Μελέτη Πολυωνυμικών και NP-πλήρων Προβλημάτων σε Κλάσεις Τέλειων Γραφημάτων

Η ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

υποβάλλεται στην

ορισθείσα από την Γενική Συνέλευση Ειδικής Σύνθεσης

του Τμήματος Πληροφορικής Εξεταστική Επιτροπή

από την

Μαντζέλου Ειρήνη

ως μέρος των Υποχρεώσεων για τη λήψη του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΕ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗ

ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Φεβρουάριος 2012

Αφιερωση

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τους γονείς μου, με την υποστήριξη και την αγάπη των οποίων βαδίζω όλα αυτά τα χρόνια. Η διατριβή αυτή αφιερώνεται σε αυτούς για την πολύτιμη συμπαράσταση και κατανόηση που έδειξαν όλο αυτό το διάστημα. Τους ευχαριστώ θερμά, προπάντων, για τη δυνατότητα που μου προσέφεραν να πραγματοποιήσω τις σπουδές μου.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να απευθύνω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Σταύρο Δ. Νικολόπουλο για την πολύτιμη βοήθειά του στην αποπεράτωση της παρούσης διατριβής. Η συμβολή του ήταν ουσιαστική και βασίστηκε στη γνώση του για το αντικείμενο και στην προθυμία του για βοήθεια και υπομονή που τον χαρακτήριζαν καθ' όλη την διάρκεια αυτής της μελέτης.

Περιεχομενα

Ευρετηριο Σχηματων

Ευρετηριο Πινακων

Ευρετηριο Αλγοριθμων

Περιληψη

Μαντζέλου Ειρήνη-Χρυσοβαλάντου του Βασιλείου και της Παρασκευής. MSc, Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Φεβρουάριος 2012. Μελέτη Πολυωνυμικών και NP-πλήρων Προβλημάτων σε Κλάσεις Τέλειων Γραφημάτων. Επιβλέπων Καθηγητής: Σταύρος Δ. Νικολόπουλος.

Στη διατριβή αυτή περιγράφονται τα προβλήματα του αρμονικού αριθμού, του αχρωματικού αριθμού, του μεγίστου συνόλου κοπής, του μονοπατιού Hamilton, της επικάλυψης με μονοπάτια και του κυρίαρχου συνόλου. Αρχικά περιγράφονται τα προβλήματα αυτά και στη συνέχεια παρουσιάζουμε σε ποιες κλάσεις τέλειων γραφημάτων τα προβλήματα αυτά είναι NP-πλήρη και σε ποιες κλάσεις ανήκουν στην κλάση P, δηλαδή έχουν πολυωνυμική λύση. Κύριος στόχος της διατριβής αυτής είναι να προσδιορίσουμε το σημείο εκείνο το οποίο διαχωρίζει σε δυο κατηγορίες τις υπό μελέτη κλάσεις των τέλειων γραφημάτων. Η μια κατηγορία είναι εκείνη όπου για τα προβλήματα δεν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που να τα επιλύει. Και η δεύτερη κατηγορία είναι εκείνη όπου για τα προβλήματα υπάρχει πολυωνυμικος αλγόριθμος που να τα επιλύει. Επειτα παρουσιάζονται οι αποδείξεις που αναφέρονται στην NP-πληρότητα και οι αλγόριθμοι που λύνουν τα παραπάνω προβλήματα πολυωνυμικά. Τέλος παρουσιάζουμε συνοπτικά σε έναν πίνακα για κάθε μια κλάση ποια προβλήματα παραμένουν NP-πλήρη και ποια ανήκουν στην κλάση P. Σε κάποιους άλλους πίνακες δείχνουμε τη χρονολογία εύρεσης των αλγορίθμων που λύνουν πολυωνυμικά το κάθε πρόβλημα, τη χρονολογία εύρεσης των αποδείξεων της NP-πληρότητας και τους συγγραφείς.

Extended Abstract in English

The thesis provides an extensive survey for the problems of harmonic number, achromatic number, max cut, Hamilton path, path cover and the dominant set. For each of the studied problems we study NP-completeness or admission of polynomial time solution. The basic result of this thesis is to categorize the classes of perfect graphs with respect to the solution time of the above mentioned problems. In this way two classes are formed: the polynomial time class and the NP-complete class. Moreover, we present the proofs of related NP-completeness and the algorithms that solve the problems in polynomial time. Finally, summarized on tables, we present for each class what problems remain NP-complete and which belong to class P. At other tables we show the chronology of finding the polynomial algorithms that solve each problem, the chronology of finding the proof of the NP-completeness and the writers.

Κεφαλαιο 1

Εισαγωγη

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε κάποιους βασικούς ορισμούς, στην NP-πληρότητα, στους στόχους και στη δομή της διατριβής.

1.1 Βασικοί Ορισμοί

Ορισμός 1.1. Γράφος ή γράφημα (graph) είναι μια δομή που αποτελείται από ένα σύνολο κόμβων ή κορυφών (vertices) που συνδέονται μεταξύ τους με ένα σύνολο ακμών (edges). Συμβολίζεται με $G = (V, E)$, όπου V είναι το σύνολο των κορυφών και E είναι το σύνολο των ακμών.

Ορισμός 1.2. Με $\mathrm{Adj}(u)$ συμβολίζεται το σύνολο γειτνίασης του κόμβου u. Επομένως ισχύει $(u, v) \in E \Leftrightarrow v \in \mathrm{Adj}(u)$.

Ορισμός 1.3. Βαθμός μιας κορυφής u είναι το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν σε μια κορυφή u V και συμβολίζεται με $d(u)$. Ο μέγιστος βαθμός από όλες τις κορυφές του γραφήματος ονομάζεται βαθμός του γραφήματος και συμβολίζεται με $D(G)$. Επομένως $D(G) = \max\limits_{u \in V} d(u)$.

Ορισμός 1.4. Μονοπάτι (path) μεταξύ δυο κορυφών u και v είναι μια ακολουθία ακμών $(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$ τέτοια ώστε να ισχύει:

1. $u = v_0$ και $v = v_k$

2. οι κορυφές v_i, $0 \leq i \leq k$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Οι κορυφές u και v λέγονται άκρα του μονοπατιού. Μήκος του μονοπατιού λέγονται το πλήθος των ακμών που περιέχονται σε ένα μονοπάτι. Ένα μονοπάτι συμβολίζεται με P_k, όπου k είναι το πλήθος των κόμβων που περιέχει. Ένα μονοπάτι λέγεται απλό αν κάθε κόμβος εμφανίζεται το πολύ μια φορά στο μονοπάτι.

Ορισμός 1.5. Όταν τα τερματικά σημεία ενός μονοπατιού $(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots,$ (v_{k-1}, v_k) ταυτίζονται, δηλαδή $v_0 = v_k$ τότε το μονοπάτι λέγεται κύκλος. Ένας άχορδος κύκλος έχει μήκος μεγαλύτερο του 2 και συμβολίζεται με C_k, όπου k το πλήθος των κόμβων που αυτός περιέχει.

Ορισμός 1.6. Αν το σύνολο των κορυφών V ενός γραφήματος G μπορεί να διαμεριστεί σε k ανεξάρτητα μεταξύ τους υποσύνολα $V_1, V_2, \ldots, V_k$ τέτοια ώστε δυο κορυφές u και v να ενώνονται μόνο αν βρίσκονται στο ίδιο υποσύνολο $V_i \subseteq V$ τότε οι υπογράφοι $G(V_1), G(V_2), \ldots, G(V_k)$ ονομάζονται συνεκτικές συνιστώσες του G.

Ορισμός 1.7. Έστω $G = (V, E)$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα. Ορίζουμε ως συμπλήρωμα του γραφήματος G το γράφημα $\bar{G}(V, \bar{E})$ με $\bar{E} = \{(u, v) : \; u, v \in V - (u, v)\}$ δεν ανήκει στο σύνολο E. Αλλιώς ορίζουμε το συμπλήρωμα ενός γραφήματος G σαν ένα γράφημα με το ίδιο σύνολο κόμβων και με σύνολο ακμών που περιλαμβάνει τις ακμές που δεν περιέχονται στο γράφημα.

Ορισμός 1.8. Μια r-κλίκα είναι ένα υποσύνολο A του V πληθικότητας r κόμβων που επάγει ένα πλήρες υπογράφημα. Μια κλίκα είναι maximal αν δεν υπάρχει άλλη κλίκα στο γράφημα που να περιέχει εξ ολοκλήρου αυτήν την κλίκα σαν υποσύνολο. Ενώ μια κλίκα είναι maximum (μέγιστη) αν δεν υπάρχει άλλη κλίκα σε όλο το γράφημα μεγαλύτερης πληθικότητας. Αριθμός κλίκας είναι ο αριθμός των κόμβων σε μια μέγιστη κλίκα ενός γραφήματος G και συμβολίζεται με $\omega(G)$.

Ορισμός 1.9. Μια επικάλυψη με κλίκες (clique cover) μεγέθους k είναι μια διαμέριση των κόμβων $V = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, έτσι ώστε κάθε σύνολο κόμβων A_i να είναι κλίκα. Ο αριθμός κλικών επικάλυψης είναι το μέγεθος της μικρότερης δυνατής επικάλυψης κλικών στο γράφημα G και συμβολίζεται με $k(G)$.

Ορισμός 1.10. Ένα ευσταθές σύνολο (stable set) ή ανεξάρτητο σύνολο (independent set) είναι ένα υποσύνολο X των κόμβων του γραφήματος G στο οποίο ανά δυο οι κόμβοι δεν είναι γείτονες. Ευσταθής αριθμός είναι ο αριθμός των κόμβων του γραφήματος G σε ένα ευσταθές σύνολο μέγιστης πληθικότητας.

Ορισμός 1.11. Τέλεια γραφήματα είναι τα γραφήματα για τα οποία ισχύει ότι για κάθε επαγόμενο υπογράφημα αυτών ο χρωματικός αριθμός του επαγόμενου υπογραφήματος ισούται με τον αριθμό της μέγιστης κλίκας αυτού.

Οι παρακάτω 3 συνθήκες ορίζουν τις τέλειες ιδιότητες (perfect properties) των τέλειων γραφημάτων. Έστω $G = (V, E)$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα:

(P1) $\omega(G_A) = \chi(G_A)$ για κάθε A υποσύνολο του $V(G)$,

(P2) $\alpha(G_A) = k(G_A)$ για κάθε A υποσύνολο του $V(G)$ και

(P3) $\omega(G_A) \cdot \alpha(G_A) \geq |A|$ για κάθε A υποσύνολο του $V(G)$.

Θεώρημα 1.1 (The Perfect Graph Theorem). *Για ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G οι τέλειες ιδιότητες (P1), (P2), (P3) είναι ισοδύναμες.*

Ο χαρακτηρισμός της κλάσης των τέλειων γραφημάτων αποτελούσε ένα από τα πιο μακροχρόνια ανοιχτά προβλήματα. Ένας από τους πρώτους προσδιορισμούς της κλάσης αυτής δόθηκε από τον Lovász το 1972:

Πόρισμα 1.1. *Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G είναι τέλειο αν και μόνο αν το συμπλήρωμα του είναι τέλειο.*

Άλλος ένας χαρακτηρισμός για τα τέλεια γραφήματα δόθηκε από τον Berge. Ένα γράφημα που δεν περιέχει περιττές οπές (holes) ή περιττές αντιοπές (antiholes) ονομάζεται Berge γράφημα. Συγκεκριμένα ένα γράφημα $G = (V, E)$ που δεν περιέχει υπογραφήματα ισομορφικά στο C_{2k+1} ή στο συμπλήρωμα του C_{2k+1} για $k \geq 2$ είναι γράφημα Berge. Τα γραφήματα Berge ανήκουν στην κλάση των τέλειων γραφημάτων. Αυτό που δεν είχε γίνει σαφές ήταν αν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή αν κάθε γράφημα Berge είναι και τριγωνικό γράφημα. Την ιδιότητα αυτή την απέδειξαν οι Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, όπως διατυπώνεται και στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.2. *Ένα γράφημα $G = (V, E)$ είναι τέλειο αν και μόνο εάν δεν περιέχει περιττούς κύκλους ισομορφικούς στο C_{2k+1} ή στο συμπλήρωμα του C_{2k+1} για $k \geq 2$.*

1.2 NP-πληρότητα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε δυο θέματα, την υπολογισιμότητα (computability) και την υπολογιστική πολυπλοκότητα (computational complexity). Η υπολογισιμότητα έχει να κάνει με την ύπαρξη του αλγορίθμου, δηλαδή υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος επιλύει το πρόβλημα Π? Η απόδειξη ότι ένα πρόβλημα είναι υπολογίσιμο συνήθως αλλά όχι πάντα έχει να κάνει με την παρουσίαση ενός αλγορίθμου ο οποίος θα δίνει ως έξοδο μια σωστή απάντηση για κάθε είσοδο. Η ποσότητα του χώρου και του χρόνου θεωρείται εδώ απεριόριστη. Αντιθέτως η υπολογιστική πολυπλοκότητα έχει να κάνει με τα ποσοτικά θέματα της επίλυσης ενός προβλήματος. Εδώ η ποσότητα χώρου και χρόνου είναι λογική και όχι απεριόριστη.

Θέλουμε τον καλύτερο αλγόριθμο που να δίνει λύση στο πρόβλημα μας και την καλύτερη υλοποίηση του αλγορίθμου αυτού. Ένα πρόβλημα απόφασης είναι αυτό που απαιτεί μια "ναι" ή "οχι" απάντηση. Ένα στιγμιότυπο ενός προβλήματος Π είναι ο καθορισμός συγκεκριμένων τιμών για τις παραμέτρους του προβλήματος. Επειτα ένας αλγόριθμος Π είναι μια βήμα προς βήμα διαδικασία η οποία αν εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε στιγμιότυπο του Π παράγει μια λύση.

Η πολυπλοκότητα εκφράζεται σαν μια συνάρτηση του μεγέθους της εισόδου. Ένας αλγόριθμος Α τρέχει σε χρόνο $O(f(m))$, αν για κάποια σταθερά $c > 0$ υπάρχει μια υλοποίηση του αλγορίθμου Α, η οποία τερματίζει μετά από το πολύ $c\ f(m)$ υπολογιστικά βήματα για όλα τα στιγμιότυπα μεγέθους m. Η πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου Α είναι η μικρότερη συνάρτηση f, τέτοια ώστε ο αλγόριθμος Α τρέχει σε χρόνο $O(f(m))$. Η πολυπλοκότητα ενός προβλήματος Π είναι η μικρότερη συνάρτηση f, για την οποία υπάρχει ένας αλγόριθμος Α χρόνου $O(f(m))$ για το πρόβλημα Π. Δηλαδή η μικρότερη πολυπλοκότητα από όλους τους πιθανούς αλγορίθμους που επιλύουν το πρόβλημα Π. Όταν παρουσιάζουμε και αναλύουμε την πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου για το πρόβλημα Π, βρίσκουμε ένα άνω όριο για την πολυπλοκότητα του προβλήματος Π. Για να βρούμε την πολυπλοκότητα ενός προβλήματος Π υπολογίζουμε ένα άνω και ένα κάτω όριο. Το άνω όριο είναι η μικρότερη πολυπλοκότητα από όλους τους γνωστούς αλγορίθμους που επιλύουν το πρόβλημα Π. Ενώ το κάτω όριο είναι η μεγαλύτερη συνάρτηση f για την οποία έχει αποδειχθεί ότι όλοι οι πιθανοί αλγόριθμοι που επιλύουν το πρόβλημα Π πρέπει να έχουν πολυπλοκότητα τουλάχιστον όσο η συνάρτηση f. Ο στόχος είναι να κάνουμε αυτά τα δυο όρια να ταυτιστούν.

Το μεγαλύτερο ανοιχτό ερώτημα που έχει να κάνει με το κενό ανάμεσα στα δυο όρια της πολυπλοκότητας αφορά στα γνωστά NP-πλήρη προβλήματα. Για κάθε πρόβλημα αυτής της κλάσης γνωρίζουμε αλγορίθμους μόνο εκθετικού χρόνου. Τα καλύτερα κάτω όρια που έχουν αποδειχθεί μέχρι τώρα είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις. Ακόμα αν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για κάποιο από αυτά τότε υπάρχει και αλγόριθμος για όλα τα προβλήματα της κλάσης.

Ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος είναι αυτός για τον οποίο κάθε κατάσταση κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης της εντολής μεταβαίνει μοναδικά σε το πολύ μια επόμενη κατάσταση. Ενώ ένας μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος είναι αυτός για τον οποίο μια κατάσταση μπορεί να οδηγεί σε πολλές επόμενες καταστάσεις ταυτόχρονα.Θεωρούμε ότι ένας μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος αποτελείται από δυο στάδια: Μαντεύει μια λύση για το στιγμιότυπο και επαληθεύει ότι μια λύση είναι πράγματι λύση.
Ένα πρόβλημα Π ανήκει στην κλάση NP αν υπάρχει ένας πολυωνυμικού χρόνου μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος ο οποίος επιλύει το πρόβλημα Π. Προφανώς $P \subseteq NP$. Ένα ανοιχτό πρόβλημα στη θεωρία υπολογισμού είναι αν ισχύει $P \neq NP$. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι κλάσεις P και NP ορίζονται ως προς προβλήματα απόφασης, δηλαδή προβλήματα στα οποία καλούμαστε να απαντήσουμε μια συγκεκριμένη ερώτηση με "ναι" ή "οχι". Η κλάση NP περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα απόφασης για τα οποία αν μας δοθεί ένα πιστοποιητικό της απάντησης "ναι", μπορούμε να επαληθεύσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο ότι είναι σωστή.

Επειτα ένα πρόβλημα Π_1 ανάγεται πολυωνυμικά σε άλλο πρόβλημα Π_2 και συμβολίζεται $\Pi_1 \leq \Pi_2$, εάν υπάρχει μια συνάρτηση f η οποία αντιστοιχεί τα στιγμιότυπα του προβλήματος Π_1 στα στιγμιότυπα του προβλήματος Π_2 έτσι ώστε η f είναι ντετερμινιστικά υπολογίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο και μια λύση για το στιγμιότυπο $f(I)$ του προβλήματος Π_2 δίνει λύση για το στιγμιότυπο I του προβλήματος Π_1, για όλα τα στιγμιότυπα I. Όταν εξετάζουμε προβλήματα απόφασης η απάντηση για το f(I) θα πρέπει να είναι και απάντηση για το I, δηλαδή δεν επιτρέπεται καν να αντιστραφεί η απάντηση από "ναι" σε "οχι" και αντίστροφα.

Έτσι

$$\Pi_1 \leq \Pi_2 \text{ τότε } \text{complexity}(\Pi_1) \leq \text{complexity}(\Pi_2) + \text{polynomial}.$$

Ένα πρόβλημα Π είναι NP-hard αν ισχύει οποιαδήποτε από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

1. $\Pi' \leq \Pi$ για κάθε $\Pi' \in$ NP.
2. $\Pi \in P => P =$ NP.
3. Η ύπαρξη ενός ντετερμινιστικού αλγορίθμου πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα Π θα μπορούσε να συνεπάγεται την ύπαρξη ενός αλγορίθμου πολυωνυμικού χρόνου για κάθε πρόβλημα στην κλάση NP.

Ένα πρόβλημα Π είναι NP-πλήρες αν ανήκει στην κλάση NP και είναι NP-hard.

Η NP-πληρότητα ξεκίνησε από τον Cook το 1971 ο οποίος απέδειξε ότι το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας (SATISFIABILITY-SAT) της μαθηματικής λογικής είναι NP-πλήρες (Θεώρημα του Cook). Η τεχνική που εφαρμόστηκε για την NP-πληρότητα είναι η εξής: Πρώτον από το Θεώρημα του Cook τοποθετούμε το πρόβλημα SAT στην κλάση των NP-πλήρη προβλημάτων. Επειτα επαναλαμβάνουμε το εξής μερικές εκατοντάδες φορές: Βρίσκουμε ένα υποψήφιο πρόβλημα Π το οποίο μπορεί να είναι NP-πλήρες. Επιλέγουμε ένα κατάλληλο πρόβλημα Π' από την κλάση των NP-πλήρη προβλημάτων. Δείχνουμε ότι $\Pi \in$ NP και $\Pi' \leq \Pi$. Προσθέτουμε το πρόβλημα Π στην κλάση NP.

Με δεδομένο ότι τα προβλήματα που θα εξεταστούν στη συνέχεια δεν είναι όλα προβλήματα απόφασης αλλά προβλήματα βελτιστοποίησης, είναι σκόπιμο να αναφερθούμε και στον ορισμό του NP-πλήρους προβλήματος βελτιστοποίησης. Για κάθε NP-πλήρες πρόβλημα βελτιστοποίησης Α θα πρέπει να ορίσουμε το μικρότερο ε-σφάλμα για το οποίο υπάρχει ένας πολυωνυμικού χρόνου ε-προσεγγιστικός αλγόριθμος με κάτω όριο μεταξύ του μηδέν και του ένα. Όταν P=NP τότε όλα τα προβλήματα βελτιστοποίησης έχουν προσεγγιστικό κατώφλι ίσο με μηδέν.

1.3 Στόχος της Διατριβής

Στόχος της διατριβής αυτής είναι να περιγραφούν τα προβλήματα του αρμονικού αριθμού, του αχρωματικού αριθμού, του μεγίστου συνόλου κοπής, του μονοπατιού Hamilton, της επικάλυψης με μονοπάτια και του κυρίαρχου συνόλου. Αρχικά θα περιγραφούν τα προβλήματα αυτά και έπειτα θα παρουσιάζουμε σε ποιες κλάσεις τέλειων γραφημάτων τα προβλήματα αυτά είναι NP-πλήρη και σε ποιες κλάσεις ανήκουν στην κλάση P. Πιο συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε το σημείο εκείνο το οποίο διαχωρίζει σε δυο κατηγορίες τις υπό μελέτη κλάσεις των τέλειων γραφημάτων. Η μια κατηγορία είναι εκείνη όπου για τα προβλήματα δεν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που να τα επιλύει. Και η δεύτερη κατηγορία είναι εκείνη όπου για τα προβλήματα υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που να τα επιλύει. Αρχικά θα αναφερθούμε σε κάποιους βασικούς ορισμούς και στη θεωρία των τέλειων γραφημάτων. Επειτα θα δείξουμε τις αποδείξεις που αναφέρονται στην NP-πληρότητα και θα παρουσιάσουμε τους αλγόριθμους που επιλύουν πολυωνυμικά το πρόβλημα. Ενώ επιπλέον στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε συνοπτικά σε πίνακες κάποια αποτελέσματα γιατί είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να υπάρχουν συγκεντρωμένες οι πληροφορίες γι αυτά τα προβλήματα, γιατί είναι προβλήματα που για κάποιες κλάσεις είναι ακόμα ανοιχτά. Σε έναν πίνακα θα παρουσιάσουμε για κάθε μια κλάση ποια προβλήματα παραμένουν NP-πλήρη και ποια ανήκουν στην κλάση P. Σε κάποιους άλλους πίνακες θα δείξουμε τη χρονολογία εύρεσης των αλγορίθμων που λύνουν πολυωνυμικά το κάθε πρόβλημα, τη χρονολογία εύρεσης των αποδείξεων της NP-πληρότηταςκαι τους συγγραφείς.

1.4 Δομή της Διατριβής

Η διατριβή δομείται σε 9 κεφάλαια. Το κεφάλαιο 1 είναι η εισαγωγή της διατριβής. Αναφερόμαστε σε κάποιους βασικούς ορισμούς σχετικούς με τη θεωρία γραφημάτων και συνοπτικά σε κάποιους ορισμούς που αφορούν την NP-πληρότητα. Επειτα αναλύεται ο στόχος της διατριβής. Στο κεφάλαιο 2 περιγράφουμε αναλυτικά τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων που θα μελετήσουμε. Τα κεφάλαια 3, 4, 5, 6, 7 ασχολούνται με την περιγραφή των προβλημάτων του αρμονικού αριθμού, του αχρωματικού αριθμού, του μεγίστου συνόλου κοπής, του μονοπατιού Hamilton, της επικάλυψης με μονοπάτια και του κυρίαρχου συνόλου. Στο κεφάλαιο 8 παρουσιάζουμε συνοπτικά και σε πίνακες τα εξής αποτελέσματα: σε ποιες κλάσεις το πρόβλημα λύνεται πολυωνυμικά και σε ποιες είναι NP-πλήρες, τη χρονολογία εύρεσης των αλγορίθμων, τη χρονολογία εύρεσης των αποδείξεων της NP-πληρότητας και τους συγγραφείς. Τέλος στο κεφάλαιο 9 αναφερόμαστε στα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη του συγκεκριμένου θέματος.

Κεφαλαιο 2

Κλασεις Τελειων Γραφηματων

Στο σημείο αυτό θα περιγράψουμε κάποιες κλάσεις τέλειων γραφημάτων που θα μας απασχολήσουν παρακάτω.

2.1 Μεταβατικά γραφήματα

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι μεταβατικό γράφημα (comparability graph) αν υπάρχει μια κατεύθυνση (orientation) (V, F) των ακμών, τέτοια ώστε να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

1. $F \cap F^{-1} = \oslash$ (που σημαίνει ότι κάθε ακμή έχει ακριβώς μια κατεύθυνση)

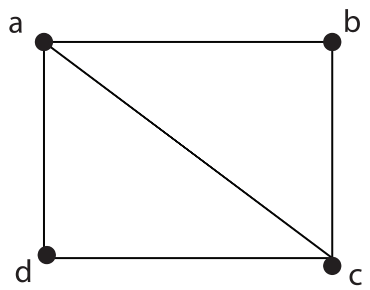
2. $F \cup F^{-1} = E$ (που σημαίνει ότι κάθε ακμή πρέπει να έχει μια κατεύθυνση)

3. $F^2 \subset F$

όπου $F^2 = \{ac \mid ab,\ bc \in F,\ b \in V\}$. Η σχέση F είναι μια αυστηρή μερική διάταξη του συνόλου των κόμβων V της οποίας η μεταβατική σχέση είναι ακριβώς το σύνολο των ακμών E. Με απλά λόγια μεταβατικό είναι ένα γράφημα αν μπορούμε να αναθέσουμε κατεύθυνση στις ακμές του, έτσι ώστε αν υπάρχει μια ακμή από τον κόμβο a στον κόμβο b με κατεύθυνση ab και ακμή από τον bστον κόμβο k με κατεύθυνση bk, τότε υπάρχει και ακμή από τον κόμβο a στον κόμβο k με κατεύθυνση ak.

2.2 Τριγωνικά γραφήματα

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι τριγωνικό γράφημα (chordal or triangulated graph) αν κάθε κύκλος μήκους αυστηρά μεγαλύτερου του 3 περιέχει μια χορδή (ακμή που ενώνει δυο μη συνεχόμενους κόμβους στον κύκλο). Ισοδύναμα το γράφημα G λέγεται τριγωνικό αν δεν περιέχει επαγόμενα υπογραφήματα ισομορφικά των άχορδων κύκλων $C_n,\ n \geq 4$. Στο Σχήμα 2.1 παρατίθεται ένα παράδειγμα τριγωνικού γραφήματος.



Σχήμα 2.1: Ένα τριγωνικό γράφημα (chordal graph).

Ο Dirac έδειξε ότι κάθε τριγωνικό γράφημα G έχει έναν simplicial κόμβο v, έναν κόμβο δηλαδή όπου οι γείτονες του Adj(v) αποτελούν κλίκα. Οι Fulkerson και Gross αφού βασίστηκαν στο θεώρημα του Dirac πρότειναν μια επαναληπτική διαδικασία για την αναγνώριση των τριγωνικών γραφημάτων. Συγκεκριμένα ο αλγόριθμος αυτός εντοπίζει επαναληπτικά έναν simplicial κόμβο στο γράφημα και τον διαγράφει μέχρι το γράφημα να μην έχει κανέναν κόμβο, άρα είναι τριγωνικό ή δεν μπορεί να εντοπιστεί άλλος simplicial κόμβος οπότε το γράφημα δεν είναι τριγωνικό.

Λήμμα 2.1. *Κάθε τριγωνικό γράφημα G έχει έναν simplicial κόμβο. Επιπλέον αν το γράφημα G δεν είναι πλήρες έχει δύο simplicial κόμβους που δεν συνδέονται μεταξύ τους.*

Θεώρημα 2.1. *Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Το γράφημα G είναι τριγωνικό.*

2. *Το γράφημα G έχει ένα τέλειο σχήμα απαλοιφής.*

3. *Κάθε minimal vertex separator επάγει ένα πλήρες υπογράφημα H_G του γραφήματος G.*

Ένα τέλειο σχήμα απαλοιφής για ένα τριγωνικό γράφημα είναι μια ακολουθία κόμβων $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ τέτοια ώστε κάθε κόμβος u_i και οι γείτονές του που βρίσκονται στην υπακολουθία $\{u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ να αποτελούν κλίκα στο γράφημα. Συγκεκριμένα τέλειο σχήμα απαλοιφής ενός τριγωνικού γραφήματος G ονομάζεται μια ακολουθία κόμβων $\sigma = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ εάν για κάθε i, ο κόμβος u_i είναι simplicial στο γράφημα $G(\{u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n\})$. Το σύνολο κόμβων που προκύπτει από την τομή των συνόλων $\{u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ και $\mathrm{Adj}(u_i)$ είναι κλίκα. Για την εύρεση ενός τέλειου σχήματος απαλοιφής σε ένα τριγωνικό γράφημα δύο αρκετά γνωστοί αλγόριθμοι είναι οι LexBFS και Maximum Cardinality Search. Η εύρεση ενός τέλειου σχήματος απαλοιφής σε τριγωνικό γράφημα έχει αρκετές πρακτικές εφαρμογές. Μια αρκετά σημαντική εφαρμογή τους είναι στην αναγνώριση τριγωνικών γραφημάτων. Η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με την εύρεση μιας ακολουθίας σ χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο LexBFS ή MCS και στη συνέχεια με τον έλεγχο αν η ακολουθία σ αποτελεί ένα τέλειο σχήμα απαλοιφής.

Θεώρημα 2.2. *Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G είναι τριγωνικό εάν και μόνο εάν η ακολουθία κόμβων σ που προκύπτει από τον αλγόριθμο LexBFS είναι ένα τέλειο σχήμα απαλοιφής.*

Τα βήματα του MCS παρατίθενται στον Αλγόριθμο 1.

Αλγόριθμος 1 MCS

Είσοδος: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G

Έξοδος: Μια ακολουθία των κόμβων σ, του γραφήματος G

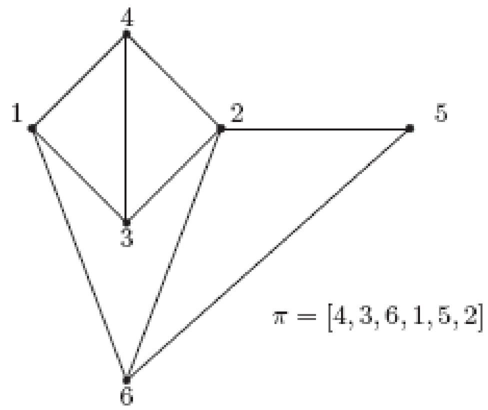
1. Για i = n μέχρι 1 επίλεξε τον κόμβο u από το σύνολο V με τους περισσότερους αριθμημένους γείτονες
2. Αρίθμησε τον κόμβο u με τον αριθμό i
3. Τοποθέτησε τον κόμβο u στην θέση i της ακολουθίας σ
4. Αφαίρεσε τον κόμβο u από το σύνολο V. Η ακολουθία σ που κατασκευάζει ο αλγόριθμος MCS είναι τέλειο σχήμα απαλοιφής μόνο στην περίπτωση που το γράφημα είναι τριγωνικό.

2.3 Μεταθετικά γραφήματα

Έπειτα θα αναφερθούμε στα μεταθετικά (permutation) γραφήματα. Έστω μια μετάθεση π των αριθμών $1, 2, 3, \ldots, n$. Με π_i^{-1} συμβολίζουμε τη θέση στην ακολουθία στην οποία βρίσκεται ο αριθμός i. Από τη μετάθεση π κατασκευάζεται ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G[\pi]$ με κόμβους αριθμημένους με τους αριθμούς της μετάθεσης $1, 2, 3, \ldots, n$. Δυο κόμβοι ενώνονται με ακμή αν ο μεγαλύτερος από τους δυο αριθμούς που αντιστοιχεί στους κόμβους βρίσκεται στα αριστερά του μικρότερου αριθμού στη μετάθεση π. Δηλαδή αν π είναι μια μετάθεση των αριθμών $1, 2, 3, \ldots, n$ τότε το γράφημα $G[\pi] = (V, E)$ ορίζεται:

$$V = \{1, 2, \ldots, n\} \text{ και } \{i, j\} \in E \longleftrightarrow (i - j)(\pi_i^{-1} - \pi_j^{-1}) < 0. \tag{2.1}$$

Παρακάτω παρατίθεται ένα παράδειγμα ενός τέτοιου γραφήματος.



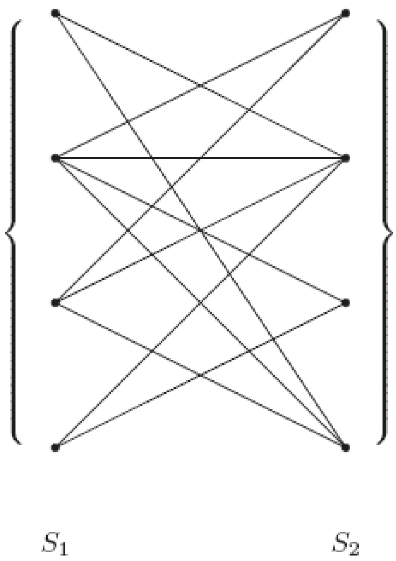
Σχήμα 2.2: Το γράφημα που αντιστοιχεί στη μετάθεση $\pi = [4, 3, 6, 1, 5, 2]$.

Ένα γράφημα G θα αναφέρεται ως μεταθετικό γράφημα αν υπάρχει μια μετάθεση π τέτοια ώστε $G \approx G[\pi]$. Αν αντιστραφεί η μετάθεση π κάθε ζεύγος αριθμών στη σωστή σειρά στην π θα εμφανίζεται με ανάποδη σειρά στην ανεστραμμένη μετάθεση και αντίστροφα. Με άλλα λόγια π^ρ είναι η μετάθεση που κατασκευάζεται αν αντιστρέψουμε τη μετάθεση π τότε $G[\pi^\rho] \approx \bar{G}[\pi]$. Δηλαδή το συμπλήρωμα ενός μεταθετικού γραφήματος είναι μεταθετικό γράφημα. Επίσης έχουμε το εξής θεώρημα που δείχνει τη σχέση των μεταθετικών με τα μεταβατικά γραφήματα.

Θεώρημα 2.3. *Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G είναι μεταθετικό (permutation) γράφημα αν και μόνο αν το G και το συμπλήρωμά του G είναι μεταβατικά γραφήματα (comparability gpaphs).*

2.4 Διμερή γραφήματα

Έπειτα θα αναφερθούμε στα διμερή γραφήματα (bipartite graphs). Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι διμερές αν οι κόμβοι του μπορούν να διαμεριστούν σε δυο ανεξάρτητα ευσταθή σύνολα S_1 και S_2 με $V = S_1 \cup S_2$. Δηλαδή η κάθε ακμή έχει το ένα τερματικό της σημείο στο ένα σύνολο S_1 και το άλλο τερματικό της σημείο στο άλλο σύνολο S_2. Συχνά χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $G = (S_1, S_2, E)$. Ακόμα ένα διμερές γράφημα είναι πλήρες αν για κάθε $x \in S_i$ και $y \in S_j$ υπάρχει η ακμή (x, y). Το πλήρες διμερές γράφημα συμβολίζεται με $K_{n,m}$ αν $|S_i| = n$ και $|S_j| = m$. Παρακάτω παρατίθεται ένα παράδειγμα διμερούς γραφήματος.



Σχήμα 2.3: Ένα διμερές γράφημα.

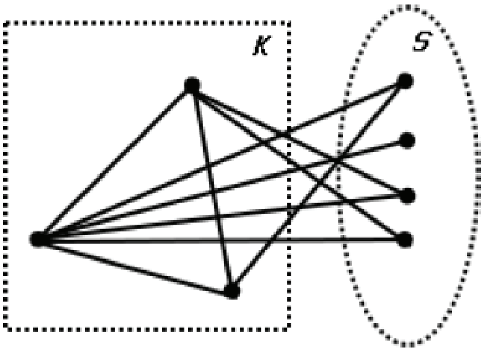
2.5 Διαχωρίσιμα γραφήματα

Έπειτα θα αναφερθούμε στα διαχωρίσιμα γραφήματα (split graphs). Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι split αν υπάρχει μια διαμέριση $V = S + K$ του συνόλου των κόμβων του, όπου S είναι ένα σταθερό σύνολο που δεν είναι απαραίτητα το μέγιστο και K είναι ένα πλήρες σύνολο (κλίκα) που επίσης δεν είναι απαραίτητα μέγιστο. Η διαμέριση $V = S + K$ ενός split γραφήματος δεν είναι μοναδική. Μια τέτοια διαμέριση φαίνεται στο Σχήμα 2.4.

Θεώρημα 2.4. *Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G είναι split αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του G είναι split.*

Επίσης σημαντικό είναι το παρακάτω θεώρημα για τα split γραφήματα. Από το θεώρημα αυτό βλέπουμε ότι η διαμέριση ενός split γραφήματος σε ανεξάρτητο σύνολο S και σε πλήρες σύνολο K δεν είναι μοναδική:

Θεώρημα 2.5. *Έστω ότι το G είναι ένα split γράφημα και V=S+K τότε ισχύει ακριβώς μία από τις παρακάτω συνθήκες:*



Σχήμα 2.4: Διαμέριση διαχωρίσιμου γραφήματος.

1. $|S| = a(G)$ *και* $|K| = \omega(G)$

2. $|S| = a(G)$ *και* $|K| = \omega(G) - 1$

3. $|S| = a(G) - 1$ *και* $|K| = \omega(G)$

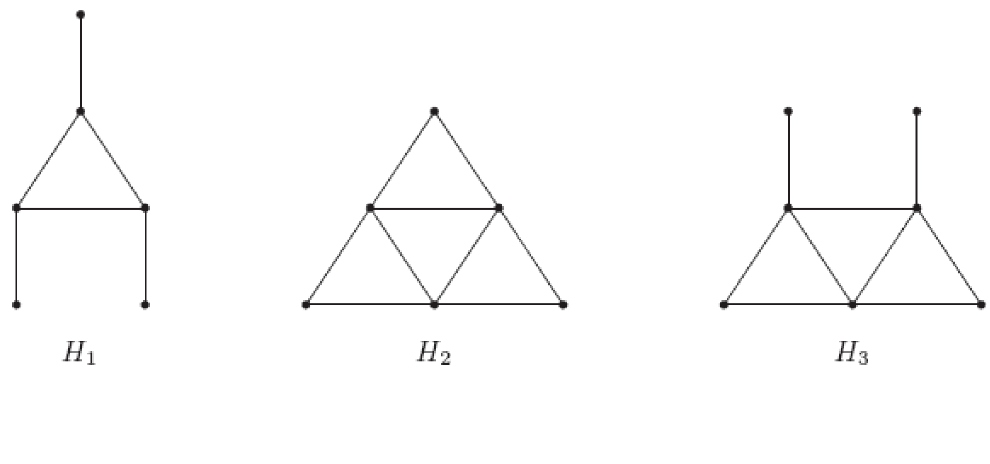
Στο παρακάτω θεώρημα θα δειχθεί η σχέση των διαχωρίσιμων γραφημάτων με τα τριγωνικά και τα μεταβατικά γραφήματα αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.6. *Έστω ότι το G είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. Το G είναι ένα split γράφημα.

2. Τα γραφήματα G και $\bar{G}$ είναι τριγωνικά γραφήματα.

3. Το G δεν περιέχει επαγόμενο υπογράφημα ισοδύναμο με $2K_2$, C_4 και C_5.



Σχήμα 2.5: Τα γραφήματα H_1, H_2 και H_3.

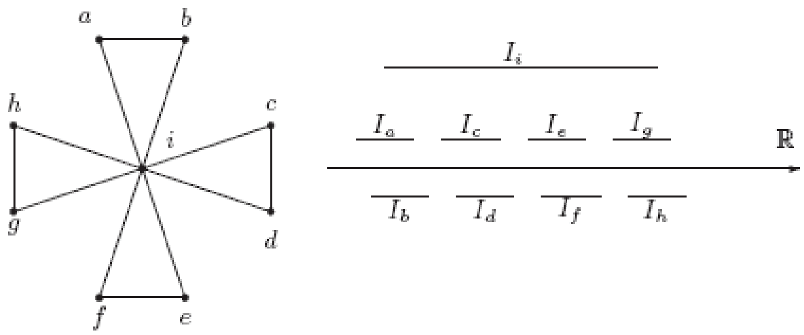
Αν ένα γράφημα είναι ταυτόχρονα διαχωρίσιμο και γράφημα διαστημάτων τότε το συμπλήρωμα του είναι διαχωρίσιμο και μεταβατικό γράφημα.

Θεώρημα 2.7. *Ένα split γράφημα G είναι και comparability αν και μόνο αν το G δεν περιέχει κανένα επαγόμενο υπογράφημα, που να είναι ισοδύναμο με τα H_1, H_2, H_3.*

Στο Σχήμα 2.5 φαίνονται τα γραφήματα H_1, H_2, H_3.

2.6 Γραφήματα διαστημάτων

Παρακάτω θα αναφερθούμε στα λεγόμενα γραφήματα διαστημάτων (interval graphs). Τα γραφήματα διαστημάτων είναι εκείνα τα γραφήματα των οποίων οι κόμβοι μπορούν να τοποθετηθούν σε μια μια-προς-μια αντιστοιχία με ένα σύνολο διαστημάτων στη γραμμή των πραγματικών αριθμών, με μια ακμή να ενώνει δυο κόμβους αν τα αντίστοιχα διαστήματα τέμνονται. Ακόμα τα γραφήματα διαστημάτων είναι τα τριγωνικά γραφήματα των οποίων το συμπλήρωμα είναι μεταβατικό γράφημα. Παρακάτω παρατίθεται ένα παράδειγμα ενός γραφήματος διαστημάτων (Σχήμα 2.6).



Σχήμα 2.6: Ένα γράφημα διαστημάτων.

2.7 Συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα

Επειτα θα αναφερθούμε στα λεγόμενα συμπληρωματικά γραφήματα (cographs). Τα συμπληρωματικά γραφήματα (cographs) ορίζονται σαν την κλάση των γραφημάτων που παράγονται από έναν μόνο κόμβο υπό την κλειστότητα των πράξεων της ένωσης και του συμπληρώματος. Η κλάση των cograph γραφημάτων ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

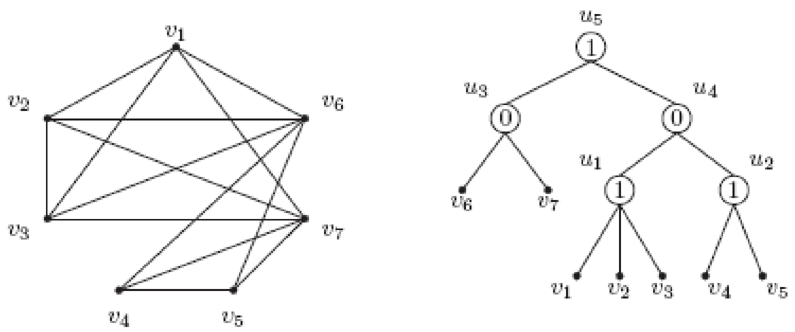
1. Ένα γράφημα με έναν μόνο κόμβο είναι cograph.

2. Η ένωση cograph γραφημάτων είναι cograph.

3. Το συμπλήρωμα ενός cograph είναι επίσης cograph.

Η κλάση των cograph γραφημάτων ορίστηκε ανεξάρτητα από διάφορους συγγραφείς τη δεκαετία του 1970. Δυο αρκετά σημαντικές αλγοριθμικές ιδιότητες που έδειξε ο Lerchs μεταξύ άλλων ιδιοτήτων για τα cographs είναι οι εξής:

1. Τα cograph δεν έχουν P_4.
2. Τα cograph έχουν μοναδική δενδρική αναπαράσταση που λέγεται cotree.

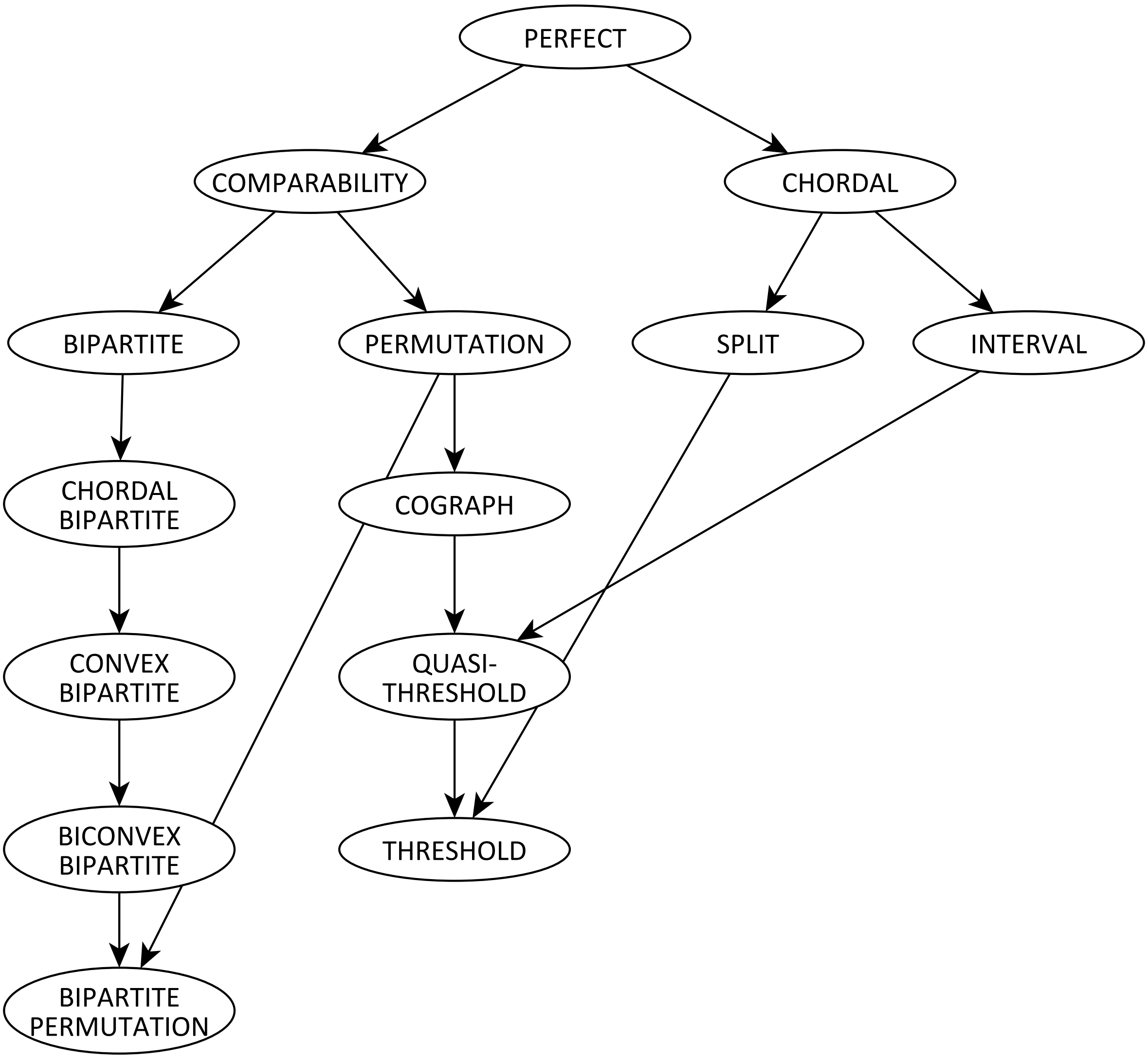


Σχήμα 2.7: Ένα cograph και το cotree του.

Το cotree T είναι ένα δέντρο όπου οι εσωτερικοί του κόμβοι έχουν ως ετικέτες τους αριθμούς 0 και 1. Κάθε cotree T ορίζει ένα cograph G με κόμβους τα φύλλα του δέντρου T. Το υποδέντρο με ρίζα κάθε κόμβο του δέντρου T αντιστοιχεί σε ένα επαγόμενο υπογράφημα του G που έχει ως κόμβους το σύνολο των φύλλων του αντίστοιχου υποδέντρου. Ένα υποδένδρο που αποτελείται από ένα μοναδικό κόμβο φύλλο αντιστοιχεί σε ένα επαγόμενο υπογράφημα με ένα μόνο κόμβο. Επισης ένα υποδέντρο με ρίζα που έχει ετικέτα 0 αντιστοιχεί στην ένωση των υπογραφημάτων που ορίζονται από τα παιδιά του κόμβου αυτού. Ακόμα ένα υποδέντρο με ρίζα που έχει ετικέτα 1 αντιστοιχεί στην σύνθεση των υπογραφημάτων που ορίζονται απο τα παιδιά του κόμβου αυτού. Μια ισοδύναμη περιγραφή της κατασκευής ενός cograph από το αντίστοιχο cotree είναι η εξής: Σε ένα cograph G δυο κόμβοι συνδέονται με ακμή αν και μόνο αν ο πλησιέστερος κοινός πρόγονος των αντίστοιχων φύλλων στο cotree T έχει ετικέτα 1. Αντίστροφα κάθε cograph μπορεί να αναπαρασταθεί με τον παραπάνω τρόπο από ένα cotree. Η αναπαράσταση αυτή είναι μοναδική αν εξασφαλίσουμε ότι οι ετικέτες για κάθε μονοπάτι από την ρίζα σε φύλλο στο T εναλλάσσονται σε 0 και 1. Στο Σχήμα 2.7 φαίνεται ένα cograph και το cotree του.

2.8 Σχέσεις κλάσεων τέλειων γραφημάτων

Σε αυτό το σημείο σημαντικό είναι να δείξουμε με μια σχηματική αναπαράσταση τη σχέση των παραπάνω κλάσεων που περιγράψαμε (βλ. Σχήμα 2.8).



Σχήμα 2.8: Σχέση των υπό μελέτη κλάσεων τέλειων γραφημάτων.

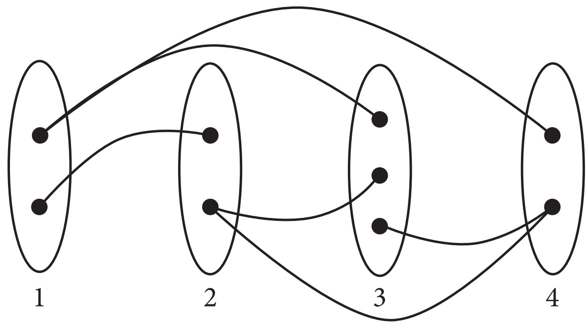
Κεφαλαιο 3

Αρμονικος Αριθμος

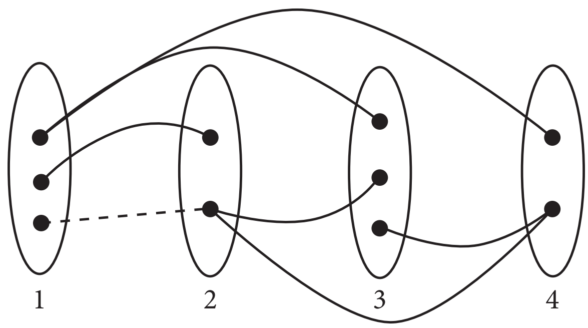
3.1 Αρμονικός Αριθμός

Κύριος στόχος της μελέτης είναι να προσδιοριστεί το όριο μεταξύ κλάσεων τέλειων γραφημάτων στο οποίο ένα πρόβλημα Π μετατρέπεται από πολυωνυμικά επιλύσιμο σε μη πολυωνυμικά επιλύσιμο. Αν για μια κλάση γραφημάτων A υπάρχει ένα NP-πλήρες αποτέλεσμα τότε το αποτέλεσμα αυτό θα είναι ίδιο σε κάθε υπερκλάση της κλάσης A. Στην άλλη περίπτωση αν ένα πρόβλημα έχει πολυωνυμική λύση για την κλάση A θα έχει πολυωνυμική λύση σε κάθε υποκλάση της κλάσης A. Το πρόβλημα αυτό θα εκφραστεί παρακάτω με έναν πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο. Θα δώσουμε ιδιαίτερη σημασία στην εύρεση των κλάσεων στις οποίες περνάμε από την P στην NP-πληρότητα για το κάθε πρόβλημα που μελετάμε. Επομένως το σημαντικό σημείο σε αυτή τη μελέτη είναι να βρούμε μια κλάση A στην οποία το πρόβλημα είναι NP-πλήρες και σε μια υποκλάση του το πρόβλημα να είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο. Πριν ορίσουμε το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού θα αναφερθούμε σε κάποιους βασικούς ορισμούς.

Μια ανάθεση χρωμάτων στις κορυφές του γραφήματος G, έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικό χρώμα είναι ένας κατάλληλος χρωματισμός ενός γραφήματος $G = (V, E)$. Έστω $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ τα χρώματα ενός κατάλληλου χρωματισμού X των κορυφών ενός γραφήματος G. Ο χρωματισμός X λέγεται πλήρης (complete coloring) αν για κάθε ζεύγος χρωμάτων (x_i, x_j) υπάρχουν δυο κορυφές που είναι γειτονικές και τους έχουν ανατεθεί αυτά τα δύο χρώματα (Σχήμα 3.1). Ένας κατάλληλος χρωματισμός των κορυφών τέτοιος ώστε κάθε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων να εμφανίζεται το πολύ σε μια ακμή είναι ένας αρμονικός χρωματισμός ενός γραφήματος G (Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.1: Ένας πλήρης χρωματισμός (complete coloring) του γραφήματος G. Όπου $1, 2, 3, 4$ είναι τα χρώματα.

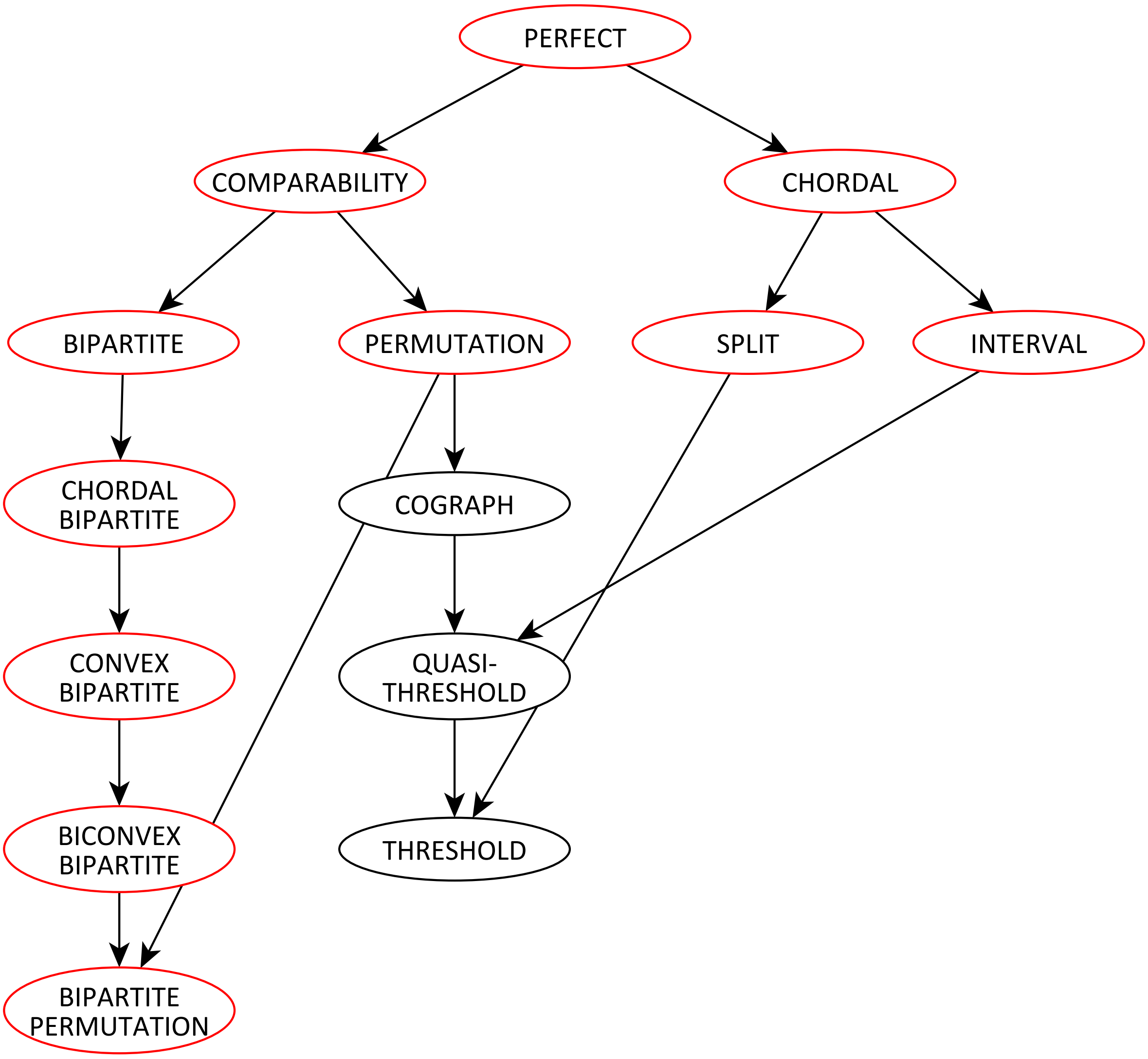


Σχήμα 3.2: Ένας αρμονικός χρωματισμός του γραφήματος G. Αν υπήρχε η διακεκομμένη ακμή, ο χρωματισμός του γραφήματος G δεν θα ήταν αρμονικός

Ο ελάχιστος ακέραιος k για τον οποίο το γράφημα G έχει ένα αρμονικό χρωματισμό με K χρώματα λέγεται αρμονικός χρωματικός αριθμός $h(G)$.

Η NP-πληρότητα του αχρωματικού αριθμού για τα γραφήματα διαστημάτων (interval graphs) συνεπάγεται την NP-πληρότητα του αρμονικού αριθμού των μη συνεκτικών γραφημάτων διαστημάτων (disconected interval graphs) [5]. Τα προηγούμενα αποτελέσματα επεκτείνονται για τα συνεκτικά μεταθετικά γραφήματα (permutation graphs) και για τα συνεκτικά γραφήματα διαστημάτων (interval graphs) [2]. Το πρόβλημα έχει τετριμμένη λύση στα συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα (cographs), γιατί σε ένα τέτοιο γράφημα κάθε κόμβος παίρνει ένα διαφορετικό χρώμα. Αυτό ισχύει γιατί στα συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα κάθε κόμβος βρίσκεται σε απόσταση το πολύ δύο από τους υπόλοιπους κόμβους του γραφήματος. Έπειτα το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού είναι NP-πλήρες για τα μεταβατικά γραφήματα (comparability graphs) και για τα τριγωνικά γραφήματα (chordal graphs). Και αυτό γιατί τα τριγωνικά γραφήματα αποτελούν υπερκλάση των γραφημάτων διαστημάτων και τα μεταβατικά γραφήματα αποτελούν υπερκλάση των μεταθετικών γραφημάτων. Αποδείχθηκε επίσης ότι το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού είναι NP-πλήρες για την κλάση των διμερών γραφημάτων (bipartite permutation) [15]. Επίσης για την κλάση των διαχωρίσιμων (split) γραφημάτων το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού είναι NP-πλήρες [2]. Το Σχήμα 3.3 αναπαριστά την πολυπλοκότητα του προβλήματος εύρεσης του αρμονικού αριθμού για γραφήματα που ανήκουν στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων.

Οι κόκκινες ελλείψεις αντιστοιχούν στις κλάσεις όπου το πρόβλημα είναι NP-πλήρες,



Σχήμα 3.3: Αναπαράσταση της πολυπλοκότητας του προβλήματος εύρεσης του αρμονικού αριθμού για γραφήματα που ανήκουν στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων. Το πρόβλημα στις κλάσεις με κόκκινη έλλειψη είναι NP-πλήρες ενώ στις κλάσεις με μαύρη έλλειψη είναι πολυωνυμικό.

ενώ οι μαύρες αντιστοιχούν σε εκείνες τις κλάσεις όπου το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P. Στο παρακάτω κεφάλαιο θα δείξουμε τις αναγωγές που αποδεικνύουν ότι το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού είναι NP-πλήρες για τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων.

3.2 Αποτελέσματα NP-πληρότητας

Το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού στην κλάση των διμερή μεταθετικών γραφημάτων (bipartite permutation graphs) είναι NP-πλήρες. Η κλάση αυτή είναι υποκλάση των διμερή γραφημάτων (bipartite graphs). Επομένως και στα διμερή γραφήματα το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού είναι NP-πλήρες. Ένα διμερές γράφημα $G = (V, E)$, όπου $V = X + Y$, είναι ένα διμερές μεταθετικό γράφημα αν και μόνο αν οι κόμβοι του γραφήματος έχουν μια ισχυρή διάταξη [21]. Η ισχυρή διάταξη των κόμβων ενός γραφήματος $G = (V, E)$, όπου $V = X + Y$, είναι μια διάταξη $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ των κόμβων του συνόλου X και μια διάταξη $\{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ των κόμβων του συνόλου Y τέτοια ώστε αν ισχύει $x_i y_l$, $x_j y_m \in E$ με $i < j$ και $l > m$ να ισχύει και επιπλέον $x_i y_m, x_j y_l \in E$ [21]. Από τα παραπάνω προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

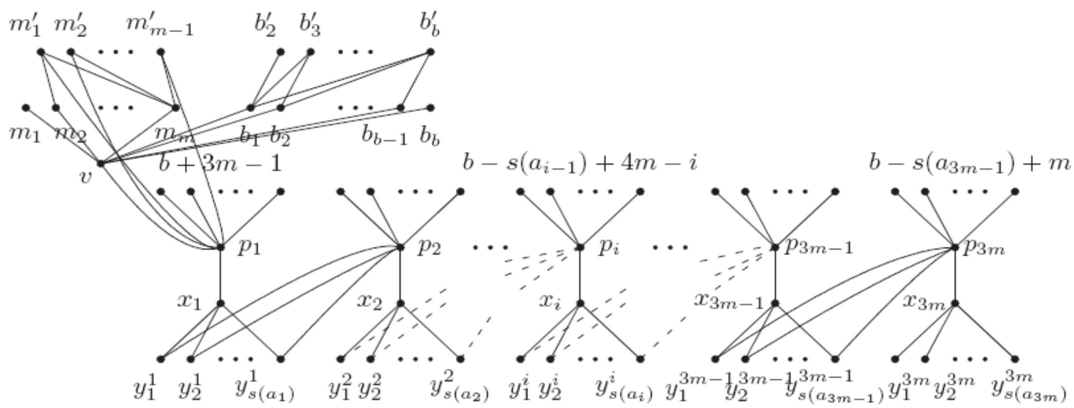
Θεώρημα 3.1. *Το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού είναι NP-πλήρες για τα συνεκτικά διμερή μεταθετικά γραφήματα (bipartite permutation graphs) [3].*

Παρακάτω παρατίθεται η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος.

Το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού για να αποδειχθεί ότι είναι NP-hard θα χρησιμοποιηθεί ένας μετασχηματισμός από το πρόβλημα 3-partition. Αμέσως μετά ορίζουμε το πρόβλημα 3-partition.

Ορισμός 3.1 (3-partition)**.** Στιγμιότυπο: Έχουμε ένα σύνολο A με $3m$ στοιχεία, ένα όριο $B \in Z^+$ και θετικούς ακεραίους μεγέθους $s(\alpha) \in Z^+$ για κάθε $\alpha \in A$ τέτοιους ώστε να ισχύει $1/4B < s(\alpha) < 1/2B$ και $\sum\limits_{a \in A} s(a) = mB$.

Ερώτηση: Μπορεί το σύνολο να χωριστεί σε m ξένα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_m$ τέτοια ώστε για $1 \le i \le m, \sum_{a \in A} s(a) = B$; Δηλαδή κάθε σύνολο A_i πρέπει να περιέχει ακριβώς 3 στοιχεία από το σύνολο A.



Σχήμα 3.4: Διμερές συνδεδεμένο γράφημα

Έστω ένα σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m}\}$ με $3m$ στοιχεία , ένας θετικός ακέραιος b και θετικοί ακέραιοι μεγέθους $s(\alpha_i)$ για κάθε $\alpha_i \in A$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $1/4b < s(\alpha_i) \le 1/2b$ και $\sum_{a \in A} s(a) = mb$ με $1 \le i \le 3m$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\alpha_i \in A$ ισχύει $s(\alpha_i) > m$. Αν δεν ισχύει μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε όλα τα μεγέθη $s(\alpha_i)$ και b με το $m + 1$. Έπειτα κατασκευάζεται το ακόλουθο συνδεδεμένο (συνεκτικό) διμερές μεταθετικό γράφημα (bipartite permutation graph). Έστω $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_m\}$ ένα σύνολο με m κόμβους , έστω $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_b\}$ ένα σύνολο με b κόμβους και προστίθεται και ένας κόμβος u που συνδέεται με κάθε κόμβο από τα δυο σύνολα. Προκύπτει λοιπόν το σύνολο $M' = \{m'_1, m'_2, \ldots, m'_{m-1}\}$ με $m-1$ κόμβους και το σύνολο $B' = \{b'_2, b'_3, \ldots, b'_b\}$ με $b-1$ κόμβους. Έπειτα οι κόμβοι των συνόλων M', B' συνδέονται με τους κόμβους των συνόλων M, B. Δηλαδή κάθε κόμβος m'_i, με $1 \leq i \leq m-1$, συνδέεται με τους κόμβους $m_{i+1}, m_{i+2}, \ldots, m_m$ και κάθε κόμβος b_i, με $1 \leq i \leq b-1$, με τους κόμβους $b'_{i+1}, b'_{i+2}, \ldots, b'_b$. Έπειτα κατασκευάζεται ένα δέντρο T_i βάθους 1 με $s(\alpha_i)$ φύλλα και με ονομασίες φύλλων $y^i_1, y^i_2, \ldots, y^i_{s(\alpha_i)}$ για κάθε $\alpha_i \in A$. Κάθε δέντρο έχει για ρίζα το x_i και κάθε φύλλο συνδέεται με τη ρίζα, (έχει δηλαδή γείτονα τη ρίζα του δέντρου). Έτσι υπάρχουν $3m$ τέτοια δέντρα, τα $T_1, T_2, \ldots, T_{3m}$. Στη συνέχεια προστίθεται ένα σύνολο $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{3m}\}$ με $3m$ κόμβους και κάθε κόμβος p_i συνδέεται με τη ρίζα x_i κάθε δέντρου T_i με $1 \leq i \leq 3m$. Ακόμα κάθε κόμβος p_i με $2 \leq i \leq 3m$ συνδέεται με τα $s(\alpha_{i-1})$ φύλλα του αντίστοιχου δέντρου T_{i-1}. Ο κόμβος p_1 συνδέεται με τους κόμβους του συνόλου M' και με τον κόμβο u. Ακόμα για κάθε κόμβο $p_i \in P$ με $2 \leq i \leq 3m$ προστίθενται κόμβοι u^i_j με $1 \leq j \leq m - 1 + b - s(\alpha_{i-1}) + 1 + 3m - i$ και συνδέονται με τον κόμβο p_i. Προστίθενται ακόμα οι κόμβοι u^1_j με $1 \leq j \leq b + 3m - 1$ και συνδέονται με τον κόμβο p_1. Έστω G το τελικό γράφημα το οποίο είναι συνδεδεμένο. Το γράφημα G παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.4.[1]

Έπειτα είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το γράφημα G είναι διμερές. Έστω X και Y τα δυο ευσταθή σύνολα. Οι κόμβοι του γραφήματος $G = (V, E)$, όπου $V = X + Y$, έχουν μια ισχυρή διάταξη άρα το γράφημα G είναι διμερές μεταθετικό γράφημα (bipartite permutation graph). Ορίζονται ως X και Y οι διατάξεις των κόμβων των συνόλων X και Y αντίστοιχα. Τα σύνολα X και Y ορίζονται αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} X &= \{b'_2, b'_3, \ldots, b'_b, u, m'_1, m'_2, \ldots, m'_{m-1}, u^1_1, u^1_2, \ldots, u^1_{b+3m-1}, X_1, X_3, X_5, ..., X_{3m-2}, x_{3m}\} \\ Y &= \{b_1, b_2, \ldots, b_b, m_1, m_2, \ldots, m_m, Y_1, Y_3, Y_5, \ldots, Y_{3m-2}, y^{3m}_1, y^{3m}_2, \ldots, y^{3m}_{s(\alpha_{3m})}\} \end{aligned}$$

όπου

$X_i = \{x_i, p_{i+1}, y^{i+1}_1, y^{i+1}_2, \ldots, y^{i+1}_{s(\alpha_{i+1})}, u^{i+2}_1, u^{i+2}_2, \ldots, u^{i+2}_{4m+b-s(\alpha_{i+1})-i-2}\}$
με $i = 1, 3, 5, \ldots, 3m-2$
$Y_i = \{x_i, y^i_1, y^i_2, \ldots, y^i_{s(\alpha_i)}, u^{i+1}_1, u^{i+1}_2, \ldots, u^{i+1}_{4m+b-s(\alpha_i)-i-1}, x_{i+1}\}$
με $i = 1, 3, 5, \ldots, 3m-2$.

Το πλήθος των ακμών στο γράφημα είναι:

$$\binom{m}{2} + \binom{b}{2} + m + b + 3m^2 + 3mb + 3m + mb + \sum_{i=1}^{3m-1} i = \binom{4m+b+1}{2}$$

Πρέπει λοιπόν να υπάρχει το πολύ μια ακμή που να χρωματίζεται με τα χρώματα i και j για οποιονδήποτε αρμονικό χρωματισμό του γραφήματος και για κάθε ζεύγος διαφορετικών

[1] Το Σχημα 3.4 δημιουργήθηκε από τους Katerina Asdre και Stavros D. Nikolopoulos και χρησιμοποιήθηκε από τη δημοσίευση με τίτλο: NP-completeness results for some problems on subclasses of bipartite and chordal graphs, Theoretical Computer Science 381 (2007), 248–259.

χρωμάτων i και j. Επομένως προκύπτει ότι ο αρμονικός χρωματικός αριθμός δε μπορεί να είναι μικρότερος από $4m+b+1$. Αν είναι ίσος με $4m+b+1$ τότε για κάθε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων i, j με $1 \leq i, j \leq 4m+b+1$ υπάρχει μια μοναδική ακμή με τα άκρα της να είναι χρωματισμένα με τα χρώματα i και j. Προκύπτει έτσι ότι έχουμε έναν ακριβή χρωματισμό του γραφήματος G με κ χρώματα. Ακριβής είναι ένας χρωματισμός όταν έχουμε έναν αρμονικό χρωματισμό του γραφήματος G με κ χρώματα για τα οποία για οποιοδήποτε ζεύγος χρωμάτων i, j υπάρχει ακριβώς μια ακμή ab τέτοια ώστε η κορυφή a να έχει το χρώμα i και η κορυφή b να έχει το χρώμα j.

Θα αποδειχθεί λοιπόν χρησιμοποιώντας έναν μετασχηματισμό από το πρόβλημα 3-partition ότι ο αρμονικός χρωματικός αριθμός του γραφήματος G είναι μικρότερος ή ίσος με $4m+b+1$ αν και μόνο αν το σύνολο A μπορεί να διαμεριστεί σε m σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_m$ τέτοια ώστε να ισχύει $\sum_{\alpha \in A_j} s(\alpha) = b$ για οποιοδήποτε j με $1 \leq j \leq m$.

($\Leftarrow$) Έστω μια 3-διαμέριση του συνόλου A σε $A_1, A_2, \ldots, A_m$ σύνολα τέτοια ώστε για κάθε j να ισχύει $\sum_{\alpha \in A_j} s(\alpha) = b$. Οι κόμβοι των M και M' χρωματίζονται με τα χρώματα $1, 2, \ldots, m$ ενώ οι κόμβοι των συνόλων B και B' με τα χρώματα $m+1, m+2, \ldots, m+b$ και ο κόμβος u παίρνει το χρώμα $m+b+1$. Έστω M το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $1, 2, \ldots, m$ και B το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $m+1, m+2, \ldots, m+b$ και K το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $m+b+2, m+b+3, \ldots, 4m+b+1$. Αν $\alpha_i \in A_j$ τότε ο κόμβος που αντιστοιχεί στο α_i παίρνει το χρώμα j. Κάθε χρώμα $j \in M$ αντιστοιχίζεται σε 3 κόμβους x_i, οι οποίοι αντιστοιχούν σε $3\alpha_i$ που έχουν όλα μαζί ακριβώς b γείτονες βαθμού 2. Καθένας από τους b γείτονες παίρνει ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο B και κάθε κόμβος p_i από το σύνολο P παίρνει ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο K. Υπενθυμίζεται ότι κάθε κόμβος p_i, $1 \leq i \leq 3m$ συνδέεται με $m+b+1+3m-i$ κόμβους. Έπειτα πρέπει να χρωματιστούν οι υπόλοιποι $m-1+b-s(\alpha_{i-1})+1+3m-i$ γείτονες ενός κόμβου p_i, $1 \leq i \leq 3m$. Οι $m-1$ γείτονες του κόμβου p_i παίρνουν ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $M/\ c_i$, όπου c_i είναι το χρώμα που ανατέθηκε μόλις πριν στον κόμβο x_i που αντιστοιχεί στο α_i. Οι $b-s(\alpha_{i-1})$ γείτονες του κόμβου p_i παίρνουν ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $B\ c_i$, όπου c_i είναι το σύνολο των χρωμάτων που μόλις πριν ανατέθηκαν στους $s(\alpha_{i-1})$ γείτονες του κόμβου x_{i-1} που αντιστοιχεί στο α_{i-1}. Οι υπόλοιποι $1+3m-i$ γείτονες του κόμβου p_i παίρνουν ένα διαφορετικό χρώμα χρησιμοποιώντας το χρώμα $m+b+1$ και τα χρώματα που ανατέθηκαν στους κόμβους p_j, $i+1 \leq j \leq 3m$. Για τους $b+3m-1$ γείτονες του κόμβου p_1 χρησιμοποιούνται χρώματα από τα σύνολα K και B, ενώ οι m γείτονές του έχουν ήδη χρωματιστεί. Υπάρχει λοιπόν ένας αρμονικός χρωματισμός του γραφήματος G με $4m+b+1$ χρώματα και άρα ο αρμονικός αριθμός του γραφήματος αυτού είναι $4m+b+1$.

($\Rightarrow$) Έστω ο αρμονικός αριθμός του γραφήματος είναι μικρότερος ή ίσος με $4m+b+1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι οι m κόμβοι του συνόλου M παίρνουν διαφορετικά χρώματα από το σύνολο M, ενώ οι b κόμβοι του συνόλου B παίρνουν διαφορετικά χρώματα από το σύνολο B. Ο κόμβος u χρωματίζεται με το χρώμα $m+b+1$, αφού γειτονεύει με όλους τους κόμβους από τα δυο σύνολα M και B. Ο κόμβος p_1 χρωματίζεται με το χρώμα

$c_{p_1} = m+b+2$. Ο μέγιστος βαθμός του κόμβου p_1 είναι $4m+b$ και ως εκ τούτου το χρώμα $m+b+2$ γειτονεύει με όλα τα χρώματα. Αφού όλοι οι γείτονες του κόμβου p_1 που δεν έχουν χρωματιστεί παίρνουν διαφορετικά χρώματα από το σύνολο $M \cup B \cup K$ c_{p_1}. Κάθε κόμβος p_i, $1 \leq i \leq 3m$, χρωματίζεται με κάποιο χρώμα από το σύνολο K. Έστω λοιπόν $c_m \in M$ το χρώμα που δίνεται στον κόμβο p_2, ο οποίος έχει βαθμό ίσο με $4m+b-1$. Το χρώμα όμως c_m γειτονεύει με άλλα $(m-1+b+3m+1)-(1+1) < 4m+b-1$ χρώματα. Γι αυτό το λόγο χρειαζόμαστε ακόμη ένα χρώμα για να χρωματιστεί ένας ακόμη γείτονας του κόμβου p_2. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία καταλήγουμε ότι ο κόμβος p_2 δε μπορεί να πάρει χρώμα από το σύνολο $B \cup \{m+b+1, m+b+2\}$ και γι αυτό παίρνει χρώμα από το σύνολο $K/\ c_{p_1}$.

Με επαγωγή στο i αποδεικνύεται ότι κάθε κόμβος $p_i \in P$, $2 \leq i \leq 3m$, παίρνει ένα χρώμα από το σύνολο $K/\ L$. L είναι το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $c_{p1}, c_{p2}, \ldots, c_{pi-1}$. Αυτά τα χρώματα έχουν ήδη ανατεθεί στους κόμβους p_j, $1 \leq j \leq i$. Αν c_k είναι ένα χρώμα από το σύνολο $K \cup \{m+b+1\}$ τότε δε μπορεί να ανατεθεί σε κανένα άλλο κόμβο του γραφήματος G. Και αυτό γιατί οποιοδήποτε ζεύγος χρωμάτων (c_k, j) με $1 \leq j \leq 4m+b$, υπάρχει ήδη στον αρμονικό χρωματισμό.

Τώρα θα δειχθεί ότι όλοι οι κόμβοι του συνόλου B' παίρνουν χρώματα από το σύνολο B. Αφού κάθε κόμβος $u_i \in B'$, $2 \leq i \leq b$ γειτονεύει με τουλάχιστο έναν κόμβο από το σύνολο B, δε μπορεί κανένας να πάρει το χρώμα $m+b+1$. Έστω $u \in B'$ ένας κόμβος με βαθμό d_u που παίρνει χρώμα από το σύνολο M, ενώ οι άλλοι κόμβοι παίρνουν χρώμα από το σύνολο B. Με $mb-d_u$ ορίζεται το πλήθος των ακμών του γραφήματος αυτού που έχουν το ένα άκρο χρωματισμένο με κάποιο χρώμα από το M που δεν έχουν εμφανιστεί ακόμα. Έπειτα mb είναι το πλήθος των ακμών που έχουν το ένα άκρο τους χρωματισμένο με κάποιο χρώμα από το σύνολο B που δεν έχουν εμφανιστεί ακόμα. Άρα το πλήθος των ζευγών που δεν έχουν εμφανιστεί ακόμα στο γράφημα G είναι $mb - d_u + mb - mb = mb - d_u$. Και το πλήθος των ακμών που δεν έχουν χρωματιστεί είναι mb, και οι ακμές $x_i y_j^i$, $1 \leq i \leq 3m, 1 \leq j \leq s(\alpha_i)$. Αυτό συνεπάγεται ότι χρειάζονται περισσότερα χρώματα. Γι αυτό το λόγο οι κόμβοι του συνόλου B' παίρνουν χρώματα από το σύνολο B. Με ίδια λογική καταλήγουμε ότι οι κόμβοι από το σύνολο M' παίρνουν χρώματα από το σύνολο M.

Τα ζεύγη των χρωμάτων (a,b), $a \in M, b \in B$ δεν έχουν εμφανιστεί ακόμα (όλα τα ζεύγη χρωμάτων πρέπει να εμφανιστούν), θα ανατεθούν αυτά τα ζεύγη χρωμάτων στις mb ακμές που έχουν και τα δυο άκρα τους αχρωμάτιστα. Αυτές είναι οι ακμές $x_i y_j^i, 1 \leq i \leq 3m, 1 \leq j \leq s(\alpha_i)$ όπου ο κόμβος x_i αντιστοιχεί στο α_i και ο κόμβος y_j^i στον j-οστό γείτονα του κόμβου x_i με βαθμό 2. Οι κόμβοι x_i δε μπορούν να χρωματιστούν από το σύνολο B. Αν χρωματιστούν, τότε οι $s(\alpha_i) > m$ αχρωμάτιστοι γείτονες y_j^i δε μπορούν να χρωματιστούν με m χρώματα από το σύνολο M. Γι αυτό λοιπόν οι κόμβοι x_i παίρνουν ένα χρώμα από το σύνολο M και οι y_j^i παίρνουν ένα χρώμα από το σύνολο B. Οι $m-1$ γείτονες του κόμβου p_1 που ανήκουν στο σύνολο M' έχουν ήδη χρωματιστεί με κάποιο χρώμα από το M. Έτσι για κάθε $4m+b-s(\alpha_{i-1})-i$ γείτονα καθενός $p_i, 1 \leq i \leq 3m$, με βαθμό 1 ανατίθενται διαφορετικά χρώματα. Αν c_{p_i} είναι το χρώμα του κόμβου p_i χρησιμοποιούνται διαφορετικά χρώματα από το σύνολο $M \cup B \cup K/\ \{c_{x_i}, F, L, c_{p_i}\}$. Όπου F είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα χρώματα που έχουν ήδη ανατεθεί στους $s(\alpha_{i-1})+1$ γείτονες του κόμβου p_i. Και $c_{x_i} \in M$ είναι το χρώμα που έχει ήδη ανατεθεί στον κόμβο x_i. Θα ισχύει επομένως $\alpha_i \in A_j$ αν και μόνο αν ο κόμβος x_i χρωματίζεται με το χρώμα $j \in M$. Επίσης ισχύει ότι $\sum_{\alpha \in A_j} s(\alpha) = b$ για κάθε j. Δηλαδή κάθε χρώμα j πρέπει να γειτονεύει με κάποια χρώματα από το σύνολο B. Και κάθε χρώμα από το σύνολο B αντιστοιχίζεται σε ακριβώς έναν κόμβο ο οποίος γειτονεύει με όλους τους κόμβους x_i που έχουν χρώμα j. Έχουμε λοιπόν μια σωστή 3-διαμέριση. Ότι το θεώρημα ισχύει προκύπτει από την NP-πληρότητα του 3-partition, γιατί ο μετασχηματισμός γίνεται εύκολα σε πολυωνυμικό χρόνο.

Θεώρημα 3.2. *Το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού είναι NP-πλήρες για τα συνεκτικά γραφήματα διαστημάτων (interval graphs) [2].*

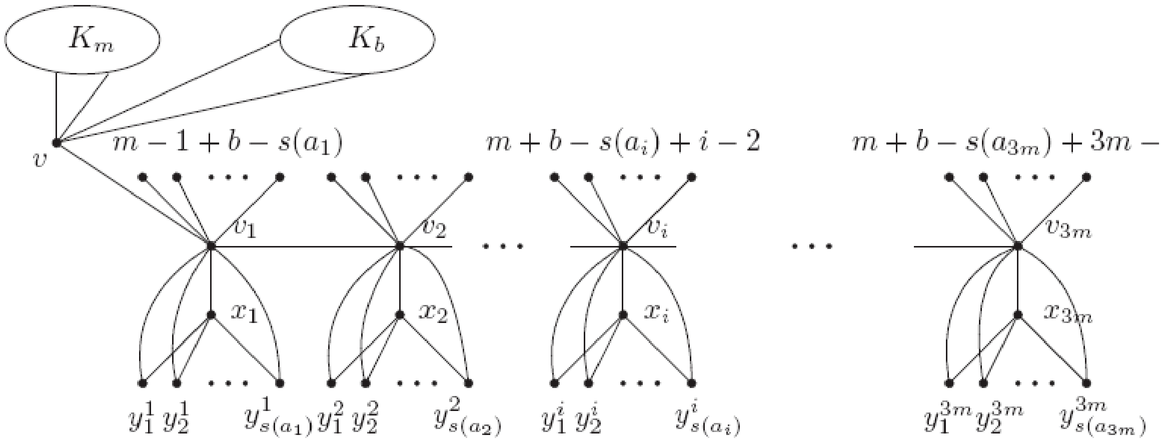
Παρακάτω παρατίθεται η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος.

Για να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού είναι NP-hard, θα χρησιμοποιηθεί ένας μετασχηματισμός από το πρόβλημα 3-partition. Έστω $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m}\}$ με 3m στοιχεία, ένας θετικός ακέραιος b και θετικοί ακέραιοι μεγέθους $s(\alpha_i)$ για κάθε $\alpha_i \in A$ τέτοιους ώστε να ισχύει $1/4B < s(\alpha_i) < 1/2B$ και $\displaystyle\sum_{\alpha_i \in A} s(\alpha_i) = mB$, $1 \leq i \leq 3m$. Για κάθε $\alpha_i \in A$ ισχύει $s(\alpha_i) > m$. Αν δεν ισχύει μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε όλα τα μεγέθη $s(\alpha_i)$ και b με το $m+1$. Παρακάτω περιγράφουμε την κατασκευή ενός γραφήματος το οποίο είναι ταυτόχρονα γράφημα διαστημάτων και μεταθετικό γράφημα. Έστω μια κλίκα με m κόμβους, μια κλίκα με b κόμβους και ένας κόμβος u, ο οποίος συνδέεται με όλους τους κόμβους από τις δυο κλίκες. Το γράφημα αυτό λέγεται G_1. Για κάθε $\alpha_i \in A$ κατασκευάζεται ένα δέντρο T_i βάθους 1 με $s(\alpha_i)$ φύλλα και με ονομασίες φύλλων $y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{s(\alpha_i)}^i$ για κάθε $\alpha_i \in A$. Κάθε δέντρο έχει για ρίζα το x_i και κάθε φύλλο συνδέεται με τη ρίζα, (έχει δηλαδή γείτονα τη ρίζα του δέντρου). Έτσι υπάρχουν $3m$ τέτοια δέντρα, τα $T_1, T_2, \ldots, T_{3m}$. Στη συνέχεια προστίθεται ένα σύνολο $P = [u_1, u_2, \ldots, u_{3m}]$ με $3m$ κόμβους και κάθε κόμβος u_i συνδέεται με όλους τους κόμβους κάθε δέντρου T_i με $1 \leq i \leq 3m$. Για κάθε κόμβο $u_i \in P$ προστίθενται $m-1+b-s(\alpha_i)+i-1$ κόμβοι και συνδέονται με τον κόμβο u_i. Το γράφημα λέγεται G_2. Το $G_1 \cup G_2$ είναι μη συνεκτικό. Για να γίνει συνεκτικό συνδέουμε με μια ακμή τους κόμβους u_1 και u. Έτσι προκύπτει το γράφημα G, το οποίο φαίνεται Σχήμα 3.5.[2]

Το G είναι γράφημα διαστημάτων και αυτό γιατί μια κλίκα μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα πλήθος διαστημάτων που έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο. Δυο κλίκες που μοιράζονται έναν κόμβο u μπορούν να αναπαρασταθούν σαν ένα πλήθος από διαστήματα τέτοια ώστε ένα από αυτά τα διαστήματα, το οποίο αντιστοιχεί στον κόμβο u, έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τα διαστήματα που αντιστοιχούν στους κόμβους κάθε κλίκας.

Οι κόμβοι του γραφήματος G μπορούν να τοποθετηθούν σε μια προς μια αντιστοιχία με ένα σύνολο διαστημάτων στη γραμμή των πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε δυο κόμβοι να γειτονεύουν στο G αν και μόνο αν τα αντίστοιχα διαστήματα τέμνονται.

[2]Το Σχημα 3.5 δημιουργήθηκε από τους Katerina Asdre, Kyriaki Ioannidou και Stavros D. Nikolopoulos και χρησιμοποιήθηκε από τη δημοσίευση με τίτλο: The harmonious coloring problem is NP-complete for interval and permutation graphs, Disc. Appl. Math. 155 (2007) 2377–2382.



Σχήμα 3.5: Γράφημα διαστημάτων και ταυτόχρονα μεταθετικό γράφημα.

Το πλήθος των ακμών του γραφήματος αυτού είναι:

$$\binom{m}{2}+\binom{b}{2}+m+b+3m+mb+3m+mb+3m(m-2)+2mb+\sum_{i=1}^{3} i=\binom{4m+b+1}{2} \quad (3.1)$$

Ο αρμονικός χρωματικός αριθμός δε μπορεί να είναι μικρότερος από $4m+b+1$ και αν είναι ίσος με $4m+b+1$ τότε για κάθε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων i,j με $1 \leq i$, $j \leq 4m+b+1$ υπάρχει μια μοναδική ακμή με τα άκρα της να είναι χρωματισμένα με τα χρώματα i και j. Προκύπτει έτσι ότι έχουμε έναν ακριβή χρωματισμό του γραφήματος G με κ χρώματα.

Θα αποδειχθεί λοιπόν χρησιμοποιώντας έναν μετασχηματισμό από το πρόβλημα 3-partition ότι ο αρμονικός χρωματικός αριθμός του γραφήματος G είναι μικρότερος ή ίσος με $4m+b+1$ αν και μόνο αν το σύνολο A μπορεί να διαμεριστεί σε m σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_m$ τέτοια ώστε να ισχύει $\sum_{\alpha \in A_j} s(\alpha) = b$ για οποιοδήποτε j με $1 \leq j \leq m$.

($\Leftarrow$) Έστω μια 3-διαμέριση του συνόλου A σε $A_1, A_2, \ldots, A_m$ σύνολα τέτοια ώστε για κάθε j να ισχύει $\sum_{\alpha \in A_j} s(\alpha) = b$. Οι κόμβοι της πρώτης κλίκας χρωματίζονται με τα χρώματα $1, 2, \ldots, m$ και οι κόμβοι της δεύτερης κλίκας με τα χρώματα $m+1, m+2, \ldots, m+b$. Ο κόμβος u χρωματίζεται με το χρώμα $m+b+1$. Έστω M το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $1, 2, \ldots, m$ και B το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $m+1, m+2, \ldots, m+b$ και K το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $m+b+2, m+b+3, \ldots, 4m+b+1$. Αν $\alpha_i \in A_j$ τότε ο κόμβος που αντιστοιχεί στο α_i παίρνει το χρώμα j. Κάθε χρώμα $j \in M$ αντιστοιχίζεται σε 3 κόμβους x_i, οι οποίοι αντιστοιχούν σε $3\alpha_i$ που έχουν όλα μαζί ακριβώς b γείτονες βαθμού 2. Καθένας από τους b γείτονες παίρνει ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο B και κάθε κόμβος u_i από το σύνολο P παίρνει ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο K. Ο κόμβος u_i συνδέεται με τους κόμβους u_2, u και με $m+b$ άλλους κόμβους, ενώ ο u_{3m} συνδέεται με τον κόμβο u_{3m-1} και με $m+b+3m$ ακόμα κόμβους. Πρέπει έπειτα να χρωματιστούν οι υπόλοιποι $m-1+b-s(\alpha_i)+i-1$ γείτονες κάθε κόμβου $u_i, 1 \leq i \leq 3m$.

Οι $m-1$ γείτονες του κόμβου u_i παίρνουν ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $M/\ c_i$, όπου c_i είναι το χρώμα που ανατέθηκε μόλις πριν στον κόμβο x_i που αντιστοιχεί στο α_i. Οι $b-s(\alpha_i)$ γείτονες του κόμβου u_i παίρνουν ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $B/\ c_i$, όπου c_i είναι το σύνολο των χρωμάτων που μόλις πριν ανατέθηκαν στους $s(\alpha_i)$ γείτονες του κόμβου x_i. Οι υπόλοιποι $i-1$ γείτονες του κόμβου $u_i,\ 3 \leq i \leq 3m$ παίρνουν το χρώμα $m+b+1$ και τα χρώματα που ανατέθηκαν στους κόμβους $u_j,\ 1 \leq j \leq i-2$. Για τους $m+b-s(\alpha_2)$ γείτονες του κόμβου u_2 χρησιμοποιείται το χρώμα $m+b+1$ και τα χρώματα από τα M και B, ενώ οι $m-1+b-s(\alpha_1)$ γείτονες του κόμβου u_1 παίρνουν χρώματα από τα M και B. Υπάρχει λοιπόν ένας αρμονικός χρωματισμός του γραφήματος G με $4m+b+1$ χρώματα και άρα ο αρμονικός αριθμός του γραφήματος αυτού είναι $4m+b+1$.

($\Rightarrow$) Έστω ο αρμονικός αριθμός του γραφήματος είναι μικρότερος ή ίσος με $4m+b+1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι οι m κόμβοι της πρώτης κλίκας παίρνουν διαφορετικά χρώματα από το σύνολο M, ενώ οι b κόμβοι της δεύτερης κλίκας παίρνουν διαφορετικά χρώματα από το σύνολο B. Ο κόμβος u χρωματίζεται με το χρώμα $m+b+1$, αφού γειτονεύει με όλους τους κόμβους από τα δυο σύνολα M και B. Ο κόμβος u_{3m} είναι ο κόμβος με το μέγιστο βαθμό που είναι $4m+b$. Επομένως πρέπει να πάρει ένα χρώμα από το K. Αν πάρει χρώμα από το M τότε κανένας γείτονας του δεν μπορεί να πάρει χρώμα από το M και δεν μπορούν να χρωματιστούν $4m+b$ κόμβοι χρησιμοποιώντας μόνο $4m+b+1-m$ χρώματα. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ο κόμβος u_{3m} δε μπορεί να χρωματιστεί παίρνοντας χρώμα από το B ή το χρώμα $m+b+1$. Γι αυτό χωρίς βλάβη της γενικότητας ο κόμβος αυτός παίρνει το χρώμα $4m+b+1$. Οι γείτονες του χρωματίζονται με χρώματα του συνόλου $M \cup B \cup m+b+1 \cup K/\ \{4m+b+1\}$. Ο κόμβος $u_{3m}-1$ παίρνει ένα χρώμα από το σύνολο $K/\ \{4m+b+1\}$. Έστω ότι παίρνει το χρώμα $4m+b$. Προκύπτει ότι δε μπορεί να πάρει το χρώμα $M \cup B \cup \{m+b+1\} \cup \{4m+b+1\}$. Το χρώμα $4m+b+1$ δε μπορεί να δοθεί σε κανέναν άλλον κόμβο του G. Γιατί οποιοδήποτε ζεύγος χρωμάτων $(4m+b+1, j), 1 \leq j \leq 4m+b$ εμφανίζεται ήδη στον αρμονικό χρωματισμό.

Με επαγωγή στο i αποδεικνύεται ότι το ίδιο ισχύει για όλους τους κόμβους $u_i \in P, 1 \leq i \leq 3m-2$. Δηλαδή ο κόμβος u_i παίρνει ένα χρώμα από το σύνολο $K/\ L$. L είναι το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $m+b+1+i+1, m+b+1+i+2, \ldots, 4m+b+1$, τα οποία έχουν ανατεθεί ήδη στους κόμβους $u_j,\ 1 \leq j \leq 3m$. Επειδή όλα τα ζεύγη χρωμάτων πρέπει να εμφανιστούν και τα ζεύγη $(\alpha, b), \alpha \in M, b \in B$ δεν έχουν εμφανιστεί ακόμα, θα ανατεθούν αυτά στις mb ακμές που έχουν και τα δυο άκρα αχρωμάτιστα. Αυτές οι ακμές είναι οι $x_i y_j^i, 1 \leq i \leq 3m, 1 \leq j \leq s(\alpha_i)$, όπου ο κόμβος x_i αντιστοιχεί στο α_i και ο κόμβος y_j^i αντιστοιχεί στον j-οστό γείτονα του κόμβου x_i με βαθμό ίσο με 2. Οι κόμβοι x_i δε χρωματίζονται από το σύνολο B, διαφορετικά οι $s(\alpha_i) > m$ αχρωμάτιστοι γείτονες y_j^i δε μπορούν να χρωματιστούν με m χρώματα από το σύνολο M. Έτσι οι κόμβοι x_i παίρνουν ένα χρώμα από το σύνολο M και οι κόμβοι y_j^i από το σύνολο B. Οι $m-1+b-s(\alpha_i)+i-1$ γείτονες κάθε κόμβου $u_i,\ 1 \leq i \leq 3m$, είναι οι κόμβοι που δεν έχουν χρωματιστεί. Για να χρωματιστούν οι $m-1+b-s(\alpha_i)$ κόμβοι χρησιμοποιούνται διαφορετικά χρώματα από το σύνολο $(MUB)/\ F$ (F είναι το σύνολο με χρώματα που έχουν ήδη ανατεθεί προηγουμένως στους $s(\alpha_i)+1$ γείτονες του κόμβου u_i). Για να χρωματιστούν οι $i-1$ αχρωμάτιστοι γείτονες του κόμβου u_i, $i > 1$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο χρώματα του συνόλου $K/\ L/\ \{m+b+1+i, m+b+i\}$ γιατί τα μοναδικά ζεύγη χρωμάτων που δεν χρησιμοποιήθηκαν ήδη είναι $\{m+b+1+i, j\}$ με $m+b+1 \leq j \leq m+b+1+i-2$. Θα ισχύει λοιπόν $\alpha_i \in A_j$ αν και μόνο αν ο κόμβος x_i χρωματίζεται με το χρώμα $j \in M$. Ισχύει $\sum s(\alpha) = b$ για κάθε j. Κάθε χρώμα j πρέπει να γειτονεύει με κάποια $\alpha \in A_j$ χρώματα του B και κάθε χρώμα του B θα αντιστοιχεί σε ακριβώς έναν κόμβο που είναι γείτονας με όλους τους κόμβους x_i με χρώμα j. Υπάρχει έτσι ένα σωστό 3-partition.

Το θεώρημα ισχύει από την NP-πληρότητα του 3-partition, αφού ο μετασχηματισμός μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο. Το γράφημα G που περιγράψαμε αποδεικνύεται ότι είναι και μεταθετικό γράφημα. Το γράφημα G είναι γράφημα διαστημάτων αν και μόνο αν είναι τριγωνικό το γράφημα G και το $\bar{G}$ είναι μεταβατικό γράφημα. Το G είναι και μεταβατικό γράφημα. Αυτό ισχύει διότι το G έχει μια άκυκλη μεταβατική κατεύθυνση. Εφόσον τα G και $\bar{G}$ είναι μεταβατικά γραφήματα έπεται ότι το G είναι μεταθετικό γράφημα [17]. Άρα ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.3. *Το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού είναι NP-πλήρες για τα συνεκτικά μεταθετικά γραφήματα (permutation graphs).*

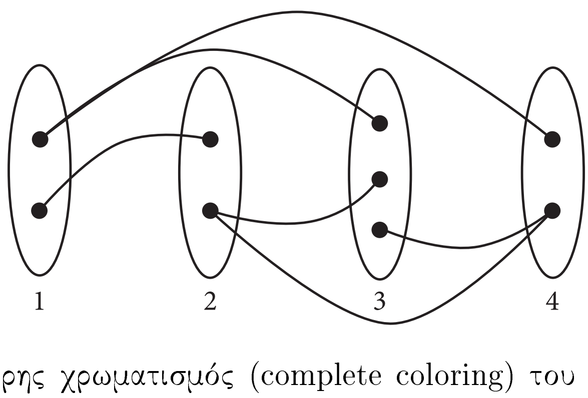
Κεφάλαιο 4

Αχρωματικός Αριθμός

4.1 Αχρωματικός Αριθμός

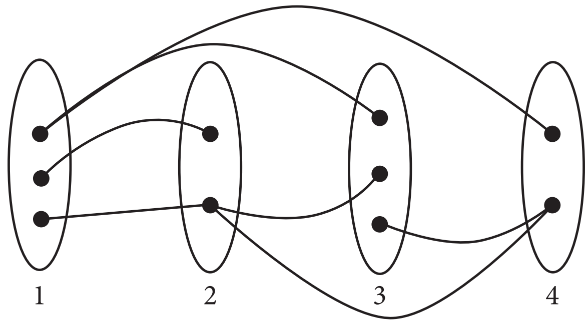
Στόχος μας είναι να βρούμε το όριο στο οποίο το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού για τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων που μελετάμε μετατρέπεται από πολυωνυμικά επιλύσιμο σε μη πολυωνυμικά επιλύσιμο.

Ο αχρωματικός αριθμός $\psi(G)$ είναι ο μέγιστος αριθμός κ, για τον οποίο το γράφημα επιδέχεται έναν πλήρη χρωματισμό. Έστω $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ τα χρώματα ενός κατάλληλου χρωματισμού X των κορυφών ενός γραφήματος G. Ο χρωματισμός X λέγεται πλήρης (complete coloring) αν για κάθε ζεύγος χρωμάτων (x_i, x_j) υπάρχουν δυο κορυφές που είναι γειτονικές και τους έχουν ανατεθεί αυτά τα δύο χρώματα (Σχήμα 4.1). Συνοψίζοντας



Σχήμα 4.1: Ένας πλήρης χρωματισμός (complete coloring) του γραφήματος G. Όπου $1, 2, 3, 4$ είναι τα χρώματα.

θέλουμε τον μέγιστο αριθμό χρωμάτων και μια ανάθεση αυτών τέτοια ώστε οποιεσδήποτε δυο διαφορετικές κλάσεις χρωματισμού να μοιράζονται τουλάχιστον μια ακμή (Σχήμα 4.2). Έχει αποδειχθεί ότι το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού είναι NP-hard. Αποδείχθηκε



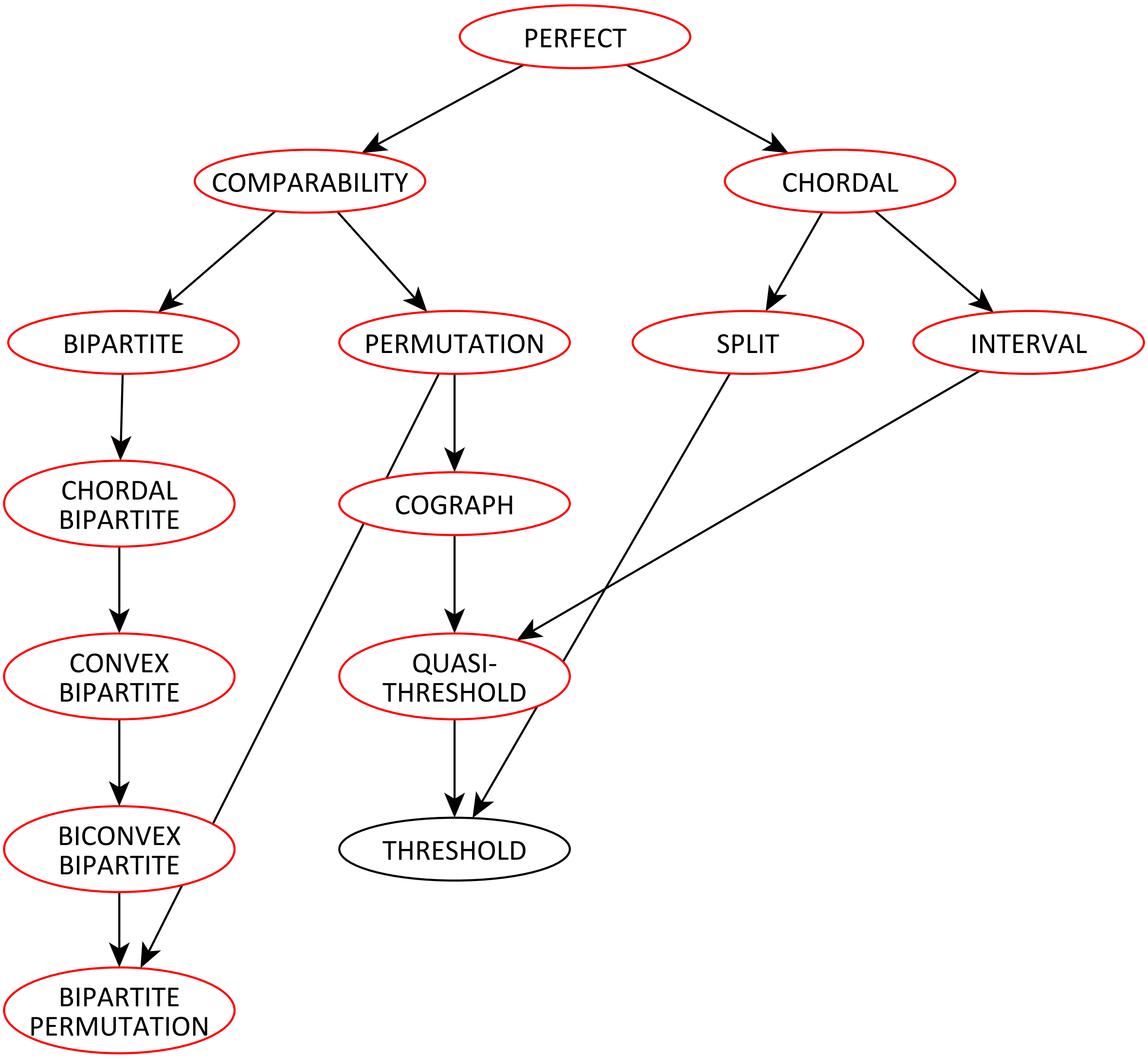
Σχήμα 4.2: Ένας αχρωματικός χρωματισμός του γραφήματος G.

στην εργασία [15] του Farber et al. ότι το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού είναι για διμερή γραφήματα (bipartite graphs) NP-hard. Ο Bodlaender στην εργασία του [5] απέδειξε ότι το πρόβλημα είναι NP-hard και για γραφήματα που είναι συμπληρωματικά παραγόμενα (cographs) και γραφήματα διαστημάτων (interval graphs) ταυτόχρονα. Μελετήθηκε το πρόβλημα για τα διμερή γραφήματα και για κάποιες υποκλάσεις των διμερή γραφημάτων, τα κυρτά διμερή γραφήματα (convex bipartite graphs) και τα μη συνεκτικά διμερή μεταθετικά γραφήματα (bipartite permutation graphs).

Αποδείχθηκε ότι το πρόβλημα είναι NP-hard για τα συνεκτικά διμερή μεταθετικά γραφήματα (bipartite permutation graphs) [3]. Για το λόγο αυτό είναι και τα biconvex bipartite γραφήματα NP-hard, επειδή είναι υπερκλάση των διμερή μεταθετικών γραφημάτων. Ακόμα αποδεικνύεται ότι και για την κλάση των quasi-threshold γραφημάτων το πρόβλημα είναι NP-hard. Τέλος θα δοθεί ένας γραμμικού χρόνου πολυωνυμικός αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος για τα κατωφλικά γραφήματα (threshold graphs). Αποδεικνύοντας την NP-πληρότητα του προβλήματος για την κλάση των quasi-threshold γραφημάτων, αποδεικνύεται και η NP-πληρότητα του προβλήματος για τα τριγωνικά γραφήματα (chordal graphs) και τα γραφήματα διαστημάτων (interval graphs) γιατί είναι υπερκλάσεις των quasi-threshold γραφημάτων.

Το Σχήμα 4.3 αναπαριστά την πολυπλοκότητα του προβλήματος εύρεσης του αχρωματικού αριθμού για γραφήματα που ανήκουν στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων.

Οι κόκκινες ελλείψεις αντιστοιχούν στις κλάσεις όπου το πρόβλημα είναι NP-πλήρες, ενώ οι μαύρες αντιστοιχούν σε εκείνες τις κλάσεις όπου το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P. Στο παρακάτω κεφάλαιο θα δείξουμε τις αναγωγές που αποδεικνύουν ότι το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού είναι NP-πλήρες για τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων.



Σχήμα 4.3: Αναπαράσταση της πολυπλοκότητας του προβλήματος εύρεσης του αχρωματικού αριθμού για γραφήματα που ανήκουν στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων. Το πρόβλημα στις κλάσεις με κόκκινη έλλειψη είναι NP-πλήρες ενώ στις κλάσεις με μαύρη έλλειψη είναι πολυωνυμικό.

4.2 Αποτελέσματα NP-πληρότητας

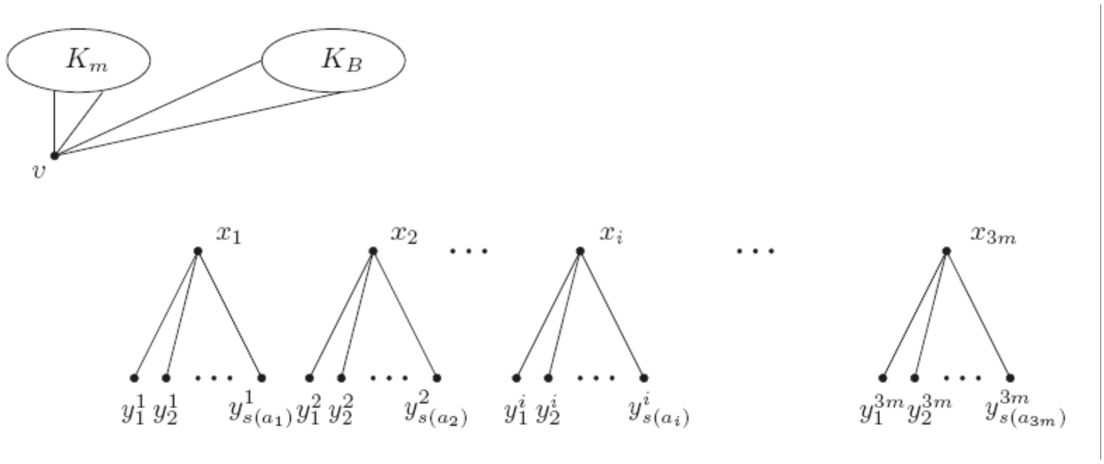
Θα αποδειχθεί ότι το πρόβλημα εύρεσης του αχρωματικού αριθμού είναι NP-πλήρες για τα μη συνεκτικά γραφήματα που είναι συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα και γραφήματα διαστημάτων ταυτόχρονα. Προκύπτει λοιπόν το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 4.1. *Το πρόβλημα εύρεσης του αχρωματικού αριθμού είναι NP-πλήρες για τα μη συνεκτικά γραφήματα που είναι συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα (cographs) και γραφήματα διαστημάτων (interval graphs) ταυτόχρονα [5].*

Παρακάτω παρατίθεται η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος.

Για να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα εύρεσης του αχρωματικού αριθμού είναι NP-hard, θα χρησιμοποιηθεί ένας μετασχηματισμός από το πρόβλημα 3-partition. Έστω ένα σύνολο

$A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m}\}$ με $3m$ στοιχεία, ένας θετικός ακέραιος B και θετικοί ακέραιοι μεγέθους $s(\alpha_i)$ για κάθε $\alpha_i \in A$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $1/4B < s(\alpha_i) \leq 1/2B$ και $\sum_{\alpha_i \in A} s(\alpha_i) = mB$ με $1 \leq i \leq 3m$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\alpha_i \in A$ ισχύει $s(\alpha_i) > m$. Αν δεν ισχύει μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε όλα τα μεγέθη $s(\alpha_i)$ και B με το $m+1$. Έπειτα κατασκευάζεται ένα μη συνεκτικό ταυτόχρονα γράφημα διαστημάτων (interval graph) και συμπληρωματικά παραγόμενο γράφημα (cograph). Έστω μια κλίκα με m κόμβους, μια κλίκα με B κόμβους και ένας κόμβος u, ο οποίος συνδέεται με όλους τους κόμβους από τις δυο κλίκες. Για κάθε $\alpha_i \in A$ κατασκευάζεται ένα δέντρο T_i βάθους 1 με $s(\alpha_i)$ φύλλα και με ονομασίες φύλλων $y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{s(\alpha_i)}^i$. Κάθε δέντρο έχει για ρίζα το x_i και κάθε φύλλο συνδέεται με τη ρίζα, (έχει δηλαδή γείτονα τη ρίζα του δέντρου). Έτσι υπάρχουν $3m$ τέτοια δέντρα, τα $T_1, T_2, \ldots, T_{3m}$. Το γράφημα που προκύπτει φαίνεται στο Σχήμα 4.4.



Σχήμα 4.4: Ένα μη συνεκτικό ταυτόχρονα γράφημα διαστημάτων (interval graph) και συμπληρωματικά παραγόμενο γράφημα (cograph).

Το γράφημα δεν περιέχει ένα μονοπάτι P_4, δηλαδή ένα μονοπάτι με τέσσερις κόμβους σαν επαγόμενο υπογράφημα, άρα το γράφημα G είναι συμπληρωματικά παραγόμενο γράφημα (cograph). Ένα δέντρο με βάθος 1 αναπαριστάται σαν ένα γράφημα διαστημάτων (interval graph). Κάθε φύλλο αναπαρίσταται με ένα μικρό διάστημα, χωρίς να τέμνονται τα αντίστοιχα διαστήματα σε κάποιο σημείο. Κάθε ρίζα του δέντρου αντιστοιχίζεται με ένα μεγαλύτερο διάστημα, το οποίο περιλαμβάνει όλα τα διαστήματα που αντιστοιχούν στα φύλλα της ρίζας. Μια κλίκα αναπαρίσταται από ένα πλήθος διαστημάτων που μοιράζονται ανά δυο ένα κοινό σημείο. Από την ένωση γραφημάτων διαστημάτων προκύπτει γράφημα διαστημάτων. Έπειτα αποδεικνύεται ότι ο αχρωματικός αριθμός είναι μεγαλύτερος ή ίσος από $m+B+1$. Και αυτό ισχύει αν και μόνο αν το σύνολο A μπορεί να διαμεριστεί στα εξής m σύνολα: $A_1, A_2, \ldots, A_m$ τέτοια ώστε για κάθε j να ισχύει $\displaystyle\sum_{\alpha \in A_j} s(\alpha) = B$. Το πλήθος των ακμών του γραφήματος αυτού είναι:

$$\binom{m}{2} + \binom{B}{2} + m + B + \sum_{i=1}^{3m} s(\alpha_i) = \binom{m+B+1}{2} \tag{4.1}$$

Όπως αναφέρθηκε ο αχρωματικός αριθμός δε μπορεί να είναι μεγαλύτερος από $m+B+1$ γιατί για κάθε σωστό χρωματισμό του γραφήματος G και για κάθε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων i, j πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή που τα άκρα της θα έχουν τα χρώματα i και j. Αν ο αχρωματικός αριθμός είναι ίσος με $m+B+1$, τότε για κάθε σωστό χρωματισμό που χρησιμοποιεί $m+B+1$ χρώματα θα υπάρχει για κάθε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων $i, j \in \{1, 2 \ldots, m+B+1\}$ μια μοναδική ακμή με άκρα της χρωματισμένα με τα χρώματα i και j.

Έστω μια διαμέριση του συνόλου A σε m σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_m$ τέτοια ώστε για κάθε j να ισχύει $\sum_{\alpha \in A_j} s(\alpha) = B$. Θα χρωματιστεί σωστά το γράφημα G με $m+B+1$ χρώματα. Οι κόμβοι της πρώτης κλίκας χρωματίζονται με τα χρώματα $1, 2, \ldots, m$ και οι κόμβοι της δεύτερης κλίκας με τα χρώματα $m+1, m+2, \ldots, m+B$. Ο κόμβος u χρωματίζεται με το χρώμα $m+B+1$. Αν $\alpha_i \in A_j$ τότε η ρίζα του i-οστού δέντρου που έχει $s(\alpha_i)$ φύλλα παίρνει το χρώμα j. Κάθε χρώμα $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ αντιστοιχίζεται στη ρίζα τριών δέντρων. Και τα τρία δέντρα συνολικά έχουν ακριβώς B φύλλα. Κάθε φυλλο από τα B φύλλα παίρνει διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $\{m+1, m+2, \ldots, m+B\}$. Έτσι προκύπτει ένας σωστός χρωματισμός του γραφήματος G με $m+B+1$ χρώματα. Άρα ο αχρωματικός αριθμός του γραφήματος G είναι $m+B+1$.

Έστω ότι ο αχρωματικός αριθμός του γραφήματος G είναι μεγαλύτερος ή ίσος από $m+B+1$. Άρα θα υπάρχει ένας σωστός χρωματισμός του γραφήματος αυτού με $m+B+1$ χρώματα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι ο κόμβος u χρωματίζεται με το χρώμα $m+B+1$. Ο κόμβος u έχει σαν γείτονές του άλλους $m+B$ κόμβους. Γι αυτό το λόγο κανένας άλλος κόμβος στο γράφημα αυτό δεν παίρνει το χρώμα $m+B+1$. Ακόμα όλοι οι γείτονες του u πρέπει να έχουν διαφορετικό χρώμα από τον κόμβο u. Γι αυτό το λόγο υποθέτουμε ότι οι κόμβοι της πρώτης κλίκας χρωματίζονται με τα χρώματα $1, 2, \ldots, m$ και οι κόμβοι της δεύτερης κλίκας με τα χρώματα $m+1, m+2, \ldots, m+B$. Η ρίζα του δέντρου δε μπορεί να χρωματιστεί με χρώμα από το σύνολο $\{m+1, m+2, \ldots, m+B\}$. Αν γινόταν αυτό οι κόμβοι με το χρώμα αυτό θα είχαν ως γείτονες περισσότερους από $m+B$ κόμβους. Αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα περισσότερες από δυο ακμές να έχουν τα ίδια χρώματα στα άκρα τους. Έστω ότι $\alpha_i \in A_j$ αν και μόνο αν η ρίζα του i-οστού δέντρου που έχει $s(\alpha_i)$ φύλλα χρωματίζεται με το χρώμα j και για κάθε j ισχύει: $\sum_{\alpha \in Aj} s(\alpha) = B$. Κάθε χρώμα j πρέπει να γειτνιάζει με τα χρώματα από το σύνολο $\{m+1, m+2, \ldots, m+B\}$ που αντιστοιχούν στις ακμές των δέντρων. Κάθε ένα από τα B χρώματα πρέπει να αντιστοιχεί σε ακριβώς ένα παιδί της ρίζας ενός δέντρου, η οποία χρωματίζεται με το χρώμα j. Έχουμε λοιπόν μια σωστή διαμέριση. Το θεώρημα ισχύει λόγω της NP-πληρότητας του 3-partition, αφού ο μετασχηματισμός γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Θεώρημα 4.2. *Το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού είναι NP-πλήρες για τα συνεκτικά γραφήματα που είναι ταυτόχρονα γράφημα διαστημάτων (interval graphs) και συμπληρωματικά παραγόμενο γράφημα (cograph).*

Παρατίθεται παρακάτω η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος.

Ο μετασχηματισμός προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα που αναφέρεται στα μη συνεκτικά γραφήματα. Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ (γράφημα διαστημάτων και ταυτόχρονα συμπληρωματικά παραγόμενο γράφημα) το οποίο έχει αχρωματικό αριθμό ίσο με K. Έστω $G*$ το γράφημα που προκύπτει αν προσθέσουμε τον κόμβο u_0 στο γράφημα G. Ο κόμβος u_0 συνδέεται με όλους τους άλλους κόμβους του γραφήματος G. Επειδή ο κόμβος u_0 αντιστοιχεί σε ένα διάστημα που περιλαμβάνει όλα τα άλλα διαστήματα, το γράφημα $G*$ που προκύπτει είναι γράφημα διαστημάτων (interval graph). Ακόμα επειδή το γράφημα G δεν περιέχει επαγόμενο υπογράφημα P_4 και κανένα επαγόμενο υπογράφημα του $G*$ που περιέχει τον κόμβο u_0 δε μπορεί να είναι ισομορφικό με το P_4, εφόσον ο κόμβος u_0 πρέπει να είναι γείτονας με καθέναν από τους άλλους 3 κόμβους από το επαγόμενο υπογράφημα, το γράφημα $G*$ είναι συμπληρωματικά παραγόμενο γράφημα (cograph). Άρα το γράφημα $G*$ είναι συνεκτικό, αφού κάθε κόμβος που δεν είναι ο κόμβος u_0 γειτονεύει με τον κόμβο u_0.

Ο αχρωματικός αριθμός του γραφήματος $G*$ είναι ακριβώς $K+1$. Αυτό ισχύει γιατί ένας σωστός χρωματισμός του γραφήματος G με K χρώματα μπορεί να επεκταθεί σε έναν σωστό χρωματισμό του $G*$ με $K+1$ χρώματα, αν χρωματιστεί ο κόμβος u_0 με το $K+1$ χρώμα. Προκύπτει λοιπόν ότι ο αχρωματικός αριθμός του γραφήματος $G*$ είναι τουλάχιστον ίσος με $K+1$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας σωστός χρωματισμός f του γραφήματος $G*$ με κ χρώματα. Κανένας κόμβος δε μπορεί να έχει το ίδιο χρώμα με τον κόμβο u_0. Αν εφαρμοστεί ο χρωματισμός f στο γράφημα G, έστω f' ο χρωματισμός που προκύπτει. Ο χρωματισμός f' είναι ένας σωστός χρωματισμός του γραφήματος G και χρησιμοποιεί $\kappa - 1$ χρώματα. Από εδώ συνεπάγεται ότι ο αχρωματικός αριθμός του γραφήματος $G*$ είναι το πολύ ίσος με $K+1$.

Αποδείχθηκε ότι υπάρχει ένας πολυωνυμικού χρόνου μετασχηματισμός από την περίπτωση των μη συνεκτικών γραφημάτων προς την περίπτωση των συνεκτικών γραφημάτων. Έτσι λοιπόν για τα συνεκτικά γραφήματα που είναι ταυτόχρονα γράφημα διαστημάτων και συμπληρωματικά παραγόμενο γράφημα, το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού είναι NP-πλήρες.

Τα συνεκτικά γραφήματα που είναι ταυτόχρονα interval και cograph είναι επίσης quasi-threshold γραφήματα, και αυτό γιατί δεν περιέχουν επαγόμενο υπογράφημα ισόμορφο του P_4 ή του C_4. Άρα ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.3. *Το πρόβλημα εύρεσης του αχρωματικού αριθμού είναι NP-πλήρες για τα συνεκτικά quasi-threshold γραφήματα.*

Αποδεικνύεται ότι αν G είναι ένα γράφημα με ακριβώς κ ανά δυο συνδυασμούς ακμών τότε ένας κατάλληλος χρωματισμός των κόμβων του γραφήματος G με κ χρώματα είναι αχρωματικός αν και μόνο αν το γράφημα G έχει αρμονικό χρωματισμό. Ακόμα αν το γράφημα G έχει ακμές ίσες με κ ανά δυο συνδυασμούς τότε ισχύει ότι $\psi(G) = \kappa$ και $h(G) = \kappa$. Σύμφωνα με τις αποδείξεις που ισχύουν για το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού ισχύει το ακόλουθο θεώρημα για το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού.

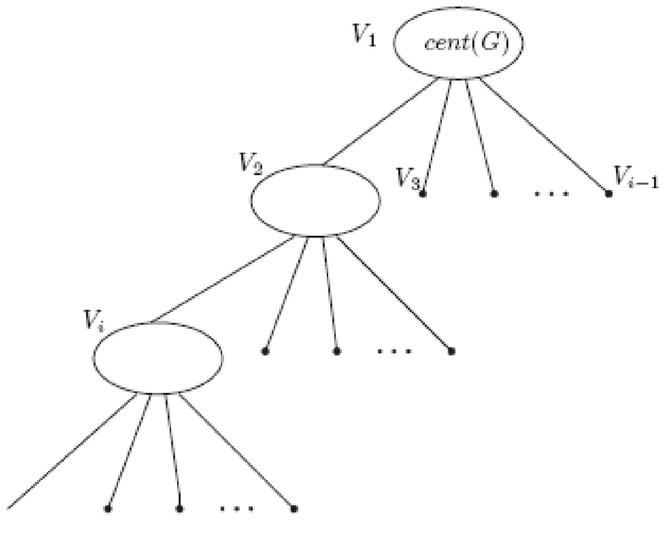
Θεώρημα 4.4. *Το πρόβλημα εύρεσης του αχρωματικού αριθμού είναι NP-πλήρες για τα συνεκτικά διμερή μεταθετικά γραφήματα (bipartite permutation graphs) [3].*

4.3 Πολυωνυμική λύση για το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού για την κλάση των κατωφλικών γραφημάτων (threshold graphs) και θα περιγράψουμε έναν γραμμικό αλγόριθμο που στηρίζεται στις ιδιότητες της κλάσης των κατωφλικών γραφημάτων [3].

Πρώτη φορά οι Chvatal και Hammer το 1977 παρουσίασαν την έννοια των κατωφλικών γραφημάτων. Κατωφλικό λέγεται ένα γράφημα G αν και μόνο αν το γράφημα αυτό δεν περιέχει επαγόμενα υπογραφήματα $2K_2, P_4$ ή C_4. Σε μια άλλη εργασία [15] υπάρχει ένας άλλος ορισμός. Κατωφλικό λέγεται ένα γράφημα G αν υπάρχει μια διαμέριση του συνόλου $V(G)$ σε δυο ξένα μεταξύ τους σύνολα K, I και μια διάταξη $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ των κόμβων του συνόλου I, τέτοια ώστε το σύνολο K να επάγει μια κλίκα στο γράφημα G, ενώ το σύνολο I να είναι ένα ευσταθές σύνολο κόμβων και να ισχύει ότι το $N_{G(u_1)} \subset N_{G(u_2)} \subset \ldots \subset N_{G(u_n)}$. Η διαμέριση του συνόλου $V(G)$ που ικανοποιεί τα παραπάνω λέγεται (K, I) διαμέριση του γραφήματος G.

Η κλάση των κατωφλικών γραφημάτων (threshold graph) είναι υποκλάση των quasi-threshold γραφημάτων. Για ένα κατωφλικό γράφημα G υπάρχει μια δενδρική αναπαράσταση, το cent-tree $T_C(G)$, η οποία έχει τις ιδιότητες του γραφήματος. Το $T_C(G)$ είναι παρόμοιο με το cent-tree ενός quasi-threshold γραφήματος. Εφόσον κάποιο κατωφλικό γράφημα G δεν περιέχει κάποιο επαγόμενο υπογράφημα ισόμορφο του $2K_2$, κάθε εσωτερικός κόμβος V_i έχει $K_i \geq 2$ παιδιά, όπου το πολύ ένα από αυτά είναι εσωτερικός κόμβος, ενώ τα υπόλοιπα K_{i-1} παιδιά είναι φύλλα που περιέχουν μόνο έναν κόμβο. Παρακάτω φαίνεται η δενδρική αναπαράσταση του cent-tree $T_C(G)$ ενός κατωφλικού γραφήματος (Σχήμα 4.5).



Σχήμα 4.5: Η δενδρική αναπαράσταση του cent-tree $T_C(G)$ ενός κατωφλικού γραφήματος.

Το cent-tree $T_C(G)$ αναπαριστά μια (K, I) διαμέριση του γραφήματος G. Η αλλιώς ισοδύναμα δοθέντος μιας (K, I) διαμέρισης του γραφήματος G κατασκευάζεται το cent-tree $T_C(G)$. Με τη χρήση του cent-tree $T_C(G)$ επιτυγχάνεται λύση γραμμικού χρόνου για το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού στην κλάση των κατωφλικών γραφημάτων.

Αλγόριθμος 2 Αχρωματικός αριθμός

1. Κατασκευή του $T_C(G)$.
2. Χρωματισμός των κόμβων του πιο αριστερού μονοπατιού (κλίκα) του $T_C(G)$ με διαφορετικά χρώματα από το σύνολο $C = \{1, 2, \ldots, \psi(G)\}$.
3. Χρωματισμός του κάθε κόμβου που είναι φύλλο του $T_C(G)$ με χρώμα που έχει ήδη δοθεί στον κόμβο αδερφό που ανήκει στο πιο αριστερό μονοπάτι του $T_C(G)$ και περιέχει μια κλίκα.
4. Αν υπάρχουν απομονωμένοι κόμβοι (γράφημα μη συνεκτικό) χρωματίζονται από το σύνολο C.

Οι κόμβοι V_i του πιο αριστερού μονοπατιού του δέντρου δημιουργούν μια κλίκα. Επομένως κάθε κόμβος $u_i \in V(G)$ πρέπει να είναι χρωματισμένος με ένα διαφορετικό χρώμα. Έστω n' το πλήθος των κόμβων του πιο αριστερού μονοπατιού του $T_C(G)$, τότε οι κόμβοι του γραφήματος θα χρωματιστούν από το σύνολο $C = \{1, 2, \ldots, n'\}$. Για τον αχρωματικό αριθμό ισχύει $\psi(G) = n'$. Έπειτα έστω $C' \subset C$ το σύνολο των χρωμάτων που δίνονται στο πιο αριστερό φύλλο του $T_C(G)$ και έστω $c'_i \in C'$. Αν $n'+1$ ένα καινούριο χρώμα που δίνεται σε έναν κόμβο του $T_C(G)$ που δεν έχει χρωματιστεί ακόμα, τότε το ζεύγος $(n'+1, c'_i)$ δε μπορεί να εμφανιστεί. Άρα για να δοθούν χρώματα στα φύλλα του $T_C(G)$ που δεν έχουν χρωματιστεί, χρησιμοποιείται το σύνολο C έτσι ώστε κανένας κόμβος $u_i \in V(G)$ να μη χρωματιστεί με χρώμα που έχει δοθεί σε κάποιον προηγούμενό του στο πιο αριστερό μονοπάτι. Ακόμα ισχύει $\psi(G) = \omega(G)$, όπου $\omega(G)$ ο αριθμός της μέγιστης κλίκας. Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός της μέγιστης κλίκας ισούται με τον χρωματικό αριθμό. Αυτό προκύπτει από τις ιδιότητες του $T_C(G)$. Παραπάνω δίνεται ένας γραμμικός αλγόριθμος υπολογισμού του αχρωματικού αριθμού για κατωφλικά γραφήματα. Σαν είσοδο ο αλγόριθμος δέχεται ένα κατωφλικό γράφημα και σαν έξοδο δίνει τον αχρωματικό αριθμό του γραφήματος.

Το 4ο βήμα του αλγορίθμου ισχύει γιατί το μη συνεκτικό κατωφλικό γράφημα έχει μόνο μια συνεκτική συνιστώσα με περισσότερους από έναν κόμβους. Οι άλλες συνεκτικές συνιστώσες περιέχουν μόνο έναν κόμβο. Αν δεν ίσχυε αυτό τότε θα υπήρχε υπογράφημα ισομορφικό του $2K_2$.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.5. *Το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού στα κατωφλικά γραφήματα επιλύεται σε γραμμικό χρόνο και ο αχρωματικός αριθμός είναι ίσος με τον αριθμό κλίκας.*

Κεφαλαιο 5

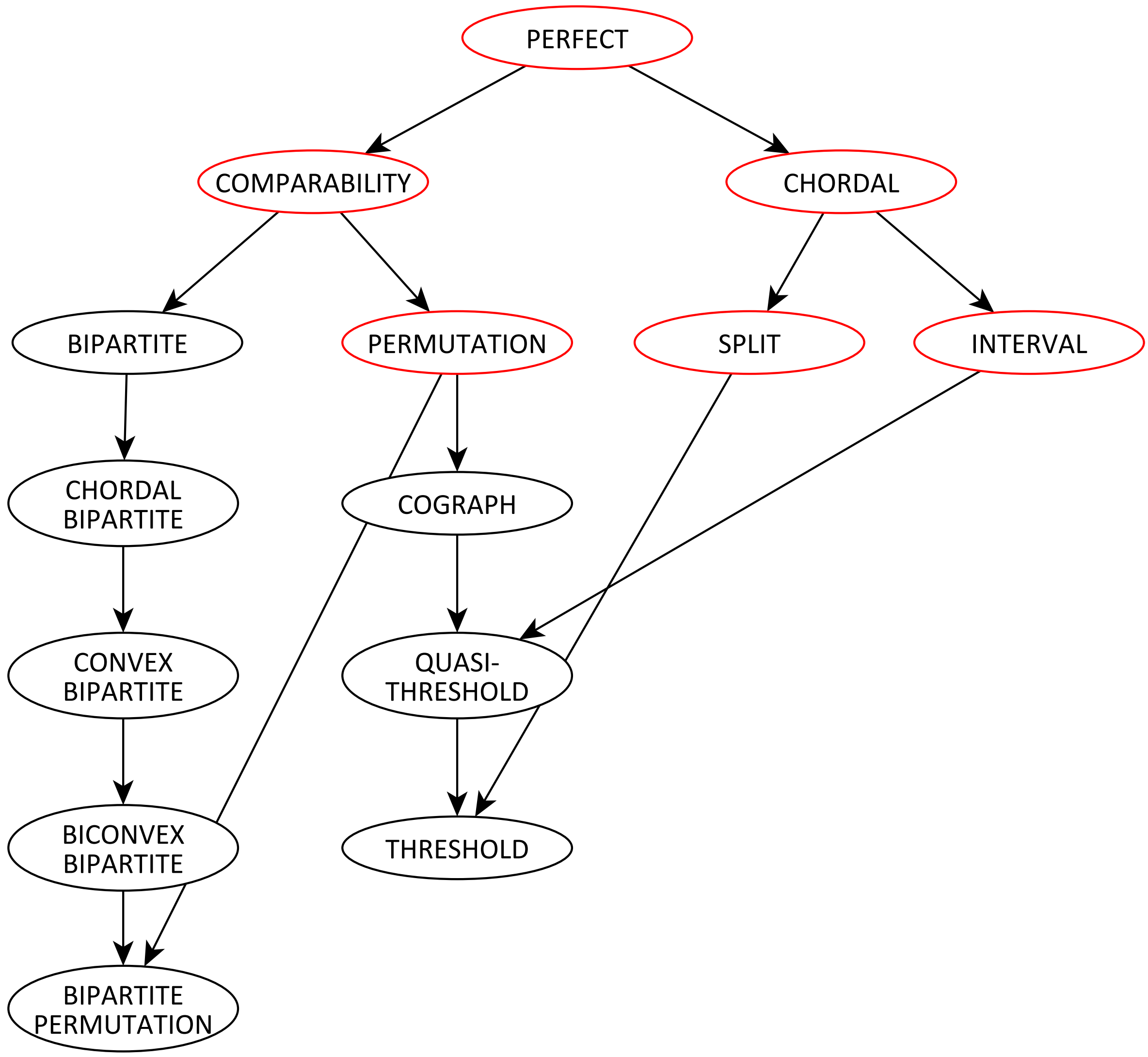
Μεγιστο Συνολο Κοπης

5.1 Μέγιστο Σύνολο Κοπής

Στόχος μας είναι να μελετήσουμε την πολυπλοκότητα του προβλήματος εύρεσης του μεγίστου συνόλου κοπής για τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων που μελετάμε. Ψάχνουμε το όριο στο οποίο το πρόβλημα γίνεται από πολυωνυμικά επιλύσιμο σε μη πολυωνυμικά επιλύσιμο.

Στο πρόβλημα του μεγίστου συνόλου κοπής (Max Cut) δίνεται ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, μια συνάρτηση ακμικών βαρών $w : E \to Z^+$, ένας θετικός ακέραιος K και ζητείται κατά πόσο υπάρχει μια διαμέριση του συνόλου V σε δυο σύνολα V_1, V_2 τέτοια ώστε το άθροισμα των βαρών των ακμών που έχουν το ένα άκρο τους στο σύνολο V_1 και το άλλο άκρο τους στο σύνολο V_2 να είναι τουλάχιστον K. Όταν όλα τα βάρη είναι 1, δηλαδή όταν το γράφημα δεν έχει βάρη και ζητείται μια διαμέριση του συνόλου των κόμβων V σε δυο σύνολα V_1, V_2 τέτοια ώστε το πλήθος των ακμών που έχουν το ένα άκρο τους στο σύνολο V_1 και το άλλο άκρο τους στο σύνολο V_2 να είναι τουλάχιστον K, το πρόβλημα λέγεται πρόβλημα του απλού μεγίστου συνόλου κοπής (Simple Max Cut). Και τα δυο προβλήματα είναι NP-πλήρη [20].

Οι Bodlander και Jansen στην εργασία τους [6] μελετούν το πρόβλημα σε πολλές κλάσεις τέλειων γραφημάτων. Αποδεικνύουν ότι το πρόβλημα είναι NP-πλήρες για τριγωνικά γραφήματα (chordal graphs) με αναγωγή του MAX 2-SAT. Έπειτα αποδεικνύεται η NP-πληρότητα για τα διαχωρίσιμα γραφήματα (split graphs) με αναγωγή του αρχικού Simple Max Cut. Στα διμερή γραφήματα (bipartite graphs) το πρόβλημα λύνεται πολυωνυμικά αλλά παραμένει NP-πλήρες για τα τριμερή γραφήματα (tripartite graphs) και για το συμπλήρωμα του διμερούς γραφήματος (co-bipartite) [6]. Οι Grotschel και Pulleyblank στην εργασία τους [18] αποδεικνύουν ότι το πρόβλημα Simple Max Cut λύνεται πολυωνυμικά στα ασθενή διμερή γραφήματα (weakly bipartite garph) με χρήση τεχνικών γραμμικού προγραμματισμού. Αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να λυθεί το πρόβλημα σε πολυωνυμικό χρόνο και στα διμερή γραφήματα. Τέλος για τα συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα (cographs) υπάρχει τετραγωνικός αλγόριθμος $O(n^2)$ [4]. Παρατίθεται παρακάτω ένα σχήμα (5.1) που αναπαριστά την πολυπλοκότητα του προβλήματος εύρεσης του μεγίστου συνόλου κοπής για γραφήματα που ανήκουν στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων.



Σχήμα 5.1: Αναπαράσταση της πολυπλοκότητας του προβλήματος εύρεσης του μεγίστου συνόλου κοπής για γραφήματα που ανήκουν στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων. Το πρόβλημα στις κλάσεις με κόκκινη έλλειψη είναι NP-πλήρες ενώ στις κλάσεις με μαύρη έλλειψη είναι πολυωνυμικό.

Οι κόκκινες ελλείψεις αντιστοιχούν στις κλάσεις όπου το πρόβλημα είναι NP-πλήρες, ενώ οι μαύρες αντιστοιχούν σε εκείνες τις κλάσεις όπου το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P.

5.2 Αποτελέσματα NP-πληρότητας

Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι στα διαχωρίσιμα γραφήματα (split graphs) το πρόβλημα του απλού μεγίστου συνόλου κοπής είναι NP-πλήρες. Παρακάτω θα μελετήσουμε τα δυο-διαχωρίσιμα γραφήματα (2-split graphs). Αυτό είναι ένα γράφημα στο οποίο κάθε κόμβος από το ανεξάρτητο σύνολο I γειτονεύει με ακριβώς δυο κόμβους από την κλίκα K. Προκύπτει λοιπόν το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 5.1. *Το πρόβλημα του απλού μεγίστου συνόλου κοπής είναι NP-πλήρες για τα δυο-διαχωρίσιμα γραφήματα (2-split graphs) [6].*

Παρακάτω παρατίθεται η απόδειξη του θεωρήματος.

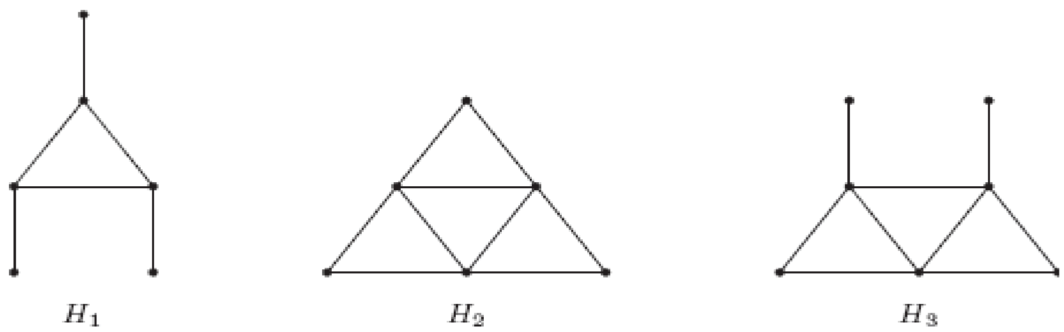
Θα χρησιμοποιήσουμε έναν μετασχηματισμό από το πρόβλημα του απλού μεγίστου συνόλου κοπής. Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ και $\bar{G} = (V, \bar{E})$ είναι το συμπλήρωμα του γραφήματος G. Έστω $H = (V \cup \bar{E}, F)$ ένα γράφημα με $F = \{(u, w) \mid u, w \in V, u \neq w\} \cup \{(u, e) \mid u \in V, e \in \bar{E}$, u είναι το τελικό άκρο της ακμής $e\}$. Δηλαδή θα γίνει μια αντιστοίχιση ενός κόμβου από το γράφημα H με κάθε κόμβο από το γράφημα G και κάθε ακμή από το $\bar{G}$. Το σύνολο $\bar{E}$ είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο στο γράφημα H και το σύνολο V σχηματίζει μια κλίκα. Κάθε ακμή που αναπαριστά έναν κόμβο συνδέεται με τους κόμβους που αναπαριστούν τα άκρα της.

Θεωρείται ότι το γράφημα G επιδέχεται μια διαμέριση με τουλάχιστον K ακμές κοπής, αν και μόνο αν το γράφημα H επιτρέπει μια διαμέριση με τουλάχιστον $2|\bar{E}| + K$ ακμές κοπής. Αν λοιπόν W_1, W_2 δυο διαμερίσεις του γραφήματος G με τουλάχιστον K ακμές κοπής, θα διαμεριστούν οι κόμβοι του γραφήματος H με τον εξής τρόπο: Το σύνολο V θα διαμεριστεί όπως στο γράφημα G. Για κάθε ακμή $e \in E$ αν τα δυο άκρα της ακμής e ανήκουν στη διαμέριση W_1, τότε η ακμή αυτή θα μεταφερθεί στη διαμέριση W_2, αντίστοιχα αν τα δυο άκρα της ακμής e ανήκουν στη διαμέριση W_2, τότε η ακμή αυτή θα μεταφερθεί στη διαμέριση W_1. Έτσι λοιπόν προκύπτει ότι το επιθυμητό πλήθος των ακμών κοπής είναι $2|\bar{E}| + K$.

Έστω ότι διαμερίζεται το γράφημα H στα δυο σύνολα W_1, W_2 με τουλάχιστον $2|\bar{E}|+K$ ακμές κοπής. Οι κόμβοι του γραφήματος G διαμερίζονται στα σύνολα $W_1 \cap V$, $W_2 \cap V$. Με αυτή τη διαμέριση πετυχαίνουμε το πλήθος των ακμών κοπής που θέλουμε. Για κάθε ακμή $(u, w) \in E$ υπάρχει μια ακμή κοπής στο γράφημα H αν η ακμή (u, w) είναι ακμή κοπής στο G, αλλιώς δεν υπάρχουν ακμές κοπής. Ισχύει λοιπόν ότι για κάθε ακμή $e = (u, w) \in \bar{E}$ από τις ακμές $(u, w), (e, u), (e, w)$ το πολύ δυο μπορούν να είναι μια ακμή κοπής. Άρα λοιπόν το πλήθος των ακμών κοπής στο G είναι τουλάχιστον το πλήθος των ακμών κοπής στο γράφημα H μείον $2|\bar{E}|$. Επειδή το γράφημα H κατασκευάζεται σε πολυωνυμικό χρόνο από το γράφημα G και επειδή τα δυο-διαχωρίσιμα είναι υποκλάση των διαχωρίσιμων γραφημάτων ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.2. *Το Simple Max Cut είναι NP-πλήρες για τα διαχωρίσιμα γραφήματα (split graphs).*

Έπειτα αν ένα γράφημα G είναι διαχωρίσιμο γράφημα τότε το γράφημα G είναι και μεταβατικό (comparability) αν και μόνο αν το γράφημα αυτό δεν περιέχει υπογράφημα ισομορφικό των τριών γραφημάτων που φαίνονται παρακάτω. Δηλαδή ότι ισχύει για τα διαχωρίσιμα ισχύει και για τα μεταβατικά γραφήματα.



Σχήμα 5.2: Υπογραφήματα που απαγορεύονται στα διαχωρίσιμα (split) γραφήματα και στα μεταβατικά (comparability) γραφήματα.

Θεώρημα 5.3. *Το Simple Max Cut είναι NP-πλήρες για τα μεταβατικά γραφήματα (comparability graphs).*

Κεφαλαιο 6

Μονοπατι Hamilton και Επικαλυψη με Μονοπατια

6.1 Μονοπάτι Hamilton και Επικάλυψη με Μονοπάτια

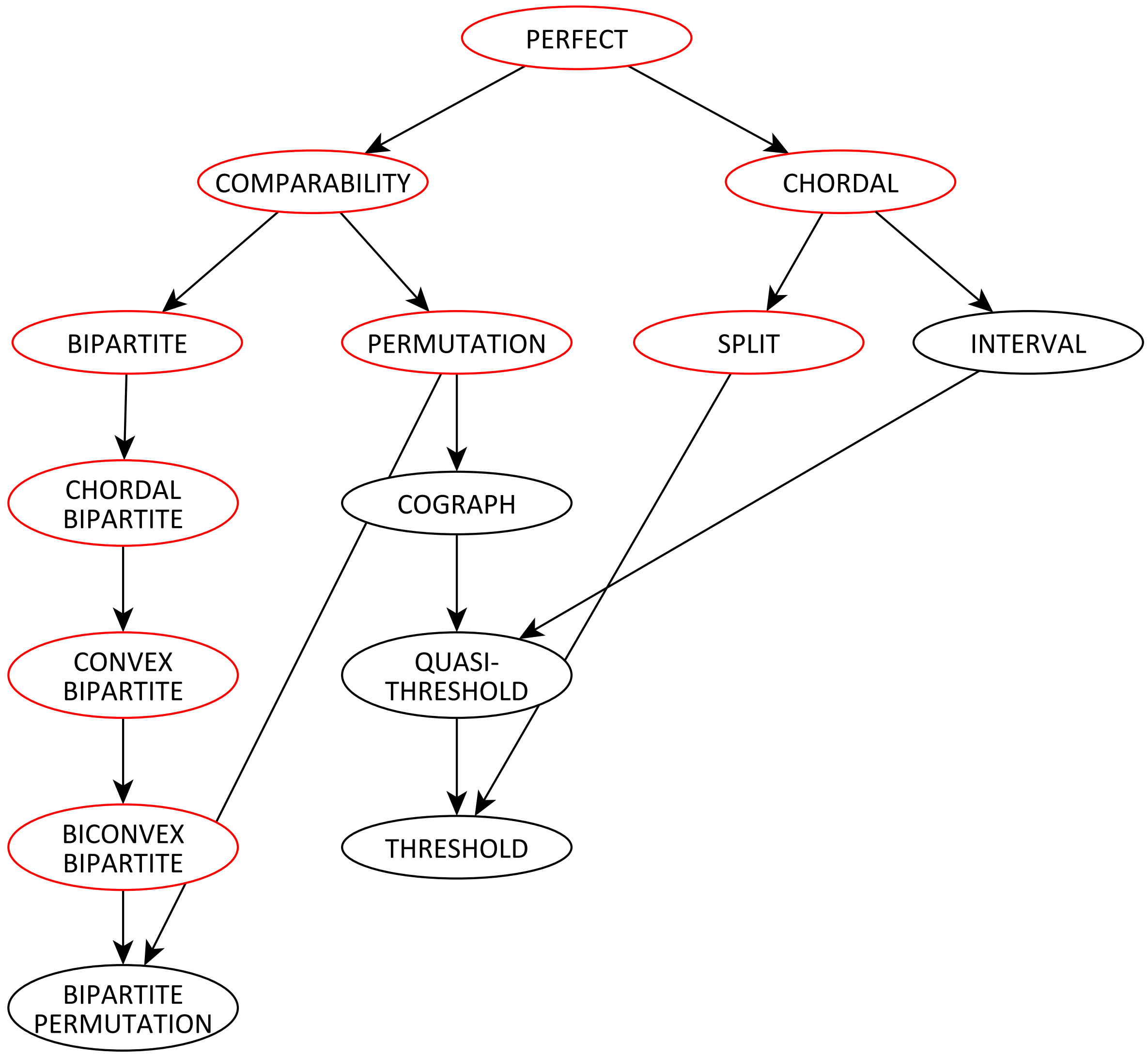
Στόχος μας είναι να μελετήσουμε την πολυπλοκότητα του προβλήματος εύρεσης μονοπατιού Hamilton και του προβλήματος διαμέρισης μονοπατιών για τις κλάσεις που μελετάμε.

Ένα μονοπάτι ή κύκλος Hamilton είναι ένα απλό μονοπάτι που περιέχει όλους τους κόμβους του γραφήματος. Το πρόβλημα απόφασης αν ένα γράφημα έχει κύκλο Hamilton είναι NP-πλήρες. Η εύρεση ενός μονοπατιού Hamilton δοθέντος ενός γραφήματος είναι NP-hard για γενικά γραφήματα. Για την κλάση των τέλειων γραφημάτων το πρόβλημα είναι επίσης NP-πλήρες. Για τα διμερή γραφήματα (bipartite graphs) έχει αποδειχθεί στο βιβλίο [17] η NP-πληρότητα του προβλήματος. Επειδή τα διμερή γραφήματα είναι υποκλάση των μεταβατικών γραφημάτων, ισχύει η NP-πληρότητα και για την κλάση των μεταβατικών γραφημάτων.

Οι Colbourn και Stewart αποδεικνύουν στην εργασία τους [11] την NP-πληρότητα του προβλήματος για τις κλάσεις των διαχωρίσιμων (split) γραφημάτων και των τριγωνικών (chordal) γραφημάτων. Έπειτα επεκτάθηκαν τα αποτελέσματα της NP-πληρότητας για τις κλάσεις των τριγωνικών διμερών γραφημάτων (chordal bipartite graphs) και των ισχυρών τριγωνικών γραφημάτων (strongly chordal graphs). Τα τριγωνικά διμερή γραφήματα είναι εκείνα τα γραφήματα που είναι διμερή και δεν περιέχουν επαγόμενο C_k, $k > 4$. Για παράδειγμα το C_4 είναι τριγωνικό διμερές γράφημα αλλά δεν είναι τριγωνικό. Η κλάση των ισχυρών τριγωνικών γραφημάτων είναι μια ειδική περίπτωση των τριγωνικών γραφημάτων.

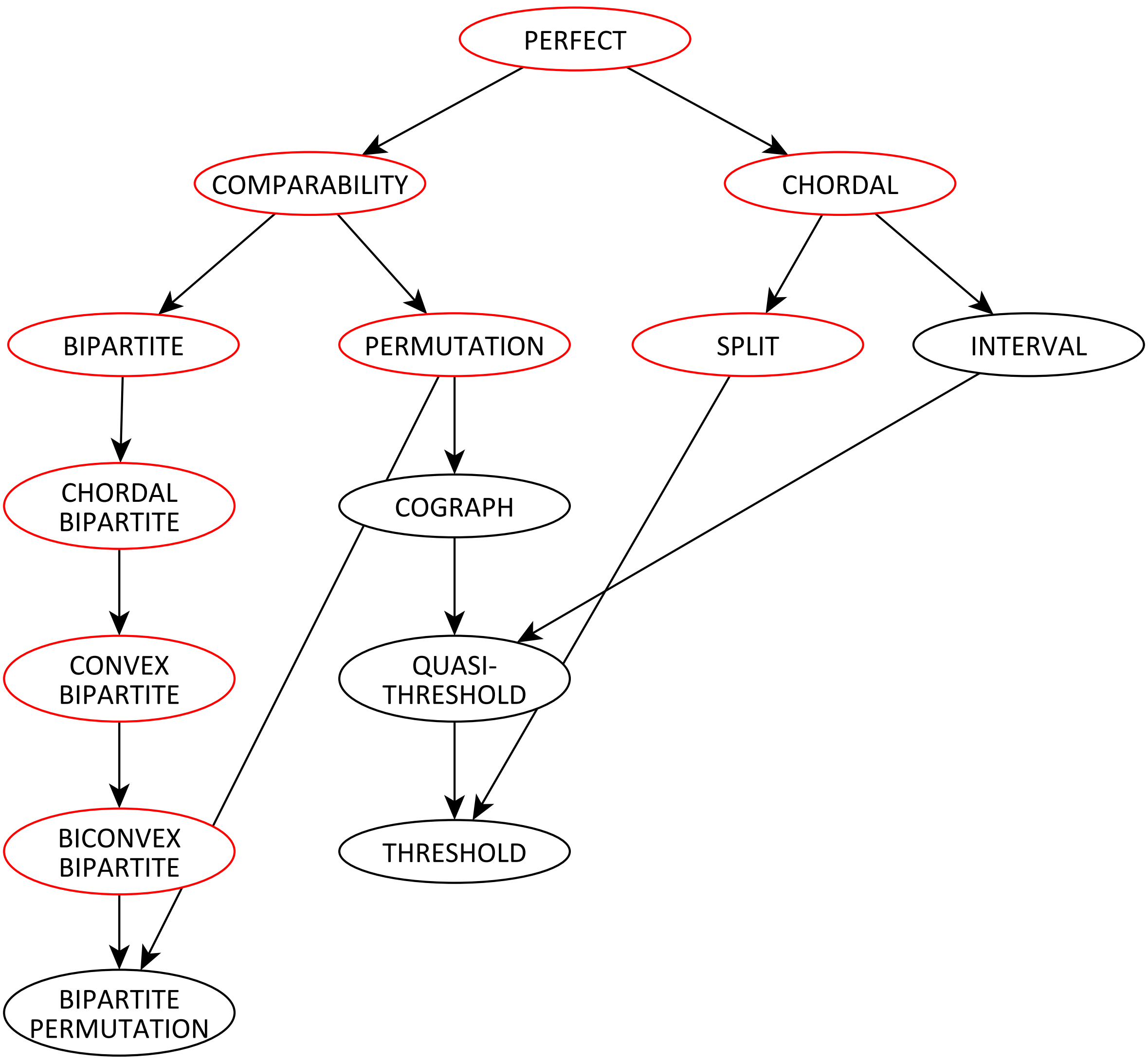
Στα ισχυρά τριγωνικά γραφήματα κάθε κύκλος αρτίου μήκους τουλάχιστον 6 έχει μια περιττή χορδή. Μια περιττή χορδή είναι μια χορδή που ενώνει κόμβους που χωρίζονται από περιττό πλήθος ακμών.

Το πρόβλημα εύρεσης κύκλου Hamilton λύνεται σε κάποιες περιπτώσεις πολυωνυμικά σε κάποιες κλάσεις τέλειων γραφημάτων. Στην εργασία [12] αποδείχθηκε ότι το πρόβλημα εύρεσης κύκλου Hamilton στα cographs ανήκει στην κλάση P. Το ίδιο ισχύει και για τα γραφήματα διαστημάτων [10]. Τα γραφήματα διαστημάτων είναι υποκλάση των τριγωνικών και αποτελούν το όριο στην πολυπλοκότητα του προβλήματος αυτού. Έπειτα το πρόβλημα λύνεται πολυωνυμικά για την κλάση των μεταθετικών γραφημάτων [13]. Το Σχήμα 6.1 αναπαριστά την πολυπλοκότητα του προβλήματος εύρεσης κύκλου Hamilton για γραφήματα που ανήκουν στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων.



Σχήμα 6.1: Αναπαράσταση της πολυπλοκότητας του προβλήματος εύρεσης κύκλου Hamilton για γραφήματα που ανήκουν στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων. Το πρόβλημα στις κλάσεις με κόκκινη έλλειψη είναι NP-πλήρες ενώ στις κλάσεις με μαύρη έλλειψη είναι πολυωνυμικό.

Οι κόκκινες ελλείψεις αντιστοιχούν στις κλάσεις όπου το πρόβλημα είναι NP-πλήρες, ενώ οι μαύρες αντιστοιχούν σε εκείνες τις κλάσεις όπου το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P.



Σχήμα 6.2: Αναπαράσταση της πολυπλοκότητας του προβλήματος επικάλυψης με μονοπάτια για γραφήματα που ανήκουν στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων. Το πρόβλημα στις κλάσεις με κόκκινη έλλειψη είναι NP-πλήρες ενώ στις κλάσεις με μαύρη έλλειψη είναι πολυωνυμικό.

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε στον ορισμό του προβλήματος της επικάλυψης με μονοπάτια (Path Cover Problem). Μια συλλογή ξένων ως προς τις κορυφές μονοπατιών η οποία καλύπτει όλους τους κόμβους, δηλαδή για κάθε κορυφή υπάρχει μοναδικό μονοπάτι που περιέχει τον κόμβο αυτό λέγεται επικάλυψη με μονοπάτια. Το πρόβλημα επικάλυψης με μονοπάτια είναι να βρεθεί μια διαμέριση μονοπατιών στο γράφημα G με ελάχιστο πλήθος μονοπατιών $p(G)$. Το πρόβλημα αυτό είναι για γενικά γραφήματα NP-πλήρες. Το γράφημα G έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν ισχύει $p(G) = 1$. Το πρόβλημα επικάλυψης με μονοπάτια είναι γενίκευση του προβλήματος εύρεσης μονοπατιού Hamilton. Σε όποιες κλάσεις είναι NP-πλήρες το πρόβλημα εύρεσης μονοπατιού Hamilton, είναι NP-πλήρες και το πρόβλημα επικάλυψης με μονοπάτια. Μια γενίκευση του προβλήματος επικάλυψης με μονοπάτια είναι το k-path cover πρόβλημα. Στο k-path cover πρόβλημα κάθε μονοπάτι έχει μήκος το πολύ k, για κάποιον θετικό ακέραιο k. Έπειτα επειδή η ύπαρξη μονοπατιού Hamilton συνεπάγεται της ύπαρξης μιας επικάλυψης μονοπατιών (path cover) με $p(G) \geq 1$, το πρόβλημα της επικάλυψης μονοπατιών παραμένει NP-πλήρες για τα split, τριγωνικά, μεταβατικά, τριγωνικά διμερή, ισχυρά τριγωνικά και διμερή γραφήματα. Ενώ για τα γραφήματα διαστημάτων το πρόβλημα της επικάλυψης μονοπατιών είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο [1] . Στην εργασία [19] δίνεται πολυωνυμικός αλγόριθμος $O(nlogn)$ για την κλάση των γραφημάτων διαστημάτων. Ενώ στην εργασία [10] δίνεται γραμμικός αλγόριθμος για τα interval γραφήματα για το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια. Εδώ βρίσκεται το όριο της πολυπλοκότητας του προβλήματος ως προς τα τριγωνικά γραφήματα και τα γραφήματα διαστημάτων. Για τα cographs το πρόβλημα είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο [8]. Όπως επίσης και για τα ταυτόχρονα μεταθετικά και διμερή γραφήματα. Για τα cographs ισχύει ότι το πρόβλημα είναι NP-πλήρες αν το k θεωρηθεί μέρος της εισόδου. Έχουμε πολυωνυμική λύση αν το k οριστεί στην αρχή. Για τα κατωφλικά γραφήματα δίνεται ένας βέλτιστος γραμμικός αλγόριθμος για το πρόβλημα. Ακόμα το πρόβλημα είναι NP-πλήρες για τα τριγωνικά διμερή γραφήματα, αν το k είναι μέρος της εισόδου. Το ίδιο ισχύει και για τα μεταβατικά γραφήματα. Τέλος για τα διμερή μεταθετικά γραφήματα υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος. Στην εργασία [3] αποδεικνύεται η NP-πληρότητα για τα quasi-threshold γραφήματα και συνεπώς και για τα τριγωνικά και τα γραφήματα διαστημάτων. Το Σχήμα 6.2 αναπαριστά την πολυπλοκότητα του προβλήματος επικάλυψης με μονοπάτια που ανήκουν στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων.

Οι κόκκινες ελλείψεις αντιστοιχούν στις κλάσεις όπου το πρόβλημα είναι NP-πλήρες, ενώ οι μαύρες αντιστοιχούν σε εκείνες τις κλάσεις όπου το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P.

6.2 Πολυωνυμικές λύσεις για το μονοπάτι Hamilton και για το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια

Πρώτον θα αποδειχθεί η πολυωνυμική λύση του προβλήματος επικάλυψης με μονοπάτια για τα διμερή μεταθετικά γραφήματα. Έστω $G = (V, E)$, όπου $V = S + T$, ένα bipartite permutation γράφημα. Μια ισχυρή διάταξη των κόμβων ενός διμερούς γραφήματος $G = (V, E)$, όπου $V = S + T$, είναι μια διάταξη του συνόλου S και μια διάταξη του συνόλου T, τέτοιο ώστε για όλα τα ζεύγη $(s,t),(s',t') \in E$ με $s < s'$ και $t > t'$ να ισχύει $(s,t'),(s',t) \in E$. Έχουμε τα εξής λήμματα:

Λήμμα 6.1. *Έστω $G = (V, E)$, όπου $V = S + T$, ένα διμερές γράφημα. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμες εκφράσεις [21]:*

1. *Το γράφημα G είναι διμερές μεταθετικό γράφημα.*

2. Υπάρχει ισχυρή διάταξη των κόμβων του γραφήματος G.

Ορισμός 6.1. Έστω G ένα διμερές μεταθετικό γράφημα. Μια επικάλυψη με μονοπάτια $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ λέγεται συνεχόμενη (contignous) αν ισχύουν τα παρακάτω:

1. Αν s είναι μοναδικός κόμβος στο μονοπάτι P_i και αν $s' < s < s''$ τότε οι κόμβοι s' και s'' ανήκουν σε διαφορετικά μονοπάτια.

2. Αν st είναι μια ακμή στο μονοπάτι P_i και $s't'$ είναι μια ακμή στο μονοπάτι P_j, με i διαφορετικό από το j και $s < s'$ τότε ισχύει $t < t'$.

Λήμμα 6.2. *Έστω G ένα διμερές μεταθετικό γράφημα. Τότε υπάρχει μια συνεχόμενη επικάλυψη μονοπατιών για το γράφημα G που θα είναι βέλτιστη.*

Παρατίθεται παρακάτω η απόδειξη του λήμματος. Θα μετατραπεί μια αυθαίρετη βέλτιστη επικάλυψη μονοπατιών P σε μια συνεχόμενη βέλτιστη επικάλυψη μονοπατιών χρησιμοποιώντας τις συνθήκες 1, 2 του προηγούμενου ορισμού.

1. Έστω s', s, s'' οι κόμβοι που δεν ικανοποιούν την συνθήκη 1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι κόμβοι s και s'' είναι πιο κοντά στον κόμβο s από τα δεξιά και από τα αριστερά στη διάταξη στο σύνολο S σε κάποιο μονοπάτι P_j της επικάλυψης μονοπατιών P. Έστω $s' - t - s''$ το υπομονοπάτι του P_j. Από το 2 του ορισμού ο κόμβος t γειτονεύει με τον κόμβο s. Συνδέουμε τον κόμβο t με τον κόμβο s και αφαιρούμε την σύνδεση των κόμβων t και s'' στην επικάλυψη μονοπατιών. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία και τέλος προκύπτει μια βέλτιστη επικάλυψη μονοπατιών που ικανοποιεί τη συνθήκη 1.

2. Έστω st και $s't'$ οι ακμές στα μονοπάτια P_i και P_j της επικάλυψης μονοπατιών P που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη 2. Ξέρουμε πως οι ακμές st και $s't'$ ανήκουν στο σύνολο E. Αφαιρούμε αυτές τις ακμές από την επικάλυψη μονοπατιών και τις αντικαθιστούμε με τις ακμές st' και $s't$. Έτσι έχουμε τα μονοπάτια P_i' και P_j' τα οποία καλύπτουν τους κόμβους που καλύπτουν και τα P_i και P_j μονοπάτια. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για τα ζεύγη ακμών που δεν ικανοποιούν την 2 συνθήκη και προκύπτει μια βέλτιστη επικάλυψη μονοπατιών που ικανοποιεί τη συνθήκη 2.

Θεώρημα 6.1. *Για τα γραφήματα διαστημάτων το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο.*

Παρακάτω παρατίθεται η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος. Δείχνουμε έναν greedy αλγόριθμο για το βέλτιστο πρόβλημα επικάλυψης με μονοπάτια στο σύνολο από ταξινομημένα διαστήματα (sorted intervals). Τα ταξινομημένα διαστήματα σημαίνουν ότι τα άκρα των διαστημάτων με τα οποία μπορεί να αναπαρασταθεί ένα interval γράφημα, μπορούν να ταξινομηθούν με αύξουσα σειρά, με διακριτές τιμές μεταξύ του 1 και του $2n$, όπου n το πλήθος των κόμβων στο γράφημα. Ορίζουμε ως $I = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ το σύνολο των n ταξινομημένων διαστημάτων ενός interval γραφήματος για $i = 1, 2, \ldots, n$. Με a_i και b_i ορίζουμε τις συντεταγμένες από τα αριστερά και δεξιά των άκρων ενός διαστήματος u_i. Αν για τα δυο διαστήματα u_i και u_j ισχύει $i < j$ τότε συνεπάγεται $b_i < b_j$. Ξεκινάμε από ένα απλό μονοπάτι το οποίο ξεκινάει από τον κόμβο u και καταλήγει πάλι σε αυτόν. Επειτα επεκτείνει το μονοπάτι P (greedy principle). Έστω το μονοπάτι $P = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \ldots \rightarrow x_s, s \geq 1$. Επιλέγεται ο μικρότερος γείτονας του κόμβου x_s που δεν έχει καλυφθεί και το μονοπάτι P επεκτείνεται για να το καλύψει. Αν δεν υπάρχει τέτοιος γείτονας το μονοπάτι P σταματάει και ξεκινάει ένα καινούριο μονοπάτι από εκείνον τον κόμβο που δεν έχει καλυφθεί και έχει τον μικρότερο αριθμό στη διάταξη. Έστω S ένα σύνολο με αριθμούς. MinS είναι ο μικρότερος αριθμός του συνόλου S. Τα παραπάνω βήματα παρουσιάζονται στον Αλγόριθμο 3.

Αλγόριθμος 3 GOPC

$U \leftarrow I$; $r \leftarrow 1$

$P_r \leftarrow u_1$; $U \leftarrow U - \{u_1\}$

while $U! = \oslash$ do

  Let x_s be the path-end of P_r

  $S \leftarrow \{u_j : (x_s, u_j) \in E, \ u_j \in V\}$

  if $S! = \oslash$ then

    $k \leftarrow \min(j : \ u_j \in S)$; $P_r \leftarrow P_r \rightarrow u_k$

  else

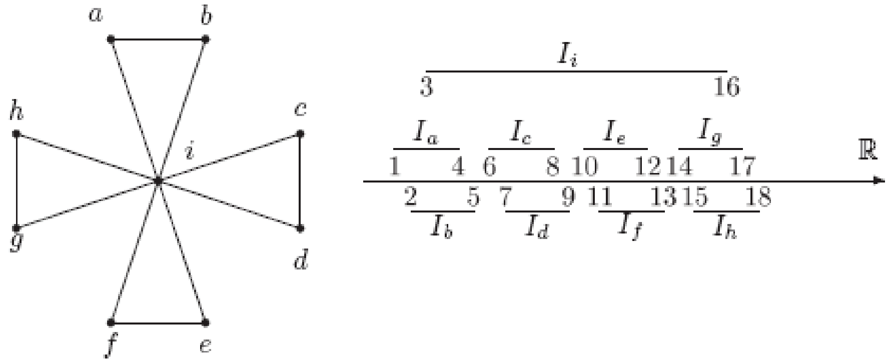
    $k \leftarrow \min(j : \ u_j \in U)$; $r \leftarrow r + 1 \ \ P_r \leftarrow u_k$

  $U \leftarrow U - \{u_k\}$

end while

Output $P_1, P_2, \ldots, P_r$

Ο αλγόριθμος αυτός υπολογίζει μια βέλτιστη επικάλυψη με μονοπάτια σε ένα σύνολο ταξινομένων διαστημάτων σε $O(nlogn)$ χρόνο. Παρατίθεται στο Σχήμα 6.3 ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου GOPC που υπολογίζει μια βέλτιστη διαδρομή μονοπατιών για ένα interval γράφημα. Ξεκινάμε με το I_a διάστημα γιατί έχει το μικρότερο δεξιό άκρο. Ο κόμβος a έχει γείτονες τους b και i και η επέκταση του μονοπατιού P_1 γίνεται προς τον κόμβο b, γιατί το I_b διάστημα έχει μικρότερο δεξιό άκρο από το I_i διάστημα. Επειτα το P_1 επεκτείνεται προς τον κόμβο i γιατί είναι ο μοναδικός γείτονας του κόμβου b που δεν καλύφθηκε. Ο κόμβος i έχει γείτονες τους c, d, e, f, g, h που δεν καλύφθηκαν και επιλέγεται για επόμενος κόμβος στο μονοπάτι ο κόμβος c γιατί έχει το μικρότερο δεξιό άκρο από τους ακάλυπτους κόμβους που απέμειναν. Επειτα επιλέγεται ο κόμβος d. Αυτός ο κόμβος δεν έχει άλλους ακάλυπτους γείτονες αφού οι c και i έχουν μπει στο μονοπάτι P_1. Άρα ξεκινάει ένα P_2 μονοπάτι και επισκέπτεται πρώτα τον κόμβο e και μετά τον κόμβο f. Όπως πριν



Σχήμα 6.3: Ένα γράφημα διαστημάτων και τα αντίστοιχα ταξινομημένα διαστήματα.

το P_2 τελειώνει και ξεκινάει ένα P_3 μονοπάτι με τους κόμβους g και h. Άρα η επικάλυψη με μονοπάτια γι αυτό το γράφημα είναι: $P_1 = \{\alpha, b, i, c, d\}$, $P_2 = \{e, f\}$, $P_3 = \{g, h\}$.

Κεφαλαιο 7

Κυριαρχο Συνολο

7.1 Κυρίαρχο Σύνολο

Στόχος μας είναι να μελετήσουμε την πολυπλοκότητα του προβλήματος εύρεσης του κυρίαρχου συνόλου (domination set) για τις κλάσεις που μελετάμε.

Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ και ένας θετικός ακέραιος αριθμός $k \leq |V|$. Ένα υποσύνολο κόμβου $S \subset V$ με $|S| \leq k$ ονομάζεται κυρίαρχο αν κάθε κόμβος στο σύνολο $V - S$ έχει έναν τουλάχιστον γείτονα από το σύνολο S. Αν δεν υπάρχουν δυο κόμβοι στο σύνολο S που να γειτονεύουν μεταξύ τους τότε ένα κυρίαρχο σύνολο λέγεται ανεξάρτητο. Το πρόβλημα του κυρίαρχου συνόλου είναι NP-πλήρες.

Το πρόβλημα αυτό είναι NP-πλήρες στις εξής κλάσεις τέλειων γραφημάτων:

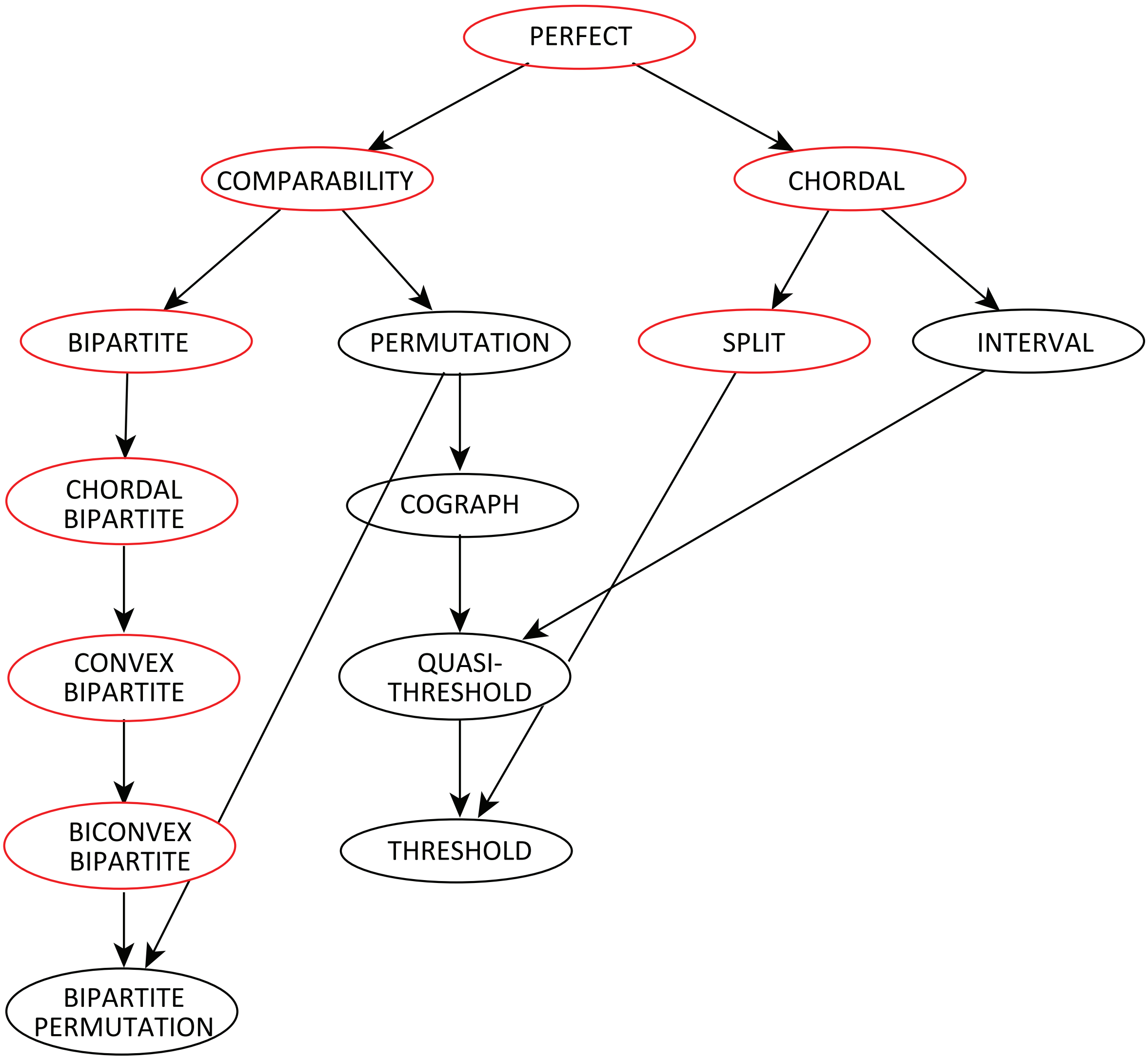
- στα τριγωνικά γραφήματα,
- στα μεταβατικά γραφήματα,
- στα διμερή γραφήματα και
- στα διαχωρίσιμα γραφήματα.

Το πρόβλημα όμως γίνεται πολυωνυμικά επιλύσιμο:

- στα συμπληρωματικά γραφήματα (cographs),
- στα γραφήματα διαστημάτων (interval graphs),
- στα μεταθετικά γραφήματα (permutation graphs) και

• στα ισχυρά τριγωνικά γραφήματα (strongly chordal graphs).

Συγκεκριμένα για τα interval γραφήματα παρουσιάζεται παρακάτω ένας λογαριθμικός αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα βέλτιστα [10]. Το Σχήμα 7.1 αναπαριστά την πολυπλοκότητα του προβλήματος εύρεσης του κυρίαρχου συνόλου για γραφήματα που ανήκουν στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων.



Σχήμα 7.1: Αναπαράσταση της πολυπλοκότητας του προβλήματος εύρεσης κυρίαρχου συνόλου για γραφήματα που ανήκουν στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων. Το πρόβλημα στις κλάσεις με κόκκινη έλλειψη είναι NP-πλήρες ενώ στις κλάσεις με μαύρη έλλειψη είναι πολυωνυμικό.

Οι κόκκινες ελλείψεις αντιστοιχούν στις κλάσεις όπου το πρόβλημα είναι NP-πλήρες, ενώ οι μαύρες αντιστοιχούν σε εκείνες τις κλάσεις όπου το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P.

7.2 Πολυωνυμική λύση για το κυρίαρχο σύνολο

Στον αλγόριθμο αυτό έχουμε διαστήματα από το σύνολο I με αρίθμηση από το 1 μέχρι το n κατά αύξουσα τάξη δηλαδή ανάλογα με τα αριστερά τους άκρα και όπου n=πλήθος των κόμβων ενός γραφήματος. Τα άκρα παίρνουν τιμές από το 1 μέχρι το $2n$. Το σύνολο των ταξινομημένων διαστημάτων ορίζεται ως $I = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ και για $i = 1, 2, \ldots, n$ ορίζουμε με a_i και b_i τις συντεταγμένες των άκρων ενός διαστήματος u_i από τα αριστερά προς τα δεξιά. Αν ισχύει $i < j$ για οποιαδήποτε δυο διαστήματα u_i και u_j τότε συνεπάγεται ότι $b_i < b_j$. Για οποιαδήποτε δυο διαστήματα u_i και u_j αν ισχύει $i < j$ τότε θα ισχύει και $a_i < a_j$. Προκύπτει παρακάτω το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 7.1. *Το πρόβλημα εύρεσης κυρίαρχου συνόλου είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο για interval γραφήματα.*

Ακολουθεί παρακάτω η απόδειξη του θεωρήματος. Ο αλγόριθμος έχει $\delta + 1$ ξένα σύνολα διαστημάτων, όπου δ ο ελάχιστος βαθμός του $G(I)$ και υπολογίζεται σε $O(n + m)$ χρόνο. Έχει δειχθεί ότι $d(G) \leq \delta + 1$, με $d(G)$ να είναι ο μέγιστος αριθμός από μη συνεκτικά dominating σύνολα για κάποιο γράφημα G. Τα σύνολα αυτά είναι κενά. Επισκεπτόμαστε αρχικά ένα ένα τα διαστήματα ακολουθώντας την αύξουσα σειρά διάταξης για να αποφασίσουμε σε ποιο σύνολο θα μπει το κάθε διάστημα. Τελικά κάθε διάστημα τοποθετείται σε ένα σύνολο και κάθε σύνολο είναι dominating σύνολο. $DP = \{P_i :$ P_i είναι ένα υποσύνολο του συνόλου $I, 1 \leq i \leq \delta + 1\}$ είναι μια οικογένεια ξένων $\delta + 1$ συνόλων διαστημάτων. Κάθε σύνολο P_i έχει να κάνει με μια μεταβλητή pr_i, η οποία είναι το μέγιστο δεξιό άκρο του συνόλου P_i. Τα διαστήματα τοποθετούνται ένα ένα σε κάποιο σύνολο του DP. PQ είναι μια ουρά προτεραιοτήτων η οποία έχει το μέγιστο δεξιό άκρο από όλα τα σύνολα του DP. Η ουρά PQ έχει τις λειτουργίες εισαγωγής στοιχείου, διαγραφής στοιχείου και εύρεσης ελάχιστου στοιχείου. Ο αλγόριθμος αυτός είναι άπληστος γιατί όταν επισκέπτεται ένα διάστημα, βάζει το διάστημα αυτό σε ένα σύνολο του συνόλου DP. Επιλέγει το σύνολο του οποίου το τρέχων μέγιστο δεξιό άκρο είναι το μικρότερο ανάμεσα στα σύνολα του συνόλου DP. Παρατίθεται παρακάτω ο αλγόριθμος με είσοδο ένα σύνολο με ταξινομημένα διαστήματα $I = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ και δίνει ως έξοδο ένα domatic partition DP του $G(I)$ μεγέθους $\delta + 1$.

Σημαντικό είναι να τονίσουμε ότι η πολυπλοκότητα έχει να κάνει με τις λειτουργίες της ουράς PQ. Εάν $\delta > loglogn$ χρησιμοποιούμε μια δυο επιπέδων ουρά προτεραιότητας για να υλοποιήσουμε την PQ. Η δομή αυτή χρειάζεται $O(n)$ χώρο και $O(loglogn)$ χρόνο για τις λειτουργίες της ουράς. Έτσι λοιπόν η πολυπλοκότητα χρόνου του αλγορίθμου είναι $O(nloglogn)$.

Αλγόριθμος 4 GDP: Δοθέντος ενός συνόλου I ταξινομημένων διαστημάτων εύρεση μιας domatic partition ενός $G(I)$.

Find the minimum degree δ of $G(I)$
for $i = 1$ to $\delta + 1$ do
    $P_i \leftarrow \emptyset$
    $pr_i \leftarrow i - (\delta + 1)$
    Insert pr_i into PQ
end for
for $i = 1$ to n do
    Find the minimum pr_k from PQ
    $P_k \leftarrow P_k \cup \{u_i\}$
    if $b_i > pr_k$ then
        Delete pr_k from PQ
        $pr_k \leftarrow b_i$
        Insert pr_k into PQ
    end if
end for
Output DP

Κεφαλαιο 8

Παρουσιαση Αποτελεσματων

8.1 Αποτελέσματα σε πίνακες

Ο πίνακας 8.1 δείχνει τα αποτελέσματα της πολυπλοκότητας των προβλημάτων απόφασης στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων που έχουν μελετηθεί παραπάνω. Θα παρουσιάσουμε για κάθε μια κλάση ποια προβλήματα παραμένουν NP-πλήρη και ποια ανήκουν στην κλάση P.

Οι πίνακες που ακολουθούν δείχνουν τη χρονολογία εύρεσης των πολυωνυμικών αλγορίθμων, τη χρονολογία εύρεσης των αποδείξεων της NP-πληρότητας για τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων που μελετήθηκαν παραπάνω στα συγκεκριμένα προβλήματα και τους συγγραφείς.

Το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού έχει πολυωνυμική λύση στα συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα (cograph) και στα κατωφλικά γραφήματα (threshold) (βλ. Πίνακα 8.2).

Επειτα το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού έχει πολυωνυμική λύση στα κατωφλικά γραφήματα (threshold) (βλ. Πίνακα 8.3).

Το πρόβλημα του απλού μεγίστου συνόλου κοπής έχει πολυωνυμική λύση στα bipartite γραφήματα, στα cographs, στα bipartite permutation και στα threshold γραφήματα (βλ. Πίνακα 8.4).

Το πρόβλημα εύρεσης κύκλου Hamilton ή της επικάλυψης με μονοπάτια έχει πολυωνυμική λύση στα permutation, interval, cograph, bipartite permutation και στα threshold γραφήματα (βλ. Πίνακα 8.5).

Αφού το πρόβλημα εύρεσης κύκλου Hamilton είναι NP-πλήρες και το πρόβλημα επικάλυψης με μονοπάτια είναι γενίκευση του προβλήματος εύρεσης κύκλου Hamilton, αν σε κάποια κλάση γραφημάτων το πρόβλημα εύρεσης κύκλου Hamilton είναι NP-πλήρες, αυτό συνεπάγεται NP-πληρότητα του προβλήματος επικάλυψης με μονοπάτια για την αντί-

Πίνακας 8.1: Παρουσιάζει για κάθε μια κλάση ποια προβλήματα παραμένουν NP-πλήρη και ποια ανήκουν στην κλάση P.

	Κλάσεις Γραφημάτων								
Προβλήματα	**Compar.**	**Chordal**	**Permut.**	**Bipart.**	**Split**	**Int.**	**Cograph**	**Bi-Permut.**	**Thresh.**
Αρμονικός Αριθμός	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P	NP	P
Αχρωματικός Αριθμός	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P
Μέγιστο σύνολο κοπής	NP	NP	NP	P	NP	NP	P	P	P
Επικαλυψη με μονοπάτια	NP	NP	P	NP	NP	P	P	P	P
Κυρίαρχο σύνολο	NP	NP	P	NP	NP	P	P	P	P

στοιχη κλάση. Το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο στα interval γραφήματα (βλ. Πίνακα 8.6).

Το πρόβλημα του κυρίαρχου συνόλου έχει πολυωνυμική λύση στα permutation, interval, cograph, bipartite permutation και στα threshold γραφήματα (βλ. Πίνακα 8.7).

Πίνακας 8.2: Παρουσιάζει τη χρονολογία εύρεσης των πολυωνυμικών λύσεων, των αποδείξεων της NP-πληρότητας και τους συγγραφείς.

Αρμονικός Αριθμός	**Χρονολογία εύρεσης πολυωνυμικής λύσης, αποδείξεων NP-πληρότητας και Συγγραφείς**
Comparability	2007 (NP) K. Asdre, K. Ioannidou, S.D. Nikolopoulos [2]
Chordal	2007 (NP) K. Asdre, K. Ioannidou, S.D. Nikolopoulos [2]
Permutation	2007 (NP) K. Asdre, K. Ioannidou, S.D. Nikolopoulos [2]
Bipartite	1986 (NP) M. Farber, G. Hahn, P. Hell, D. Miller [15]
Split	2007 (NP) K. Asdre, K. Ioannidou, S.D. Nikolopoulos [2]
Interval	2007 (NP) K. Asdre, K. Ioannidou, S.D. Nikolopoulos [2]
Cograph	Τετριμμένη πολυωνυμικη λυση
Bipartite permutation	1986 (NP) M. Farber, G. Hahn, P. Hell, D. Miller [15]
Threshold	2007 (P) K. Asdre, S.D. Nikolopoulos [3]

Πίνακας 8.3: Παρουσιάζει τη χρονολογία εύρεσης των πολυωνυμικών λύσεων, των αποδείξεων της NP-πληρότητας και τους συγγραφείς.

Αχρωματικός Αριθμός	**Χρονολογία εύρεσης πολυωνυμικής λύσης, αποδείξεων NP-πληρότητας και Συγγραφείς**
Comparability	2007 (NP) K. Asdre, S.D. Nikolopoulos [3]
Chordal	2007 (NP) K. Asdre, S.D. Nikolopoulos [3]
Permutation	2007 (NP) K. Asdre, S.D. Nikolopoulos [3]
Bipartite	1986 (NP) M. Farber, G. Hahn, P. Hell, D. Miller [15]
Split	(NP) Ανοιχτό πρόβλημα (βλ. Συμπεράσματα)
Interval	1989 (NP) H.L. Bodlaender [5]
Cograph	1989 (NP) H.L. Bodlaender [5]
Bipartite Permutation	2007 (NP) K. Asdre, S.D. Nikolopoulos [3]
Threshold	2007 (P) K. Asdre, S.D. Nikolopoulos [3]

Πίνακας 8.4: Παρουσιάζει τη χρονολογία εύρεσης των πολυωνυμικών λύσεων, των αποδείξεων της NP-πληρότητας και τους συγγραφείς.

Απλό μέγιστο σύνολο κοπής	**Χρονολογία εύρεσης πολυωνυμικής λύσης, αποδείξεων NP-πληρότητας και Συγγραφείς**
Comparability	2000 (NP) H.L. Bodlaender, K. Jansen [6]
Chordal	1987 (NP) H. Bodlaender [4]
Permutation	2000 (NP) H.L. Bodlaender, K. Jansen [6]
Bipartite	2000 (P) H.L. Bodlaender, K. Jansen [6]
Split	1987 (NP) H. Bodlaender [4]
Interval	1987 (NP) H. Bodlaender [4]
Cograph	1987 (P) H. Bodlaender [4]
Bipartite Permutation	2000 (P) H.L. Bodlaender, K. Jansen [6]
Threshold	1987 (P) H. Bodlaender [4]

Πίνακας 8.5: Παρουσιάζει τη χρονολογία εύρεσης των πολυωνυμικών λύσεων, των αποδείξεων της NP-πληρότητας και τους συγγραφείς.

Εύρεση κύκλου Hamilton	**Χρονολογία εύρεσης πολυωνυμικής λύσης, αποδείξεων NP-πληρότητας και Συγγραφείς**
Comparability	2004 (NP) M.C. Golumbic [17]
Chordal	1985 (NP) C.J. Colbourn, L.K. Stewart [11]
Permutation	1992 (P) P. Damaschke, I. S. Deogun, D. Kratsch, G. Steiner [13]
Bipartite	2004 (NP) M.C. Golumbic [17]
Split	1985 (NP) C.J. Colbourn, L.K. Stewart [11]
Interval	1999 (P) M. S. Chang, S. L. Peng, J. L. Liaw [10]
Cograph	1981 (P) D. G. Corneil, H. Lerchs, L. S. Burlingham [12]
Bipartite Permutation	1993 (P) R. Srikant, R. Sundaram, L. S. Singh, C. P. Rangan [22]
Threshold	1981 (P) D. G. Corneil, H. Lerchs, L. S. Burlingham [12]

Πίνακας 8.6: Παρουσιάζει τη χρονολογία εύρεσης των πολυωνυμικών λύσεων, των αποδείξεων της NP-πληρότητας και τους συγγραφείς.

Επικάλυψη με μονοπάτια	**Χρονολογία εύρεσης πολυωνυμικής λύσης, αποδείξεων NP-πληρότητας και Συγγραφείς**
Comparability	2004 (NP) M.C. Golumbic [17]
Chordal	1985 (NP) C.J. Colbourn, L.K. Stewart [11]
Permutation	1992 (P) P. Damaschke, I. S. Deogun, D. Kratsch, G. Steiner [13]
Bipartite	2004 (NP) M.C. Golumbic [17]
Split	1985 (NP) C.J. Colbourn, L.K. Stewart [11]
Interval	1990 (P) S. R. Arikati, C. P. Rangan, O(n+m) αλγόριθμος [1] 1992 (P) W. L. Hsu, W. K. Shih, T. C. Chern, O($n^2 logn$) αλγόριθμος [19] 1999 (P) M. S. Chang, S. L. Peng, J. L. Liaw, γραμμικός αλγόριθμος [10]
Cograph	1996 (P) G. J. Chang, D. Kuo [8]
Bipartite Permutation	1993 (P) R. Srikant, R. Sundaram, L. S. Singh, C. P. Rangan [22]
Threshold	1996 (P) G. J. Chang, D. Kuo [8]

Πίνακας 8.7: Παρουσιάζει τη χρονολογία εύρεσης των πολυωνυμικών λύσεων, των αποδείξεων της NP-πληρότητας και τους συγγραφείς.

Κυρίαρχο Σύνολο	**Χρονολογία εύρεσης πολυωνυμικής λύσης, αποδείξεων NP-πληρότητας και Συγγραφείς**
Comparability	1983 (NP) A. K. Dewdney [14]
Chordal	1980 (NP) K. S. Booth [7]
Permutation	1985 (P) M. Farber , S. M. Keil [16]
Bipartite	1983 (NP) A. K. Dewdney [14]
Split	1984 (NP) G. J. Chang, G. L. Nemhauser [9]
Interval	1999 (P) M. S. Chang, S. L. Peng, J. L. Liaw [10]
Cograph	1985 (P) M. Farber , S. M. Keil [16]
Bipartite Permutation	1985 (P) M. Farber , S. M. Keil [16]
Threshold	1985 (P) M. Farber , S. M. Keil [16]

Κεφαλαιο 9

Συμπερασματα

9.1 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν κατά τη μελέτη των παραπάνω προβλημάτων για τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων που μελετήσαμε.

Παρουσιάσαμε τα αποτελέσματα της πολυπλοκότητας των προβλημάτων απόφασης στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων που έχουν μελετηθεί, δηλαδή για κάθε μια κλάση ποια προβλήματα παραμένουν NP-πλήρη και ποια ανήκουν στην κλάση P. Στην κλάση των μεταβατικών (comparability) γραφημάτων είδαμε ότι όλα τα προβλήματα παραμένουν NP-πλήρη. Το ίδιο συμβαίνει και στην κλάση των τριγωνικών (chordal) γραφημάτων, όπου όλα τα προβλήματα παραμένουν επίσης NP-πλήρη. Στα μεταθετικά (permutation) γραφήματα το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού, του αχρωματικού αριθμού και το μέγιστο σύνολο κοπής παραμένουν NP-πλήρη. Ενώ το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια και το κυρίαρχο σύνολο λύνονται πολυωνυμικά. Στα διμερή (bipartite) γραφήματα το πρόβλημα του μεγίστου συνόλου κοπής λύνεται πολυωνυμικά. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο για το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού, του αχρωματικού αριθμού, της επικάλυψης με μονοπάτια και το κυρίαρχο σύνολο όπου τα προβλήματα αυτά παραμένουν NP-πλήρη. Ακόμα στην κλάση των διαχωρίσιμων (split) γραφημάτων είδαμε ότι όλα τα προβλήματα παραμένουν NP-πλήρη. Στα γραφήματα διαστημάτων (interval) το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού, του αχρωματικού αριθμού και το μέγιστο σύνολο κοπής παραμένουν NP-πλήρη. Ενώ το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια και το κυρίαρχο σύνολο λύνονται πολυωνυμικά. Επειτα στα συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα (cographs) το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού παραμένει NP-πλήρες, ενώ όλα τα άλλα προβλήματα που μελετήθηκαν λύνονται πολυωνυμικά. Στα διμερή μεταθετικά (bipartite permutation) γραφήματα το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού και το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού παραμένει

NP-πλήρες, ενώ όλα τα άλλα προβλήματα που μελετήθηκαν ανήκουν στην κλάση P. Ενώ τέλος στα κατωφλικά (threshold) γραφήματα όλα τα προβλήματα που μελετήθηκαν, δηλαδή το πρόβλημα του αρμονικού αριθμού, του αχρωματικού αριθμού, του μεγίστου συνόλου κοπής, της επικάλυψης με μονοπάτια και το κυρίαρχο σύνολο λύνονται πολυωνυμικά, δηλαδή ανήκουν στην κλάση P.

Στο σημείο αυτό καλό είναι να τονίσουμε ότι έχει γίνει μεγάλη έρευνα σχετική με το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού στα διαχωρίσιμα (split) γραφήματα το οποίο παραμένει ανοιχτό. (Ο κ. Λ. Παληός, μέλος της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, ισχυρίστηκε ότι το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού στα διαχωρίσιμα γραφήματα μπορεί να λυθεί πολυωνυμικά). Ένα άλλο ανοιχτό πρόβλημα είναι το πρόβλημα εύρεσης μονοπατιού Hamilton στα γραφήματα διαστημάτων (interval graphs), όταν ξεκινάει από έναν συγκεκριμένο κόμβο και καταλήγει το μονοπάτι πάλι σε έναν συγκεκριμένο κόμβο του γραφήματος. Επίσης ανοιχτό είναι και το πρόβλημα εύρεσης μονοπατιού Hamilton στα γραφήματα διαστημάτων (interval graphs) με τον περιορισμό να ξεκινάει το μονοπάτι από έναν συγκεκριμένο κόμβο.

Σε άλλους πίνακες έγινε μια προσπάθεια να συγκεντρωθούν σε πίνακες κάποιες πληροφορίες όπως η χρονολογία εύρεσης της πολυωνυμικής λύσης, η χρονολογία εύρεσης των αποδείξεων της NP-πληρότητας και οι συγγραφείς. Στους πίνακες αυτούς όπου ήταν εφικτό δόθηκε και η σχετική βιβλιογραφία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] S.R. Arikati and C.P. Rangan, Linear algorithm for optimal path cover problem on interval graphs, Inform. Process. Lett. 35 (1990) 149-153.

[2] K. Asdre, K. Ioannidou and S.D. Nikolopoulos, The harmonious coloring problem is NP-complete for interval and permutation graphs, Disc. Appl. Math. 155 (2007) 2377-2382.

[3] K. Asdre and S.D. Nikolopoulos, NP-completness results for some problems on subclasses of bipartite and chordal graphs, Theoretical Computer Science 381 (2007) 248-259.

[4] H. Bodlaender, The Maximum Cut and Minimum Cut into Bounded Sets problems on Cographs, Technical report RUU-CS-87-12, Department of Computer Science, University of Utrecht, Netherlands (1987).

[5] H.L. Bodlaender, Achromatic number is NP-complete for cographs and interval graphs, Inform. Process. Lett. 31 (1989) 135-138.

[6] H.L. Bodlaender and K. Jansen, On the Complexity of the Maximum Cut Problem, Nord. J. Comput. 7 (2000) 14-31.

[7] K.S. Booth, Dominating sets in chordal graphs, Computer Science Department, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canade (1980).

[8] G.J. Chang and D. Kuo, The L(2, 1)-labeling problem on graphs, SIAM J. Discrete Math. 9 (1996) 309-316.

[9] G.J. Chang and G.L. Nemhauser, The k-domination and k-stability problems on sun-free chordal graphs, SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 5 (1984) 332-345.

[10] M.S. Chang, S.L. Peng and J.L. Liaw, Deferred-Query: An Efficient Aproach for some problems on Interval graphs, Networks 34 (1999) 1-10.

[11] C.J. Colbourn and L.K. Stewart, Permutation graphs: connected domination and Steiner trees, 1985.

[12] D.G Corneil, H. Lerchs and L.S. Burlingham, Complement Reducible graphs, Disc. Applied Math. 3 (1981) 163-174.

[13] P. Damaschke, J.S. Deogun, D. Kratsch and G. Steiner, Finding Hamiltonian paths in cocomparability graphs using the bump number algorithm, Order 8 (1992) 383-391.

[14] A.K. Dwdney, Fast Turing reductions between problems in NP, Computer Science Department,University of Western Ontario, London, Ontario (1983).

[15] M. Farber, G. Hahn, P. Hell and D. Miller, Concerning the achromatic number of graphs, J. Combin. Theory Ser. B 40, (1986) 21-39.

[16] M. Farber and J.M. Keil, Domination in permutation graphs, J. Algorithms 6, (1985) 309-321.

[17] M.C. Golumbic, Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Elsevier, Annals of Discrete Mathematics, 2004.

[18] M. Groetschel and W.R. Pulleyblank, Weakly bipartite graphs and the MaxCut problem, Oper. Res. Lett. 1, (1981) 23-27.

[19] W.L. Hsu, W.K. Shih and T.C. Chern, An $O(n^2 logn)$ time algorithm for the Hamiltonian cycle problem, SIAM J. Computing 21 (1992) 1026-1046.

[20] C.H. Papadimitriou, Computational Complexity, Addison-Wesley, 1994.

[21] J. Spinrad, A. Brandstadt and L. Stewart, Bipartite permutation graphs, Disc. Appl. Math. 18 (1987) 279-292.

[22] R. Srikant, R. Sundaram, L.S. Singh and C.P. Rangan, Optimal path cover problem on block graphs and bipartite permutation graphs, Department of Computer Science and Engineering, India, Theoritical Computer Science 115 (1993) 351-357.

Βιογραφικό

Η Ειρήνη Β. Μαντζέλου γεννήθηκε το έτος 1987 και μεγάλωσε στην πόλη Bielefeld της Γερμανίας. Το έτος 2005 εισήχθη στο Τμήμα Πληροφορικής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Το έτος 2010 αποφοίτησε από την σχολή και το ίδιο έτος εισήχθη στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών του ιδίου τμήματος.