(i))(A))_{i<\omega} = \left(\left(\bigcup_{A \to d}[(\Omega_G^{\uparrow j+1})_{j<\omega}](d^{\text{wf}})\right)(i)\right)_{i<\omega} = \bigcup_{A \to d}[(\Omega_G^{\uparrow i+1})_{i<\omega}](d^{\text{wf}})
$$

απ' όπου το ζητούμενο προκύπτει σχετικά άμεσα. Η δεύτερη ισότητα ισχύει επειδή, για κάθε $i < \omega$, το $\Omega_G^{\uparrow i+1}$ είναι σταθερό σημείο του ${}_{\Omega_G^{\uparrow i}}\Theta_G$, αφού $\Omega_G^{\uparrow i+1} = \Omega_G(\Omega_G^{\uparrow i}) = {}_{\Omega_G^{\uparrow i}}\Theta_G^{\uparrow \omega}$, ενώ για την αιτιολόγηση της τέταρτης παρατηρούμε πως, για κάθε $A \in V$:

$$\left(\Omega_G^{\uparrow j}\right)_{j<\omega}(A) = \left(\Omega_G^{\uparrow j}(A)\right)_{j<\omega} = \left(\Omega_G^{\uparrow 0}(A)\right) \cdot \left(\Omega_G^{\uparrow j+1}(A)\right)_{j<\omega} = \left(\bigcup_{\mathscr{F}} \varnothing\right) \cdot \left(\Omega_G^{\uparrow j+1}\right)_{j<\omega}(A) =$$

$$\overrightarrow{\left(\Omega_G^{\uparrow j+1}\right)_{j<\omega}(A)} = \overset{\mathrm{pw}:V}{\overrightarrow{\left(\Omega_G^{\uparrow j+1}\right)_{j<\omega}}}(A)$$

Η πέμπτη ισότητα στηρίζεται στο (1).

Για τη δεύτερη πρόταση, ας θεωρήσουμε κάποιο καλά θεμελιωμένο μοντέλο I. Αν, για κάθε $i < \omega$, $\Omega_G^{\uparrow i+1} = I(i)$, τότε $\left(\Omega_G^{\uparrow i+1}\right)_{i<\omega} \subseteq I$. Αλλιώς, υποθέτοντας ότι το j είναι το πρώτο $i < \omega$ για το οποίο $\Omega_G^{\uparrow i+1} \neq I(i)$, βλέπουμε πως, για κάθε $A \in V$:

$$I(j)(A) = I(A)(j) \supseteq \left(\bigcup_{A \to d} [I](d^{\mathrm{wf}})\right)(j) = {}_{\overset{\mathrm{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(j)}\Theta_G(I(j))(A) = {}_{\Omega_G^{\uparrow j}}\Theta_G(I(j))(A)$$

δηλαδή ότι το $I(j)$ είναι προσταθερό σημείο του ${}_{\Omega_G^{\uparrow j}}\Theta_G$. Η ανισότητα ισχύει επειδή το I είναι καλά θεμελιωμένο μοντέλο και η δεύτερη ισότητα στηρίζεται στο (1). Για την τρίτη ισότητα παρατηρούμε πως, για κάθε $A \in V$:

$$\overset{\mathrm{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(j)(A) = \overset{\mathrm{pw}:V}{\overrightarrow{I}}(A)(j) = \overrightarrow{I(A)}(j) = \left(\left(\bigcup_{\mathscr{F}} \varnothing\right) \cdot I(A)\right)(j) = \Omega_G^{\uparrow j}(A)$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω των παρακάτω:

- αν $j = 0$, τότε $\left(\left(\bigcup_{\mathscr{F}} \varnothing\right) \cdot I(A)\right)(j) = \bigcup_{\mathscr{F}} \varnothing = \Omega_G^{\uparrow j}(A)$
- αλλιώς, $\left(\left(\bigcup_{\mathscr{F}} \varnothing\right) \cdot I(A)\right)(j) = I(A)(j-1) = I(j-1)(A) = \Omega_G^{\uparrow j}(A)$

Τώρα, αφού το $\Omega_G^{\uparrow j+1}$ είναι το ελάχιστο προσταθερό σημείο του ${}_{\Omega_G^{\uparrow j}}\Theta_G$, $\Omega_G^{\uparrow j+1} \subseteq I(j)$ και έτσι, λόγω και της υπόθεσης για το j, συμπεραίνουμε και πάλι πως $\left(\Omega_G^{\uparrow i+1}\right)_{i<\omega} \subseteq I$.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να διατυπώσουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα (χρησιμοποιώντας και πάλι το θεώρημα 3.3).

Πόρισμα 3.21. Έστω μία γραμματική G. Ισχύουν τα ακόλουθα:

- το $\Omega_G^{\uparrow \omega}$ είναι:
  - σταθερό σημείο του Ω_G
  - το ελάχιστο προσταθερό σημείο ως προς $\subseteq_{\mathscr{F}}$ του Ω_G
  - εξισωτικό μοντέλο του G
  - ελαχιστικό ως προς $\subseteq$ μοντέλο του G
- $\Omega_G^{\uparrow \omega} = M_G$
- $m_G \subseteq_{\mathscr{F}} M_G$

Ας εξετάσουμε τώρα την επιλογή να μη χρησιμοποιηθεί επιπλέον τελεστής και το $\sim$ να ερμηνευτεί ως η σύνθεση του $\overline{}$ με το $\vec{}$. Σε αυτή την περίπτωση η συσχέτιση μεταξύ των δύο προσεγγίσεων δε θα ήταν τόσο άμεση και το θεώρημα 3.20 δε θα ίσχυε. Ένας τρόπος για να αποδειχθεί κάτι αντίστοιχο θα απαιτούσε για μία γραμματική $G = (\Sigma,\ V,\ \varphi,\ A_0)$ να ορίσουμε τη γραμματική $G' = (\Sigma,\ V',\ \varphi',\ A_0)$, προσθέτοντας για κάθε $a \in \Sigma$ που εμφανίζεται σε αρνητικούς συζευκτέους μία νέα μεταβλητή A_a, αντικαθιστώντας το σε αυτές τις εμφανίσεις με τη νέα μεταβλητή και απαιτώντας ότι $A_a \rightarrow_{\varphi'} a$. Έτσι θα μπορούσαμε να αποδείξουμε προτάσεις αντίστοιχες με αυτές του παραπάνω θεωρήματος για τον περιορισμό του $(\Omega_{G'}^{\uparrow i+1})_{i<\omega}$ στο V. Η αντίστοιχη του (1) πρόταση στη νέα απόδειξη θα ήταν ότι, για κάθε απειρική ερμηνεία του G, I, $A \in V$ και $i < \omega$, ${}_{\vec{I}'(i)}^{\mathrm{pw}:V}\Theta_{G'}(I'(i))(A) = \Big(\bigcup_{A \rightarrow d} [I](d^{\mathrm{wf}})\Big)(i)$, όπου το I' προκύπτει επεκτείνοντας το I, θεωρώντας πως, για κάθε A_a, $I'(A_a) = [\![a]\!]$. Μετά από την απόδειξη αυτής της πρότασης η πορεία θα ήταν ανάλογη με πριν αλλά κάπως περιπλεγμένη. Τέλος, για να εξασφαλίσουμε την ισοδυναμία των δύο προσεγγίσεων θα έπρεπε να αποδείξουμε και ότι το $\Omega_G^{\uparrow\omega}$ ισούται με τον περιορισμό του $\bigcup_{i<\omega}^{\mathscr{F}} \Omega_{G'}^{\uparrow i+1}$ στο V.

Ορισμός 3.10. Έστω μία γραμματική G και Ι το σύνολο των ερμηνειών της. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\Omega'_G \in \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{I}$. Για κάθε $I \in \mathrm{I}$, $\Omega'_G(I) = {}_I\Theta_G^{\uparrow\uparrow\omega}$. Ορίζουμε επίσης τα παρακάτω:

- για κάθε $i < \omega$, $\Omega'^{\uparrow i}_G = \Omega'^{i}_G(\bigcup_{\mathscr{F}} \varnothing)$
- $\Omega'^{\uparrow\omega}_G = \bigcup_{i<\omega}^{\mathscr{F}} \Omega'^{\uparrow i}_G$

Θεώρημα 3.22. Έστω μία γραμματική G. Για κάθε $i \leq \omega$, $\Omega'^{\uparrow i}_G = \Omega^{\uparrow i}_G$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ότι, για κάθε $i < \omega$, $\Omega'^{\uparrow i}_G = \Omega^{\uparrow i}_G$ μέσω επαγωγής. Για την επαγωγική βάση, έχουμε ότι $\Omega'^{\uparrow 0}_G = \bigcup_{\mathscr{F}} \varnothing = \Omega^{\uparrow 0}_G$. Για το επαγωγικό βήμα, βλέπουμε πως, για κάθε

$i < \omega$, αν $\Omega'^{\uparrow i}_G = \Omega^{\uparrow i}_G$, τότε:

$\Omega'^{\uparrow i+1}_G = \Omega'_G(\Omega'^{\uparrow i}_G) = {}_{\Omega'^{\uparrow i}_G}\Theta^{\uparrow\uparrow\omega}_G = {}_{\Omega^{\uparrow i}_G}\Theta^{\uparrow\uparrow\omega}_G = {}_{\Omega^{\uparrow i}_G}\Theta^{\uparrow\omega}_G = \Omega_G(\Omega^{\uparrow i}_G) = \Omega^{\uparrow i+1}_G$

όπου η τέταρτη ισότητα ισχύει λόγω του θεωρήματος 3.4, δεδομένου ότι $\Omega^{\uparrow i}_G \subseteq_{\mathscr{F}} \Omega^{\uparrow i+1}_G = {}_{\Omega^{\uparrow i}_G}\Theta^{\uparrow\omega}_G$, κάτι που συνεπάγεται πως $\left(\Omega^{\uparrow i}_G\right)^T \subseteq \left({}_{\Omega^{\uparrow i}_G}\Theta^{\uparrow\omega}_G\right)^T$, άρα και ότι $\overset{\mathrm{pw}:V}{\overline{\left(\Omega^{\uparrow i}_G\right)^T}} \supseteq \overset{\mathrm{pw}:V}{\overline{\left({}_{\Omega^{\uparrow i}_G}\Theta^{\uparrow\omega}_G\right)^T}} \supseteq \left({}_{\Omega^{\uparrow i}_G}\Theta^{\uparrow\omega}_G\right)^F$ (αφού $\left({}_{\Omega^{\uparrow i}_G}\Theta^{\uparrow\omega}_G\right)^T \cap \left({}_{\Omega^{\uparrow i}_G}\Theta^{\uparrow\omega}_G\right)^F = \bigcup \emptyset$), δηλαδή $\left(\left(\Omega^{\uparrow i}_G\right)^T, \overset{\mathrm{pw}:V}{\overline{\left(\Omega^{\uparrow i}_G\right)^T}}\right) \subseteq {}_{\Omega^{\uparrow i}_G}\Theta^{\uparrow\omega}_G$.

Από την πρόταση που αποδείξαμε παίρνουμε και ότι $\Omega'^{\uparrow\omega}_G = \bigcup\limits_{i<\omega}{}_{\mathscr{F}}\ \Omega'^{\uparrow i}_G = \bigcup\limits_{i<\omega}{}_{\mathscr{F}}\ \Omega^{\uparrow i}_G = \Omega^{\uparrow\omega}_G$.

Ορισμός 3.11. Έστω μία γραμματική G και I το σύνολο των δυαδικών ερμηνειών της. Ορίζουμε τις συναρτήσεις Ω^T_G, $\Omega^F_G \in \mathrm{I} \to \mathrm{I}$. Για κάθε $I \in \mathrm{I}$:

- $\Omega^T_G(I) = {}_I\theta^{T\uparrow\omega}_G$
- $\Omega^F_G(I) = {}^I\theta^{F\downarrow\omega}_G$

Ορίζουμε επίσης τα παρακάτω:

- $\Omega^{T\uparrow 0}_G = \Omega^{F\uparrow 0}_G = \Omega^{T\nearrow 0}_G = \bigcup \emptyset$
- για κάθε $i < \omega$:
    - $\Omega^{T\uparrow i+1}_G = \Omega^T_G(\Omega^{F\uparrow i}_G)$ και $\Omega^{F\uparrow i+1}_G = \Omega^F_G(\Omega^{T\uparrow i}_G)$
    - $\Omega^{T\nearrow i+1}_G = \Omega^T_G(\Omega^{F\nearrow i}_G)$ και $\Omega^{F\nearrow i}_G = \Omega^F_G(\Omega^{T\nearrow i}_G)$
- $\Omega^{T\uparrow\omega}_G = \bigcup\limits_{i<\omega}\Omega^{T\uparrow i}_G$, $\Omega^{F\uparrow\omega}_G = \bigcup\limits_{i<\omega}\Omega^{F\uparrow i}_G$, $\Omega^{T\nearrow\omega}_G = \bigcup\limits_{i<\omega}\Omega^{T\nearrow i}_G$ και $\Omega^{F\nearrow\omega}_G = \bigcup\limits_{i<\omega}\Omega^{F\nearrow i}_G$

Θεώρημα 3.23. Έστω μία γραμματική G. Ισχύουν τα εξής:

- για κάθε ερμηνεία I, $(\Omega^T_G(I^F), \Omega^F_G(I^T)) = \Omega_G(I)$
- για κάθε $i \leq \omega$:
    - $(\Omega^{T\uparrow i}_G, \Omega^{F\uparrow i}_G) = \Omega^{\uparrow i}_G$
    - $(\Omega^{T\nearrow i}_G, \Omega^{F\nearrow i}_G) = (\Omega^{T\uparrow 2\cdot i}_G, \Omega^{F\uparrow 1+2\cdot i}_G)$

Απόδειξη. Για την πρώτη πρόταση έχουμε $\left(\Omega_G^T(I^F),\ \Omega_G^F(I^T)\right) = \left({}_{I^F}\theta_G^{T\uparrow\omega},\ {}^{I^T}\theta_G^{F\downarrow\omega}\right) = {}_I\Theta_G^{\uparrow\omega} = \Omega_G(I)$ (η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το θεώρημα 3.16).

Θα αποδείξουμε τώρα μέσω επαγωγής ότι $\left(\Omega_G^{T\uparrow i},\ \Omega_G^{F\uparrow i}\right) = \Omega_G^{\uparrow i}$, για κάθε $i < \omega$. Η επαγωγική βάση ισχύει επειδή $\left(\Omega_G^{T\uparrow 0},\ \Omega_G^{F\uparrow 0}\right) = \left(\bigcup \varnothing,\ \bigcup \varnothing\right) = \bigcup_{\mathscr{F}} \varnothing = \Omega_G^{\uparrow 0}$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας ότι η πρόταση ισχύει για το i, έχουμε:

$$\left(\Omega_G^{T\uparrow i+1},\ \Omega_G^{F\uparrow i+1}\right) = \left(\Omega_G^T(\Omega_G^{F\uparrow i}),\ \Omega_G^F(\Omega_G^{T\uparrow i})\right) = \left(\Omega_G^T\left(\left(\Omega_G^{\uparrow i}\right)^F\right),\ \Omega_G^F\left(\left(\Omega_G^{\uparrow i}\right)^T\right)\right) = \Omega_G\left(\Omega_G^{\uparrow i}\right) = \Omega_G^{\uparrow i+1}$$

Συμπεραίνουμε έτσι και ότι:

$$\left(\Omega_G^{T\uparrow\omega},\ \Omega_G^{F\uparrow\omega}\right) = \left(\bigcup_{i<\omega}\Omega_G^{T\uparrow i},\ \bigcup_{i<\omega}\Omega_G^{F\uparrow i}\right) = \bigcup_{i<\omega}{}_{\mathscr{F}}\left(\Omega_G^{T\uparrow i},\ \Omega_G^{F\uparrow i}\right) = \bigcup_{i<\omega}{}_{\mathscr{F}}\,\Omega_G^{\uparrow i} = \Omega_G^{\uparrow\omega}$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε μέσω επαγωγής ότι $\left(\Omega_G^{T\nearrow i},\ \Omega_G^{F\nearrow i}\right) = \left(\Omega_G^{T\uparrow 2\cdot i},\ \Omega_G^{F\uparrow 1+2\cdot i}\right)$, για κάθε $i < \omega$. Η επαγωγική βάση ισχύει επειδή:

- $\Omega_G^{T\nearrow 0} = \bigcup \varnothing = \Omega_G^{T\uparrow 2\cdot 0}$
- $\Omega_G^{F\nearrow 0} = \Omega_G^F\left(\Omega_G^{T\nearrow 0}\right) = \Omega_G^F\left(\Omega_G^{T\uparrow 2\cdot 0}\right) = \Omega_G^{F\uparrow 1+2\cdot 0}$

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας ότι η πρόταση ισχύει για το i, έχουμε:

- $\Omega_G^{T\nearrow i+1} = \Omega_G^T\left(\Omega_G^{F\nearrow i}\right) = \Omega_G^T\left(\Omega_G^{F\uparrow 1+2\cdot i}\right) = \Omega_G^{T\uparrow 1+2\cdot i+1} = \Omega_G^{T\uparrow 2\cdot(i+1)}$

  Η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της υπόθεσης.
- $\Omega_G^{F\nearrow i+1} = \Omega_G^F\left(\Omega_G^{T\nearrow i+1}\right) = \Omega_G^F\left(\Omega_G^{T\uparrow 2\cdot(i+1)}\right) = \Omega_G^{F\uparrow 1+2\cdot(i+1)}$

Συμπεραίνουμε λοιπόν και ότι:

- $\Omega_G^{T\nearrow\omega} = \bigcup_{i<\omega}\Omega_G^{T\nearrow i} = \bigcup_{i<\omega}\Omega_G^{T\uparrow 2\cdot i} = \bigcup_{i<\omega}\Omega_G^{T\uparrow i} = \Omega_G^{T\uparrow 2\cdot\omega}$

  Η τρίτη ισότητα ισχύει επειδή:
  - για κάθε $i < \omega$, αφού $2\cdot i < \omega$, $\Omega_G^{T\uparrow 2i} \subseteq \bigcup_{i<\omega}\Omega_G^{T\uparrow i}$, οπότε $\bigcup_{i<\omega}\Omega_G^{T\uparrow 2\cdot i} \subseteq \bigcup_{i<\omega}\Omega_G^{T\uparrow i}$
  - για κάθε $i < \omega$, λόγω της μονοτονίας του $\left(\Omega_G^{\uparrow i}\right)_{i<\omega}$, $\Omega_G^{T\uparrow i} \subseteq \Omega_G^{T\uparrow 2i}$, οπότε $\bigcup_{i<\omega}\Omega_G^{T\uparrow i} \subseteq \bigcup_{i<\omega}\Omega_G^{T\uparrow 2\cdot i}$
- $\Omega_G^{F\nearrow\omega} = \bigcup_{i<\omega}\Omega_G^{F\nearrow i} = \bigcup_{i<\omega}\Omega_G^{F\uparrow 1+2\cdot i} = \bigcup_{i<\omega}\Omega_G^{F\uparrow i} = \Omega_G^{F\uparrow 1+2\cdot\omega}$

  Η τρίτη ισότητα αιτιολογείται ανάλογα με παραπάνω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΠΑΙΓΝΙΟΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

4.1. Προκαταρκτικά
4.2. Κινήσεις και κανόνες των παιχνιδιών
4.3. Σημασιολογία Kripke-Kleene
4.4. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία

1. Προκαταρκτικά

Ορισμός 4.1. Έστω ένα σύνολο X και $P \subseteq X^{\leq\omega}$. Ορίζουμε τα ακόλουθα:

- $P^e = \{ p \in \bigcup_{i\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o} X^i \mid \exists\, q \in P \;\; p \leq_{\text{pre}} q \}$
- $P^o = \{ p \in \bigcup_{i\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}} X^i \mid \exists\, q \in P \;\; p \leq_{\text{pre}} q \}$

Ορισμός 4.1. Έστω ένα σύνολο X, $E \subseteq \bigcup_{i\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o} X^i$, $O \subseteq \bigcup_{i\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}} X^i$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $* \in (E \to X) \times (O \to X) \to X^{\leq\omega}$. Για κάθε $f \in E \to X$ και $t \in O \to X$, $f * t = p$, όπου:

- για κάθε άρτιο $i < |p|$, $(p(j))_{j<i} \in E$ και $p(i) = f((p(j))_{j<i})$
- για κάθε περιττό $i < |p|$, $(p(j))_{j<i} \in O$ και $p(i) = t((p(j))_{j<i})$
- αν $|p|$ άρτιο, τότε $p \notin E$
- αν $|p|$ περιττό, τότε $p \notin O$

Ορισμός 4.2. Ονομάζουμε *παιχνίδια* τις τετράδες (X, P, R, Φ), όπου:

- το X είναι ένα μη κενό σύνολο

  Ονομάζουμε τα στοιχεία του X *κινήσεις*.
- $P \subseteq X^{\leq \omega}$ και το P είναι αντιαλυσίδα ως προς $\leq_{\mathrm{pre}}$

  Ονομάζουμε τα στοιχεία του P *παρτίδες*. Σε μία παρτίδα p, λέμε για μία κίνηση x ότι *παίζεται* από τον *παίκτη 0* (αντίστοιχα *παίκτη 1*) μία *χρονική στιγμή* i αν και μόνο αν $i < |p|$ άρτιο (αντίστοιχα περιττό) και $x = p(i)$.
- το R είναι ένα πλήρες ολικά διατεταγμένο σύνολο

  Ονομάζουμε τα στοιχεία του $R[0]$ *πιθανά αποτελέσματα*.
- $\Phi \in P \to R[0]$

  Για κάθε $p \in P$, ονομάζουμε το $\Phi(p)$ *αποτέλεσμα* του p.

Ονομάζουμε παιχνίδια *νίκης-ισοπαλίας-ήττας* τα παιχνίδια που έχουν ακριβώς τρία πιθανά αποτελέσματα.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα διάφορα γνωστά είδη παιχνιδιών, μια ακριβέστερη ονομασία για τα συγκεκριμένα παιχνίδια θα ήταν "παιχνίδια τέλειας πληροφόρησης, μηδενικού αθροίσματος, χωρίς τυχαιότητα, δύο παικτών που παίζουν εναλλάξ".

Ορισμός 4.3. Έστω ένα παιχνίδι $\Gamma = (X, P, R, \Phi)$. Ονομάζουμε *στρατηγικές για τον παίκτη 0* τις συναρτήσεις $s \in P^e - P \to X$, όπου, για κάθε $p \in P^e - P$, $p \cdot (s(p)) \in P^o$.

Ονομάζουμε *στρατηγικές για τον παίκτη 1* τις συναρτήσεις $s \in P^o - P \to X$, όπου, για κάθε $p \in P^o - P$, $p \cdot (s(p)) \in P^e$.

Ορισμός 4.4. Έστω ένα παιχνίδι (X, P, R, Φ), $\bigvee$, $\bigwedge$ οι πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του R, F, T τα σύνολα των στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1, αντίστοιχα, και $r \in R[0]$. Λέμε ότι το συγκεκριμένο παιχνίδι έχει *τιμή* r αν και μόνο αν:

$$\bigvee_{t \in T} \left(\bigwedge_{f \in F} \Phi(f * t) \right) = \bigwedge_{f \in F} \left(\bigvee_{t \in T} \Phi(f * t) \right) = r$$

Θεώρημα 4.1. Έστω ένα παιχνίδι νίκης-ισοπαλίας-ήττας $\Gamma = (X, P, (R, \leq), \Phi)$, όπου $R = \{r_0, r_{0.5}, r_1\}$ και $r_0 \leq r_{0.5} \leq r_1$, και F, T τα σύνολα των στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1, αντίστοιχα. Ισχύουν τα ακόλουθα:

- το Γ έχει τιμή r_1 αν και μόνο αν υπάρχει $\hat{t} \in T$, τέτοιο ώστε, για κάθε $f \in F$, $\Phi(f * \hat{t}) = r_1$
- το Γ έχει τιμή r_0 αν και μόνο αν υπάρχει $\widehat{f} \in F$, τέτοιο ώστε, για κάθε $t \in T$, $\Phi(\widehat{f} * t) = r_0$
- το Γ έχει τιμή $r_{0.5}$ αν και μόνο αν:
  - υπάρχει $\hat{t} \in T$, τέτοιο ώστε, για κάθε $f \in F$, $\Phi(f * \hat{t}) \geq r_{0.5}$
  - υπάρχει $\widehat{f} \in F$, τέτοιο ώστε, για κάθε $t \in T$, $\Phi(\widehat{f} * t) \leq r_{0.5}$

Απόδειξη. Έστω $\bigvee$, $\bigwedge$ οι πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(R, \leq)$ και τα εξής:

- για κάθε $t \in T$, $E_t = \{\Phi(f * t) \mid f \in F\}$
- $E = \{\bigwedge E_t \mid t \in T\}$
- για κάθε $f \in F$, $E'_f = \{\Phi(f * t) \mid t \in T\}$
- $E' = \{\bigvee E_f \mid f \in F\}$

Για κάθε $r \in R$ λοιπόν, το Γ έχει τιμή r αν και μόνο αν $\bigvee E = \bigwedge E' = r$. Αρχικά θα αποδείξουμε τις κατευθύνσεις "μόνο αν" των προτάσεων του θεωρήματος.

- Έστω ότι το Γ έχει τιμή r_1, κάτι που συνεπάγεται ότι $\bigvee E = r_1$. Αφού το E, ως υποσύνολο του R, είναι πεπερασμένο και το $\leq$ είναι ολική διάταξη, βλέπουμε πως $r_1 \in E$ και συνεπώς υπάρχει $\hat{t} \in T$, τέτοιο ώστε $\bigwedge E_{\hat{t}} = r_1$ (1). Για κάθε $t \in T$, αν $\bigwedge E_t = r_1$, τότε, για κάθε $r \in E_t$, $r \geq r_1$ και, επειδή $r \leq r_1$ (αφού $r \in R$), $r = r_1$. Έτσι, για κάθε $t \in T$, αν $\bigwedge E_t = r_1$, τότε, για κάθε $f \in F$, $\Phi(f * t) = r_1$ (2). Το ζητούμενο προκύπτει από τα (1) και (2).

- Έστω ότι το Γ έχει τιμή r_0, κάτι που συνεπάγεται ότι $\bigwedge E' = r_0$. Το ζητούμενο αποδεικνύεται ανάλογα με πριν.
- Έστω ότι το Γ έχει τιμή $r_{0.5}$. Αυτό συνεπάγεται τα ακόλουθα:
  - $\bigvee E = r_{0.5}$

    Αφού το E, ως υποσύνολο του R, είναι πεπερασμένο και το $\leq$ είναι ολική διάταξη, βλέπουμε πως $r_{0.5} \in E$ και συνεπώς υπάρχει $\hat{t} \in T$, τέτοιο ώστε $\bigwedge E_{\hat{t}} = r_{0.5}$ (1). Για κάθε $t \in T$, αν $\bigwedge E_t = r_{0.5}$, τότε, για κάθε $r \in E_t$, $r \geq r_{0.5}$, δηλαδή, για κάθε $f \in F$, $\Phi(f * t) \geq r_{0.5}$ (2). Το πρώτο ζητούμενο προκύπτει από τα (1) και (2).
  - $\bigwedge E' = r_{0.5}$

    Το δεύτερο ζητούμενο αποδεικνύεται ανάλογα με πριν.

Τώρα θα αποδείξουμε και τις κατευθύνσεις "αν" των προτάσεων του θεωρήματος.

- Έστω ότι υπάρχει $\hat{t} \in T$, τέτοιο ώστε, για κάθε $f \in F$, $\Phi(f * \hat{t}) = r_1$. Για κάθε $t \in T$, αν, για κάθε $f \in F$, $\Phi(f * t) = r_1$, τότε $E_t = \{r_1\}$, άρα $\bigwedge E_t = r_1$. Από την υπόθεση και την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\hat{t} \in T$, τέτοιο ώστε $\bigwedge E_{\hat{t}} = r_1$. Βλέπουμε λοιπόν ότι $r_1 \in E$ και, επειδή, για κάθε $r \in E$, $r \leq r_1$ (αφού $r \in R$), $\bigvee E = r_1$ (1). Από την υπόθεση συμπεραίνουμε και ότι, για κάθε $f \in F$, υπάρχει $\hat{t} \in T$, τέτοιο ώστε $\Phi(f * \hat{t}) = r_1$. Για κάθε $f \in F$, το ότι υπάρχει $\hat{t} \in T$, τέτοιο ώστε $\Phi(f * \hat{t}) = r_1$, συνεπάγεται πως $r_1 \in E'_f$ και, επειδή, για κάθε $r \in E'_f$, $r \leq r_1$ (αφού $r \in R$), $\bigvee E'_f = r_1$. Άρα $E' = \{r_1\}$ και έτσι $\bigwedge E' = r_1$ (2). Το ζητούμενο προκύπτει από τα (1) και (2).
- Έστω ότι υπάρχει $\widehat{f} \in F$, τέτοιο ώστε, για κάθε $t \in T$, $\Phi(\widehat{f} * t) = r_0$. Το ζητούμενο αποδεικνύεται ανάλογα με πριν.
- Θα καταλήξουμε σε κάποια διαφορετικά συμπεράσματα για κάθε μια από τις υποθέσεις της τρίτης πρότασης.
  - Έστω ότι υπάρχει $\hat{t} \in T$, τέτοιο ώστε, για κάθε $f \in F$, $\Phi(f * \hat{t}) \geq r_{0.5}$. Για κάθε $t \in T$, αν, για κάθε $f \in F$, $\Phi(f * t) \geq r_{0.5}$, τότε, για κάθε $r \in E_t$, $r \geq r_{0.5}$, οπότε $\bigwedge E_t \geq r_{0.5}$. Από την υπόθεση και την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\hat{t} \in T$, τέτοιο ώστε $\bigwedge E_{\hat{t}} \geq r_{0.5}$. Βλέπουμε λοιπόν ότι

υπάρχει $r \in E$, τέτοιο ώστε $r \geq r_{0.5}$, οπότε $\bigvee E \geq r_{0.5}$ (1). Από την υπόθεση συμπεραίνουμε και ότι, για κάθε $f \in F$, υπάρχει $\hat{t} \in T$, τέτοιο ώστε $\Phi(f * \hat{t}) \geq r_{0.5}$. Για κάθε $f \in F$, το ότι υπάρχει $\hat{t} \in T$, τέτοιο ώστε $\Phi(f * \hat{t}) \geq r_{0.5}$, συνεπάγεται πως υπάρχει $r \in E'_f$, τέτοιο ώστε $r \geq r_{0.5}$, οπότε $\bigvee E'_f \geq r_{0.5}$. Βλέπουμε λοιπόν ότι, για κάθε $r \in E'$, $r \geq r_{0.5}$, οπότε $\bigwedge E' \geq r_{0.5}$ (2).

- Έστω ότι υπάρχει $\widehat{f} \in F$, τέτοιο ώστε, για κάθε $t \in T$, $\Phi(\widehat{f} * t) \leqslant r_{0.5}$. Ανάλογα με πριν αποδεικνύεται ότι $\bigwedge E' \leq r_{0.5}$ (3) και $\bigvee E \leq r_{0.5}$ (4).

Το ζητούμενο προκύπτει από τα (1), (2), (3) και (4).

2. Κινήσεις και κανόνες των παιχνιδιών

Ορισμός 4.5. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τις (Σ, V)-*κινήσεις* ως εξής:

- για κάθε απλό όρο ή κανονικό όρο παράθεσης ή άρνησης τ και $w \in \Sigma^*$, το (τ, w) είναι κίνηση *αμφισβήτησης*
- για κάθε κανονικό όρο σύζευξης τ και $w \in \Sigma^*$, το (τ, w) είναι κίνηση *υποστήριξης*
- για κάθε κανονικό όρο παράθεσης $\tau = (., \upsilon)$, όπου $|\upsilon| > 0$, και $\pi \in (\Sigma^*)^{|\upsilon|}$, το (τ, π) είναι κίνηση *υποστήριξης*

Από τις κινήσεις, ονομάζουμε *τελικές* όσες είναι της μορφής (a, w), όπου $a \in \Sigma$, ή $(.(), w)$. Από τις τελικές κινήσεις, ονομάζουμε *άκυρες* όσες είναι της μορφής $(a, (a))$ ή $(.(), \epsilon)$ και *έγκυρες* τις υπόλοιπες. Για κάθε ερμηνεία I, επεκτείνουμε το $[I]$ για κινήσεις ως εξής:

- για κάθε κίνηση υποστήριξης $x = ((., \alpha), \pi)$, $[I](x) = \bigwedge_{i < |\alpha|} [I](\alpha(i))(\pi(i))$
- για κάθε κίνηση που δεν είναι της παραπάνω μορφής $x = (\tau, w)$, $[I](x) = [I](\tau)(w)$

Ορισμός 4.6. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$ και X το σύνολο των (Σ, V)-κινήσεων. Ορίζουμε τη σχέση $\Rightarrow_G \subseteq \mathrm{X}^2$. Για κάθε $x, y \in \mathrm{X}$, $x \Rightarrow_G y$ αν και μόνο αν ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

- $x = (A,\ w)$, όπου $A \in V$, και $y = (d\ ,\ w)$, όπου $A \rightarrow d$
- $x = ((.,\ \alpha),\ \pi)$, το x είναι κίνηση υποστήριξης, και $y = (\alpha(i)\ ,\ \pi(i))$, όπου $i < |\alpha|$
- $x = ((.,\ \alpha),\ w)$, το x είναι κίνηση αμφισβήτησης και $y = ((.,\ \alpha),\ \pi)$, όπου $\pi \in (\Sigma^*)^{|\alpha|}$ και $\bullet\,\pi = w$
- $x = (\sim\alpha\ ,\ w)$ και $y = (\alpha\ ,\ w)$
- $x = ((\&,\ d)\ ,\ w)$ και $y = (c\ ,\ w)$, όπου $c \in d$

Παράδειγμα 4.1. Οι στήλες του πίνακα 4.1 απεικονίζουν ακολουθίες $\Rightarrow_G$-μεταβάσεων για τη γραμματική $G = (\{a\ ,\ b\},\ \{L\ ,\ A,\ X\}\ ,\ \varphi,\ L)$, όπου το φ είναι ο παρακάτω τύπος:

$$\begin{array}{l} L >= \sim A\ .\ b\ \&\ a\ .\ X\ .\ X\ , \\ A >= A\ .\ a\ , \\ A >= .()\ \&\ A\ , \\ X >= a\ , \\ X >= b\ , \\ X >= .() \end{array}$$

Στην πρώτη στήλη τα αποσιωπητικά υπονοούν άπειρες επαναλήψεις του τμήματος από αμέσως μετά την πρώτη εμφάνιση του `A, ε` μέχρι τη δεύτερη ενώ στην πέμπτη υπονοούν κάποιο πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων του τμήματος από αμέσως μετά την πρώτη εμφάνιση του `A, a` μέχρι τη δεύτερη και μία επανάληψη του τμήματος μεταξύ των δύο εμφανίσεων.

Πίνακας 4.1

L, aa	L, aa	L, aa	L, aa	L, aa	L, aa
~A.b&a.X.X, aa	~A.b&a.X.X, aa	~A.b&a.X.X, aa	~A.b&a.X.X, aa	~A.b&a.X.X, aa	~A.b&a.X.X, aa
~A.b, aa	~A.b, aa	~A.b, aa	~A.b, aa	~A.b, aa	a.X.X, aa
A.b, aa	A.b, aa	A.b, aa	A.b, aa	A.b, aa	a.X.X, (a,ε,a)
A.b, (ε,aa)	A.b, (ε,aa)	A.b, (ε,aa)	A.b, (ε,aa)	A.b, (a,a)	X, ε
A, ε	A, ε	A, ε	b, aa	A, a	&(.()), ε
&(A.a), ε	&(A.a), ε	.()&A, ε		.()&A, a	.(), ε
A.a, ε	A.a, ε	.(), ε		.(A), a	
A.a, (ε,ε)	A.a, (ε, ε)			.(A), (a)	
A, ε	a, ε			A, a	
...				...	
				A, a	
				&(A.a), a	
				A.a, a	
				A.a, (ε,a)	
				a, a	

4. Σημασιολογία Kripke-Kleene

Ορισμός 4.7. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$, Χ το σύνολο των (Σ, V)-κινήσεων αμφισβήτησης και Γ το σύνολο των παιχνιδιών. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\gamma_G \in \mathrm{X} \to \Gamma$. Για κάθε $x \in \mathrm{X}$, $\gamma_G(x) = (X, P, R, \Phi)$, όπου:

- το X είναι το σύνολο των (Σ, V)-κινήσεων
- $P = \{p \in X^{\leq \omega} \mid \mathrm{START}, \mathrm{STEPS}, \mathrm{END}\}$, όπου:
  - START: $|p| > 0$ και $p(0) = x$
  - STEPS: για κάθε $i < |p|$ με $i + 1 < |p|$, $p(i) \Rightarrow_G p(i+1)$
  - END: αν $|p| < \omega$, τότε το $p(|p| - 1)$ είναι τελική κίνηση

  Σε μία παρτίδα λέμε για κάποιον παίκτη ότι κάποια χρονική στιγμή έχει το *ρόλο του αμφισβητητή* και ότι ο αντίπαλός του έχει το *ρόλο του υποστηρικτή* αν και μόνο αν ο συγκεκριμένος παίκτης παίζει τη συγκεκριμένη χρόνικη στιγμή μία κίνηση αμφισβήτησης ή ο αντίπαλός του παίζει μία κίνηση υποστήριξης. Λέμε για κάποιον παίκτη ότι *νικά* και ότι ο αντίπαλος του *χάνει* αν και μόνο αν ο συγκεκριμένος παίκτης παίζει μία έγκυρη τελική κίνηση ή ο αντίπαλός του παίζει μία άκυρη. Λέμε ότι οι παίκτες έρχονται *ισοπαλία* αν και μόνο αν κανείς δε νικά.
- $R = (\{0, 0.5, 1\}, \leq)$
- για κάθε $p \in P$, $\Phi(p) = \begin{cases} 0, & \textit{αν ο παίκτης } 0 \textit{ νικά στο } p \\ 1, & \textit{αν ο παίκτης } 1 \textit{ νικά στο } p \\ 0.5, & \textit{αν οι παίκτες έρχονται ισοπαλία στο } p \end{cases}$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\gamma'_G \in \mathrm{X} \to \Gamma$ όπως τη συνάρτηση γ_G, με τις ακόλουθες διαφορές:

- STEPS: για κάθε $i < |p|$ με $i + 1 < |p|$, $p(i) \Rightarrow_G p(i+1)$ και δεν υπάρχει $j < i$, τέτοιο ώστε $p(j) = p(i)$
- END: αν $|p| < \omega$, τότε το $p(|p| - 1)$ είναι τελική κίνηση ή υπάρχει $j < |p| - 1$, τέτοιο ώστε $p(j) = p(|p| - 1)$

Παράδειγμα 4.2. Ο πίνακας 4.2 απεικονίζει τα αποτελέσματα των παρτίδων που περιγράφει ο πίνακας 4.1 για τα $\gamma'_G(L, aa)$ (πρώτη γραμμή) και $\gamma_G(L, aa)$ (δεύτερη γραμμή). Για το $\gamma'_G(L, aa)$, θεωρούμε ότι οι ακολουθίες τελειώνουν πριν από τα αποσιωπητικά.

Πίνακας 4.2

0.5	1	0	1	0.5	1
0.5	1	0	1	0	1

Ορισμός 4.8. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma, V, T, A_0)$ και Χ το σύνολο των (Σ, V)-κινήσεων. Ορίζουμε τη σχέση $\widehat{\Rightarrow}_G \subseteq \mathrm{X}^2$. Για κάθε $x, y \in \mathrm{X}$, $x \widehat{\Rightarrow}_G y$ αν και μόνο αν $x \Rightarrow_G y$ και:

- αν $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x) = 0.5$, τότε $[\theta_G^{\uparrow\omega}](y) = 0.5$
- αν $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x) = 0$ και το x είναι κίνηση υποστήριξης, τότε $[\theta_G^{\uparrow i}](y) = 0$, όπου:
  $i = \min\{i < \omega \mid [\theta_G^{\uparrow i}](x) = 0\}$
- αν $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x) = 1$ και το x είναι κίνηση αμφισβήτησης, τότε:
  - αν $x = (A, w)$, όπου $A \in V$, τότε $[\theta_G^{\uparrow i}](y) = 1$, όπου:
    $i = \max\{i < \omega \mid [\theta_G^{\uparrow i}](x) = 0.5\}$
  - αν $x = (\alpha, w)$, όπου το α είναι όρος παράθεσης, τότε $[\theta_G^{\uparrow i}](y) = 1$, όπου:
    $i = \min\{i < \omega \mid [\theta_G^{\uparrow i}](x) = 1\}$

Έστω μία (Σ, V)-κίνηση αμφισβήτησης x, $(X, P, R, \Phi) \in \{\gamma_G(x), \gamma'_G(x)\}$ και F, T τα σύνολα των στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1, αντίστοιχα, στο συγκεκριμένο παιχνίδι. Ορίζουμε τα εξής:

- $\widehat{F} = \{f \in F \mid \forall\ p \in P^e - P - \{\epsilon\}\ \ p(|p| - 1) \widehat{\Rightarrow}_G f(p)\}$
- $\widehat{T} = \{t \in T \mid \forall\ p \in P^o - P\ \ p(|p| - 1) \widehat{\Rightarrow}_G t(p)\}$

Παράδειγμα 4.3. Οι πρώτες δύο στήλες του πίνακα 4.3 απεικονίζουν παρτίδες του $\gamma_G(A, a)$ και τα αποτελέσματά τους, για τη γραμματική $G = (\{a\}, \{A, B\}, \varphi, A)$, όπου το φ είναι ο παρακάτω τύπος:

$\boxed{A >= a\ ,\ A >= B\ ,\ B >= A}$

Στην πρώτη στήλη, ο παίκτης 1 απαντά σε μία κίνηση του αντιπάλου του χρησιμοποιώντας μόνο το $\theta_G^{\uparrow\omega}$ (π.χ. $[\theta_G^{\uparrow\omega}]((A, a)) = 1$ και $[\theta_G^{\uparrow\omega}]((\&(B), a)) = 1$) ενώ στη δεύτερη απαντά με βάση το $\widehat{\Rightarrow}_G$.

Στις επόμενες δύο στήλες γίνεται το αντίστοιχο, θεωρώντας πως το φ είναι το παρακάτω:

$\boxed{A >= \sim a \,\&\, \sim B, B >= \sim A}$

και εξετάζοντας τη στρατηγική του παίκτη 0.

Πίνακας 4.3

A, a	A, a	A, a	A, a
&(B), a	&(a), a	~a&B, a	~a&B, a
.(B), a	.(a), a	~B, a	~a, a
.(B), (a)	.(a), (a)	.(B), a	.(a), a
B, a	a, a	.(B), (a)	.(a), (a)
&(A), a		B, a	a, a
.(A), a		&(~A), a	
.(A), (a)		~A, a	
A, a		.(A), a	
...		.(A), (a)	
		A, a	
		...	
0.5	1	0.5	0

Λήμμα 4.2. Έστω μία γραμματική G, x μία σχετική κίνηση αμφισβήτησης και F, T, F', T' τα σύνολα στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1 στα $\gamma_G(x)$ και $\gamma'_G(x)$, αντίστοιχα. Για κάθε $f' \in F'$, $\hat{t}' \in \widehat{T'}$, αν το $f' * \hat{t}'$ δεν περιλαμβάνει επανάληψη κίνησης, τότε υπάρχουν $f \in F$, $\hat{t} \in \widehat{T}$ τέτοια ώστε $f * \hat{t} = f' * \hat{t}'$. Για κάθε $\widehat{f}' \in \widehat{F'}$, $t' \in T'$, αν το $\widehat{f}' * t'$ δεν περιλαμβάνει επανάληψη κίνησης, τότε υπάρχουν $\widehat{f} \in \widehat{F}$, $t \in T$ τέτοια ώστε $\widehat{f} * t = \widehat{f}' * t'$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη πρόταση επειδή η δεύτερη αποδεικνύεται ανάλογα. Στο εξής θεωρούμε ότι $\gamma_G(x) = (X, P, R, \Phi)$ και $\gamma'_G(x) = (X, P', R, \Phi')$. Έστω κάποια $f' \in F'$, $\hat{t}' \in \widehat{T'}$, τέτοια ώστε το $f' * \hat{t}'$ να μην περιλαμβάνει επανάληψη κίνησης. Ας θεωρήσουμε ακόμη πως $f' * \hat{t}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι:

- $(x'_1, \ldots, x'_n) \in (P^e \cup P^o) \cap P$ (1)
- για κάθε $i < n$, $(x'_1, \ldots, x'_i) \in (P^e \cup P^o) - P$ (2)

Το (1) ισχύει επειδή το $(x'_1, \ldots, x'_n)$ είναι έχει πεπερασμένο μήκος και, δεδομένου ότι $(x'_1, \ldots, x'_n) \in P'$ και ότι δεν υπάρχει $1 \leq j < n$ τέτοιο ώστε $x_j = x_n$, πληροί τις προδιαγραφές του P (START, STEPS, END). Το (2) ισχύει, όσον αφορά την κενή ακολουθία, επειδή αυτή είναι πρόθεμα κάθε ακολουθίας και επειδή, λόγω του START, δεν ανήκει στο P. Για τις υπόλοιπες ακολουθίες, παρατηρούμε ότι κάθε ακολουθία κινήσεων που ικανοποιεί τα START και STEPS αλλά όχι το END δεν ανήκει στο P και μπορεί να επεκταθεί, φροντίζοντας να ικανοποιούνται τα STEPS και END, έτσι ώστε να ανήκει στο P. Για κάθε $1 \leq i < n$, το $(x'_1, \ldots, x'_i)$ ικανοποιεί τα START και STEPS επειδή $(x'_1, \ldots, x'_n) \in P'$. Αν ικανοποιούσε το END, θα έπρεπε το x'_i να είναι τελική κίνηση, δηλαδή να μην ισχύει $x'_i \Rightarrow_G x'_{i+1}$ και έτσι $(x'_1, \ldots, x'_n) \notin P'$ (άτοπο).

Βλέπουμε ακόμη ότι, αφού $\hat{t}' \in \widehat{T'}$, για κάθε περιττό $1 \leq i < n$, $x'_i \mathrel{\hat{\Rightarrow}_G} \hat{t}'((x'_1, \ldots, x'_i)) = x'_{i+1}$ (3).

Θεωρούμε τώρα κάποια $f \in F, \hat{t} \in \widehat{T}$, όπου, για κάθε:

- $p \in (P^e - P) - \{(x'_1, \ldots, x'_i) \mid i \leq n,\ i\ \text{άρτιο}\}$
- $q \in (P^o - P) - \{(x'_1, \ldots, x'_i) \mid i \leq n,\ i\ \text{περιττό}\}$

τα $f(p)$, $\hat{t}(q)$ επιλέγονται αυθαίρετα (αρκεί να πληρούν τις προδιαγραφές των F, $\widehat{T}$, αντίστοιχα). Τέλος, απαιτούμε ότι, για κάθε άρτιο $i < n$, $f((x'_1, \ldots, x'_i)) = x'_{i+1}$ και ότι, για κάθε περιττό $i < n$, $\hat{t}((x'_1, \ldots, x'_i)) = x'_{i+1}$. Το (2) επιβάλλει τον ορισμό της τιμής των $f, \hat{t}$ για τα συγκεκριμένα στοιχεία ενώ το (1) απαγορεύει τον ορισμό της τιμής τους για το $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Τα (1), (2) και (3) εγκυώνται ότι οι τιμές που ορίστηκαν πληρούν τις προδιαγραφές των F, $\widehat{T}$. Είναι φανερό, λαμβάνοντας υπ' όψιν τα (1), (2), ότι $f * \hat{t} = (x'_1, \ldots, x'_n)$.

Λήμμα 4.3. Έστω μία γραμματική G, x μία σχετική κίνηση αμφισβήτησης και F, T, F', T' τα σύνολα στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1 στα $\gamma_G(x)$ και $\gamma'_G(x)$, αντίστοιχα. Για κάθε $f' \in F', \hat{t}' \in \widehat{T'}$ και $m < |f' * \hat{t}'| - 1$, αν τις χρονικές στιγμές m και $|f' * \hat{t}'| - 1$ παίζεται η ίδια κίνηση από τον ίδιο παίκτη στο $f' * \hat{t}'$, τότε υπάρχουν $f \in F$, $\hat{t} \in \widehat{T}$, τέτοια ώστε $f * \hat{t} = (f' * \hat{t}') \cdot {}_{k<\omega}((f' * \hat{t}')(l))_{m<l<|f' * \hat{t}'|}$. Το αντίστοιχο ισχύει θεωρώντας $\widehat{F'}$ αντί F', T' αντί $\widehat{T'}$, $\widehat{F}$ αντί F και T αντί $\widehat{T}$ (όπως στο λήμμα 4.2).

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη πρόταση επειδή η δεύτερη αποδεικνύεται ανάλογα. Στο εξής θεωρούμε ότι $\gamma_G(x) = (X, P, R, \Phi)$ και $\gamma'_G(x) = (X, P', R, \Phi')$. Έστω κάποια $f' \in F'$, $\hat{t}' \in \widehat{T}'$ και $1 \leq m < |f' * \hat{t}'|$, τέτοια ώστε τις χρονικές στιγμές $m - 1$ και $|f' * \hat{t}'| - 1$ να παίζεται η ίδια κίνηση από τον ίδιο παίκτη στο $f' * \hat{t}'$. Ας θεωρήσουμε ακόμη πως $f' * \hat{t}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ και $(f' * \hat{t}') \cdot \dot{\underset{k<\omega}{\cdot}} ((f' * \hat{t}')(l))_{m \leq l < |f' * \hat{t}'|} = (x_1, \ldots)$. Σχετικά εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν τα εξής:

- $x'_m = x'_n$
- $n - m$ άρτιο
- για κάθε $1 \leq i < n$, $x_i = x'_i$
- για κάθε $k \geq 1$ και $m \leq l < n$, $x_{(n-m) \cdot k + l} = x_l$

Παρατηρούμε επίσης πως, για κάθε $i \geq n$, υπάρχουν $k \geq 1$ και $m \leq l < n$, τέτοια ώστε $i = (n - m) \cdot k + l$ (1), αφού:

- $(i - m) \text{ div } (n - m) \geq 1$
- $m \leq m + (i - m) \bmod (n - m) < n$
- $i = (n - m) \cdot ((i - m) \text{ div } (n - m)) + m + (i - m) \bmod (n - m)$

Δεδομένου ότι $(x'_1, \ldots, x'_n) \in P'$, έχουμε:

- για κάθε $1 \leq i < n - 1$, $x_i = x'_i \Rightarrow_G x'_{i+1} = x_{i+1}$
- $x_{n-1} = x'_{n-1} \Rightarrow_G x'_n = x'_m = x_m = x_{(n-m) \cdot 1 + m} = x_n$

Συμπεραίνουμε λοιπόν και ότι, για κάθε $k \geq 1$:

- για κάθε $m \leq l < n - 1$, $x_{(n-m) \cdot k + l} = x_l \Rightarrow_G x_{l+1} = x_{(n-m) \cdot k + l + 1}$
- $x_{(n-m) \cdot k + n - 1} = x_{n-1} \Rightarrow_G x_n = x_{(n-m) \cdot 1 + m} = x_m = x_{(n-m) \cdot (k+1) + m} = x_{(n-m) \cdot k + n}$

Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν και το (1), καταλήγουμε στο ότι, για κάθε $i \geq 1$, $x_i \Rightarrow_G x_{i+1}$ (2).
Θα αποδείξουμε τώρα ότι, για κάθε $i < \omega$, $(x_1, \ldots, x_i) \in (P^e \cup P^o) - P$ (3). Δικαιολογούμε την περίπτωση της κενής ακολουθίας όπως και στην απόδειξη του λήμματος 1. Οι υπόλοιπες ακολουθίες ικανοποιούν τα START ($x_1 = x'_1$) και STEPS (λόγω του (2)) αλλά όχι το END (αν κάποιο $(x_1, \ldots, x_i)$ το ικανοποιούσε, θα έπρεπε το x_i να είναι τελική κίνηση, δηλαδή να μην ισχύει $x_i \Rightarrow_G x_{i+1}$), οπότε δεν ανήκουν στο P και μπορούν να επεκταθούν έτσι ώστε να ανήκουν στο P.
Βλέπουμε ακόμη ότι, αφού $\hat{t}' \in \widehat{T}'$, για κάθε περιττό $1 \leq i < n$, $x_i = x'_i \Rightarrow_G \hat{t}'((x'_1, \ldots, x'_i))$

$= x'_{i+1} = x_{i+1}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν και ότι, για κάθε $k \geq 1$, $m \leq l < n$, αν $(n - m) \cdot k +$ περιττό (το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι l περιττό, αφού $n - m$ άρτιο), τότε $x_{(n-m) \cdot k + l} = x_l \mathrel{\widehat{\Rightarrow}}_G x_{l+1} = x_{(n-m) \cdot k + l + 1}$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν και το (1), καταλήγουμε στο ότι, για κάθε περιττό $i \geq 1$, $x_i \mathrel{\widehat{\Rightarrow}}_G x_{i+1}$ (4).

Θεωρούμε τώρα κάποια $f \in F$, $\hat{t} \in \widehat{T}$, όπου, για κάθε:

- $p \in (P^e - P) - \{(x_1, \ldots, x_i) \mid i\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\}$
- $q \in (P^o - P) - \{(x_1, \ldots, x_i) \mid i\ \pi\epsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\}$

τα $f(p)$, $\hat{t}(q)$ επιλέγονται αυθαίρετα (αρκεί να πληρούν τις προδιαγραφές των F, $\widehat{T}$, αντίστοιχα). Τέλος απαιτούμε ότι, για κάθε άρτιο i, $f((x_1, \ldots, x_i)) = x_{i+1}$ και ότι, για κάθε περιττό i, $\hat{t}((x_1, \ldots, x_i)) = x_{i+1}$. Το (3) επιβάλλει τον ορισμό της τιμής των f, $\hat{t}$ για τα συγκεκριμέ-να στοιχεία. Τα (3) και (4) εγκυώνται ότι οι τιμές που ορίστηκαν πληρούν τις προδιαγραφές των F, $\widehat{T}$. Είναι φανερό, λαμβάνοντας υπ' όψιν το (3), ότι $f * \hat{t} = (x_1, \ldots)$.

Λήμμα 4.4. Έστω μία γραμματική G, x μία σχετική κίνηση αμφισβήτησης και F', T' τα σύνολα στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1, αντίστοιχα, στο $\gamma'_G(x)$. Αν $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x) = 1$, τότε, για κάθε $f' \in F'$, $\hat{t}' \in \widehat{T}'$, στο $f' * \hat{t}'$ δεν επαναλαμβάνεται κίνηση, παιγμένη από διαφορετικό παίκτη. Αν $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x) = 0$, τότε ισχύει το αντίστοιχο, θεωρώντας $\widehat{F}'$ αντί F' και T' αντί $\widehat{T}'$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη πρόταση επειδή η δεύτερη αποδεικνύεται ανάλογα. Στο εξής θεωρούμε ότι $\gamma'_G(x) = (X, P', R, \Phi')$. Αρχίζουμε με τρεις βοηθητικές προτάσεις. Έστω κάποιο $(x_1, \ldots, x_n) \in X^{<\omega}$, τέτοιο ώστε:

- $(x_1, \ldots, x_n) \leq_{\text{sub}} p$, για κάποιο $p \in P'$
- x_1 κίνηση αμφισβήτησης
- σε κανένα $1 < i \leq n$ δε συμβαίνει ανταλλαγή ρόλων

Θα αποδείξουμε μέσω επαγωγής ότι, για κάθε περιττό (αντίστοιχα άρτιο) $1 \leq i \leq n$, x_i κίνηση αμφισβήτησης (αντίστοιχα υποστήριξης) (1). Για την επαγωγική βάση, έχουμε ότι το 1 είναι περιττό και το x_1 κίνηση αμφισβήτησης. Για το επαγωγικό βήμα, παρατηρούμε πως, για κάθε

$1 \le i < n$, αν i περιττό (αντίστοιχα άρτιο) και x_i κίνηση αμφισβήτησης (αντίστοιχα υποστήριξης), τότε $i+1$ άρτιο (αντίστοιχα περιττό) και, αφού $x_i \Rightarrow_G x_{i+1}$ και το x_i δεν είναι της μορφής $(\sim\alpha,\ w)$ (αν ήταν θα ακολουθούσε ανταλλαγή ρόλων), x_{i+1} κίνηση υποστήριξης (αντίστοιχα αμφισβήτησης).

Έστω κάποιο $(x_1, \ldots, x_n) \in X^{<\omega}$ όπως στο (1), όπου επιπλέον:

- $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x_1) = 1$
- για κάθε περιττό $1 \le i < n$, $x_i \mathrel{\widehat{\Rightarrow}}_G x_{i+1}$

Θα αποδείξουμε μέσω επαγωγής ότι, για κάθε $1 \le i \le n$, $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x_i) = 1$ (2). Για την επαγωγική βάση, έχουμε ότι $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x_1) = 1$. Για το επαγωγικό βήμα, βλέπουμε πως, για κάθε $1 \le i < n$, αν $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x_i) = 1$, τότε:

- αν x_i κίνηση υποστήριξης, τότε, δεδομένου ότι $x_i \Rightarrow_G x_{i+1}$, από τον ορισμό του $\Rightarrow_G$ συμπεραίνουμε πως $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x_{i+1}) = 1$
- αν x_i κίνηση αμφισβήτησης, τότε, δεδομένου ότι $x_i \mathrel{\widehat{\Rightarrow}}_G x_{i+1}$ και το x_i δεν είναι της μορφής $(\sim\alpha,\ w)$ (αν ήταν θα ακολουθούσε ανταλλαγή ρόλων), από τον ορισμό του $\widehat{\Rightarrow}_G$ συμπεραίνουμε πως $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x_{i+1}) = 1$

Ανάλογα με το (2) αποδεικνύεται ότι, για κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in X^{<\omega}$ όπως στο (1), όπου επιπλέον $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x_1) = 0$ και, για κάθε άρτιο $1 < i < n$, $x_i \mathrel{\widehat{\Rightarrow}}_G x_{i+1}$, ισχύει ότι, για κάθε $1 \le i \le n$, $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x_i) = 0$ (3).

Παιρνάμε τώρα στο κύριο μέρος της απόδειξης. Έστω ότι $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x) = 1$ και κάποια $f' \in F'$, $\hat{t}' \in \widehat{T'}$ και $1 \le m < |f' * \hat{t}'|$, τέτοια ώστε τις χρονικές στιγμές $m-1$ και $|f' * \hat{t}'| - 1$ να παίζεται η ίδια κίνηση από διαφορετικό παίκτη στο $f' * \hat{t}'$. Ας θεωρήσουμε πως $f' * \hat{t}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$. Βλέπουμε λοιπόν ότι $x'_m = x'_n$ και $n - m$ περιττό.

Θεωρούμε επίσης ότι $i_1 = 1$ και $i_2 < \ldots < i_k$ όλα τα σημεία στα οποία συμβαίνουν ανταλλαγές ρόλων στο $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Για κάθε $1 \le j < k$, εφαρμόζοντας το (1) για το $(x_1, \ldots, x_{i_{j+1} - i_j}) = (x'_{i_j}, \ldots, x'_{i_{j+1}-1})$, συμπεραίνουμε ότι, αφού $x_{i_{j+1} - i_j} = x'_{i_{j+1}-1}$ κίνηση αμφισβήτησης (στο i_{j+1} συμβαίνει ανταλλαγή ρόλων), $i_{j+1} - i_j$ περιττό (4).

Θα αποδείξουμε τώρα μέσω επαγωγής ότι, για κάθε $1 \le j \le k$, αν i_j περιττό (αντίστοιχα άρτιο), τότε $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_j}) = 1$ (αντίστοιχα $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_j}) = 0$) (5). Για την επαγωγική βάση, βλέπουμε ότι $i_1 = 1$ (περιττό) και $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_1}) = [\theta_G^{\uparrow\omega}](x) = 1$. Για το επαγωγικό βήμα, παρατηρούμε πως, για κάθε $1 \leq j < k$, αν ισχύει το αποδεικτέο για το j, τότε:

- αν i_{j+1} άρτιο, τότε, αφού σύμφωνα με το (4) $i_{j+1} - i_j$ περιττό, i_j περιττό και συνεπώς $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_j}) = 1$. Επειδή $\hat{t}' \in \widehat{T'}$, έχουμε ότι, για κάθε περιττό $1 \leq i < i_{j+1} - i_j$ ($i_j - 1 + i$ περιττό), $x'_{i_j - 1 + i} \mathrel{\widehat{\Rightarrow}}_G x'_{i_j - 1 + i + 1}$. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το (2) για το $(x'_{i_j}, \ldots, x'_{i_{j+1} - 1})$ και να συμπεράνουμε ότι $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_{j+1} - 1}) = 1$. Έτσι, δεδομένου ότι $x'_{i_{j+1} - 1} \Rightarrow_G x'_{i_{j+1}}$ και το $x'_{i_{j+1} - 1}$ είναι της μορφής $(\sim\alpha, u)$ (στο i_{j+1} συμβαίνει ανταλλαγή ρόλων), έχουμε $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_{j+1}}) = \neg[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_{j+1} - 1}) = 0$.
- αν i_{j+1} περιττό, τότε, αφού, σύμφωνα με το (4), $i_{j+1} - i_j$ περιττό, i_j άρτιο και συνεπώς $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_j}) = 0$. Επειδή $\hat{t}' \in \widehat{T'}$, έχουμε ότι, για κάθε άρτιο $1 \leq i < i_{j+1} - i_j$, ($i_j - 1 + i$ περιττό), $x'_{i_j - 1 + i} \mathrel{\widehat{\Rightarrow}}_G x'_{i_j - 1 + i + 1}$. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το (3) για το $(x'_{i_j}, \ldots, x'_{i_{j+1} - 1})$ και να συμπεράνουμε ότι $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_{j+1} - 1}) = 0$. Έτσι, δεδομένου ότι $x'_{i_{j+1} - 1} \Rightarrow_G x'_{i_{j+1}}$ και το $x'_{i_{j+1} - 1}$ είναι της μορφής $(\sim\alpha, u)$ (στο i_{j+1} συμβαίνει ανταλλαγή ρόλων), έχουμε $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_{j+1}}) = \neg[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_{j+1} - 1}) = 1$.

Θεωρώντας $l = \max\{1 \leq j \leq k \mid i_j \leq m\}$, θα αποδείξουμε ακόμη πως $i_k - i_l$ περιττό (6). Αν x'_m κίνηση αμφισβήτησης (αντίστοιχα υποστήριξης), τότε, εφαρμόζοντας το (1) για το $(x'_{i_l}, \ldots, x'_m)$, παίρνουμε ότι $m - i_l$ άρτιο (αντίστοιχα περιττό) και, εφαρμόζοντας το (1) για το $(x'_{i_k}, \ldots, x'_n)$, (επειδή $x'_n = x'_m$) παίρνουμε ότι $n - i_k$ άρτιο (αντίστοιχα περιττό). Οπότε, αφού $m - i_l = m - n + n - i_k + i_k - i_l$ και $m - n$ περιττό, $i_k - i_l$ περιττό.

Τέλος, βλέπουμε πως, αν i_l περιττό (αντίστοιχα άρτιο), τότε, με βάση το (6), i_k άρτιο (αντίστοιχα περιττό) και:

- λόγω του (5), $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_l}) = 1$ (αντίστοιχα $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_l}) = 0$) και, εφαρμόζοντας το (2) (αντίστοιχα (3)) για το $(x'_{i_l}, \ldots, x'_m)$, συμπεραίνουμε ότι $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_m) = 1$ (αντίστοιχα $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_m) = 0$)
- λόγω του (5), $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_k}) = 0$ (αντίστοιχα $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_{i_k}) = 1$) και, εφαρμόζοντας το (3) (αντίστοιχα (2)) για το $(x'_{i_k}, \ldots, x'_n)$, συμπεραίνουμε ότι $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_n) = 0$ (αντίστοιχα $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x'_n) = 1$)

Αφού υποθέσαμε ότι $x'_m = x'_n$, έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

Θεώρημα 4.5. Έστω μία γραμματική G, x μία σχετική κίνηση αμφισβήτησης, $\gamma_G(x) = (X, P, R, \Phi)$ και F, T τα σύνολα στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1, αντίστοιχα. Ισχύουν τα ακόλουθα:

- αν $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x) = 1$, τότε, για κάθε $f \in F, \hat{t} \in \widehat{T}$, $\Phi(f * \hat{t}) = 1$
- αν $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x) = 0$, τότε, για κάθε $\widehat{f} \in \widehat{F}, t \in T$, $\Phi(\widehat{f} * t) = 0$
- αν $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x) = 0.5$, τότε:
  - για κάθε $f \in F, \hat{t} \in \widehat{T}$, $\Phi(f * \hat{t}) \geq 0.5$
  - για κάθε $\widehat{f} \in \widehat{F}, t \in T$, $\Phi(\widehat{f} * t) \leq 0.5$

Τα αντίστοιχα ισχύουν για το $\gamma'_G(x)$.

Απόδειξη. Οι προτάσεις που αφορούν το $\gamma_G(x)$ μπορούν να αποδειχτούν παρόμοια με τις αντίστοιχες του θεωρήματος 4.10 (και μάλιστα απλούστερα από αυτές). Έστω τώρα $\gamma'_G(x) = (X, P', R, \Phi')$ και F', T' τα σύνολα στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1, αντίστοιχα. Παρατηρώντας και ότι, για κάθε $p \in P' \cap P$, $\Phi'(p) = \Phi(p)$, προχωρούμε στις αντίστοιχες προτάσεις για το $\gamma'_G(x)$.

- Έστω ότι $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x) = 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι, για κάθε $f \in F, \hat{t} \in \widehat{T}$, $\Phi(f * \hat{t}) = 1$. Έστω κάποια $f' \in F', \hat{t}' \in \widehat{T'}$.
  - Αν στο $f' * \hat{t}'$ δεν επαναλαμβάνεται κίνηση, τότε, σύμφωνα με το λήμμα 4.2, υπάρχουν $f \in F, \hat{t} \in \widehat{T}$, τέτοια ώστε $f' * \hat{t}' = f * \hat{t}$, και έτσι $\Phi'(f' * \hat{t}') = 1$.
  - Για κάθε $m < |f' * \hat{t}'| - 1$, αν τις χρονικές στιγμές m και $|f' * \hat{t}'| - 1$ παίζεται η ίδια κίνηση από τον ίδιο παίκτη στο $f' * \hat{t}'$, τότε το $f * \hat{t}$ του λήμματος 4.3 είναι άπειρο, δηλαδή $\Phi(f * \hat{t}) = 0.5$. Έτσι στο $f' * \hat{t}'$ δεν επαναλαμβάνεται κίνηση, παιγμένη από τον ίδιο παίκτη.
  - Λόγω του λήμματος 4.4, στο $f' * \hat{t}'$ δεν επαναλαμβάνεται κίνηση, παιγμένη από διαφορετικό παίκτη.
- Έστω ότι $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x) = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι, για κάθε $\widehat{f} \in \widehat{F}$, $t \in T$, $\Phi(\widehat{f} * t) = 0$ και το ζητούμενο αποδεικνύεται ανάλογα με πριν.
- Έστω ότι $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x) = 0.5$. Αυτό συνεπάγεται τα ακόλουθα:
  - για κάθε $f \in F, \hat{t} \in \widehat{T}$, $\Phi(f * \hat{t}) \geq 0.5$

Έστω κάποια $f' \in F', \hat{t}' \in \widehat{T}'$.

- Αν στο $f' * \hat{t}'$ δεν επαναμβάνεται κίνηση, τότε, σύμφωνα με το λήμμα 4.2, υπάρχουν $f \in F$, $\hat{t} \in \widehat{T}$, τέτοια ώστε $f' * \hat{t}' = f * \hat{t}$, και έτσι $\Phi'(f' * \hat{t}') \geq 0.5$ (πιο συγκεκριμένα, $\Phi'(f' * \hat{t}') = 1$).
- Αν στο $f' * \hat{t}'$ επαναλαμβάνεται κίνηση, τότε $\Phi'(f' * \hat{t}') \geq 0.5$ (πιο συγκεκριμένα, $\Phi'(f' * \hat{t}') = 0.5$).

- για κάθε $\widehat{f} \in \widehat{F}, t \in T, \Phi(\widehat{f} * t) \leq 0.5$

  Το δεύτερο ζητούμενο αποδεικνύεται ανάλογα με πριν.

Από τα θεωρήματα 4.1 και 4.5 φτάνουμε στο παρακάτω συμπέρασμα.

Πόρισμα 4.6. Έστω μία γραμματική G και x μία σχετική κίνηση αμφισβήτησης. Τα $\gamma_G(x)$ και $\gamma'_G(x)$ έχουν τιμή $[\theta_G^{\uparrow\omega}](x)$.

---

3. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία

Ορισμός 4.9. Έστω μία γραμματική G. Ορίζουμε το Γ_G όπως το γ_G, με τη διαφορά ότι σε μία παρτίδα λέμε για κάποιον παίκτη ότι νικά και ότι ο αντίπαλος του χάνει αν και μόνο αν ισχύει η αντίστοιχη συνθήκη του προηγούμενου ορισμού ή η παρτίδα είναι άπειρη και από κάποια χρονική στιγμή και μετά ο συγκεκριμένος παίκτης παραμένει αμφισβητητής.
Ορίζουμε το Γ'_G όπως το γ'_G, με τη διαφορά ότι σε μία παρτίδα λέμε για κάποιον παίκτη ότι νικά και ότι ο αντίπαλος του χάνει αν και μόνο αν ισχύει η αντίστοιχη συνθήκη του προηγούμενου ορισμού ή στην παρτίδα υπάρχει επανάληψη κίνησης, με τον συγκεκριμένο παίκτη να παραμένει αμφισβητητής στο (κλειστό) χρονικό διάστημα που μεσολαβεί.

Παράδειγμα 4.4. Τα αποτελέσματα των παρτίδων που περιγράφει ο πίνακας 4.1 για τα $\Gamma'_G(L, aa)$ και $\Gamma_G(L, aa)$ είναι όπως αυτά στον πίνακα 4.2, με τη διαφορά ότι οι παρτίδες που εκεί έχουν αποτέλεσμα 0.5 εδώ έχουν αποτέλεσμα 0 (εξ' αιτίας της έλλειψης ανταλλαγής ρόλων).

Ορισμός 4.10. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$ και Χ το σύνολο των (Σ, V)-κινήσεων. Ορίζουμε τη σχέση $\widetilde{\Rightarrow}_G \subseteq \mathrm{X}^2$. Για κάθε $x, y \in \mathrm{X}$, $x \widetilde{\Rightarrow}_G y$ αν και μόνο αν $x \Rightarrow_G y$ και:

- αν $x = (A, w)$, όπου $A \in V$, τότε:
    - αν $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 1$, τότε $[{}_{\Omega_G^{\uparrow i}}\Theta_G^{\uparrow j}](y) = 1$, όπου:

      $i = \max\{i < \omega \mid [\Omega_G^{\uparrow i}](x) = 0.5\}$, $j = \max\{j < \omega \mid [{}_{\Omega_G^{\uparrow i}}\Theta_G^{\uparrow j}](x) \leq 0.5\}$
    - αν $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 0.5$, τότε $[{}_{\Omega_G^{\uparrow\omega}}\Theta_G^{\uparrow j}](y) = 0.5$, όπου:

      $j = \max\{j < \omega \mid [{}_{\Omega_G^{\uparrow\omega}}\Theta_G^{\uparrow j}](x) = 0\}$
- αν $x = (\alpha, w)$, όπου το α είναι όρος παράθεσης, και το x είναι κίνηση αμφισβήτησης, τότε:
    - αν $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 1$, τότε $[{}_{\Omega_G^{\uparrow i}}\Theta_G^{\uparrow j}](y) = 1$, όπου:

      $i = \sup\{i < \omega \mid [\Omega_G^{\uparrow i}](x) = 0.5\}$, $j = \min\{j < \omega \mid [{}_{\Omega_G^{\uparrow i}}\Theta_G^{\uparrow j}](x) = 1\}$
    - αν $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 0.5$, τότε $[{}_{\Omega_G^{\uparrow\omega}}\Theta_G^{\uparrow j}](y) = 0.5$, όπου:

      $j = \min\{j < \omega \mid [{}_{\Omega_G^{\uparrow\omega}}\Theta_G^{\uparrow j}](x) = 0.5\}$
- αν $x = (d, w)$, όπου το d είναι όρος σύζευξης, τότε:
    - αν $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 0$, τότε $[\Omega_G^{\uparrow j}](y) = 0$ και το $y[0]$ είναι αρνητικός συζευκτέος μόνο αν δεν υπάρχει θετικός συζευκτέος c, τέτοιος ώστε $[\Omega_G^{\uparrow j}]((c, w)) = 0$, όπου $j = \min\{j < \omega \mid [\Omega_G^{\uparrow j}](x) = 0\}$
    - αν $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 0.5$, τότε $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](y) = 0.5$
- αν $x = (\alpha, \pi)$, όπου το α είναι όρος παράθεσης, και το x είναι κίνηση υποστήριξης, τότε:
    - αν $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 0$, τότε $[\Omega_G^{\uparrow j}](y) = 0$, όπου $j = \min\{j < \omega \mid [\Omega_G^{\uparrow j}](x) = 0\}$
    - αν $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 0.5$, τότε $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](y) = 0.5$

Έστω μία (Σ, V)-κίνηση αμφισβήτησης x, $(X, P, R, \Phi) \in \{\Gamma_G(x), \Gamma'_G(x)\}$ και F, T τα σύνολα των στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1, αντίστοιχα, στο συγκεκριμένο παιχνίδι. Ορίζουμε τα εξής:

- $\widetilde{F} = \{f \in F \mid \forall\ p \in P^e - P - \{\epsilon\}\ \ p(|p| - 1) \widetilde{\Rightarrow}_G f(p)\}$
- $\widetilde{T} = \{t \in T \mid \forall\ p \in P^o - P\ \ p(|p| - 1) \widetilde{\Rightarrow}_G t(p)\}$

Παράδειγμα 4.5. Ας θεωρήσουμε τις ακολουθίες κινήσεων του πίνακα 4.3 ως παρτίδες για τα αντίστοιχα $\Gamma_G(A,\ a)$. Όσον αφορά τα αποτελέσματα, η μόνη διαφορά είναι πως η πρώτη παρτίδα έχει αποτέλεσμα 0. Τώρα στην πρώτη στήλη, ο παίκτης 1 απαντά σε μία κίνηση του αντιπάλου του χρησιμοποιώντας μόνο το $\Omega_G^{\uparrow\omega}$ ενώ στη δεύτερη απαντά με βάση το $\widetilde{\Rightarrow}_G$. Στις επόμενες δύο στήλες γίνεται το αντίστοιχο για τον παίκτη 0.

Λήμμα 4.7. Έστω μία γραμματική G, x μία σχετική κίνηση αμφισβήτησης και F, T, F', T' τα σύνολα στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1 στα $\Gamma_G(x)$ και $\Gamma'_G(x)$, αντίστοιχα. Για κάθε $f' \in F'$, $\tilde{t}' \in \widetilde{T'}$, αν το $f' * \tilde{t}'$ δεν περιλαμβάνει επανάληψη κίνησης, τότε υπάρχουν $f \in F$, $\tilde{t} \in \widetilde{T}$ τέτοια ώστε $f * \tilde{t} = f' * \tilde{t}'$. Για κάθε $\tilde{f}' \in \widetilde{F'}$, $t' \in T'$, αν το $\tilde{f}' * t'$ δεν περιλαμβάνει επανάληψη κίνησης, τότε υπάρχουν $\tilde{f} \in \widetilde{F}$, $t \in T$ τέτοια ώστε $\tilde{f} * t = \tilde{f}' * t'$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του λήμματος 4.2 και την παραλείπουμε.

Λήμμα 4.8. Έστω μία γραμματική G, x μία σχετική κίνηση αμφισβήτησης και F, T, F', T' τα σύνολα στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1 στα $\Gamma_G(x)$ και $\Gamma'_G(x)$, αντίστοιχα. Για κάθε $f' \in F'$, $\tilde{t}' \in \widetilde{T'}$ και $m < |f' * \tilde{t}'| - 1$, αν τις χρονικές στιγμές m και $|f' * \tilde{t}'| - 1$ παίζεται η ίδια κίνηση από τον ίδιο παίκτη στο $f' * \tilde{t}'$, τότε υπάρχουν $f \in F$, $\tilde{t} \in \widetilde{T}$, τέτοια ώστε $f * \tilde{t} = (f' * \tilde{t}') \cdot {}_{k \,\dot{<}\, \omega}((f' * \tilde{t}')(l))_{m<l<|f' * \tilde{t}'|}$. Το αντίστοιχο ισχύει θεωρώντας $\widetilde{F'}$ αντί F', T' αντί $\widetilde{T'}$, $\widetilde{F}$ αντί F και T αντί $\widetilde{T}$ (όπως στο λήμμα 4.7).

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του λήμματος 4.3 και την παραλείπουμε.

Λήμμα 4.9. Έστω μία γραμματική G, x μία σχετική κίνηση αμφισβήτησης και F', T' τα σύνολα στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1, αντίστοιχα, στο $\Gamma'_G(x)$. Αν $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 1$, τότε, για κάθε $f' \in F'$, $\tilde{t}' \in \widetilde{T'}$, στο $f' * \tilde{t}'$ δεν επαναλαμβάνεται κίνηση, παιγμένη από διαφορετικό παίκτη. Αν $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 0$, τότε ισχύει το αντίστοιχο, θεωρώντας $\widetilde{F'}$ αντί F' και T' αντί $\widetilde{T'}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του λήμματος 4.4 και την παραλείπουμε.

Θεώρημα 4.10. Έστω μία γραμματική G, x μία σχετική κίνηση αμφισβήτησης, $\Gamma_G(x) = (X, P, R, \Phi)$ και F, T τα σύνολα στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1, αντίστοιχα. Ισχύουν τα ακόλουθα:

- αν $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 1$, τότε, για κάθε $f \in F, \tilde{t} \in \widetilde{T}$, $\Phi(f * \tilde{t}) = 1$
- αν $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 0$, τότε, για κάθε $\widetilde{f} \in \widetilde{F}, t \in T$, $\Phi(\widetilde{f} * t) = 0$
- αν $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 0.5$, τότε:
    - για κάθε $f \in F, \tilde{t} \in \widetilde{T}$, $\Phi(f * \tilde{t}) \geq 0.5$
    - για κάθε $\widetilde{f} \in \widetilde{F}, t \in T$, $\Phi(\widetilde{f} * t) \leq 0.5$

Τα αντίστοιχα ισχύουν για το $\Gamma'_G(x)$.

Απόδειξη. Οι προτάσεις που αφορούν το $\Gamma_G(x)$ αποδεικνύονται (σε μία λίγο διαφορετική αλλά ισοδύναμη εκδοχή τους) στο [12]. Έστω τώρα $\Gamma'_G(x) = (X, P', R, \Phi')$ και F', T' τα σύνολα στρατηγικών για τους παίκτη 0 και παίκτη 1, αντίστοιχα. Παρατηρώντας και ότι, για κάθε $p \in P' \cap P$, $\Phi'(p) = \Phi(p)$, προχωρούμε στις αντίστοιχες προτάσεις για το $\Gamma'_G(x)$.

- Έστω ότι $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι, για κάθε $f \in F, \tilde{t} \in \widetilde{T}$, $\Phi(f * \tilde{t}) = 1$. Έστω κάποια $f' \in F', \tilde{t}' \in \widetilde{T'}$.
    - Αν στο $f' * \tilde{t}'$ δεν επαναλαμβάνεται κίνηση, τότε, σύμφωνα με το λήμμα 4.7, υπάρχουν $f \in F, \tilde{t} \in \widetilde{T}$, τέτοια ώστε $f' * \tilde{t}' = f * \tilde{t}$, και έτσι $\Phi'(f' * \tilde{t}') = 1$.
    - Αν στο $f' * \tilde{t}'$ επαναλαμβάνεται κίνηση, με τον παίκτη 1 να παραμένει αμφισβητητής, τότε $\Phi'(f' * \tilde{t}') = 1$.
    - Για κάθε $m < |f' * \tilde{t}'| - 1$, αν τις χρονικές στιγμές m και $|f' * \tilde{t}'| - 1$ παίζεται η ίδια κίνηση από τον ίδιο παίκτη στο $f' * \tilde{t}'$, με τον παίκτη 0 να παραμένει αμφισβητητής, τότε το $f * \tilde{t}$ του λήμματος 4.8 είναι άπειρο και ο παίκτης 0 παραμένει αμφισβητητής από τη χρονική στιγμή m και μετά, δηλαδή

$\Phi(f * \tilde{t}) = 0$. Έτσι στο $f' * \tilde{t}'$ δεν επαναλαμβάνεται κίνηση, με τον παίκτη 0 να παραμένει αμφισβητητής.

- Για κάθε $m < |f' * \tilde{t}'| - 1$, αν τις χρονικές στιγμές m και $|f' * \tilde{t}'| - 1$ παίζεται η ίδια κίνηση από τον ίδιο παίκτη στο $f' * \tilde{t}'$, με ανταλλαγή ρόλων να μεσολαβεί, τότε το $f * \tilde{t}$ του λήμματος 4.8 είναι άπειρο και περιλαμβάνει άπειρες ανταλλαγές ρόλων, δηλαδή $\Phi(f * \tilde{t}) = 0.5$. Έτσι στο $f' * \tilde{t}'$ δεν επαναλαμβάνεται κίνηση, παιγμένη από τον ίδιο παίκτη, με ανταλλαγή ρόλων να μεσολαβεί.
- Λόγω του λήμματος 4.9, στο $f' * \tilde{t}'$ δεν επαναλαμβάνεται κίνηση, παιγμένη από διαφορετικό παίκτη.

- Έστω ότι $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι, για κάθε $\widetilde{f} \in \widetilde{F}$, $t \in T$, $\Phi(\widetilde{f} * t) = 0$ και το ζητούμενο αποδεικνύεται ανάλογα με πριν.
- Έστω ότι $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x) = 0.5$. Αυτό συνεπάγεται τα ακόλουθα:
  - για κάθε $f \in F, \tilde{t} \in \widetilde{T}, \Phi(f * \tilde{t}) \geq 0.5$

    Έστω κάποια $f' \in F', \tilde{t}' \in \widetilde{T}'$.

    - Αν στο $f' * \tilde{t}'$ δεν επαναμβάνεται κίνηση, τότε, σύμφωνα με το λήμμα 4.7, υπάρχουν $f \in F$, $\tilde{t} \in \widetilde{T}$, τέτοια ώστε $f' * \tilde{t}' = f * \tilde{t}$, και έτσι $\Phi'(f' * \tilde{t}') \geq 0.5$ (πιο συγκεκριμένα, $\Phi'(f' * \tilde{t}') = 1$).
    - Αν στο $f' * \tilde{t}'$ επαναλαμβάνεται κίνηση, με ανταλλαγή ρόλων να μεσολαβεί ή με τον παίκτη 1 να παραμένει αμφισβητητής, τότε $\Phi'(f' * \tilde{t}') \geq 0.5$.
    - Για κάθε $m < |f' * \tilde{t}'| - 1$, αν τις χρονικές στιγμές m και $|f' * \tilde{t}'| - 1$ παίζεται η ίδια κίνηση από τον ίδιο παίκτη στο $f' * \tilde{t}'$, με τον παίκτη 0 να παραμένει αμφισβητητής, τότε το $f * \tilde{t}$ του λήμματος 4.8 είναι άπειρο και ο παίκτης 0 παραμένει αμφισβητητής από τη χρονική στιγμή m και μετά, δηλαδή $\Phi(f * \tilde{t}) = 0$. Έτσι στο $f' * \tilde{t}'$ δεν επαναλαμβάνεται κίνηση, με τον παίκτη 0 να παραμένει αμφισβητητής.
  - για κάθε $\widetilde{f} \in \widetilde{F}, t \in T, \Phi(\widetilde{f} * t) \leq 0.5$

    Το δεύτερο ζητούμενο αποδεικνύεται ανάλογα με πριν.

Από τα θεωρήματα 4.1 και 4.10 φτάνουμε στο παρακάτω συμπέρασμα.

Πόρισμα 4.11. Έστω μία γραμματική G και x μία σχετική κίνηση αμφισβήτησης. Τα $\Gamma_G(x)$ και $\Gamma'_G(x)$ έχουν τιμή $[\Omega_G^{\uparrow\omega}](x)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΕΣΩ ΑΝΑΓΡΑΦΗΣ

5.1. Συστήματα απόφασης
5.2. Συστήματα αναγνώρισης
5.3. Συστήματα παραγωγής

Ορισμός 5.1. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V, Τ το σύνολο των (Σ, V)-όρων (συγκεκριμένου είδους) και $\rightarrow \subseteq \mathrm{T}^2$. Ορίζουμε την *επέκταση* του $\rightarrow$ ως τη σχέση $\Rightarrow \subseteq \mathrm{T}^2$, όπου, για κάθε $\tau, \upsilon \in \mathrm{T}$, $\tau \Rightarrow \upsilon$ αν και μόνο αν υπάρχουν $\rho, \sigma \in \mathrm{T}$, τέτοια ώστε:

- $\rho \rightarrow \sigma$
- το υ προκύπτει από το τ αντικαθιστώντας ένα ρ με σ

5.1. Συστήματα απόφασης

5.1.1. Σημασιολογία Kripke-Kleene

Ορισμός 5.2. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τους (Σ, V)-όρους και (Σ, V)-τύπους αληθοτιμών *με απλή μνήμη* ανάλογα με τους προηγούμενους, με τη διαφορά ότι για κάθε απλό όρο αληθοτιμών χ και $M \subseteq V$ το $(@, (\chi, M))$ είναι απλός όρος του νέου είδους (το αναπαριστούμε ως $\chi \mathbin{@} M$).

Όσον αφορά τους όρους και τύπους αληθοτιμών ορίζουμε τα εξής:

- για κάθε απλό όρο $\chi = A(w)$, όπου $A \in V$, $M \subseteq V$ και $v \subseteq \Sigma^*$:

- αν $v = w$, τότε $\chi^{@M,v} = \chi \ @ \ M$
- αλλιώς, $\chi^{@M,v} = \chi \ @ \ \varnothing$

- για κάθε απλό όρο $\chi = a(w)$, όπου $a \in \Sigma$, $M \subseteq V$ και $v \subseteq \Sigma^*$, $\chi^{@M,v} = \chi \ @ \ \varnothing$
- για κάθε σύνθετο όρο $\tau = (o,\ \upsilon)$, $M \subseteq V$ και $v \subseteq \Sigma^*$, $\tau^{@M,v} = \left(o,\ \upsilon^{\mathrm{im}(@M,v)}\right)$
- για κάθε απλό τύπο $\varphi = A(w) == \tau$, όπου $A \in V$:
  $\varphi^{\mathrm{mem}} = \left(,,\ \{A(w) \ @ \ M == \tau^{@M\cup\{A\},w} \mid M \subseteq V - \{A\}\}\right)$
- για κάθε (σύνθετο) τύπο που περιέχει απλούς τύπους μόνο της παραπάνω μορφής $\varphi = (,,\ \psi)$, $\varphi^{\mathrm{mem}} = \left(,,\ \psi^{\mathrm{im}(\mathrm{mem})}\right)$

Παράδειγμα 5.1.

$\tau = \sim (A(aa) \ \& \ b(\epsilon) \mid A(a) \ \& \ b(a) \mid A(\epsilon) \ \& \ b(aa)) \ \& \ X(aa)$

$$\begin{aligned} \tau^{@\{A,\ X\},aa} = \ & \sim (A(aa)@\{A,\ X\} \ \& \ b(\epsilon)@\varnothing \mid \\ & A(a)@\varnothing \ \& \ b(a)@\varnothing \mid \\ & A(\epsilon)@\varnothing \ \& \ b(aa)@\varnothing) \ \& \\ & X(aa)@\{A,\ X\} \end{aligned}$$

Ορισμός 5.3. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τους $(\{\mathrm{f},\ \mathrm{u},\ \mathrm{t}\},\ \Sigma,\ V)$-όρους και $(\{\mathrm{f},\ \mathrm{u},\ \mathrm{t}\},\ \Sigma,\ V)$-τύπους αληθοτιμών με απλή μνήμη προσθέτοντας τις νέες σταθερές f, u και t ως απλούς όρους.

Έστω τώρα Τ το σύνολο αυτών των όρων και $\rightsquigarrow \subseteq \mathrm{T}^2$, όπου, για κάθε $\tau,\ \upsilon \in \mathrm{T}$, $\tau \rightsquigarrow \upsilon$ αν και μόνο αν ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

- $\tau = \chi(w) \ @ \ M$ και:
  - αν $\chi \in M$, τότε $\upsilon = \mathrm{u}$
  - αν $(\chi) = w$, τότε $\upsilon = \mathrm{t}$
  - αν $\chi \in \Sigma$ και $(\chi) \neq w$, τότε $\upsilon = \mathrm{f}$
- $\tau = (|,\ \sigma)$ (αντίστοιχα $\tau = (\&,\ \sigma)$), όπου $\sigma \subseteq \{\mathrm{f},\ \mathrm{u},\ \mathrm{t}\}$, και:
  - αν $\mathrm{t} \in \sigma$ (αντίστοιχα $\mathrm{f} \in \sigma$), τότε $\upsilon = \mathrm{t}$ (αντίστοιχα $\upsilon = \mathrm{f}$)
  - αλλιώς αν $\mathrm{u} \in \sigma$, τότε $\upsilon = \mathrm{u}$
  - αλλιώς, $\upsilon = \mathrm{f}$ (αντίστοιχα $\upsilon = \mathrm{t}$)
- $\tau = (\sim,\ \sigma)$, όπου $\sigma \in \{\mathrm{f},\ \mathrm{u},\ \mathrm{t}\}$, και:

- αν $\sigma = \mathrm{f}$, τότε $\upsilon = \mathrm{t}$
- αν $\sigma = \mathrm{u}$, τότε $\upsilon = \mathrm{u}$
- αν $\sigma = \mathrm{t}$, τότε $\upsilon = \mathrm{f}$

Έστω τέλος μία γραμματική $G = (\Sigma\,,\; V\,,\; \varphi,\; A_0)$ και $\psi = \varphi^{\mathrm{and}\,\circ\,\mathrm{mem}\,\circ\,\mathrm{tv}\,\circ\,\mathrm{eq}}$. Ορίζουμε ότι $\underset{\mathrm{dec}}{\overset{\mathrm{kk}}{\rightarrow}}_G = \rightarrow_\psi \cup \rightsquigarrow$ και το $\underset{\mathrm{dec}}{\overset{\mathrm{kk}}{\Rightarrow}}_G$ είναι η επέκταση του $\underset{\mathrm{dec}}{\overset{\mathrm{kk}}{\rightarrow}}_G$.

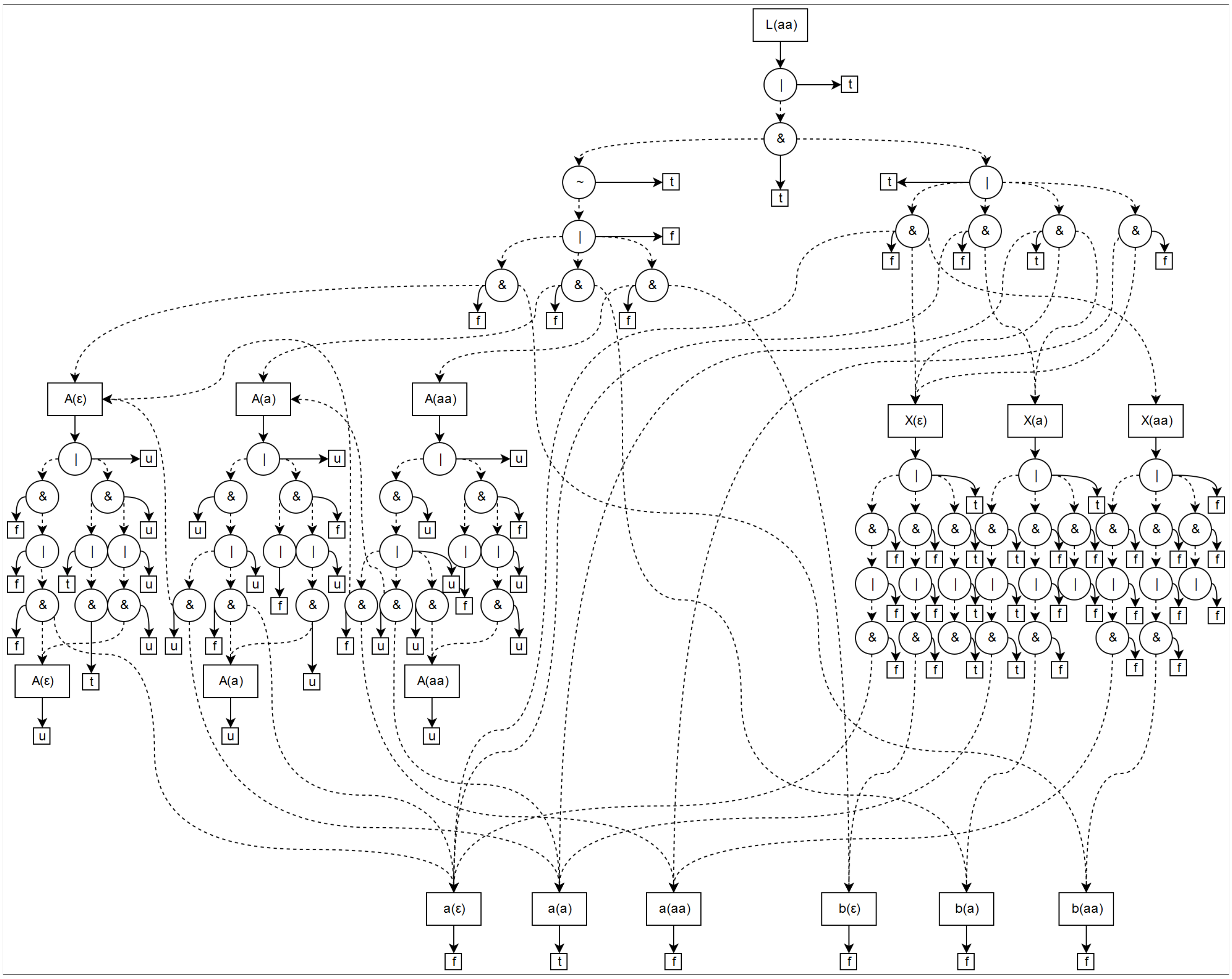
Παράδειγμα 5.2. Ο πίνακας 5.1 απεικονίζει ένα τμήμα μιας ακολουθίας $\underset{\mathrm{dec}}{\overset{\mathrm{kk}}{\Rightarrow}}_G$-αναγραφής που τερματίζει, για τη γραμματική του παραδείγματος 4.1 (το `0` σημαίνει $\varnothing$). Στο σχήμα 5.1 αναπαριστάνεται η συγκεκριμένη ακολουθία σε μορφή γραφήματος. Οι ορθογώνιοι κόμβοι αντιστοιχούν σε απλούς όρους και οι κυκλικοί σε σύνθετους, με τις εξερχόμενες διακεκομμένες ακμές να αντιστοιχούν στα ορίσματά τους. Η μνήμη ενός όρου περιγράφεται από τους “προγόνους” του αντίστοιχου κόμβου. Οι συνεχείς ακμές αντιστοιχούν σε $\underset{\mathrm{dec}}{\overset{\mathrm{kk}}{\rightarrow}}_G$-μεταβάσεις.

Πίνακας 5.1

<table>
<tr><td><code>L(aa)@0</code></td></tr>
<tr><td><code>|(~(A()@0 & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</code></td></tr>
<tr><td><code>|(~((&(|(A()@{A} & a()@0)) | |(&()) & |(&(A()@{A}))) & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</code></td></tr>
<tr><td><code>|(~((&(|(u & a()@0)) | |(&()) & |(&(A()@{A}))) & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</code></td></tr>
<tr><td><code>|(~((&(|(u & f)) | |(&()) & |(&(A()@{A}))) & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</code></td></tr>
<tr><td><code>|(~((&(|(f)) | |(&()) & |(&(A()@{A}))) & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</code></td></tr>
<tr><td><code>|(~((&(f) | |(&()) & |(&(A()@{A}))) & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</code></td></tr>
<tr><td><code>|(~((f | |(&()) & |(&(A()@{A}))) & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</code></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>|(~((f | |(t) & |(&(A()@{A}))) & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(~((f | t & |(&(A()@{A}))) & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(~((f | t & |(&(u))) & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(~((f | t & |(u)) & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(~((f | t & u) & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(~((f | u) & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(~(u & b(aa)@0 | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(~(u & f | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(~(f | A(a)@0 & b(a)@0 | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>|(~(f | A(aa)@{L} & b()@0) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>|(~|(f) & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(~f & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (a()@0 & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & X()@0 & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & (&(|(&(a()@{X}))) | &(|(&(b()@{X}))) | &(|(&()))) & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & (&(|(&(f))) | &(|(&(b()@{X}))) | &(|(&()))) & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & (f | &(|(&(b()@{X}))) | &(|(&()))) & X(aa)@{L} | a()@0 &</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & (f | &(|(&(f))) | &(|(&()))) & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & (f | &(|(&()))) & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & (f | &(|(t))) & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & (f | t) & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & t & X(aa)@{L} | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & t & (&(|(&(a(aa)@{X}))) | &(|(&(b(aa)@{X}))) | &(|())) | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & t & (&(|(&(f))) | &(|(&(b(aa)@{X}))) | &(|())) | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & t & (f | &(|(&(b(aa)@{X}))) | &(|())) | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & t & (f | &(|(&(f))) | &(|())) | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & t & (f | &(|())) | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & t & (f | &(f)) | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & t & |(f) | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (f & t | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>|(t & (f | a()@0 & X(a)@0 | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>|(t & (f | a(a)@0 & X()@0 & X(a)@0 | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>|(t & (f | t | a(aa)@0 & X()@0))</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>|(t & (f | t))</td></tr>
<tr><td>|(&(t))</td></tr>
<tr><td>|(t)</td></tr>
<tr><td>t</td></tr>
</table>



Σχήμα 5.1

Εικασία 5.1. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma\ ,\ V\ ,\ \varphi,\ A_0)$, $\chi \in \Sigma \cup V$ και $w \in \Sigma^*$. Ισχύουν τα παρακάτω:

- αν το $\gamma_G(\chi\ ,\ w)$ έχει τιμή 1, τότε $\chi(w)\ @\ \varnothing \overset{\mathrm{kk}}{\underset{\mathrm{dec}}{\Rightarrow}}{}^{*}_{G}\ \mathrm{t}$
- αν το $\gamma_G(\chi\ ,\ w)$ έχει τιμή 0.5, τότε $\chi(w)\ @\ \varnothing \overset{\mathrm{kk}}{\underset{\mathrm{dec}}{\Rightarrow}}{}^{*}_{G}\ \mathrm{u}$
- αν το $\gamma_G(\chi\ ,\ w)$ έχει τιμή 0, τότε $\chi(w)\ @\ \varnothing \overset{\mathrm{kk}}{\underset{\mathrm{dec}}{\Rightarrow}}{}^{*}_{G}\ \mathrm{f}$

5.1.2. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία

Ορισμός 5.4. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τους (Σ, V)-όρους και (Σ, V)-τύπους αληθοτιμών *με διπλή μνήμη* ανάλογα με τους προηγούμενους, με τη διαφορά ότι, για κάθε απλό όρο αληθοτιμών χ και ξένα μεταξύ τους $M, N \subseteq V$ το $(@, (\chi, (M, N)))$ είναι απλός όρος του νέου είδους (το αναπαριστούμε ως $\chi \ @ \ (M, N)$).

Όσον αφορά τους όρους και τύπους αληθοτιμών ορίζουμε τα εξής:

- για κάθε απλό όρο $\chi = A(w)$, όπου $A \in V$, ξένα μεταξύ τους $M, N \subseteq V$ και $v \subseteq \Sigma^*$:
    - αν $v = w$, τότε $\chi^{@(M, N), v} = \chi \ @ \ (M, N)$
    - αλλιώς, $\chi^{@(M, N), v} = \chi \ @ \ (\varnothing, \varnothing)$
- για κάθε απλό όρο $\chi = a(w)$, όπου $a \in \Sigma$, ξένα μεταξύ τους $M, N \subseteq V$ και $v \subseteq \Sigma^*$:
- $\chi^{@(M, N), v} = \chi \ @ \ (\varnothing, \varnothing)$
- για κάθε σύνθετο όρο $\tau = \sim \upsilon$, ξένα μεταξύ τους $M, N \subseteq V$ και $v \subseteq \Sigma^*$: $\tau^{@(M, N), v} = \sim \upsilon^{@(\varnothing, M \cup N), v}$
- για κάθε σύνθετο όρο που δεν είναι της παραπάνω μορφής $\tau = (o, \upsilon)$, ξένα μεταξύ τους $M, N \subseteq V$ και $v \subseteq \Sigma^*$, $\tau^{@(M, N), v} = \left(o, \upsilon^{\mathrm{im}(@(M, N), v)}\right)$
- για κάθε απλό τύπο $\varphi = A(w) == \tau$, όπου $A \in V$: $\varphi^{\mathrm{mem}'} = (,, \{A(w) \ @ \ (M, N) == \tau^{@(M \cup \{A\}, N), w} \mid M, N \subseteq V - \{A\}, M \cap N = \varnothing\})$
- για κάθε (σύνθετο) τύπο που περιέχει απλούς τύπους μόνο της παραπάνω μορφής $\varphi = (,, \psi)$, $\varphi^{\mathrm{mem}'} = \left(,, \psi^{\mathrm{im}(\mathrm{mem}')}\right)$

Παράδειγμα 5.3.

$$\tau = \sim (A(aa) \ \& \ b(\epsilon) \mid A(a) \ \& \ b(a) \mid A(\epsilon) \ \& \ b(aa)) \ \& \ X(aa)$$

$$\begin{aligned}\tau^{@(\{A\},\{X\}), aa} = \ & \sim (A(aa)@(\varnothing, \{A, X\}) \ \& \ b(\epsilon)@(\varnothing, \varnothing) \mid \\ & A(a)@(\varnothing, \varnothing) \ \& \ b(a)@(\varnothing, \varnothing) \mid \\ & A(\epsilon)@(\varnothing, \varnothing) \ \& \ b(aa)@(\varnothing, \varnothing)) \ \& \\ & X(aa)@(\{A\}, \{X\})\end{aligned}$$

Ορισμός 5.5. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τους $(\{\mathrm{f}, \mathrm{u}, \mathrm{t}\}, \Sigma, V)$-όρους και $(\{\mathrm{f}, \mathrm{u}, \mathrm{t}\}, \Sigma, V)$-τύπους αληθοτιμών με διπλή μνήμη ανάλογα με τον ορισμό 5.3.

Έστω τώρα T το σύνολο αυτών των όρων και $\rightsquigarrow \subseteq \mathrm{T}^2$ όπως στον ορισμό 5.3, με τη διαφορά ότι, για κάθε $\tau, \upsilon \in \mathrm{T}$, όπου $\tau = \chi(w) \mathbin{@} (M, N)$, $\tau \rightsquigarrow \upsilon$ αν και μόνο αν:

- αν $\chi \in M$, τότε $\upsilon = \mathrm{f}$
- αν $\chi \in N$, τότε $\upsilon = \mathrm{u}$
- αν $(\chi) = w$, τότε $\upsilon = \mathrm{t}$
- αν $\chi \in \Sigma$ και $(\chi) \neq w$, τότε $\upsilon = \mathrm{f}$

Έστω τέλος μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$ και $\psi = \varphi^{\mathrm{and} \circ \mathrm{mem}' \circ \mathrm{tv} \circ \mathrm{eq}}$. Ορίζουμε ότι $\overset{\mathrm{wf}}{\underset{\mathrm{dec}}{\rightarrow}}_G = \rightarrow_\psi \cup \rightsquigarrow$ και το $\overset{\mathrm{wf}}{\underset{\mathrm{dec}}{\Rightarrow}}_G$ είναι η επέκταση του $\overset{\mathrm{wf}}{\underset{\mathrm{dec}}{\rightarrow}}_G$.

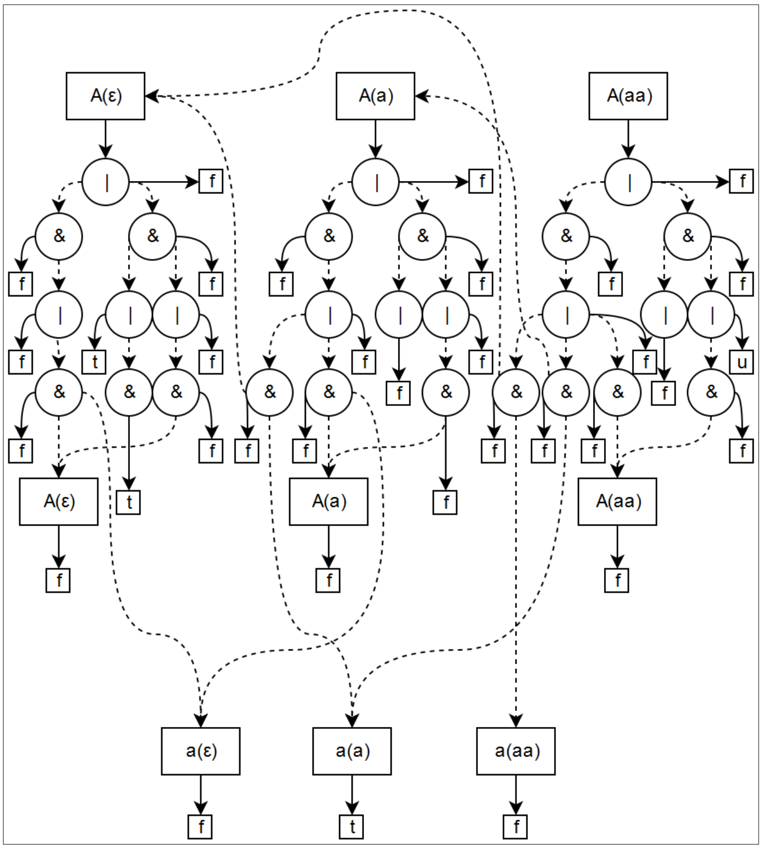
Παράδειγμα 5.4. Ο πίνακας 5.2 απεικονίζει ένα τμήμα μιας ακολουθίας $\overset{\mathrm{wf}}{\underset{\mathrm{dec}}{\Rightarrow}}_G$-αναγραφής που τερματίζει, για τη γραμματική του παραδείγματος 4.1. Η συγκεκριμένη ακολουθία μπορεί να αναπαρασταθεί από το γράφημα του σχήματος 5.1, αντικαθιστώντας ένα τμήμα του με το γράφημα του σχήματος 5.2.

Πίνακας 5.2

<table>
<tr><td>L(aa)@(0,0)</td></tr>
<tr><td>|(~(A()@(0,0) & b(aa)@(0,0) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,
{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) |
a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) |
a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~((&(|(A()@({A},0) & a()@(0,0))) | |(&()) & |(&(A()@({A},0)))) &
b(aa)@(0,0) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0))
& (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) |
a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~((&(|(f & a()@(0,0))) | |(&()) & |(&(A()@({A},0)))) &
b(aa)@(0,0) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0))
& (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) |
a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~((&(|(&(f))) | |(&()) & |(&(A()@({A},0)))) & b(aa)@(0,0) |
A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) &</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~((&(|(f)) | |(&()) & |(&(A()@({A},0)))) & b(aa)@(0,0) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~((&(f) | |(&()) & |(&(A()@({A},0)))) & b(aa)@(0,0) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~((f | |(&()) & |(&(A()@({A},0)))) & b(aa)@(0,0) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~((f | |(t) & |(&(A()@({A},0)))) & b(aa)@(0,0) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~((f | t & |(&(A()@({A},0)))) & b(aa)@(0,0) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~((f | t & |(&(f))) & b(aa)@(0,0) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~((f | t & |(f)) & b(aa)@(0,0) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~((f | t & f) & b(aa)@(0,0) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~(|(f) & b(aa)@(0,0) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~(f & b(aa)@(0,0) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~(&(f) | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
<tr><td>|(~(f | A(a)@(0,0) & b(a)@(0,0) | A(aa)@(0,{L}) & b()@(0,0)) & (a()@(0,0) & X()@(0,0) & X(aa)@({L},0) | a()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(a)@(0,0) & X()@(0,0) & X(a)@(0,0) | a(aa)@(0,0) & X()@(0,0)))</td></tr>
</table>

`...`
`t`



Σχήμα 5.2

Εικασία 5.2. Έστω μία γραμματική $G=(\Sigma\,,\,V\,,\,\varphi,\,A_0)$, $\chi\in\Sigma\cup V$ και $w\in\Sigma^*$. Ισχύουν τα παρακάτω:

- αν το $\Gamma_G(\chi,\,w)$ έχει τιμή 1, τότε $\chi(w)\,@\,(\emptyset\,,\,\emptyset)\overset{\text{wf}}{\underset{\text{dec}}{\Rightarrow}}{}_G^{*}\,\text{t}$
- αν το $\Gamma_G(\chi,\,w)$ έχει τιμή 0.5, τότε $\chi(w)\,@\,(\emptyset\,,\,\emptyset)\overset{\text{wf}}{\underset{\text{dec}}{\Rightarrow}}{}_G^{*}\,\text{u}$
- αν το $\Gamma_G(\chi,\,w)$ έχει τιμή 0, τότε $\chi(w)\,@\,(\emptyset\,,\,\emptyset)\overset{\text{wf}}{\underset{\text{dec}}{\Rightarrow}}{}_G^{*}\,\text{f}$

5.1.3. Αλγόριθμοι απόφασης

Ορισμός 5.6. Έστω μία γραμματική G. Ορίζουμε τον αλγόριθμο `ParseString`$_G$, που δέχεται ως εισόδους συμβολοσειρές σταθερών, ως εξής:

```
function ParseStringG(w):

    function Parse(χ, w, M, N):
        if χ in Σ:
            m := w = [χ] ? 1 : 0
        elseif χ in M:
            m := 0
        elseif χ in N:
            m := 0.5
        else:  //χ in V - (M | N)
            m := Sup({Inf({Inf({Sup({Inf({Parse(c[i], π[i],
                                                 π[i] = w ? M | {χ} : {},
                                                 π[i] = w ? N : {})
                                           for 0 <= i < Length(c)})
                                       for π in Partitions(w, Length(c))})
                                   for c in d+}),
                              Inf({1 -
                                   Sup({Inf({Parse(c[i], π[i],
                                                 {},
                                                 π[i] = w ? M | N | {χ} : {})
                                           for 0 <= i < Length(c)})
                                       for π in Partitions(w, Length(c))})
                                   for c in d-})})
                          for [χ, d+, d-] in φ})
        return m

    [Σ, V, φ, A] := G
    return Parse(A, w, {}, {})
```

Εικασία 5.3. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma,\ V,\ \varphi,\ A_0)$. Ο αλγόριθμος `ParseString`$_G$:

- με είσοδο w δίνει ως έξοδο μία αληθοτιμή m, όπου:
  - αν $A_0(w)\ @\ (\varnothing\ ,\ \varnothing) \overset{\text{wf}}{\underset{\text{dec}}{\Rightarrow}}{}^{*}_{G}\ \text{t}$, τότε $m = 1$
  - αν $A_0(w)\ @\ (\varnothing\ ,\ \varnothing) \overset{\text{wf}}{\underset{\text{dec}}{\Rightarrow}}{}^{*}_{G}\ \text{u}$, τότε $m = 0.5$
  - αν $A_0(w)\ @\ (\varnothing\ ,\ \varnothing) \overset{\text{wf}}{\underset{\text{dec}}{\Rightarrow}}{}^{*}_{G}\ \text{f}$, τότε $m = 0$
- με χρήση απομνημόνευσης (memoization) για το `Parse` απαιτεί χρόνο στο $O(n^{l+1})$, όπου l το μέγιστο $|\alpha^{\text{arg}}|$ για κάθε όρο παράθεσης α που το φ περιέχει

Ορισμός 5.7. Έστω μία γραμματική G. Ορίζουμε τον αλγόριθμο `ParseStringCubTime`$_G$, που δέχεται ως εισόδους συμβολοσειρές σταθερών, ως εξής:

```
function ParseStringCubTimeG(w):

    function Parse(α, w, M, N):
        k := Length(α)
        if k = 0:
            m := w = [] ? 1 : 0
        elseif k = 1:
            χ := α[0]
            if χ in Σ:
                m := w = [χ] ? 1 : 0
            elseif χ in M:
                m := 0
            elseif χ in N:
                m := 0.5
            else:  //χ in V - (M | N)
                m := Sup({Inf({Inf({Parse(c, w, M | {χ}, N)
                                    for c in d+}),
                               Inf({1 -
                                    Parse(c, w, {}, M | N | {χ})
                                    for c in d-})})
                          for [χ, d+, d-] in φ})
        else:  //k >= 2
            l := Length(w)
            m := Sup({Inf({Parse(α[0 : k / 2], w[0 : s],
                                 s < l ? {} : M, s < l ? {} : N),
                           Parse(α[k / 2 : k], w[s : l],
                                 s > 0 ? {} : M, s > 0 ? {} : N)})
                      for 0 <= s <= l})
        return m

    [Σ, V, φ, A] := G
    return Parse([A], w, {}, {})
```

Εικασία 5.4. Έστω μία γραμματική G. Ο αλγόριθμος `ParseStringCubTime`$_G$:

- είναι ισοδύναμος με τον αλγόριθμο `ParseString`$_G$
- με χρήση απομνημόνευσης απαιτεί χρόνο στο $O\left(n^3\right)$

Ορισμός 5.8. Έστω μία γραμματική G. Ορίζουμε τον αλγόριθμο `ParseStringLinSpace`$_G$, που δέχεται ως εισόδους συμβολοσειρές σταθερών, ως εξής:

```
function ParseStringLinSpaceG(w):

    function Parse(α, u, v, M, N):
        //το παρακάτω w ανήκει στην εξωτερική εμβέλεια
        w := w[Length(u) : Length(w) - Length(v)]
        k := Length(α)
        if k = 0:
            m := w = [] ? 1 : 0
        elseif k = 1:
            χ := α[0]
            if χ in Σ:
                m := w = [χ] ? 1 : 0
            elseif χ in M:
                m := 0
            elseif χ in N:
                m := 0.5
            else:  //χ in V - (M | N)
                m := Sup({Inf({Inf({Parse(c, [], [], M | {χ}, N)
                                    for c in d+}),
                               Inf({1 -
                                    Parse(c, [], [], {}, M | N | {χ})
                                    for c in d-})})
                          for [χ, d+, d-] in φ})
        else:  //k >= 2
            m := Sup({Inf({Parse(α[0 : k / 2], [], w[s : Length(w)],
                                 s < Length(w)? {} : M,
                                 s < Length(w) ? {} : N),
                           Parse(α[k / 2 : k], w[0 : s], [],
                                 s > 0 ? {} : M, s > 0 ? {} : N)})
                      for 0 <= s <= Length(w)})
        w := u + w + v
        return m

    [Σ, V, φ, A] := G
    return Parse([A], [], [], {}, {})
```

Εικασία 5.5. Έστω μία γραμματική G. Ο αλγόριθμος `ParseStringLinSpace`$_G$:

- είναι ισοδύναμος με τον αλγόριθμο `ParseStringCubTime`$_G$
- (χωρίς χρήση απομνημόνευσης) απαιτεί χώρο στο $O(n)$

2. Συστήματα αναγνώρισης

5.1.1. Σημασιολογία Kripke-Kleene

Ορισμός 5.9. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τους δυαδικούς $(\{\mathrm{t}\}, \Sigma, V)$-όρους και $(\{\mathrm{t}\}, \Sigma, V)$-τύπους αληθοτιμών προσθέτοντας τη νέα σταθερά t ως απλό όρο.

Έστω τώρα Τ το σύνολο αυτών των όρων και $\rightsquigarrow \subseteq \mathrm{T}^2$, όπου, για κάθε $\tau, \upsilon \in \mathrm{T}$, $\tau \rightsquigarrow \upsilon$ αν και μόνο αν $\upsilon = \mathrm{t}$ και ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

- $\tau = a((a))(T)$
- $\tau = \&()$
- $\tau = \&(\mathrm{t})$

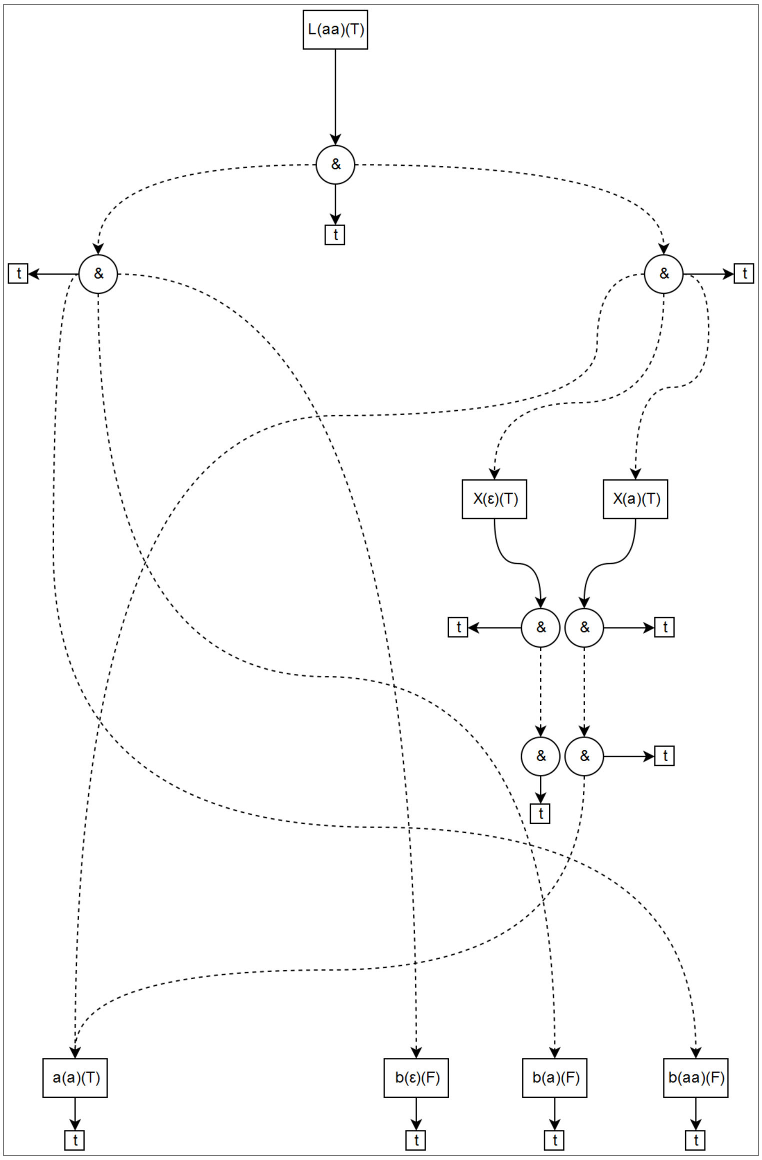
Έστω τέλος μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$ και $\psi = \varphi^{\mathrm{eq}^{-1} \circ \mathrm{disj} \circ \mathrm{and} \circ \mathrm{bin} \circ \mathrm{tv} \circ \mathrm{eq}}$. Ορίζουμε ότι $\overset{\mathrm{kk}}{\underset{\mathrm{rec}}{\rightarrow}}_G = \rightarrow_\psi \cup \rightsquigarrow$ και το $\overset{\mathrm{kk}}{\underset{\mathrm{rec}}{\Rightarrow}}_G$ είναι η επέκταση του $\overset{\mathrm{kk}}{\underset{\mathrm{rec}}{\rightarrow}}_G$.

Παράδειγμα 5.5. Ο πίνακας 5.3 απεικονίζει μια ακολουθία $\overset{\mathrm{kk}}{\underset{\mathrm{rec}}{\Rightarrow}}_G$-αναγραφής που τερματίζει, για τη γραμματική του παραδείγματος 4.1. Στο σχήμα 5.3 αναπαριστάνεται η συγκεκριμένη ακολουθία σε μορφή γραφήματος. Ο πίνακας 5.4 απεικονίζει ένα τμήμα μιας ακολουθίας $\overset{\mathrm{kk}}{\underset{\mathrm{rec}}{\Rightarrow}}_G$-αναγραφής που τερματίζει, για τη γραμματική $G = (\{a, b\}, \{L, A, B, X\}, \varphi, L)$, όπου το φ είναι ο τύπος του παραδείγματος 1.4. Στο σχήμα 5.4 αναπαριστάνεται η συγκεκριμένη ακολουθία σε μορφή γραφήματος, παραλείποντας την αναπαράσταση των t, που είναι περιττή.

Πίνακας 5.3

`L(aa)(T)`
`(b(aa)(F) & b(a)(F) & b()(F)) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`(t & b(a)(F) & b()(F)) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`(t & b()(F)) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`&(t) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`t & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`

t & (t & X()(T) & X(a)(T))
t & (t & &(&()) & X(a)(T))
t & (t & &(t) & X(a)(T))
t & (t & X(a)(T))
t & (t & &(&(a(a)(T))))
t & (t & &(&(t)))
t & (t & &(t))
t & &(t)
&(t)
t

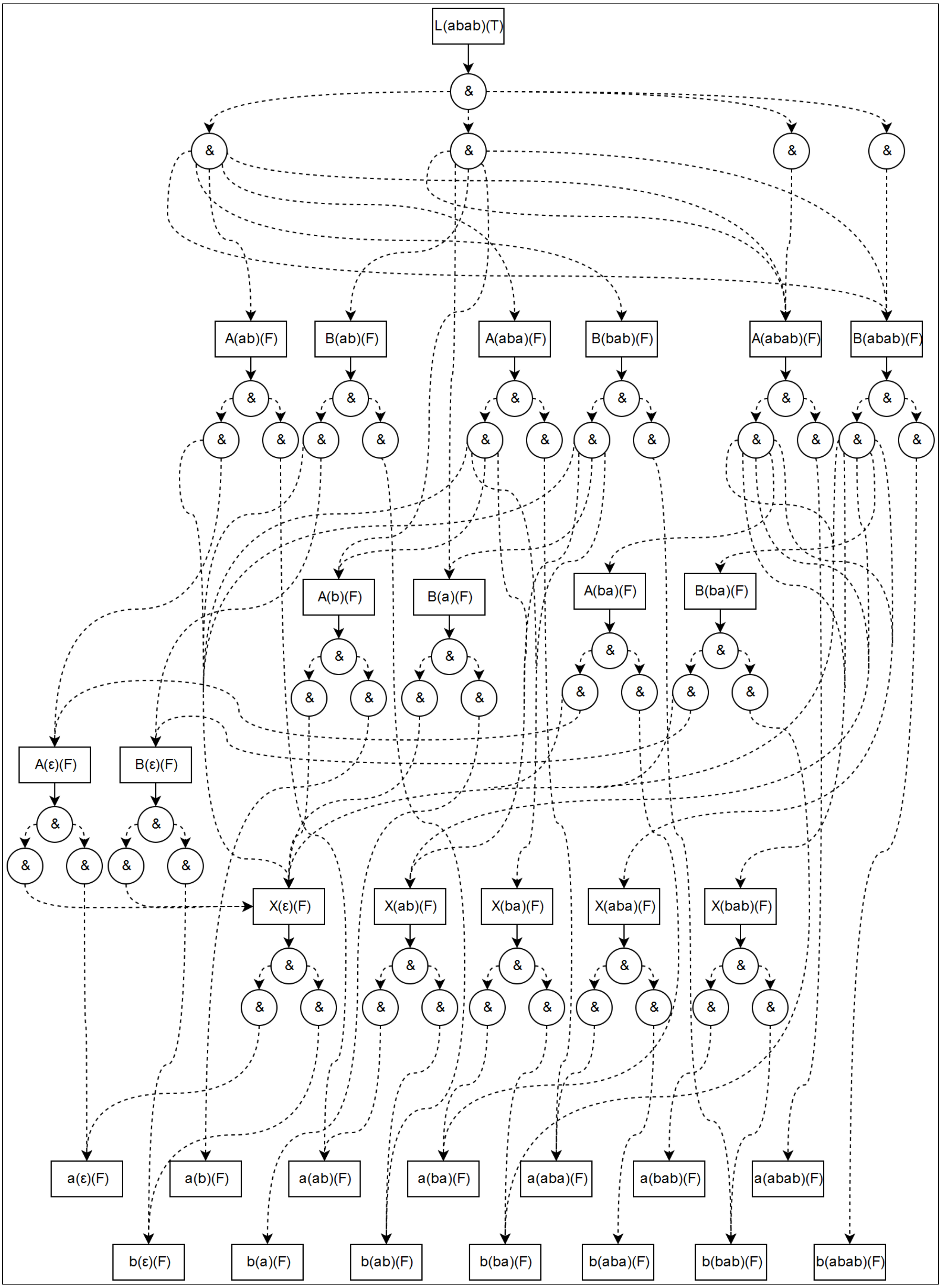


Σχήμα 5.3

Πίνακας 5.4

L(abab)(T)
(A(ab)(F) & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
(((X()(F) & A()(F)) & &(a(ab)(F))) & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
((((&(a()(F)) & &(b()(F))) & A()(F)) & &(a(ab)(F))) & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
((((&(t) & &(b()(F))) & A()(F)) & &(a(ab)(F))) & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
((((t & &(b()(F))) & A()(F)) & &(a(ab)(F))) & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
((((t & &(t)) & A()(F)) & &(a(ab)(F))) & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
(((&(t) & A()(F)) & &(a(ab)(F))) & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
(((t & A()(F)) & &(a(ab)(F))) & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
(((t & (&(X()(F)) & &(a()(F)))) & &(a(ab)(F))) & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
...
((&(t) & &(a(ab)(F))) & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
((t & &(a(ab)(F))) & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
((t & &(t)) & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
(&(t) & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
(t & A(aba)(F) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
(t & ((X()(F) & X(ab)(F) & A(b)(F) & X(ba)(F)) & &(a(aba)(F))) &

A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
(t & ((X()(F) & X(ab)(F) & (&(X()(F)) & &(a(b)(F))) & X(ba)(F)) & &(a(aba)(F))) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
...
(t & ((X()(F) & X(ab)(F) & t & X(ba)(F)) & &(a(aba)(F))) & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
...
(t & A(abab)(F) & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
...
(t & B(abab)(F) & B(bab)(F)) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
...
&(t) & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
t & (B(a)(F) & B(ab)(F) & B(abab)(F) & A(abab)(F) & A(b)(F)) & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
...
t & &(A(abab)(F)) & &(B(abab)(F))
...
t & &(B(abab)(F))
&(t)
t


L(abab)(T)
A(ab)(F)
B(ab)(F)
A(aba)(F)
B(bab)(F)
A(abab)(F)
B(abab)(F)
A(b)(F)
B(a)(F)
A(ba)(F)
B(ba)(F)
A(ε)(F)
B(ε)(F)
X(ε)(F)
X(ab)(F)
X(ba)(F)
X(aba)(F)
X(bab)(F)
a(ε)(F)
a(b)(F)
a(ab)(F)
a(ba)(F)
a(aba)(F)
a(bab)(F)
a(abab)(F)
b(ε)(F)
b(a)(F)
b(ab)(F)
b(ba)(F)
b(aba)(F)
b(bab)(F)
b(abab)(F)

Σχήμα 5.4

Εικασία 5.6. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$, $\chi \in \Sigma \cup V$ και $w \in \Sigma^*$. Ισχύουν τα παρακάτω:

- $\chi(w)(T) \underset{\text{rec}}{\overset{\text{kk}}{\Rightarrow}}{}_G^* \text{ t}$ αν και μόνο αν το $\gamma_G(\chi, w)$ έχει τιμή 1
- $\chi(w)(F) \underset{\text{rec}}{\overset{\text{kk}}{\Rightarrow}}{}_G^* \text{ t}$ αν και μόνο αν το $\gamma_G(\chi, w)$ έχει τιμή 0

5.1.2. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία

Ορισμός 5.10. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τους δυαδικούς (Σ, V)-όρους και (Σ, V)-τύπους αληθοτιμών *με μνήμη* ανάλογα με τους προηγούμενους, θεωρώντας ότι, για κάθε απλό τριαδικό όρο αληθοτιμών χ και $M \subseteq V$, τα $\chi(T)$ και $\chi(F)$ @ M είναι απλοί όροι του νέου είδους.

Όσον αφορά τους τριαδικούς όρους και τύπους αληθοτιμών με διπλή μνήμη ορίζουμε τα εξής:

- για κάθε απλό όρο $\chi = \rho$ @ (M, N), $\chi^T = \rho(T)$ και $\chi^F = \rho(F)$ @ M
- συνεχίζουμε τον ορισμό των μετασχηματισμών ^{T} και ^{F} και ορίζουμε το μετασχηματισμό $^{\text{bin}}$ όπως στον ορισμό 2.23.

Παράδειγμα 5.6.

$$
\begin{array}{ll}
\tau = & \sim (A(aa) @ (\varnothing, \{A, X\}) \ \& \ b(\epsilon) @ (\varnothing, \varnothing) \mid \\
& A(a) @ (\varnothing, \varnothing) \ \& \ b(a) @ (\varnothing, \varnothing) \mid \\
& A(\epsilon) @ (\varnothing, \varnothing) \ \& \ b(aa) @ (\varnothing, \varnothing)) \ \& \\
& X(aa) @ (\{A\}, \{X\})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\tau^T = & ((A(aa)(F) @ \varnothing \mid b(\epsilon)(F) @ \varnothing) \ \& \\
& (A(a)(F) @ \varnothing \mid b(a)(F) @ \varnothing) \ \& \\
& (A(\epsilon)(F) @ \varnothing \mid b(aa)(F) @ \varnothing)) \ \& \\
& X(aa)(T)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\tau^F = & (A(aa)(T) \ \& \ b(\epsilon)(T) \mid \\
& A(a)(T) \ \& \ b(a)(T) \mid \\
& A(\epsilon)(T) \ \& \ b(aa)(T)) \ \& \\
& X(aa)(F) @ \{A\}
\end{array}
$$

Ορισμός 5.11. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τους δυαδικούς $(\{\mathrm{t}\},\ \Sigma,\ V)$-όρους και $(\{\mathrm{t}\},\ \Sigma,\ V)$-τύπους αληθοτιμών με μνήμη ανάλογα με τον ορισμό 5.9.

Έστω τώρα Τ το σύνολο αυτών των όρων και $\rightsquigarrow\ \subseteq \mathrm{T}^2$, όπου, για κάθε $\tau,\ \upsilon \in \mathrm{T}$, $\tau \rightsquigarrow \upsilon$ αν και μόνο αν $\upsilon = \mathrm{t}$ και ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

- $\tau = A(w)(F)\ @\ M$, όπου $A \in M$
- ισχύει κάτι από όσα αναφέρονται στον ορισμό 5.9

Έστω τέλος μία γραμματική $G = (\Sigma,\ V,\ \varphi,\ A_0)$ και $\psi = \varphi^{\mathrm{eq}^{-1} \circ \mathrm{disj} \circ \mathrm{and} \circ \mathrm{bin} \circ \mathrm{mem}' \circ \mathrm{tv} \circ \mathrm{eq}}$. Ορίζουμε ότι $\overset{\mathrm{wf}}{\underset{\mathrm{rec}}{\rightarrow}}_G = \rightarrow_\psi \cup \rightsquigarrow$ και το $\overset{\mathrm{wf}}{\underset{\mathrm{rec}}{\Rightarrow}}_G$ είναι η επέκταση του $\overset{\mathrm{wf}}{\underset{\mathrm{rec}}{\rightarrow}}_G$.

Παράδειγμα 5.7. Οι πίνακες 5.5 και 5.6 απεικονίζουν τμήματα ακολουθιών $\overset{\mathrm{wf}}{\underset{\mathrm{rec}}{\Rightarrow}}_G$-αναγραφής που τερματίζουν, για τη γραμματική του παραδείγματος 4.1. Στο σχήμα 5.5 αναπαριστάνεται η ακολουθία του πίνακα 5.5 σε μορφή γραφήματος.

Πίνακας 5.5

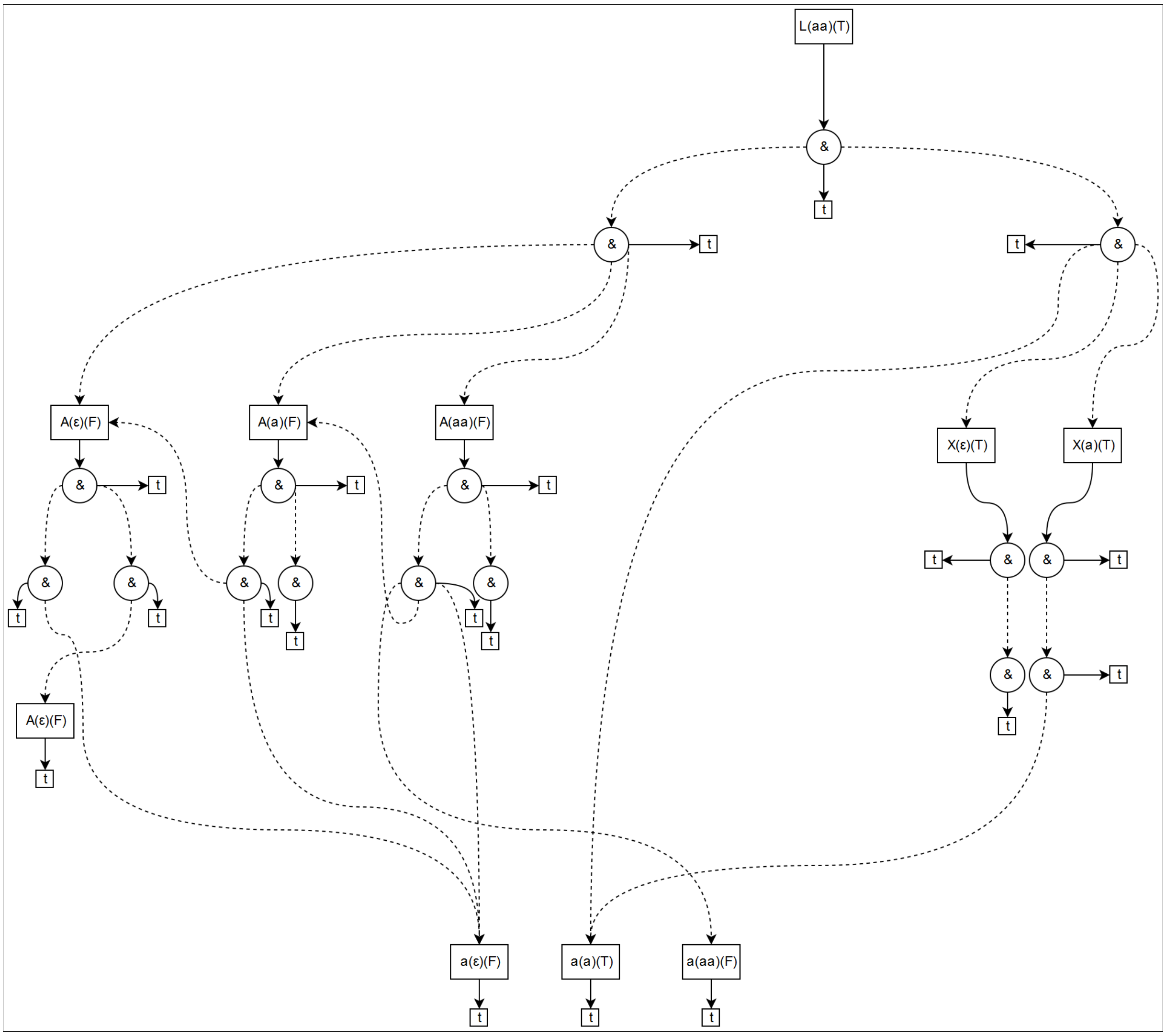
`L(aa)(T)`
`(A()(F)@0 & A(a)(F)@0 & A(aa)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`((&(a()(F)@0) & &(A()(F)@{A})) & A(a)(F)@0 & A(aa)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`((&(t) & &(A()(F)@{A})) & A(a)(F)@0 & A(aa)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`((t & &(A()(F)@{A})) & A(a)(F)@0 & A(aa)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`((t & &(t)) & A(a)(F)@0 & A(aa)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`(&(t) & A(a)(F)@0 & A(aa)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`(t & A(a)(F)@0 & A(aa)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`(t & ((A()(F)@0 & a()(F)@0) & &()) & A(aa)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`...`
`(t & ((t & a()(F)@0) & &()) & A(aa)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`(t & (&(t) & &()) & A(aa)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`

(t & (t & &()) & A(aa)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
(t & &(t) & A(aa)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
(t & A(aa)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
(t & ((a(aa)(F)@0 & A(a)(F)@0 & a()(F)@0) & &())) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
(t & ((t & A(a)(F)@0 & a()(F)@0) & &())) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
...
(t & ((t & a()(F)@0) & &())) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
(t & (&(t) & &())) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
(t & (t & &())) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
(t & &(t)) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
&(t) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
t & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
...
&(t)
t

Πίνακας 5.6

L(aa)(T)
(A(aa)(F)@0 & b(aa)(F)@0 & b(a)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
(((A()(F)@0 & A(a)(F)@0 & A(aa)(F)@{A}) & &(A(aa)(F)@{A})) & b(aa)(F)@0 & b(a)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
...
(((t & A(a)(F)@0 & A(aa)(F)@{A}) & &(A(aa)(F)@{A})) & b(aa)(F)@0 & b(a)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
...
(((t & A(aa)(F)@{A}) & &(A(aa)(F)@{A})) & b(aa)(F)@0 & b(a)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
((&(t) & &(A(aa)(F)@{A})) & b(aa)(F)@0 & b(a)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
((t & &(A(aa)(F)@{A})) & b(aa)(F)@0 & b(a)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
((t & &(t)) & b(aa)(F)@0 & b(a)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
(&(t) & b(aa)(F)@0 & b(a)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
(t & b(aa)(F)@0 & b(a)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
(t & b(a)(F)@0) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))
&(t) & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))

`t & (a(a)(T) & X()(T) & X(a)(T))`
`...`
`&(t)`
`t`



Σχήμα 5.5

Εικασία 5.7. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma,\ V,\ \varphi,\ A_0)$, $\chi \in \Sigma \cup V$ και $w \in \Sigma^*$. Ισχύουν τα παρακάτω:

- $\chi(w)(T) \overset{\mathrm{wf}\,*}{\underset{\mathrm{rec}}{\Rightarrow}}_G$ t αν και μόνο αν το $\Gamma_G(\chi,\ w)$ έχει τιμή 1
- $\chi(w)(F)\ @\ \varnothing \overset{\mathrm{wf}\,*}{\underset{\mathrm{rec}}{\Rightarrow}}_G$ t αν και μόνο αν το $\Gamma_G(\chi,\ w)$ έχει τιμή 0

3. Συστήματα παραγωγής

Ορισμός 5.12. Έστω ένα μη κενό και πεπερασμένο σύνολο Σ και $w \in \Sigma^*$. Ορίζουμε ότι $w^{\mathrm{conc}} = \left(.,\, \left(w(i)(T)\right)_{i<|w|}\right)$.

5.1.1. Σημασιολογία Kripke-Kleene

Ορισμός 5.13. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Διευρύνουμε τους δυαδικούς $(\Sigma,\, V)$-όρους και $(\Sigma,\, V)$-τύπους γλωσσών χρησιμοποιώντας έναν επιπλέον συναρτησιακό τελεστή πεπερασμένων ακολουθιών /.

Όσον αφορά τους δυαδικούς όρους και τύπους (γλωσσών) χωρίς ~, κάθε όρος $\tau = (o,\, \upsilon)$ που περιέχουν οι οποίοι, όπου $o \in \{.,\, :\}$ (αντίστοιχα $o \in \{|,\, \&\}$), έχει ως ορίσματα μόνο απλούς (αντίστοιχα σύνθετους) όρους, ορίζουμε τα εξής:

- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (.,\, \upsilon)$, $\tau^{/} = \{\tau\}$
- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (:,\, \upsilon)$, $\tau^{/} = \left\{\left(:,\, \left(\left(/,\, \left(\upsilon(i)^{/}\right)_{j<n(i)}\right)\right)_{i<|\upsilon|}\right) \mid n \in \omega^{|\upsilon|}\right\}$
- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (o,\, \upsilon)$, όπου $o \in \{|,\, \&\}$:
  $\tau^{/} = \left\{\left(o,\, \mathrm{im}(c)\left(\upsilon^{\mathrm{im}(/)}\right)\right) \mid c \in C\left(\upsilon^{\mathrm{im}(/)}\right)\right\}$
- για κάθε απλό τύπο $\varphi = \chi == \tau$, όπου το τ είναι σύνθετος όρος:
  $\varphi^{\mathrm{mult}} = \left(,,\, \{\chi == \sigma \mid \sigma \in \tau^{/}\}\right)$
- για κάθε (σύνθετο) τύπο που περιέχει απλούς τύπους μόνο της παραπάνω μορφής $\varphi = (,,\, \psi)$, $\varphi^{\mathrm{mult}} = \left(,,\, \psi^{\mathrm{im}(\mathrm{mult})}\right)$

Παράδειγμα 5.8.

$\boxed{\tau = A(F) : b(F)\ \&\ a(T)\ .\ X(T)}$ $\boxed{\tau^{/} \ni /(A(F)) : /()\ \&\ a(T)\ .\ X(T)}$

$\boxed{\tau^{/} \ni A(F)\ /\ A(F)\ /\ A(F) : b(F)\ /\ b(F)\ \&\ a(T)\ .\ X(T)}$

Ορισμός 5.14. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Έστω ακόμη Τ το σύνολο των διευρυμένων δυαδικών (Σ, V)-όρων γλωσσών και $\rightsquigarrow \subseteq \mathrm{T}^2$, όπου, για κάθε $\tau, \upsilon \in \mathrm{T}$, $\tau \rightsquigarrow \upsilon$ αν και μόνο αν, για κάποιο $w \in \Sigma^*$, $\upsilon = w^{\mathrm{conc}}$ και ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

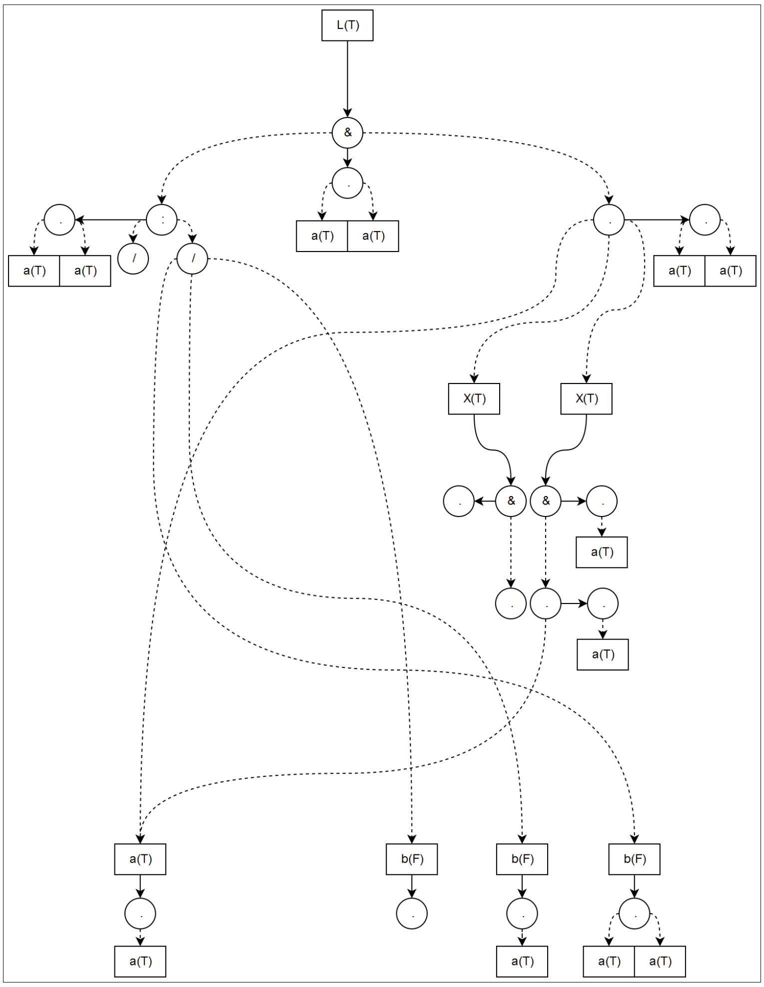
- $\tau = a(F)$, όπου $a \in \Sigma$ και $(a) \neq w$
- $\tau = a(T)$, όπου $(a) = w$
- $\tau = (., \sigma)$, όπου υπάρχει $\pi \in (\Sigma^*)^{|\sigma|}$ με $\bullet\, \pi = w$, τέτοιο ώστε, για κάθε $i < |\sigma|$, $\sigma(i) = \pi(i)^{\mathrm{conc}}$
- $\tau = (:, \sigma)$, όπου:
    - για κάθε $i < |\sigma|$, $\sigma(i)^{\mathrm{op}} = /$ και το $\sigma(i)^{\mathrm{arg}}$ είναι "1-1"
    - υπάρχει $c \in \{\pi \in (\Sigma^*)^{|\sigma|} \mid \bullet\, \pi = w\} \to \{(i, j) \mid i < |\sigma|,\ j < |\sigma(i)^{\mathrm{arg}}|\}$ που είναι "επί", τέτοιο ώστε, για κάθε π στο πεδίο ορισμού του, θεωρώντας ότι $c(\pi) = (i, j)$, $\sigma(i)^{\mathrm{arg}}(j) = \pi(i)^{\mathrm{conc}}$
- $\tau = (\&, \sigma)$, όπου, για κάθε $\rho \in \sigma$, $\rho = w^{\mathrm{conc}}$

Έστω τέλος μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$ και $\psi = \varphi^{\mathrm{eq}^{-1} \circ \mathrm{disj} \circ \mathrm{and} \circ \mathrm{mult} \circ \mathrm{bin} \circ \mathrm{eq}}$. Ορίζουμε ότι $\overset{\mathrm{kk}}{\underset{\mathrm{gen}}{\to}}_G = \to_\psi \cup \rightsquigarrow$ και το $\overset{\mathrm{kk}}{\underset{\mathrm{gen}}{\Rightarrow}}_G$ είναι η επέκταση του $\overset{\mathrm{kk}}{\underset{\mathrm{gen}}{\to}}_G$.

Παράδειγμα 5.9. Ο πίνακας 5.7 απεικονίζει μια ακολουθία $\overset{\mathrm{kk}}{\underset{\mathrm{gen}}{\Rightarrow}}_G$-αναγραφής που τερματίζει, για τη γραμματική του παραδείγματος 4.1. Στο σχήμα 5.6 αναπαριστάνεται η συγκεκριμένη ακολουθία σε μορφή γραφήματος. Ο πίνακας 5.8 απεικονίζει ένα τμήμα μιας ακολουθίας $\overset{\mathrm{kk}}{\underset{\mathrm{gen}}{\Rightarrow}}_G$-αναγραφής που τερματίζει, για τη γραμματική $G = (\{a, b\}, \{L, A, B, X\}, \varphi, L)$, όπου το φ είναι ο τύπος του παραδείγματος 1.4. Στο σχήμα 5.7 αναπαριστάνεται η συγκεκριμένη ακολουθία σε μορφή γραφήματος. Τώρα, αντί να αναπαριστάνεται άμεσα το w^{conc} που παράγεται από διάφορους όρους όταν $w \neq \epsilon$ (κάτι που θα διόγκωνε ακόμη περισσότερο το γράφημα), χρησιμοποιούμε κάποιους ολικά διατεταγμένους "ρομβοειδείς" κόμβους με σταθερές ως επιγραφές (στο συνολό τους αντιστοιχούν στην παραγόμενη συμβολοσειρά) και το w^{conc} για κάποιον κόμβο προκύπτει από τους κόμβους αυτού του είδους που είναι απόγονοί του. Στους ορθογώνιους κόμβους σημειώνεται βοηθητικά και το τμήμα των “ρομβοειδών” κόμβων στο οποίο αντιστοιχούν (σημειώνεται το `[ε]` όταν παράγουν το ϵ^{conc}). Η συγκεκριμένη αναπαράσταση είναι ανάλογη με τα συντακτικά “δέντρα” που ορίζονται στα [17] και [18].

Πίνακας 5.7

L(T)
/() : b(F) / b(F) / b(F) & a(T) . X(T) . X(T)
/() : (a(T) . a(T)) / b(F) / b(F) & a(T) . X(T) . X(T)
/() : (a(T) . a(T)) / .(a(T)) / b(F) & a(T) . X(T) . X(T)
/() : (a(T) . a(T)) / .(a(T)) / .() & a(T) . X(T) . X(T)
a(T) . a(T) & a(T) . X(T) . X(T)
a(T) . a(T) & .(a(T)) . X(T) . X(T)
a(T) . a(T) & .(a(T)) . &(.()) . X(T)
a(T) . a(T) & .(a(T)) . .() . X(T)
a(T) . a(T) & .(a(T)) . .() . &(.(a(T)))
a(T) . a(T) & .(a(T)) . .() . &(.(.(a(T))))
a(T) . a(T) & .(a(T)) . .() . &(.(a(T)))
a(T) . a(T) & .(a(T)) . .() . .(a(T))
&(a(T) . a(T))
a(T) . a(T)

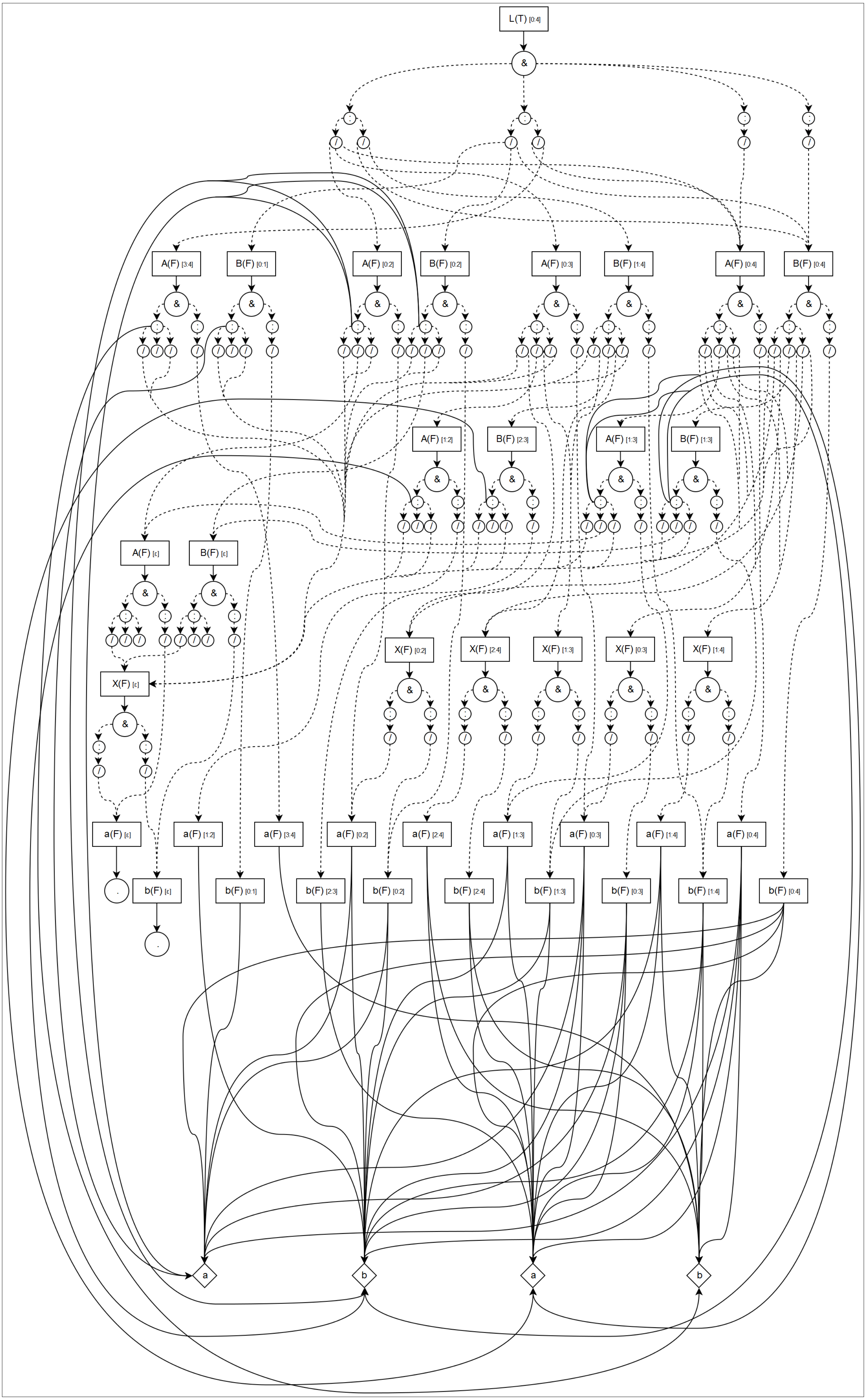


Σχήμα 5.6

Πίνακας 5.8

L(T)
A(F) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
(/(X(F)) : /(A(F)) : /(X(F)) & :(/(a(F)))) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
(/(:(/(a(F))) & :(/(b(F)))) : /(A(F)) : /(X(F)) & :(/(a(F)))) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
(/(:(/(.())) & :(/(b(F)))) : /(A(F)) : /(X(F)) & :(/(a(F)))) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
(/(.() & :(/(b(F)))) : /(A(F)) : /(X(F)) & :(/(a(F)))) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
(/(.() & :(/(.()))) : /(A(F)) : /(X(F)) & :(/(a(F)))) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
(/(&(.())) : /(A(F)) : /(X(F)) & :(/(a(F)))) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
(/(.()) : /(A(F)) : /(X(F)) & :(/(a(F)))) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
(/(.()) : /(/(X(F)) : /() : /() & :(/(a(F)))) : /(X(F)) & :(/(a(F)))) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
...
(/(.()) : /(.()) : /(.()) & :(/(a(F)))) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
(a(T) . b(T) & :(/(a(F)))) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
(a(T) . b(T) & :(/(a(T) . b(T)))) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
&(a(T) . b(T)) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
(a(T) . b(T)) / A(F) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
(a(T) . b(T)) / (X(F) / X(F) : /(A(F)) : /(X(F)) & :(/(a(F)))) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
(a(T) . b(T)) / (X(F) / X(F) : /(/(X(F)) : /() : /(X(F)) & :(/(a(F)))) : /(X(F)) & :(/(a(F)))) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
...
(a(T) . b(T)) / (X(F) / X(F) : /(.(b(T))) : /(X(F)) & :(/(a(F)))) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F)))

& :(/(B(F)))
...
(a(T) . b(T)) / (a(T) . b(T) . a(T)) / A(F) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
...
(a(T) . b(T)) / (a(T) . b(T) . a(T)) / (a(T) . b(T) . a(T) . b(T)) : B(F) / B(F) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
...
(a(T) . b(T)) / (a(T) . b(T) . a(T)) / (a(T) . b(T) . a(T) . b(T)) : (a(T) . b(T) . a(T) . b(T)) / (b(T) . a(T) . b(T)) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
a(T) . b(T) . a(T) . b(T) & B(F) / B(F) / B(F) : A(F) / A(F) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
...
a(T) . b(T) . a(T) . b(T) & :(/(A(F))) & :(/(B(F)))
...
a(T) . b(T) . a(T) . b(T) & :(/(B(F)))
&(a(T) . b(T) . a(T) . b(T))
a(T) . b(T) . a(T) . b(T)


L(T) [0:4]
A(F) [3:4]
B(F) [0:1]
A(F) [0:2]
B(F) [0:2]
A(F) [0:3]
B(F) [1:4]
A(F) [0:4]
B(F) [0:4]
A(F) [1:2]
B(F) [2:3]
A(F) [1:3]
B(F) [1:3]
A(F) [ε]
B(F) [ε]
X(F) [ε]
X(F) [0:2]
X(F) [2:4]
X(F) [1:3]
X(F) [0:3]
X(F) [1:4]
a(F) [ε]
a(F) [1:2]
a(F) [3:4]
a(F) [0:2]
a(F) [2:4]
a(F) [1:3]
a(F) [0:3]
a(F) [1:4]
a(F) [0:4]
b(F) [ε]
b(F) [0:1]
b(F) [2:3]
b(F) [0:2]
b(F) [2:4]
b(F) [1:3]
b(F) [0:3]
b(F) [1:4]
b(F) [0:4]
a
b
a
b

Σχήμα 5.7 (στην προηγούμενη σελίδα)

Εικασία 5.8. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$, $\chi \in \Sigma \cup V$ και $w \in \Sigma^*$. Ισχύουν τα παρακάτω:

- $\chi(T) \overset{\text{kk}}{\underset{\text{gen}}{\Rightarrow}}{}_G^* \, w^{\text{conc}}$ αν και μόνο αν $\chi(w)(T) \overset{\text{kk}}{\underset{\text{rec}}{\Rightarrow}}{}_G^* \, \text{t}$
- $\chi(F) \overset{\text{kk}}{\underset{\text{gen}}{\Rightarrow}}{}_G^* \, w^{\text{conc}}$ αν και μόνο αν $\chi(w)(F) \overset{\text{kk}}{\underset{\text{rec}}{\Rightarrow}}{}_G^* \, \text{t}$

5.1.2. Καλά θεμελιωμένη σημασιολογία

Ορισμός 5.15. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Διευρύνουμε τους (Σ, V)-όρους και (Σ, V)-τύπους γλωσσών χρησιμοποιώντας έναν επιπλέον μονομελή συναρτησιακό τελεστή -. Όσον αφορά τους προηγούμενους τριαδικούς όρους και τύπους (γλωσσών) ορίζουμε τα εξής:

- για κάθε απλό όρο χ, $\chi^{\text{neg}} = \chi$
- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (\sim, \upsilon)$, $\tau^{\text{neg}} = (\text{-}, \tau)$
- για κάθε σύνθετο όρο που δεν είναι της παραπάνω μορφής ή τύπο $x = (o, y)$, $x^{\text{neg}} = \left(o, y^{\text{im}(\text{neg})}\right)$

Ορίζουμε το μετασχηματισμό $^{\text{bin}}$ για τέτοιους τριαδικούς τύπους θεωρώντας ότι, για κάθε όρο $\tau = (\text{-}, \upsilon)$, $\tau^T = (\text{-}, \upsilon^T)$ και $\tau^F = (\text{-}, \upsilon^F)$. Ορίζουμε το μετασχηματισμό $^{\text{mult}}$ για τέτοιους δυαδικούς τύπους θεωρώντας ότι, για κάθε όρο $\tau = (\text{-}, \upsilon)$, $\tau^{/} = \{(\text{-}, \sigma) \mid \sigma \in \upsilon^{/}\}$.

Παράδειγμα 5.10.

$\boxed{\tau = \sim A \,.\, b \,\&\, a \,.\, X}$

$\boxed{\tau^{\text{neg}} = \text{-}\,(\sim A \,.\, b) \,\&\, a \,.\, X}$

$\boxed{\tau^{T \circ \text{neg}} = \text{-}\,(A(F) : b(F)) \,\&\, a(T) \,.\, X(T)}$

$\boxed{\tau^{/ \circ T \circ \text{neg}} \ni \text{-}\,(A(F) \,/\, A(F) \,/\, A(F) : b(F) \,/\, b(F)) \,\&\, a(T) \,.\, X(T)}$

Ορισμός 5.16. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Ορίζουμε τους δυαδικούς $(\Sigma,\ V)$-όρους και $(\Sigma,\ V)$-τύπους γλωσσών *με μνήμη* ανάλογα με τους προηγούμενους, θεωρώντας ότι, για κάθε απλό τριαδικό όρο γλωσσών χ και $M \subseteq V$, τα $\chi(T)$ και $\chi(F)\ @\ M$ είναι απλοί όροι του νέου είδους και χρησιμοποιώντας επιπλέον τον τελεστή / και δύο νέους μονομελείς συναρτησιακούς τελεστές # και *.

Όσον αφορά τους δυαδικούς όρους και τύπους (γλωσσών) με / και -, χωρίς ~, κάθε όρος $\tau = (o,\ \upsilon)$ που περιέχουν οι οποίοι, όπου $o \in \{.,\ /\}$ (αντίστοιχα $o \in \{|,\ \&,\ -,\ :\}$), έχει ως ορίσματα μόνο απλούς (αντίστοιχα σύνθετους) όρους, ορίζουμε τα εξής:

- για κάθε απλό όρο $\chi = \rho(T)$ και $M \subseteq V$, $\chi^{@M} = \chi$
- για κάθε απλό όρο $\chi = A(F)$, όπου $A \in V$, και $M \subseteq V$, $\chi^{@M} = \chi\ @\ M$
- για κάθε απλό όρο $\chi = a(F)$, όπου $a \in \Sigma$, και $M \subseteq V$, $\chi^{@M} = \chi\ @\ \varnothing$
- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (-,\ \upsilon)$ και $M \subseteq V$, $\tau^{@M} = \upsilon^{@\varnothing}$
- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (o,\ \upsilon)$, όπου $o \in \{.,\ /\}$, και $M \subseteq V$:
    - αν $M = \varnothing$, τότε $\tau^{@M} = \left(o,\ \upsilon^{\mathrm{im}(@\varnothing)}\right)$
    - αλλιώς:

$$\tau^{@M} = \left\{\left(o,\ \left(\#\ \upsilon(i)^{@\varnothing}\right)_{i<|\upsilon|}\right)\right\} \cup \left\{\left(o,\ \left(\#\ \upsilon(i)^{@\varnothing}\right)_{i<j} \cdot \left(*\ \upsilon(i)^{@M}\right) \cdot \left(\#\ \upsilon(i)^{@\varnothing}\right)_{j\le i<|\upsilon|}\ \middle|\ j < |\upsilon|\right)\right\}$$

- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (:,\ \upsilon)$ και $M \subseteq V$:
  $\tau^{@M} = \left\{\left(:,\ \left(c\left(\upsilon(i)^{@M} \times \{i\}\right)[0]\right)_{i<|\upsilon|}\right) \mid c \in C\left(\left\{\upsilon(i)^{@M} \times \{i\} \mid i<|\upsilon|\right\}\right)\right\}$
- για κάθε (σύνθετο) όρο $\tau = (o,\ \upsilon)$, όπου $o \in \{|,\ \&\}$, και $M \subseteq V$:
  $\tau^{@M} = \left\{\left(o,\ \mathrm{im}(c)\left(\upsilon^{\mathrm{im}(@M)}\right)\right) \mid c \in C\left(\upsilon^{\mathrm{im}(@M)}\right)\right\}$
- για κάθε απλό τύπο $\varphi = A(T) == \tau$, όπου $A \in V$ και το τ είναι σύνθετος όρος:
  $\varphi^{\mathrm{mem}} = \left(,,\ \{A(T) == \sigma \mid \sigma \in \tau^{@\varnothing}\}\right)$
- για κάθε απλό τύπο $\varphi = A(F) == \tau$, όπου $A \in V$ και το τ είναι σύνθετος όρος:
  $\varphi^{\mathrm{mem}} = \left(,,\ \{A(F)\ @\ M == \sigma \mid M \subseteq V - \{A\},\ \sigma \in \tau^{@M\cup\{A\}}\}\right)$
- για κάθε (σύνθετο) τύπο που περιέχει απλούς τύπους μόνο των παραπάνω μορφών $\varphi = (,,\ \psi)$, $\varphi^{\mathrm{mem}} = \left(,,\ \psi^{\mathrm{im}(\mathrm{mem})}\right)$

Παράδειγμα 5.11.

$\boxed{\tau = -\ (A(F)\ /\ A(F) : /(b(F)))\ \&\ a(T)\ .\ X(T)}$

$\boxed{\tau^{@\{A\}} \ni A(F)@\varnothing \ / \ A(F)@\varnothing : /(b(F)@\varnothing) \ \& \ *a(T) \ . \ \#X(T)}$

$\boxed{\tau^{@\{A\}} \ni A(F)@\varnothing \ / \ A(F)@\varnothing : /(b(F)@\varnothing) \ \& \ \#a(T) \ . \ \#X(T)}$

$\boxed{\upsilon = -(A(T) \ . \ b(T)) \ \& \ /(a(F)) : X(F) \ / \ X(F)}$

$\boxed{\upsilon^{@\{A\}} \ni A(T) \ . \ b(T) \ \& \ /(\#a(F)@\varnothing) : *X(F)@\{A\} \ / \ \#X(F)@\varnothing}$

$\boxed{\upsilon^{@\{A\}} \ni A(T) \ . \ b(T) \ \& \ /(*a(F)@\varnothing) : \#X(F)@\varnothing \ / \ *X(F)@\{A\}}$

Ορισμός 5.17. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V. Έστω ακόμη Τ το σύνολο των διευρυμένων δυαδικών (Σ, V)-όρων γλωσσών με μνήμη και $\rightsquigarrow \subseteq \mathrm{T}^2$, όπου, για κάθε $\tau, \upsilon \in \mathrm{T}$, $\tau \rightsquigarrow \upsilon$ αν και μόνο αν, για κάποιο $w \in \Sigma^*$, $\upsilon = w^{\mathrm{conc}}$ και ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

- $\tau = A(F) @ M$, όπου $A \in M$
- $\tau = a(F) @ M$, όπου $a \in \Sigma$ και $(a) \neq w$
- $\tau = a(T)$, όπου $(a) = w$
- $\tau = (., \sigma)$, όπου υπάρχει $\pi \in (\Sigma^*)^{|\sigma|}$ με $\bullet \pi = w$, τέτοιο ώστε να ισχύει η αντίστοιχη συνθήκη του ορισμού 5.14 ή, για κάθε $i < |\sigma|$:
  - αν $\pi(i) \neq w$, τότε $\sigma(i) = \# \ \pi(i)^{\mathrm{conc}}$
  - αλλιώς, $\sigma(i) = * \ \pi(i)^{\mathrm{conc}}$
- $\tau = (:, \sigma)$, όπου:
  - για κάθε $i < |\sigma|$, $\sigma(i)^{\mathrm{op}} = /$ και το $\sigma(i)^{\mathrm{arg}}$ είναι "1-1"
  - υπάρχει $c \in \{\pi \in (\Sigma^*)^{|\sigma|} \mid \bullet \pi = w\} \to \{(i, j) \mid i < |\sigma|, \ j < |\sigma(i)^{\mathrm{arg}}|\}$ που είναι "επί", τέτοιο ώστε να ισχύει η αντίστοιχη συνθήκη του ορισμού 5.14 ή, για κάθε π στο πεδίο ορισμού του, θεωρώντας ότι $c(\pi) = (i, j)$:
    - αν $\pi(i) \neq w$, τότε $\sigma(i)^{\mathrm{arg}}(j) = \# \ \pi(i)^{\mathrm{conc}}$
    - αλλιώς, $\sigma(i)^{\mathrm{arg}}(j) = * \ \pi(i)^{\mathrm{conc}}$
- $\tau = (\&, \sigma)$, όπου, για κάθε $\rho \in \sigma$, $\rho = w^{\mathrm{conc}}$

Έστω τέλος μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$ και $\psi = \varphi^{\mathrm{eq}^{-1} \circ \mathrm{disj} \circ \mathrm{and} \circ \mathrm{mem} \circ \mathrm{mult} \circ \mathrm{bin} \circ \mathrm{neg} \circ \mathrm{eq}}$. Ορί-ζουμε ότι $\overset{\mathrm{wf}}{\underset{\mathrm{gen}}{\rightarrow}}_G = \rightarrow_\psi \cup \rightsquigarrow$ και το $\overset{\mathrm{wf}}{\underset{\mathrm{gen}}{\Rightarrow}}_G$ είναι η επέκταση του $\overset{\mathrm{wf}}{\underset{\mathrm{gen}}{\rightarrow}}_G$.

Παράδειγμα 5.12. Οι πίνακες 5.9 και 5.10 απεικονίζουν τμήματα ακολουθιών $\overset{\text{wf}}{\underset{\text{gen}}{\Rightarrow}}_{G}$-αναγραφής που τερματίζουν, για τη γραμματική του παραδείγματος 4.1. Στο σχήμα 5.8 αναπαριστάνεται η ακολουθία του πίνακα 5.9 σε μορφή γραφήματος.

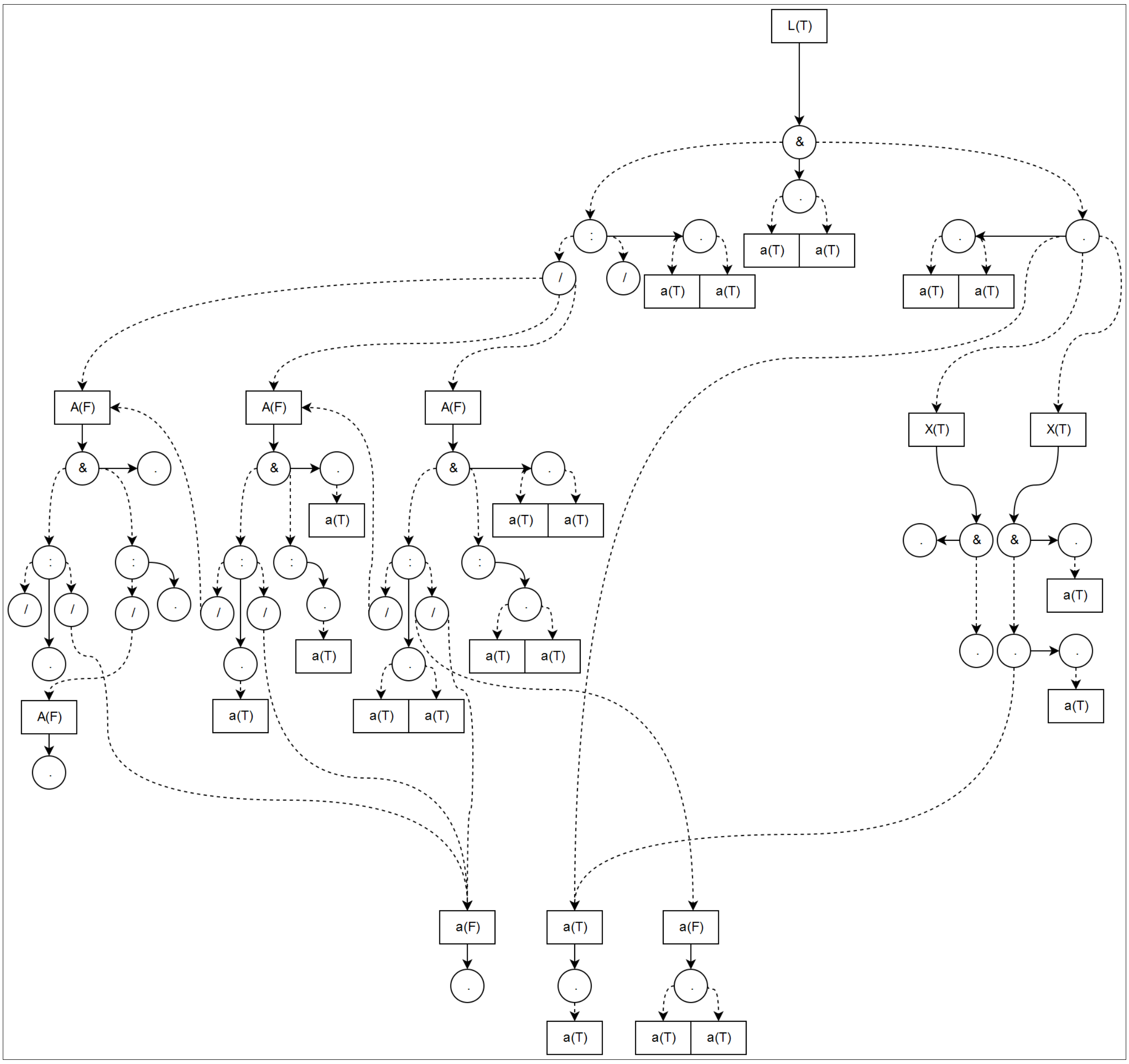
Πίνακας 5.9

L(T)
A(F)@0 / A(F)@0 / A(F)@0 : /() & a(T) . X(T) . X(T)
(/() : /(*a(F)@0) & :(/(*A(F)@{A}))) / A(F)@0 / A(F)@0 : /() & a(T) . X(T) . X(T)
(/() : /(*.()) & :(/(*A(F)@{A}))) / A(F)@0 / A(F)@0 : /() & a(T) . X(T) . X(T)
(.() & :(/(*A(F)@{A}))) / A(F)@0 / A(F)@0 : /() & a(T) . X(T) . X(T)
(.() & :(/(*.()))) / A(F)@0 / A(F)@0 : /() & a(T) . X(T) . X(T)
&(.()) / A(F)@0 / A(F)@0 : /() & a(T) . X(T) . X(T)
.() / A(F)@0 / A(F)@0 : /() & a(T) . X(T) . X(T)
.() / (/(#A(F)@0) : /(#a(F)@0) & :()) / A(F)@0 : /() & a(T) . X(T) . X(T)
...
.() / (/(#.()) : /(#a(F)@0) & :()) / A(F)@0 : /() & a(T) . X(T) . X(T)
.() / (/(#.()) : /(#.()) & :()) / A(F)@0 : /() & a(T) . X(T) . X(T)
.() / (.(a(T)) & :()) / A(F)@0 : /() & a(T) . X(T) . X(T)
.() / &(.(a(T))) / A(F)@0 : /() & a(T) . X(T) . X(T)
.() / .(a(T)) / A(F)@0 : /() & a(T) . X(T) . X(T)
.() / .(a(T)) / (/(#A(F)@0) : *a(F)@0 / #a(F)@0 & :()) : /() & a(T) . X(T) . X(T)
...
.() / .(a(T)) / (/(#.(a(T))) : *a(F)@0 / #a(F)@0 & :()) : /() & a(T) . X(T) . X(T)
.() / .(a(T)) / (/(#.(a(T))) : *(a(T) . a(T)) / #a(F)@0 & :()) : /() & a(T) . X(T) . X(T)
.() / .(a(T)) / (/(#.(a(T))) : *(a(T) . a(T)) / #.() & :()) : /() & a(T) . X(T) . X(T)
.() / .(a(T)) / (a(T) . a(T) & :()) : /() & a(T) . X(T) . X(T)
.() / .(a(T)) / &(a(T) . a(T)) : /() & a(T) . X(T) . X(T)
.() / .(a(T)) / (a(T) . a(T)) : /() & a(T) . X(T) . X(T)
a(T) . a(T) & a(T) . X(T) . X(T)
...

&(a(T) . a(T))
a(T) . a(T)

Πίνακας 5.10

L(T)
/(A(F)@0) : b(F)@0 / b(F)@0 & a(T) . X(T) . X(T)
/(#A(F)@0 / #A(F)@0 / *A(F)@{A} : /() & :(/(*A(F)@{A}))) : b(F)@0 / b(F)@0 & a(T) . X(T) . X(T)
...
/(#.() / #A(F)@0 / *A(F)@{A} : /() & :(/(*A(F)@{A}))) : b(F)@0 / b(F)@0 & a(T) . X(T) . X(T)
...
/(#.() / #.(a(T)) / *A(F)@{A} : /() & :(/(*A(F)@{A}))) : b(F)@0 / b(F)@0 & a(T) . X(T) . X(T)
/(#.() / #.(a(T)) / *(a(T) . a(T)) : /() & :(/(*A(F)@{A}))) : b(F)@0 / b(F)@0 & a(T) . X(T) . X(T)
/(a(T) . a(T) & :(/(*A(F)@{A}))) : b(F)@0 / b(F)@0 & a(T) . X(T) . X(T)
/(a(T) . a(T) & :(/(*(a(T) . a(T))))) : b(F)@0 / b(F)@0 & a(T) . X(T) . X(T)
/(&(a(T) . a(T))) : b(F)@0 / b(F)@0 & a(T) . X(T) . X(T)
/(a(T) . a(T)) : b(F)@0 / b(F)@0 & a(T) . X(T) . X(T)
/(a(T) . a(T)) : (a(T) . a(T)) / b(F)@0 & a(T) . X(T) . X(T)
/(a(T) . a(T)) : (a(T) . a(T)) / .(a(T)) & a(T) . X(T) . X(T)
a(T) . a(T) & a(T) . X(T) . X(T)
...
&(a(T) . a(T))
a(T) . a(T)



Σχήμα 5.8

Εικασία 5.9. Έστω μία γραμματική $G = (\Sigma, V, \varphi, A_0)$, $M \subseteq V$, $\chi \in \Sigma \cup V$ και $w \in \Sigma^*$. Ισχύουν τα παρακάτω:

- $\chi(T) \underset{\text{gen}}{\overset{\text{wf}}{\Rightarrow}}{}_G^{*} \, w^{\text{conc}}$ αν και μόνο αν $\chi(w)(T) \underset{\text{rec}}{\overset{\text{wf}}{\Rightarrow}}{}_G^{*} \, \text{t}$
- $\chi(F) \,@\, M \underset{\text{gen}}{\overset{\text{wf}}{\Rightarrow}}{}_G^{*} \, w^{\text{conc}}$ αν και μόνο αν $\chi(w)(F) \,@\, M \underset{\text{rec}}{\overset{\text{wf}}{\Rightarrow}}{}_G^{*} \, \text{t}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

Ας εστιάσουμε κλείνοντας στην επέκταση των γραμματικών έτσι ώστε να μπορούν να εκφράσουν την έννοια των συμφραζομένων. Μία πρώτη απόπειρα προς αυτή την κατεύθυνση έκανε ο Noam Chomsky ([2]) για τις απλές ασυμφραστικές γραμματικές, γενικεύοντας τα σχετικά συστήματα αναγραφής συμβολοσειρών, επιτρέποντας κανόνες της μορφής $\beta A\gamma \to \beta\alpha\gamma$. Αυτό το είδος γενίκευσης αφαιρεί από τις εκφράσεις που εμφανίζονται στους κανόνες την καθαρή δηλωτική τους σημασία και επιπλέον δίνει στις γραμματικές υπερβολικά μεγάλη εκφραστική δύναμη. Αν σε κάθε κανόνα $\beta A\gamma \to \beta\alpha\gamma$, απαιτήσουμε ότι $\alpha \neq \epsilon$, τότε οι γραμματικές που προκύπτουν είναι ισοδύναμες με τις "μη φθίνουσες" γραμματικές (που έχουν κανόνες της μορφής $\alpha \to \beta$, όπου $|\alpha| \leq |\beta|$) και παράγουν τις γλώσσες του $\mathrm{NSPACE}(n)$ που δεν περιλαμβάνουν το ϵ, ενώ αλλιώς είναι ισοδύναμες με τις γραμματικές "χωρίς περιορισμούς" (που έχουν κανόνες της μορφής $\alpha \to \beta$) και παράγουν τις αναδρομικά αριθμήσιμες γλώσσες.

Θα δούμε σε αυτό το σημείο μία διαφορετική προσέγγιση στην έννοια των συμφραζομένων, ανάλογη με αυτή που γίνεται στο [1] για τις γραμματικές χωρίς άρνηση, η οποία φαίνεται να ξεπερνά τα προβλήματα της προηγούμενης. Για αυτό το σκοπό χρησιμοποιούμε στη θέση των απλών συμβολοσειρών τριάδες συμβολοσειρών, τις οποίες ονομάζουμε συμβολοσειρές με συμφραζόμενα. Για μια τέτοια τριάδα w, ορίζουμε ότι $w^L = w[0]$, $w^C = w[1]$ και $w^R = w[2]$. Έστω ένα μη κενό και πεπερασμένο σύνολο Σ. Ορίζουμε τη σχέση "αριστερό συμφραζόμενο" $\lhd \subseteq \left(\left(\Sigma^*\right)^3\right)^2$, θεωρώντας ότι, για κάθε $w,\ v \in \left(\Sigma^*\right)^3$, $w \lhd v$ αν και μόνο αν:

- $w^L \cdot w^C = v^L$
- $v^C \cdot v^R = w^R$

Ορίζουμε τη σχέση "δεξιό συμφραζόμενο" $\rhd$ ως την αντίστροφη της σχέσης $\lhd$. Έστω ακόμη ότι $\mathrm{W} = \left\{w \in \left(\left(\Sigma^*\right)^3\right)^{<\omega} \mid |w| > 0,\ \forall\ i < |w| - 1\ \ w(i) \lhd w(i+1)\right\}$. Ορίζουμε την πράξη παράθεσης συμβολοσειρών με συμφραζόμενα $\bullet \in \mathrm{W} \to (\Sigma^*)^3$, θεωρώντας ότι, για κάθε $w \in \mathrm{W}$, $\bullet\, w = \left(w(0)^L,\ \underset{i<|w|}{\bullet} w(i)^C,\ w(|w|-1)^R\right)$. Ορίζουμε επίσης το σύνολο των γλωσσών με συμφραζόμενα επί του Σ, $\mathrm{L} = (\Sigma^*)^3 \to \mathrm{V}$, όπου V το σύνολο των αληθοτιμών. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\lhd' \in \mathrm{L} \to \mathrm{L}$, θεωρώντας ότι, για κάθε $L \in \mathrm{L}$:

για κάθε $w \in (\Sigma^*)^3$, $\lhd' L(w) = \bigvee_{\substack{v \in (\Sigma^*)^3, \\ v \lhd w}} L(v)$

ενώ ανάλογα ορίζουμε και τη συνάρτηση $\rhd' \in \mathrm{L} \to \mathrm{L}$, χρησιμοποιώντας το $\rhd$ αντί του $\lhd$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\bullet \in \mathrm{L}^{<\omega} \to \mathrm{L}$, θεωρώντας ότι $\bullet\, \epsilon = \{w \in (\Sigma^*)^3 \mid w^C = \epsilon\}$ και, για κάθε $L \in \mathrm{L}^{<\omega}$ με $|L| > 0$:

για κάθε $w \in (\Sigma^*)^3$, $\bullet\, L(w) = \bigvee_{\substack{v \in \mathrm{W}, \\ |v| = |L|, \\ \bullet\, v = w}} \bigwedge_{i < |L|} L(i)(v(i))$

ενώ ανάλογα ορίζουμε και τη συνάρτηση $\odot \in \mathrm{L}^{<\omega} \to \mathrm{L}$, αντικαθιστώντας το $w^C = \epsilon$ με $w^C \neq \epsilon$ και ανταλλάσσοντας τα $\bigvee$ και $\bigwedge$ [1]. Τέλος, ορίζουμε τις συναρτήσεις $\bigcup$, $\bigcap$ και $\overline{}$ για γλώσσες με συμφραζόμενα αντίστοιχα με την περίπτωση των απλών γλωσσών.

Όσον αφορά το συντακτικό μέρος, για δύο ξένα μεταξύ τους, μη κενά και πεπερασμένα σύνολα Σ και V, διευρύνουμε τους $(\Sigma,\ V)$-όρους και $(\Sigma,\ V)$-τύπους με δύο νέους μονομελείς συναρτησιακούς τελεστές $<$ και $>$. Για να ορίσουμε τις γραμματικές με συμφραζόμενα τροποποιούμε τον ορισμό των κανονικών όρων και τύπων ως εξής:

- για κάθε κανονικό όρο παράθεσης τ, το $< \tau$ είναι κανονικός όρος αριστερών συμφραζομένων και το $> \tau$ είναι κανονικός όρος δεξιών συμφραζομένων
- για κάθε κανονικό όρο παράθεσης ή αριστερών συμφραζομένων ή δεξιών συμφραζομένων τ, το $\sim \tau$ είναι κανονικός όρος άρνησης
- για κάθε μη κενό και πεπερασμένο σύνολο κανονικών όρων παράθεσης ή αριστερών συμφραζομένων ή δεξιών συμφραζομένων ή άρνησης τ, το $(\&,\ \tau)$ είναι κανονικός όρος σύζευξης

Ερμηνεύουμε τους όρους ως γλώσσες με συμφραζόμενα θεωρώντας τα παρακάτω:

- για κάθε $a \in \Sigma$, $[\![a]\!] = \{w \in (\Sigma^*)^3 \mid w^C = (a)\}$
- $[\![<]\!] = \lhd'$, $[\![>]\!] = \rhd'$

1 Για να ορίσουμε τις συγκεκριμένες συναρτήσεις αμεσότερα μέσω των $\bullet$, $\bigvee$ και $\bigwedge$, θα έπρεπε να ορίσουμε την παράθεση συμβολοσειρών με συμφραζόμενα ως σχέση, θεωρώντας επιπλέον πως, για κάθε $w \in (\Sigma^*)^3$, $\bullet\,(\epsilon,\ w)$ αν και μόνο αν $w^C = \epsilon$.

Με βάση τα όσα ειπώθηκαν μέχρι εδώ μπορούμε σχετικά εύκολα να προσαρμόσουμε τις σημασιολογικές προσεγγίσεις των κεφαλαίων 2 και 3 για τις γραμματικές με συμφραζόμενα, έτσι ώστε να ορίζουν γλώσσες με συμφραζόμενα. Από μια τέτοια γλώσσα L παίρνουμε μια απλή γλώσσα L', θεωρώντας πως, για κάθε $w \in \Sigma^*$, $L'(w) = L((\epsilon, w, \epsilon))$.

Παράδειγμα 6.1. Το $G = (\{a, b\}, \{D, R, L, M, N, C, E, V, W\}, \varphi, R)$, όπου το φ είναι ο παρακάτω τύπος:

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
D >= R\ ,\ D >= V\ .\ L\ , \\
R >= M\ .\ b\ .\ D\ ,\ R >= M\ , \\
L >= b\ .\ V\ .\ b\ .\ W\ \&< b\ .\ N\ ,\ L >= b\ .\ V\ \&< b\ .\ N\ , \\
M >= a\ .\ M\ .\ a\ ,\ M >= a\ .\ b\ .\ W\ .\ b\ .\ a\ ,\ M >= a\ .\ b\ .\ a\ , \\
N >= M\ \&\ C\ .\ W\ .\ b\ .\ V\ , \\
C >= V\ .\ b\ \&> E, \\
E >= D\ \&\sim> a\ \&\sim> b\ , \\
V >= a\ .\ V\ ,\ V >= a\ , \\
W >= V\ .\ b\ .\ V\ .\ b\ .\ W\ ,\ W >= V\ .\ b\ .\ V \\
\hline
\end{array}
$$

είναι μια γραμματική με συμφραζόμενα. Η γλώσσα που ορίζει αποτελείται από τις συμβολοσειρές που περιλαμβάνουν τμήματα συνεχόμενων a διαχωρισμένα με ένα b και, θεωρώντας πως το πρώτο τέτοιο τμήμα αναπαριστά έναν κόμβο-αφετηρία, το τελευταίο αναπαριστά έναν κόμβο-προορισμό και τα ενδιάμεσα αναπαριστούν, ανά δύο, τις ακμές κάποιου γραφήματος, στο αναπαριστάμενο γράφημα υπάρχει διαδρομή από τον κόμβο-αφετηρία στον κόμβο-προορισμό. Το G ορίζει δηλαδή μια μορφή του προβλήματος REACHABILITY. Διαισθητικά, μπορούμε να πούμε πως το M (από το “matching”) χρησιμοποιείται για την ταυτοποίηση δύο αναπαραστάσεων του ίδιου κόμβου, το R (από το “right”) για την αναζήτηση του επόμενου βήματος της διαδρομής προς τα δεξιά, το L (από το “left”) για την αναζήτηση του επόμενου βήματος προς τα αριστερά και το D (από το “direction”) για την επιλογή κατεύθυνσης αναζήτησης. Τα $\sim> a$ και $\sim> b$ προσδιορίζουν πως το E αφορά τμήμα της αρχικής συμβολοσειράς που εκτείνεται μέχρι το τέλος της. Η συγκεκριμένη γραμματική είναι ανάλογη με μια από τις γραμματικές που παρουσιάζονται στο [1].

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] M. Barash, A. Okhotin. "Two-sided context specifications in formal grammars", Theoretical Computer Science, Volume 591, Pages 134-153, August 2015.

[2] N. Chomsky. "On certain formal properties of grammars", Information and Control, Volume 2, Issue 2, Pages 137-167, June 1959.

[3] R. Cignoli. "Injective De Morgan and Kleene algebras", Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 47, Issue 2, Pages 269-278, February 1975.

[4] H. Crapo. "Lexicographic partial order", Transactions of the American Mathematical Society, Volume 243, Pages 37-51, 1978.

[5] B. A. Davey, H. A. Priestley. Introduction to Lattices and Order, Second Edition, Cambridge University Press, April 2002.

[6] H. B. Enderton. A Mathematical Introduction to Logic, Second Edition, Academic Press, January 2001.

[7] Z. Esik, W. Kuich. "Boolean fuzzy sets", International Journal of Foundations of Computer Science, Volume 18, Issue 6, Pages 1197-1207, 2007.

[8] M. Fitting. "Fixpoint semantics for logic programming a survey", Theoretical Computer Science, Volume 278, Issues 1-2, Pages 25-51, May 2002.

[9] D. Grune, C. J. H. Jacobs. Parsing Techniques: A Practical Guide, Second Edition, Springer, November 2007.

[10] J. E. Hopcroft, R. Motwani, J. D. Ullman. Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation, Second Edition, Addison Wesley, November 2000.

[11] V. Kountouriotis, Ch. Nomikos, P. Rondogiannis. “Well-founded semantics for Boolean grammars”, Information and Computation, Volume 207, Issue 9, Pages 945-967, September 2009.

[12] V. Kountouriotis, Ch. Nomikos, P. Rondogiannis. “A game-theoretic characterization of Boolean grammars”, Theoretical Computer Science, Volume 412, Issues 12-14, Pages 1169-1183, March 2011.

[13] L. Kwiatkowski. Reconciling Unger's Parser as a Top-Down Parser for CF Grammars for Experimental Purposes, Thesis, August 2014.

[14] M. Lange, H. Leiss. “To CNF or not to CNF? An efficient yet presentable version of the CYK algorithm”, Informatica Didactica, Volume 8, 2009.

[15] G. Markowsky. “Chain-complete posets and directed sets with applications”, Algebra Universalis, Volume 6, Issue 1, Pages 53-68, December 1976.

[16] J. Mycielski. “Chapter 3 Games with perfect information”, Handbook of Game Theory with Economic Applications, North Holland, Volume 1, Pages 41-70, December 1992.

[17] A. Okhotin. “Boolean grammars”, Information and Computation, Volume 194, Issue 1, Pages 19-48, October 2004.

[18] A. Okhotin. “Conjunctive and Boolean grammars: The true general case of the context-free grammars”, Computer Science Review, Volume 9, Pages 27-59, August 2013.

[19] A. Okhotin. “The dual of concatenation”, Theoretical Computer Science, Volume 345,

Issues 2-3, Pages 425-447, November 2005.

[20] H. Przymusinska, T. Przymusinski. “Semantic issues in deductive databases and logic programs”, Formal Techniques in Artificial Intelligence: A Sourcebook, North Holland, Pages 321-367, March 1990.

[21] P. Rondogiannis, W. W. Wadge. “Minimum model semantics for logic programs with negation-as-failure”, ACM Transactions on Computational Logic, Volume 6, Issue 2, Pages 441-467, April 2005.

[22] R. Rosebrugh, R. J. Wood. “Constructive complete distributivity II”, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Volume 110, Issue 2, Pages 245-249, September 1991.

[23] A. Van Gelder. “The alternating fixpoint of logic programs with negation”, Journal of Computer and System Sciences, Volume 47, Issue 1, Pages 185-221, August 1993.

[24] A. Van Gelder, K. A. Ross, J. S. Schlipf. “The well-founded semantics for general logic programs”, Journal of the ACM, Volume 38, Issue 3, Pages 619-649, July 1991.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Απόδειξη 2.1. Έστω $\bigvee$, $\bigwedge$ οι πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(S, \leq)$. Αποδεικνύουμε αρχικά τις κατευθύνσεις "αν". Για την πρώτη πρόταση, ας υποθέσουμε ότι το $(S, \leq)$ είναι φραγμένα πλήρες. Έστω κάποιο μη κενό $T \subseteq S$ και $U = \{s \in S \mid \forall\ t \in T\ s \leq t\}$. Βλέπουμε πως, για κάθε $t \in T$, για κάθε $u \in U$, $t \geq u$, δηλαδή το t είναι άνω φράγμα του U. Αφού το T δεν είναι κενό, συμπεραίνουμε ότι το U έχει κάποιο άνω φράγμα, άρα το $\bigvee U$ ορίζεται. Έχουμε ακόμη ότι, για κάθε $t \in T$, αφού το t είναι άνω φράγμα του U, $\bigvee U \leq t$. Συνεπώς $\bigvee U \in U$, οπότε το $\bigvee U$ είναι το μέγιστο στοιχείο του U, δηλαδή το μέγιστο κάτω φράγμα του T. Για τη δεύτερη πρόταση, αν το $(S, \leq)$ είναι πλήρες, τότε είναι και φραγμένα πλήρες, οπότε κάθε μη κενό $T \subseteq S$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα ενώ επιπλέον $\bigwedge \varnothing = \bigvee S$. Τώρα αποδεικνύουμε και τις κατευθύνσεις "μόνο αν". Για την πρώτη πρόταση, ας υποθέσουμε ότι κάθε μη κενό $T \subseteq S$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα. Έστω κάποιο φραγμένο $U \subseteq S$ και $T = \{s \in S \mid \forall\ u \in U\ s \geq u\}$. Αφού το U έχει άνω φράγμα, συμπεραίνουμε ότι το T δεν είναι κενό, άρα το $\bigwedge T$ ορίζεται. Έχουμε ακόμη ότι, για κάθε $u \in U$, για κάθε $t \in T$, $u \leq t$, δηλαδή το u είναι κάτω φράγμα του T και έτσι $\bigwedge T \geq u$. Συνεπώς $\bigwedge T \in T$, οπότε το $\bigwedge T$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του T, δηλαδή το ελάχιστο άνω φράγμα του U. Για τη δεύτερη πρόταση, αν κάθε $T \subseteq S$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα, τότε κάθε μη κενό $T \subseteq S$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα, οπότε το $(S, \leq)$ είναι φραγμένα πλήρες και, δεδομένου ότι το $\bigwedge \varnothing$ είναι άνω φράγμα του S, δηλαδή ότι κάθε $U \subseteq S$ είναι φραγμένο, το $(S, \leq)$ είναι πλήρες.

Απόδειξη 2.2. Έστω κάποια $s \in S$ και $T \subseteq S$. Για την πρώτη πρόταση, παρατηρώντας ότι $\{s\} \cup T = \bigcup_{t \in T} \{s, t\}$, έχουμε τα παρακάτω:

$$s \oplus \bigoplus T = \bigoplus \{s\} \oplus \bigoplus T = \bigoplus_{P \in \{\{s\}, T\}} \bigoplus P = \bigoplus \left(\{s\} \cup T\right) = \bigoplus \bigcup_{t \in T} \{s, t\} =$$

$$\bigoplus_{P \in \{\{s, t\} \mid t \in T\}} \bigoplus P = \bigoplus_{t \in T} \left(s \oplus t\right)$$

Για τη δεύτερη πρόταση, παρατηρώντας ότι:

$$C\left(\{\{s\}, T\}\right) = \{c \in \{\{s\}, T\} \to S \mid c(\{s\}) \in \{s\},\ c(T) \in T\} = \{\{(\{s\}, s), (T, t)\} \mid t \in T\}$$

έχουμε τα παρακάτω:

$$s \otimes \bigoplus T = \bigoplus \{s\} \otimes \bigoplus T = \bigotimes_{P \in \{\{s\}, T\}} \bigoplus P = \bigoplus_{c \in C(\{\{s\}, T\})} \bigotimes_{P \in \{\{s\}, T\}} c(P) =$$

$$\bigoplus_{c \in C(\{\{s\}, T\})} \left(c(\{s\}) \otimes c(T)\right) = \bigoplus_{t \in T} \left(\{(\{s\}, s), (T, t)\}(\{s\}) \otimes \{(\{s\}, s), (T, t)\}(T)\right) = \bigoplus_{t \in T} \left(s \otimes t\right)$$

Απόδειξη 2.4. Έστω $\bigvee$, $\bigwedge$ οι πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα, του $(S, \leq)$. Για την πρώτη πρόταση, για δύο τέτοια $s, t \in S$, έχουμε τα παρακάτω:

$$t = t \wedge \bigwedge \varnothing = t \wedge (s \vee \neg s) = (t \wedge s) \vee (t \wedge \neg s) = \bigvee \varnothing \vee (t \wedge \neg s) =$$

$$(s \wedge \neg s) \vee (t \wedge \neg s) = (s \vee t) \wedge \neg s = \bigwedge \varnothing \wedge \neg s = \neg s$$

Για τη δεύτερη πρόταση, έστω $\neg' \in S \to S$ μία πράξη συμπλήρωσης του $(S, \leq)$. Για κάθε $s \in S$, αφού το $(s, \neg' s)$ είναι συνεπές και πλήρες, λόγω της πρώτης πρότασης, $\neg' s = \neg s$.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την πρώτη πρόταση, προχωρούμε και στην τρίτη.

- Για κάθε $s \in S$, αφού το $(\neg s, s)$ είναι συνεπές και πλήρες, $s = \neg\neg s$.
- Για κάθε $T \subseteq S$, έχουμε τα εξής:
  - $\bigvee T \wedge \bigwedge_{s \in T} \neg s = \bigvee_{t \in T} \left(t \wedge \bigwedge_{s \in T} \neg s\right) = \bigvee_{t \in T} \left(\bigvee \varnothing\right) = \bigvee \varnothing$

    Για την τρίτη ισότητα παρατηρούμε πως, για κάθε $t \in T$, αφού $t \wedge \neg t = \bigvee \varnothing$ και $\bigwedge_{s \in T} \neg s \leq \neg t$, $t \wedge \bigwedge_{s \in T} \neg s = \bigvee \varnothing$. Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή, αν $T = \varnothing$, τότε $\{\bigvee \varnothing \mid s \in T\} = \varnothing$ ενώ αλλιώς $\{\bigvee \varnothing \mid s \in T\} = \{\bigvee \varnothing\}$ (και, για κάθε $s \in S$, $\bigvee \{s\} = s$).
  - $\bigvee T \vee \bigwedge_{s \in T} \neg s = \bigwedge_{s \in T} \left(\bigvee T \vee \neg s\right) = \bigwedge_{s \in T} \left(\bigwedge \varnothing\right) = \bigwedge \varnothing$

    Η αιτιολόγηση είναι αντίστοιχη με προηγουμένως.

  Το $\left(\bigvee T, \bigwedge_{s \in T} \neg s\right)$ είναι λοιπόν συνεπές και πλήρες και έτσι $\bigwedge_{s \in T} \neg s = \neg \bigvee T$.
- Για κάθε $s, t \in S$, $s \wedge \neg s = \bigvee \varnothing \leq \bigwedge \varnothing = t \vee \neg t$.

Απόδειξη 2.5. Έστω κάποιο πεπερασμένο $U_1 \subseteq \mathrm{im}(f)(T)$. Μπορούμε να δούμε πως υπάρχει πεπερασμένο $U_0 \subseteq T$, τέτοιο ώστε:

- $U_1 = \mathrm{im}(f)(U_0)$
- αφού το T είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει $t \in T$, τέτοιο ώστε, για κάθε $s \in U_0$, $s \leq_0 t$, δηλαδή, λόγω της μονοτονίας του f, $f(s) \leq_1 f(t)$, και συνεπώς το $f(t)$ να είναι άνω φράγμα του $\mathrm{im}(f)(U_0)$

Υπάρχει λοιπόν $t \in T$, τέτοιο ώστε το $f(t)$ να είναι άνω φράγμα του U_1, και έτσι το U_1 έχει άνω φράγμα στο $\mathrm{im}(f)(T)$.

Απόδειξη 2.7. Για την πρώτη πρόταση, κατ' αρχάς μπορούμε σχετικά εύκολα να πιστοποιήσουμε πως η σχέση $\overset{\mathrm{pw}:D}{\leq}$ είναι μεταβατική, αντισυμμετρική και ανακλαστική. Αποδεικνύουμε τώρα ότι, για κάθε $F \subseteq D \to S$ το οποίο έχει ελάχιστο άνω φράγμα, το $\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee} F$ ορίζεται. Για κάθε $F \subseteq D \to S$ με ελάχιστο άνω φράγμα κάποιο $g \in D \to S$, μπορούμε να δούμε ότι, για κάθε $d \in D$, το $g(d)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\{f(d) \mid f \in F\}$ και έτσι το $\bigvee_{f \in F} f(d)$ ορίζεται, οπότε το $\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee} F$ ορίζεται. Για να καταλήξουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα για το $\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee}$, αποδεικνύουμε και ότι, για κάθε $F \subseteq D \to S$ για το οποίο το $\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee} F$ ορίζεται, το $\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee} F$ είναι άνω φράγμα του F και μάλιστα το ελάχιστο. Έστω λοιπόν ένα τέτοιο $F \subseteq D \to S$.

- Για το πρώτο ζητούμενο, έστω κάποιο $g \in D \to S$. Έχουμε ότι, για κάθε $d \in D$, $g(d) \in \{f(d) \mid f \in F\}$ και έτσι $g(d) \leq \bigvee_{f \in F} f(d) = \left(\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee} F\right)(d)$, αφού το $\bigvee_{f \in F} f(d)$ είναι άνω φράγμα του προηγούμενου συνόλου, οπότε $g \overset{\mathrm{pw}:D}{\leq} \overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee} F$.
- Για το δεύτερο ζητούμενο, έστω κάποιο άνω φράγμα του F, $g \in D \to S$. Έχουμε ότι, για κάθε $d \in D$, το $g(d)$ είναι άνω φράγμα του $\{f(d) \mid f \in F\}$ και έτσι $g(d) \geq \bigvee_{f \in F} f(d) = \left(\overset{\mathrm{pw}:D}{\bigvee} F\right)(d)$, αφού το $\bigvee_{f \in F} f(d)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του προη-

γούμενου συνόλου, οπότε $g \overset{\text{pw}:D}{\geq} \overset{\text{pw}:D}{\bigvee} F$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και ότι το $\overset{\text{pw}:D}{\bigwedge}$ είναι η πράξη τομής του $\left(D \to S, \overset{\text{pw}:D}{\leq}\right)$.

Για τις τρεις πρώτες περιπτώσεις στην επόμενη πρόταση έχουμε τα παρακάτω:

- αν το $(S, \leq)$ είναι πλήρες, τότε, για κάθε $F \subseteq D \to S$, ισχύει ότι, για κάθε $d \in D$, το $\bigvee_{f \in F} f(d)$ ορίζεται, οπότε το $\overset{\text{pw}:D}{\bigvee} F$ ορίζεται
- αν το $(S, \leq)$ είναι φραγμένα (αντίστοιχα κατευθυνόμενα) πλήρες, τότε, για κάθε φραγμένο (αντίστοιχα κατευθυνόμενο) $F \subseteq D \to S$, μπορούμε να δούμε ότι, για κάθε $d \in D$, το $\{f(d) \mid f \in F\}$ είναι φραγμένο (αντίστοιχα κατευθυνόμενο) και έτσι το $\bigvee_{f \in F} f(d)$ ορίζεται, οπότε το $\overset{\text{pw}:D}{\bigvee} F$ ορίζεται

Τώρα, για την περίπτωση που το $(S, \leq)$ είναι πλήρως επιμεριστικό, έστω ένα σύνολο I, $f \in I \to (D \to S)$ και $U \subseteq 2^I$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν και το θεώρημα 2.3, μπορούμε να δούμε ότι, για κάθε $d \in D$, $\bigwedge_{J \in U} \bigvee_{i \in J} f(i)(d) = \bigvee_{c \in C(U)} \bigwedge_{J \in U} f(c(J))(d)$, οπότε $\overset{\text{pw}:D}{\bigwedge_{J \in U}} \overset{\text{pw}:D}{\bigvee_{i \in J}} f(i) = \overset{\text{pw}:D}{\bigvee_{c \in C(U)}} \overset{\text{pw}:D}{\bigwedge_{J \in U}} f(c(J))$. Το ζητούμενο προκύπτει χρησιμοποιώντας και πάλι το θεώρημα 2.3.

Αν το $(S, \leq)$ είναι πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό Boole με πράξη συμπλήρωσης το $\neg$, τότε, για κάθε $f \in D \to S$, ισχύει ότι:

- για κάθε $d \in D$, $f(d) \wedge \neg f(d) = \bigvee \varnothing$, οπότε $f \overset{\text{pw}:D}{\wedge} \overset{\text{pw}:D}{\neg} f = \overset{\text{pw}:D}{\bigvee} \varnothing$
- για κάθε $d \in D$, $f(d) \vee \neg f(d) = \bigwedge \varnothing$, οπότε $f \overset{\text{pw}:D}{\vee} \overset{\text{pw}:D}{\neg} f = \overset{\text{pw}:D}{\bigwedge} \varnothing$

Τέλος, αν το $(S, \leq, \neg)$ είναι πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό Kleene, τότε:

- για κάθε $f \in D \to S$, ισχύει ότι, για κάθε $d \in D$, $\neg\neg f(d) = f(d)$, οπότε $\overset{\text{pw}:D}{\neg} \overset{\text{pw}:D}{\neg} f = f$
- για κάθε $F \subseteq D \to S$, ισχύει ότι, για κάθε $d \in D$, $\neg \bigvee_{f \in F} f(d) = \bigwedge_{f \in F} \neg f(d)$, οπότε $\overset{\text{pw}:D}{\neg} \overset{\text{pw}:D}{\bigvee} F = \overset{\text{pw}:D}{\bigwedge_{f \in F}} \overset{\text{pw}:D}{\neg} f$

για κάθε $f, g \in D \to S$, ισχύει ότι, για κάθε $d \in D$, $f(d) \wedge \neg f(d) \leq g(d) \vee \neg g(d)$, οπότε $f \overset{\text{pw}:D}{\wedge} \overset{\text{pw}:D}{\neg} f \overset{\text{pw}:D}{\leq} g \overset{\text{pw}:D}{\vee} \overset{\text{pw}:D}{\neg} g$

Απόδειξη 2.8. Μπορούμε σχετικά εύκολα να πιστοποιήσουμε πως η σχέση $\overset{\text{lex}}{\leq}$ είναι μεταβατική, αντισυμμετρική και ανακλαστική. Αποδεικνύουμε τώρα ότι, για κάθε $T \subseteq S^{\omega}$, το $\overset{\text{lex}}{\bigvee} T$ είναι άνω φράγμα του και μάλιστα το ελάχιστο. Έστω λοιπόν κάποιο $T \subseteq S^{\omega}$.

- Για το πρώτο ζητούμενο, έστω κάποιο $t \in T$ διαφορετικό από το $\overset{\text{lex}}{\bigvee} T$ (αν ήταν ίσο το ζητούμενο θα ίσχυε τετριμμένα) και j το πρώτο $i < \omega$ για το οποίο $\left(\overset{\text{lex}}{\bigvee} T\right)(i) \neq t(i)$. Ισχύει κατ'αρχάς ότι, για κάθε $i < j$, $t(i) = \left(\overset{\text{lex}}{\bigvee} T\right)(i)$ (1). Το (1) σημαίνει πως $t(j) \in \{s(j) \mid s \in T \ \textit{και} \ \forall\ i < j \ \ s(i) = \left(\overset{\text{lex}}{\bigvee} T\right)(i)\}$, άρα $t(j) \leq \left(\overset{\text{lex}}{\bigvee} T\right)(j)$ (2), αφού το $\left(\overset{\text{lex}}{\bigvee} T\right)(j)$ είναι άνω φράγμα του προηγούμενου συνόλου. Το ζητούμενο προκύπτει από τα (1) και (2) και το γεγονός ότι $t(j) \neq \left(\overset{\text{lex}}{\bigvee} T\right)(j)$ (που ισχύει λόγω της υπόθεσης για το j).
- Για το δεύτερο ζητούμενο, έστω κάποιο άνω φράγμα του T, $t \in S^{\omega}$, διαφορετικό από το $\overset{\text{lex}}{\bigvee} T$ (αν ήταν ίσο το ζητούμενο θα ίσχυε τετριμμένα) και j το πρώτο $i < \omega$ για το οποίο $\left(\overset{\text{lex}}{\bigvee} T\right)(i) \neq t(i)$. Ισχύει λοιπόν ότι, για κάθε $i < j$, $t(i) = \left(\overset{\text{lex}}{\bigvee} T\right)(i)$ (1). Από το (1) και το γεγονός ότι το t είναι άνω φράγμα του T συμπεραίνουμε πως το $t(j)$ είναι άνω φράγμα του $\{s(j) \mid s \in T \ \textit{και} \ \forall\ i < j \ \ s(i) = \left(\overset{\text{lex}}{\bigvee} T\right)(i)\}$, δηλαδή $t(j) \geq \left(\overset{\text{lex}}{\bigvee} T\right)(j)$ (2), αφού το $\left(\overset{\text{lex}}{\bigvee} T\right)(j)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του προηγούμενου συνόλου. Το ζητούμενο προκύπτει από τα (1) και (2) και το γεγονός ότι $t(j) \neq \left(\overset{\text{lex}}{\bigvee} T\right)(j)$ (που ισχύει λόγω της υπόθεσης για το j).

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και ότι, για κάθε $T \subseteq S^{\omega}$, το $\overset{\text{lex}}{\bigwedge} T$ είναι κάτω φράγμα του και μάλιστα το μέγιστο.

Απόδειξη 2.9. Για την πρώτη πρόταση, ανάλογα με την απόδειξη του θεωρήματος 2.7 μπορούμε να δούμε πως το $(S^2, \leq^{\mathrm{t}})$ είναι πλήρως επιμεριστικό ΜΔΣ με πράξεις ένωσης και τομής τα $\bigvee^{\mathrm{t}}$ και $\bigwedge^{\mathrm{t}}$, αντίστοιχα. Αποδεικνύουμε λοιπόν ότι, για κάθε $T \subseteq S_{(3)}$, $\bigvee^{\mathrm{t}} T$, $\bigwedge^{\mathrm{t}} T \in S_{(3)}$. Για κάθε $T \subseteq S_{(3)}$, έχουμε:

$$\left(\bigvee^{\mathrm{t}} T\right)^T \wedge \left(\bigvee^{\mathrm{t}} T\right)^F = \bigvee_{s \in T} s^T \wedge \bigwedge_{s \in T} s^F = \bigvee_{s \in T}\left(s^T \wedge \bigwedge_{t \in T} t^F\right) = \bigvee_{s \in T}\left(\bigvee \varnothing\right) = \bigvee \varnothing$$

Για την τρίτη ισότητα παρατηρούμε πως, για κάθε $s \in T$, αφού $s^T \wedge s^F = \bigvee \varnothing$ και $\bigwedge_{t \in T} t^F \leq s^F$, $s^T \wedge \bigwedge_{t \in T} t^F = \bigvee \varnothing$. Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή, αν $T = \varnothing$, τότε $\{\bigvee \varnothing \mid s \in T\} = \varnothing$ ενώ αλλιώς $\{\bigvee \varnothing \mid s \in T\} = \{\bigvee \varnothing\}$. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει το ζητούμενο για το $\bigvee^{\mathrm{t}} T$ ενώ το ζητούμενο για το $\bigwedge^{\mathrm{t}} T$ αποδεικνύεται ανάλογα. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη της πρώτης πρότασης, βλέπουμε πως, για κάθε $s \in S_{(3)}$, $\mathrm{r}(s) \in S_{(3)}$ ενώ πιστοποιούμε και τις απαραίτητες ιδιότητες του $\mathrm{r}|_{S_{(3)}}$ ως εξής:

- για κάθε $s \in S_{(3)}$:

  $\mathrm{r}(\mathrm{r}(s)) = \mathrm{r}((s^F, s^T)) = ((s^F, s^T)^F, (s^F, s^T)^T) = (s^T, s^F) = s$
- για κάθε $T \subseteq S_{(3)}$:

  $\mathrm{r}(\bigvee^{\mathrm{t}} T) = \mathrm{r}((\bigvee_{s \in T} s^T, \bigwedge_{s \in T} s^F)) = (\bigwedge_{s \in T} s^F, \bigvee_{s \in T} s^T) = \bigwedge^{\mathrm{t}}_{s \in T} (s^F, s^T) = \bigwedge^{\mathrm{t}}_{s \in T} \mathrm{r}(s)$
- για κάθε $s, t \in S_{(3)}$:

  $s \wedge^{\mathrm{t}} \mathrm{r}(s) = (s^T \wedge \mathrm{r}(s)^T, s^F \vee \mathrm{r}(s)^F) = (s^T \wedge s^F, s^F \vee \mathrm{r}(s)^F) = (\bigvee \varnothing, s^F \vee \mathrm{r}(s)^F) \leq^{\mathrm{t}}$
  $(t^T \vee \mathrm{r}(t)^T, \bigvee \varnothing) = (t^T \vee \mathrm{r}(t)^T, t^F \wedge t^T) = (t^T \vee \mathrm{r}(t)^T, t^F \wedge \mathrm{r}(t)^F) = t \vee^{\mathrm{t}} \mathrm{r}(t)$

Για τη δεύτερη πρόταση, ανάλογα με την απόδειξη του θεωρήματος 2.7 μπορούμε να δούμε πως το $(S^2, \leq^{\mathrm{i}})$ είναι πλήρες ΜΔΣ με πράξεις ένωσης και τομής τα $\bigvee^{\mathrm{i}}$ και $\bigwedge^{\mathrm{i}}$, αντίστοιχα, κάτι που συνεπάγεται και τη δεύτερη υποπρότασή της. Αποδεικνύουμε τώρα ότι, για κάθε μη κενό $T \subseteq S_{(3)}$, $\bigwedge^{\mathrm{i}} T \in S_{(3)}$ (1). Για κάθε τέτοιο $T \subseteq S_{(3)}$, έχουμε:

$$\left(\bigwedge^{\mathrm{i}} T\right)^T \wedge \left(\bigwedge^{\mathrm{i}} T\right)^F = \bigwedge_{s \in T} s^T \wedge \bigwedge_{s \in T} s^F = \bigwedge_{s \in T}\left(s^T \wedge \bigwedge_{t \in T} t^F\right) = \bigwedge_{s \in T}\left(\bigvee \varnothing\right) = \bigvee \varnothing$$

Έτσι, κάθε μη κενό $T \subseteq S_{(3)}$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα και, σύμφωνα με το θεώρημα 2.1, το $(S_{(3)}, \leq^{\mathrm{i}})$ είναι φραγμένα πλήρες. Για να αποδείξουμε ότι είναι και κατευθυνόμενα πλήρες, αρκεί να αποδείξουμε ότι, για κάθε κατευθυνόμενο $T \subseteq S_{(3)}$, $\bigvee{}^{\mathrm{i}}\, T \in S_{(3)}$. Για κάθε τέτοιο $T \subseteq S_{(3)}$, έχουμε:

$$\left(\bigvee{}^{\mathrm{i}}\, T\right)^{T} \wedge \left(\bigvee{}^{\mathrm{i}}\, T\right)^{F} = \bigvee_{s \in T} s^{T} \wedge \bigvee_{s \in T} s^{F} = \bigvee_{s \in T}\left(s^{T} \wedge \bigvee_{t \in T} t^{F}\right) = \bigvee_{s \in T}\left(\bigvee_{t \in T}\left(s^{T} \wedge t^{F}\right)\right) =$$

$$\bigvee_{s \in T}\left(\bigvee_{t \in T}\left(\bigvee \varnothing\right)\right) = \bigvee_{s \in T}\left(\bigvee \varnothing\right) = \bigvee \varnothing$$

Για την τέταρτη ισότητα παρατηρούμε ότι, για κάθε $s,\, t \in T$, αφού το T είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει $u \in T$ που είναι άνω φράγμα του $\{s,\, t\}$, δηλαδή $s^{T} \leq u^{T}$ και $t^{F} \leq u^{F}$, οπότε $s^{T} \wedge t^{F} \leq u^{T} \wedge u^{F} = \bigvee \varnothing$ και έτσι $s^{T} \wedge t^{F} = \bigvee \varnothing$ (για το ζητούμενο λαμβάνουμε υπ' όψιν και ότι το T είναι μη κενό). Τέλος, για την πρώτη υποπρόταση έχουμε ότι, για κάθε $T \subseteq S_{(3)}$:

- αν το T έχει ως ελάχιστο άνω φράγμα κάποιο $s \in S_{(3)}$, τότε, αφού το $\bigvee{}^{\mathrm{i}} T$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του στο S^{2}, $\bigvee{}^{\mathrm{i}} T \leq^{\mathrm{i}} s$, άρα $\left(\bigvee{}^{\mathrm{i}} T\right)^{T} \wedge \left(\bigvee{}^{\mathrm{i}} T\right)^{F} \leq s^{T} \wedge s^{F} = \bigvee \varnothing$ και έτσι $\bigvee{}^{\mathrm{i}} T \in S_{(3)}$
- αν το T έχει ως μέγιστο κάτω φράγμα κάποιο $s \in S_{(3)}$, τότε, αν το T είναι μη κενό, το ζητούμενο προκύπτει από το (1) ενώ αλλιώς συμπεραίνουμε πως $s \geq^{\mathrm{i}} \left(\bigwedge \varnothing,\ \bigvee \varnothing\right)$ και $s \geq^{\mathrm{i}} \left(\bigvee \varnothing,\ \bigwedge \varnothing\right)$, δηλαδή $s = \left(\bigwedge \varnothing,\ \bigwedge \varnothing\right) = \bigwedge{}^{\mathrm{i}} T$ και έτσι $\bigwedge{}^{\mathrm{i}} T \in S_{(3)}$

Για την τρίτη πρόταση, από το θεώρημα 2.7 και την πρώτη πρόταση συμπεραίνουμε πως το $\left(S_{(3)}^{\omega},\ \overset{\mathrm{pw}}{\leq^{\mathrm{t}}},\ \overset{\mathrm{pw}}{\mathrm{r}}|_{S_{(3)}}\right)$ είναι πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό Kleene με πράξεις ένωσης και τομής τα $\overset{\mathrm{pw}}{\bigvee}{}^{\mathrm{t}}|_{S_{(3)}}$ και $\overset{\mathrm{pw}}{\bigwedge}{}^{\mathrm{t}}|_{S_{(3)}}$, αντίστοιχα. Αποδεικνύουμε τώρα ότι, για κάθε $T \subseteq S_{(\infty)}$, $\overset{\mathrm{pw}}{\bigvee}{}^{\mathrm{t}}\, T$, $\overset{\mathrm{pw}}{\bigwedge}{}^{\mathrm{t}}\, T \in S_{(\infty)}$. Για κάθε $T \subseteq S_{(\infty)}$, έχουμε ότι, για κάθε $i,\ j < \omega$ με $i \leq j$:

$$\left(\overset{\mathrm{pw}}{\bigvee}{}^{\mathrm{t}}\, T\right)(i) = \bigvee_{s \in T}{}^{\mathrm{t}}\, s(i) \leq^{\mathrm{i}} \bigvee_{s \in T}{}^{\mathrm{t}}\, s(j) = \left(\overset{\mathrm{pw}}{\bigvee}{}^{\mathrm{t}}\, T\right)(j)$$

Η ανισότητα ισχύει επειδή, για κάθε $s \in T$, $s(i)^{T} \leq s(j)^{T}$ (αντίστοιχα $s(i)^{F} \leq s(j)^{F}$), λόγω της μονοτονίας του s που συνεπάγεται και τη μονοτονία ως προς $\leq$ του $\left(s(k)^{T}\right)_{k < \omega}$ (αντίστοιχα $\left(s(k)^{F}\right)_{k < \omega}$), οπότε $\bigvee_{s \in T} s(i)^{T} \leq \bigvee_{s \in T} s(j)^{T}$ ($\bigwedge_{s \in T} s(i)^{F} \leq \bigwedge_{s \in T} s(j)^{F}$).

Έτσι προκύπτει το ζητούμενο για το $\overset{\mathrm{pw}}{\bigvee}{}^{\mathrm{t}}\, T$ ενώ το ζητούμενο για το $\overset{\mathrm{pw}}{\bigwedge}{}^{\mathrm{t}}\, T$ αποδεικνύεται ανάλογα. Από τον ορισμό της πράξης αντιστροφής και της εκδοχής πληροφορίας είναι σχετικά φανερό ότι, για κάθε $s \in S_{(\infty)}$, $\overset{\text{pw}}{\mathrm{r}}(s) \in S_{(\infty)}$. Το αντίστοιχο μπορούμε να συμπεράνουμε και για την πράξη $\bigvee^{\mathrm{i}} \varnothing$-ολίσθησης του $S_{(3)}$ (σημειώνουμε ότι, αφού το $(S_{(3)}, \leq^{\mathrm{t}})$ είναι πλήρες, το $S_{(3)}$ είναι μη κενό, δηλαδή το $\varnothing$ είναι φραγμένο και έτσι $\bigvee^{\mathrm{i}} \varnothing \in S_{(3)}$), δεδομένου ότι το $\bigvee^{\mathrm{i}} \varnothing$ είναι το ελάχιστο στοιχείο ως προς $\leq^{\mathrm{i}}$ του $S_{(3)}$.

Απόδειξη 2.10. Για την πρώτη πρόταση, όπως αναφέραμε και στην απόδειξη του θεωρήματος 2.9, μπορεί να αποδειχτεί πως το $(S^2, \leq^{\mathrm{t}})$ είναι πλήρως επιμεριστικό ΜΔΣ με πράξεις ένωσης και τομής τα $\bigvee^{\mathrm{t}}$ και $\bigwedge^{\mathrm{t}}$, αντίστοιχα. Ακόμη, με τρόπο ανάλογο με αυτόν που αποδεικνύεται πως, για κάθε $T \subseteq S_{(3)}$, $\bigvee^{\mathrm{t}} T,\ \bigwedge^{\mathrm{t}} T \in S_{(3)}$ μπορεί να αποδειχτεί και πως, για κάθε $T \subseteq S'$, $\bigvee^{\mathrm{t}} T,\ \bigwedge^{\mathrm{t}} T \in S'$. Τέλος, το $\mathrm{r}|_{S'}$ είναι πράξη συμπλήρωσης του $(S', \leq^{\mathrm{t}})$ αφού, για κάθε $s \in S'$, $\mathrm{r}(s) \in S'$ και επιπλέον:

- $s \wedge^{\mathrm{t}} \mathrm{r}(s) = (s^T \wedge s^F,\ s^F \vee s^T) = (\bigvee \varnothing,\ \bigwedge \varnothing) = \bigvee^{\mathrm{t}} \varnothing$
- $s \vee^{\mathrm{t}} \mathrm{r}(s) = (s^T \vee s^F,\ s^F \wedge s^T) = (\bigwedge \varnothing,\ \bigvee \varnothing) = \bigwedge^{\mathrm{t}} \varnothing$

Για την τρίτη πρόταση, έστω ότι το $(S, \leq)$ είναι δικτυωτό Boole με πράξη συμπλήρωσης κάποιο $\neg$. Αρχικά θα αποδείξουμε πως κάθε στοιχείο του S' είναι μεγιστικό ως προς $\leq^{\mathrm{i}}$ στοιχείο του $S_{(3)}$. Έστω λοιπόν κάποιο $s \in S'$ και κάποιο $t \in S_{(3)}$ για το οποίο υποθέτουμε πως $t >^{\mathrm{i}} s$, κάτι που σημαίνει ότι $t^T \geq s^T$ και $t^F > s^F$ ή $t^T > s^T$ και $t^F \geq s^F$. Παρατηρώντας και ότι $t^T \vee t^F \geq s^T \vee s^F = \bigwedge \varnothing$, δηλαδή $t^T \vee t^F = \bigwedge \varnothing$, καθώς και ότι η συνάρτηση $\neg$ είναι αντιμονότονη, καταλήγουμε στο ζητούμενο στηριζόμενοι στα εξής:

- αν $t^T \geq s^T$ και $t^F > s^F$, τότε $t^F = \neg t^T \leq \neg s^T = s^F$, που είναι άτοπο
- αν $t^T > s^T$ και $t^F \geq s^F$, τότε $t^T = \neg t^F \leq \neg s^F = s^T$, που είναι άτοπο

Τώρα θα αποδείξουμε και πως κάθε μεγιστικό ως προς $\leq^{\mathrm{i}}$ στοιχείο του $S_{(3)}$ είναι στοιχείο του S'. Έστω κάποιο μεγιστικό ως προς $\leq^{\mathrm{i}}$ $s \in S_{(3)}$ για το οποίο υποθέτουμε πως $s^T \vee s^F \neq \bigwedge \varnothing$. Έχουμε κατ' αρχάς τα ακόλουθα:

$$s^T = s^T \wedge \bigwedge \varnothing = s^T \wedge (\neg s^F \vee s^F) = s^T \wedge \neg s^F \vee s^T \wedge s^F = s^T \wedge \neg s^F \vee \bigvee \varnothing = s^T \wedge \neg s^F \leq \neg s^F$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ζητούμενο ως εξής:

- αν $s^T < \neg s^F$, τότε $(\neg s^F,\ s^F) >^{\mathrm{i}} s$, που είναι άτοπο, αφού το s είναι μεγιστικό
- αν $s^T = \neg s^F$, τότε $s^T \vee s^F = \neg s^F \vee s^F = \bigwedge \varnothing$, που είναι και πάλι άτοπο