ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Γ. Τσιατούχας

Διάρθρωση

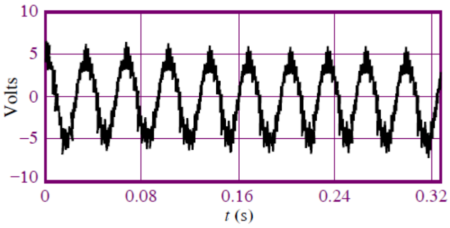
1. **Φίλτρα διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων**
2. **Φίλτρα διέλευσης υψηλών συχνοτήτων**
3. **Ζωνοπερατά φίλτρα**

VLSI Systems
and Computer Architecture Lab

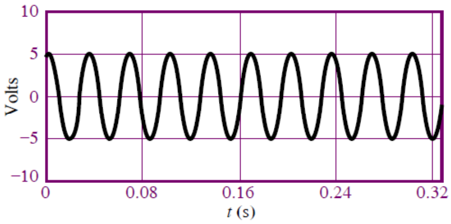
Ηλεκτρικά Φίλτρα

Τα ηλεκτρικά φίλτρα είναι κυκλώματα τα οποία μπορούν να εξασθενίσουν (να μειώσουν) το πλάτος σημάτων σε ανεπιθύμητες συχνότητες, τα οποία συνήθως οφείλονται σε ηλεκτρικό θόρυβο ή παρεμβολές.

Μη φιλτραρισμένο ημιτονικό σήμα.



Φιλτραρισμένο ημιτονικό σήμα.

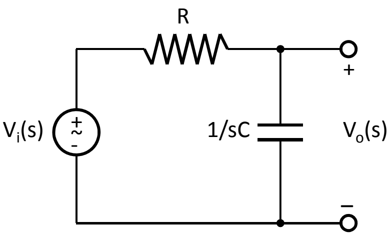


Φίλτρα Διέλευσης Χαμηλών Συχνοτήτων

Τα *φίλτρα διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων* (*χαμηλοπερατά φίλτρα*) επιτρέπουν σε σήματα χαμηλών συχνοτήτων τα οποία θα εφαρμοστούν στην είσοδό τους να εμφανιστούν στην έξοδό τους. Σήματα υψηλών συχνοτήτων εξασθενούν.

Στο σχήμα παρουσιάζεται ένα φίλτρο RC διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων με τη μορφή των φασόρων. Η συνάρτηση μεταφοράς (ή *απόκριση συχνότητας*) T(s)=T(jω) θα είναι:

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{V_o}{V_i}(j\omega) = T(j\omega)$$



Διαιρέτης τάσης: $V_o(s) = \dfrac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} V_i(s) \Rightarrow$

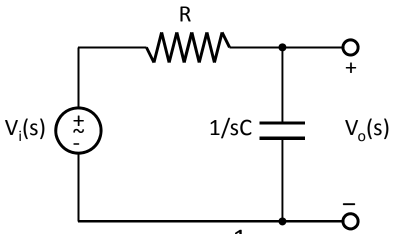
$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC}$$

Ανάλυση Χαμηλοπερατού Φίλτρου I

Παρατηρούμε ότι όταν η συχνότητα του σήματος ω μηδενίζεται η τιμή του μέτρου (κέρδους) της συνάρτησης μεταφοράς είναι μονάδα, δηλ. το φίλτρο επιτρέπει τη διέλευση όλου του σήματος εισόδου.

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \Rightarrow |T(j\omega=0)| = 1 \Rightarrow V_o(j\omega=0) = V_i(j\omega=0)$$

Καθώς για μηδενική συχνότητα το ημιτονοειδές σήμα γίνεται DC, το συγκεκριμένο φίλτρο δεν επηρεάζει τις συνεχείς (σταθερές - DC) τάσεις.



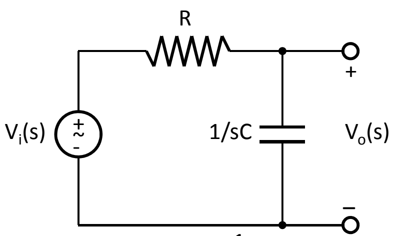
$$T(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

Ανάλυση Χαμηλοπερατού Φίλτρου II

Όσο όμως η συχνότητα του σήματος εισόδου αυξάνει, το πλάτος της απόκρισης συχνότητας ελαττώνεται καθώς ο παρονομαστής αυξάνει ανάλογα με τη συχνότητα ω. Το πλάτος (μέτρο ή κέρδος) της απόκρισης συχνότητας είναι:

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$$

όπου: $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ η *συχνότητα αποκοπής (cutoff frequency)*



$$T(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

Η φάση (γωνία) της απόκρισης συχνότητας είναι:

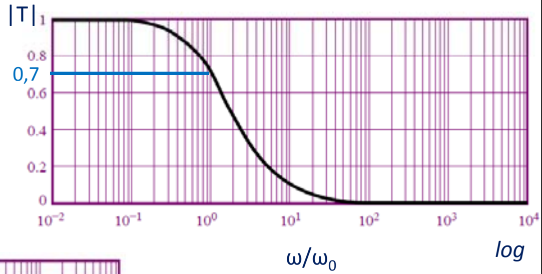
$$\angle T(j\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_0} = -\tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_0}$$

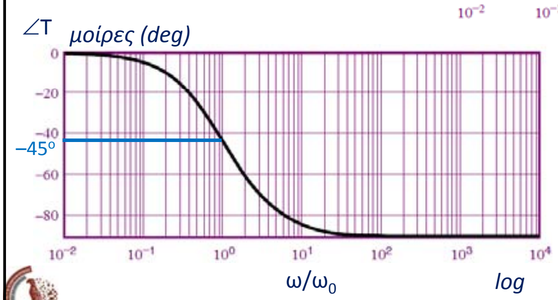
Διαγράμματα Πλάτους & Φάσης

Την απόκριση συχνότητας την αναπαριστούμε με δύο διαφορετικές γραφικές παραστάσεις που δίδουν το πλάτος $|T|$ και τη φάση $\angle T$ ως συνάρτηση του ω.

Απόκριση (διάγραμμα) πλάτους χαμηλοπερατού φίλτρου RC

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$





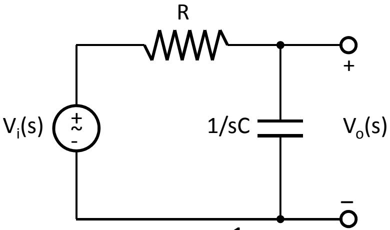
Απόκριση (διάγραμμα) φάσης χαμηλοπερατού φίλτρου RC

Συχνότητα Αποκοπής

Το χαμηλοπερατό φίλτρο του παραδείγματος επιτρέπει τη διέλευση σημάτων χαμηλών συχνοτήτων $\omega<<1/RC$ και φιλτράρει (εξασθενεί) τα σήματα υψηλών συχνοτήτων $\omega>>1/RC$.

Η συχνότητα αποκοπής $\omega_0=1/RC$ παριστάνει (προσεγγιστικά) το σημείο όπου το φίλτρο ξεκινά να φιλτράρει τα σήματα υψηλών συχνοτήτων. Η τιμή του πλάτους στην συχνότητα αποκοπής είναι:

$$|T(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \Rightarrow |T(j\omega_0)|_{dB} = 20\log_{10}|0{,}707| = -3dB$$



$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Η συχνότητα αποκοπής ταυτίζεται με τη συχνότητα γονάτου (ή συχνότητα -3db) της συνάρτησης μεταφοράς.

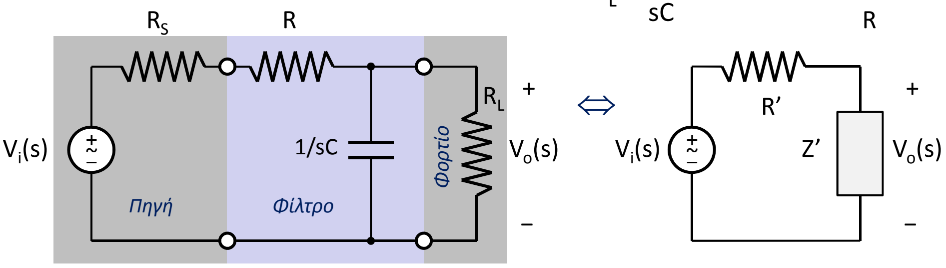
Η συχνότητα αποκοπής εξαρτάται αποκλειστικά από τις τιμές των R και C και ρυθμίζεται με αλλαγή αυτών των τιμών.

Παράδειγμα: Εξασθένηση Σήματος

Πρόβλημα: Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του κυκλώματος το οποίο αποτελείται από την πηγή σήματος, το φίλτρο και το φορτίο. Δίδονται R_S=50Ω, R=200Ω, R_L=500Ω και C=10μF.

Λύση: Οι ωμικές αντιστάσεις R_S και R είναι εν σειρά συνδεδεμένες ενώ ο πυκνωτής και το φορτίο είναι εν παραλλήλω.

$$R' = R_S + R \qquad Z' = R_L // Z_C = \frac{R_L Z_C}{R_L + Z_C} = \frac{\frac{R_L}{sC}}{R_L + \frac{1}{sC}} = \frac{R_L}{1 + sR_L C} = \frac{R_L}{1 + j\omega R_L C}$$



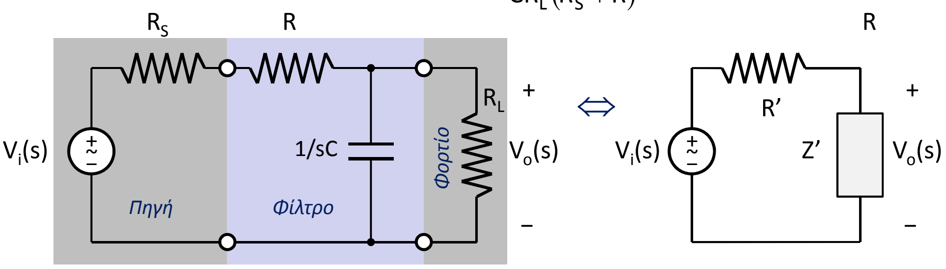
Αναπαράσταση με τη μορφή των φασόρων.

Παράδειγμα: Εξασθένηση Σήματος

Από το διαιρέτη τάσης, η απόκριση συχνότητας του κυκλώματος θα είναι:

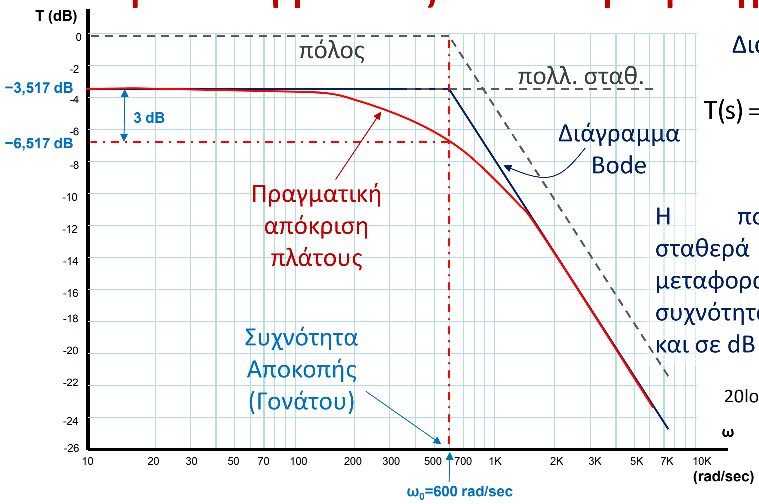
$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z'}{R' + Z'} = \frac{\frac{R_L}{1 + j\omega CR_L}}{R_S + R + \frac{R_L}{1 + j\omega CR_L}} = \frac{\frac{R_L}{R_L + R_S + R}}{1 + j\omega \frac{CR_L(R_S + R)}{R_L + R_S + R}} = \frac{0{,}667}{1 + j\frac{\omega}{600}}$$

Η συχνότητα αποκοπής είναι: $\omega_0 = \frac{R_L + R_S + R}{CR_L(R_S + R)} = 600 \ \ \text{rad/sec}$



Αναπαράσταση με τη μορφή των φασόρων.

Παράδειγμα: Εξασθένηση Σήματος



Διάγραμμα Bode

$$T(s) = 0{,}667 \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{600}}$$

Η πολλαπλασιαστική σταθερά της συνάρτησης μεταφοράς (απόκριση συχνότητας) είναι 0,667 και σε dB είναι −3,517 dB.

$$20\log_{10}|0{,}667| = -3{,}517\text{dB}$$

Η συχνότητα αποκοπής ω_0 είναι ο πόλος της συνάρτησης μεταφοράς (απόκρισης συχνότητας):

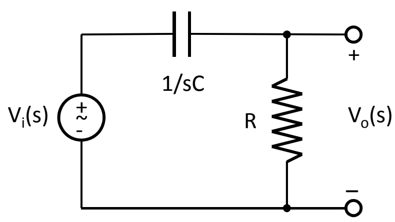
$$\omega_0 = 600 \ \text{rad/sec}$$

Φίλτρα Διέλευσης Υψηλών Συχνοτήτων

Τα *φίλτρα διέλευσης υψηλών συχνοτήτων* (*υψιπερατά φίλτρα*) επιτρέπουν σε σήματα υψηλών συχνοτήτων τα οποία θα εφαρμοστούν στην είσοδό τους να εμφανιστούν στην έξοδό τους. Τα σήματα χαμηλών συχνοτήτων εξασθενούν.

Στο σχήμα παρουσιάζεται ένα φίλτρο RC διέλευσης υψηλών συχνοτήτων με τη μορφή των φασόρων. Η συνάρτηση μεταφοράς (ή *απόκριση συχνότητας*) T(s)=T(jω) θα είναι:

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{V_o}{V_i}(j\omega) = T(j\omega)$$



Διαιρέτης τάσης: $V_o(s) = \dfrac{R}{R + \dfrac{1}{sC}} V_i(s) \Rightarrow$

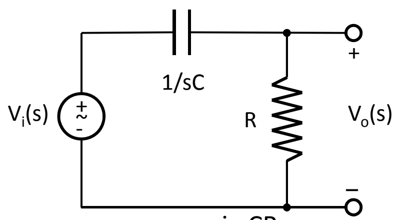
$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{sCR}{1 + sCR} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$

Ανάλυση Υψιπερατού Φίλτρου Ι

Το πλάτος (μέτρο ή κέρδος) της απόκρισης συχνότητας είναι:

$$|T(j\omega)| = \frac{\omega CR}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}} \qquad \text{με} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

όταν το ω τείνει στο άπειρο, το πλάτος τείνει στην μονάδα. Συνεπώς, το φίλτρο επιτρέπει στις υψηλές συχνότητες να περνούν στην έξοδό του.



$$T(j\omega) = \frac{j\omega CR}{1+j\omega CR}$$

Η φάση (γωνία) της απόκρισης συχνότητας είναι:

$$\angle T(j\omega) = 90^o - \arctan\frac{\omega}{\omega_0} = 90^o - \tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_0}$$

Ανάλυση Υψιπερατού Φίλτρου ΙΙ

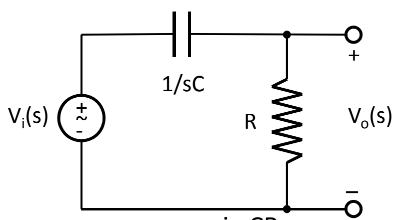
Όταν ω=0 τότε το πλάτος της απόκρισης συχνότητας είναι μηδέν.

$$|T(j\omega = 0)| = 0$$

και συνεπώς οι χαμηλές συχνότητες φιλτράρονται (εξασθενούν) και δεν περνούν στην έξοδο του φίλτρου.

Η συχνότητα: $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ είναι η *συχνότητα αποκοπής (cutoff frequency)*

Η συχνότητα αποκοπής παριστάνει (προσεγγιστικά) το σημείο όπου το φίλτρο ξεκινά να φιλτράρει τα σήματα χαμηλών συχνοτήτων. Η τιμή της καθορίζεται αποκλειστικά από τα R και C.



$$T(j\omega) = \frac{j\omega CR}{1+j\omega CR}$$

Η τιμή του πλάτους στην συχνότητα αποκοπής είναι:

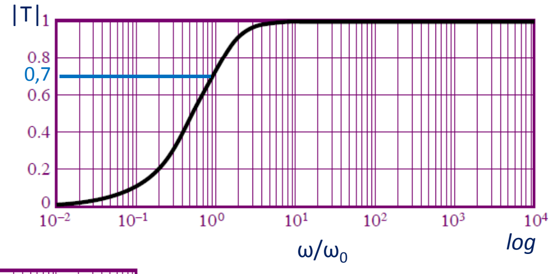
$$|T(j\omega_0)| = 0{,}707 \Rightarrow |T(j\omega_0)|_{dB} = -3dB$$

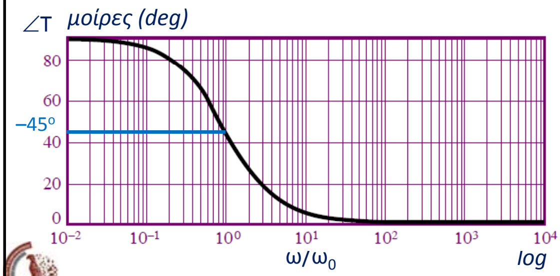
Διαγράμματα Πλάτους & Φάσης

Τα διαγράμματα της απόκρισης πλάτους |T| και φάσης ∠T ως συνάρτηση του ω δίδονται ακολούθως:

Απόκριση (διάγραμμα) πλάτους υψηπερατού φίλτρου RC

$$T(j\omega) = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$





Απόκριση (διάγραμμα) φάσης υψηπερατού φίλτρου RC

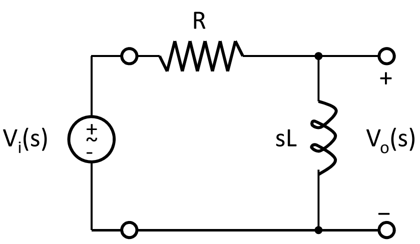
Παράδειγμα: Υψιπερατό Φίλτρο

Πρόβλημα: Προσδιορίστε τη συχνότητα αποκοπής του φίλτρου στο σχήμα που ακολουθεί.

Λύση: Αρχικά πρέπει να βρεθεί η απόκριση συχνότητας (συνάρτηση μεταφοράς).

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{V_o}{V_i}(j\omega) = T(j\omega)$$

Το κύκλωμα λειτουργεί ως διαιρέτης τάσης και θα ισχύει:



$$V_o(s) = \frac{sL}{R+sL} V_i(s) \Rightarrow T(s) = \frac{sL}{R+sL} = \frac{s}{\frac{R}{L} + s} \Rightarrow$$

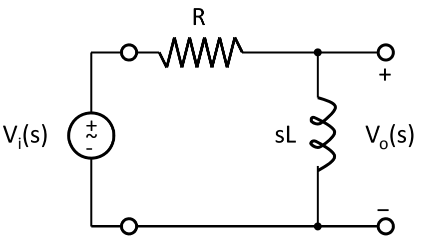
$$T(s) = \frac{s\frac{L}{R}}{1 + s\frac{L}{R}} \Rightarrow |T(j\omega)| = \frac{\omega\frac{L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\omega\frac{L}{R}\right)^2}}$$

Αναπαράσταση με τη μορφή των φασόρων.

Παράδειγμα: Υψιπερατό Φίλτρο

$$T(s) = \frac{s\frac{L}{R}}{1+s\frac{L}{R}} \Rightarrow |T(j\omega)| = \frac{\omega\frac{L}{R}}{\sqrt{1+\left(\omega\frac{L}{R}\right)^2}}$$

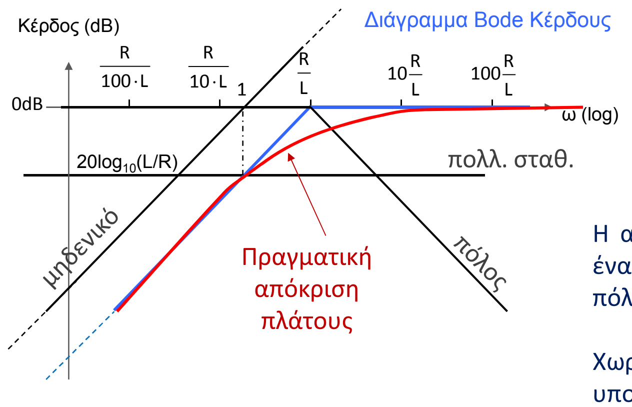
Όταν το ω τείνει στο μηδέν η απόκριση συχνότητας μηδενίζεται. Όταν το ω τείνει στο άπειρο η απόκριση συχνότητας τείνει στη μονάδα.
Η ω=R/L που αντιστοιχεί στον πόλο της T(s) είναι η συχνότητα αποκοπής.



$$\omega_0 = \frac{R}{L} = \text{συχνότητα} \quad \text{αποκοπής}$$

Αναπαράσταση με τη μορφή των φασόρων.

Παράδειγμα: Υψιπερατό Φίλτρο



$$T(s) = \frac{s\frac{L}{R}}{1+s\frac{L}{R}}$$

Η απόκριση συχνότητας έχει ένα μηδενικό στο s=0 και ένα πόλο στο s=−R/L.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέσαμε ότι R/L > 1.

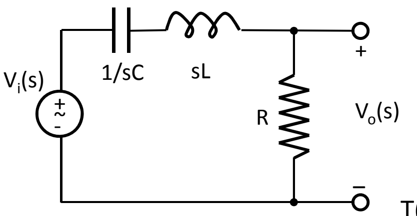
$20\log_{10}(L/R) = -20\log_{10}(R/L)$

end

Ζωνοπερατά Φίλτρα

Τα *ζωνοπερατά φίλτρα* (*bandpass filter*) ή *φίλτρα ζώνης* επιτρέπουν τη διέλευση σημάτων τα οποία βρίσκονται μέσα σε μια συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων.
Η ανάλυση του ζωνοπερατού φίλτρου δεύτερης τάξης του σχήματος (δηλ. ενός φίλτρου με δύο στοιχεία αποθήκευσης ενέργειας C και L) μας οδηγεί στην ακόλουθη απόκριση συχνότητας:

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{V_o}{V_i}(j\omega) = T(j\omega)$$



Διαιρέτης τάσης:

$$V_o(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC} + sL} V_i(s) \Rightarrow$$

$$V_o(s) = \frac{sCR}{1 + sCR + s^2LC} V_i(s)$$

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{sCR}{1 + sCR + s^2LC} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR + (j\omega)^2 LC}$$

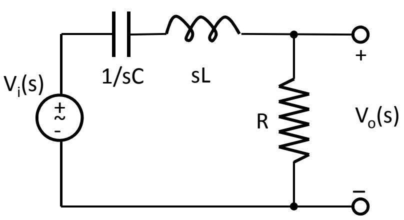
s=jω

Ανάλυση Ζωνοπερατών Φίλτρων I

Με παραγοντοποίηση της απόκρισης συχνότητας προκύπτει:

$$T(s) = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR + (j\omega)^2 LC} = \frac{jA\omega}{(j\omega/\omega_1 + 1)(j\omega/\omega_2 + 1)}$$

Οι συχνότητες ω_1 και ω_2 είναι οι πόλοι της απόκρισης συχνότητας και καθορίζουν το *εύρος ζώνης συχνοτήτων* (*ζώνη διέλευσης*) μέσα στο οποίο το φίλτρο επιτρέπει τη διέλευση σημάτων. Το A είναι πολλαπλασιαστική σταθερά εξαρτώμενη από τα R, L, C.



Για ω=0 η απόκριση του φίλτρου είναι μηδέν καθώς η σύνθετη αντίσταση του πυκνωτή 1/jωC απειρίζεται.
Όταν το ω τείνει στο άπειρο και πάλι η απόκριση του φίλτρου είναι μηδέν καθώς η σύνθετη αντίσταση του πηνίου jωL απειρίζεται.

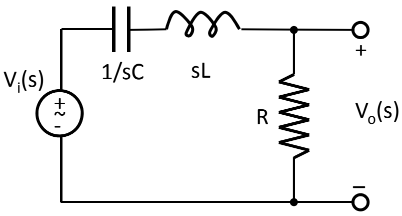
Ανάλυση Ζωνοπερατών Φίλτρων ΙΙ

Το πλάτος της απόκρισης συχνότητας είναι:

$$|T(j\omega)| = \frac{A\omega}{\sqrt{\left((\omega/\omega_1)^2+1\right)\left((\omega/\omega_2)^2+1\right)}}$$

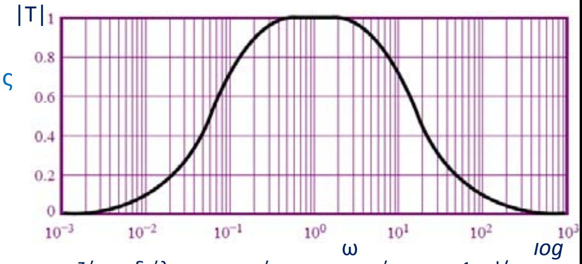
Η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι:

$$\angle T(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{\omega_1} - \arctan\frac{\omega}{\omega_2}$$



Διαγράμματα Πλάτους & Φάσης

Τα διαγράμματα της απόκρισης πλάτους |T| και φάσης ∠T ως συνάρτηση του ω δίδονται ακολούθως:



Απόκριση (διάγραμμα) πλάτους ζωνοπερατού φίλτρου RLC

$$T(s) = \frac{jA\omega}{(j\omega/\omega_1+1)(j\omega/\omega_2+1)}$$

Άξονες κανονικοποιημένοι ώστε το κέντρο της ζώνης διέλευσης να είναι στη συχνότητα ω=1rad/sec.

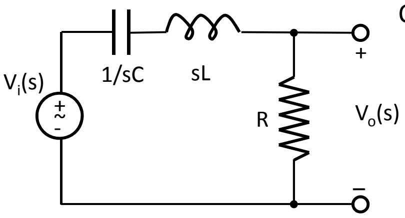
Απόκριση (διάγραμμα) φάσης ζωνοπερατού φίλτρου RLC

Συντονισμός

Η απόκριση συχνότητας για το φίλτρο του παραδείγματος μπορεί να γραφεί:

$$T(s) = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR + (j\omega)^2 LC} = \frac{(2\zeta/\omega_n)j\omega}{1 + (2\zeta/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2} = \frac{(1/Q\omega_n)j\omega}{1 + (1/Q\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2}$$

όπου: $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ = συχνότητα συντονισμού ή ιδιοσυχνότητα (resonant frequency)

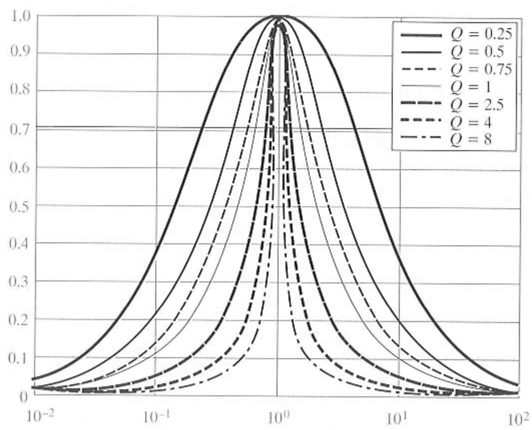


$$Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{\omega_n CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$ = συντελεστής ποιότητας (quality factor)

$$\zeta = \frac{1}{2Q} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$ = λόγος απόσβεσης

Απόκριση Πλάτους

Κανονικοποιημένη απόκριση πλάτους ζωνοδιαβατού φίλτρου RLC.



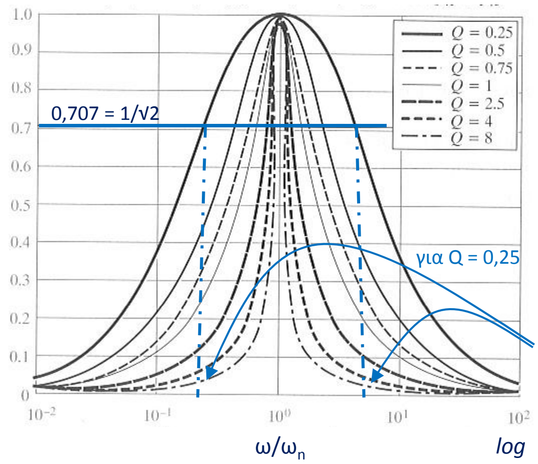
ω/ω_n *log*

Στη συχνότητα συντονισμού ω_n η απόκριση πλάτους παίρνει τη μέγιστη τιμή.

Όσο αυξάνει ο συντελεστής Q, τόσο αυξάνει η οξύτητα της κορυφής (*το φίλτρο γίνεται περισσότερο επιλεκτικό*).

Εύρος Ζώνης

Το μέτρο της επιλεκτικότητας ενός φίλτρου είναι το εύρος ζώνης (*bandwidth*).



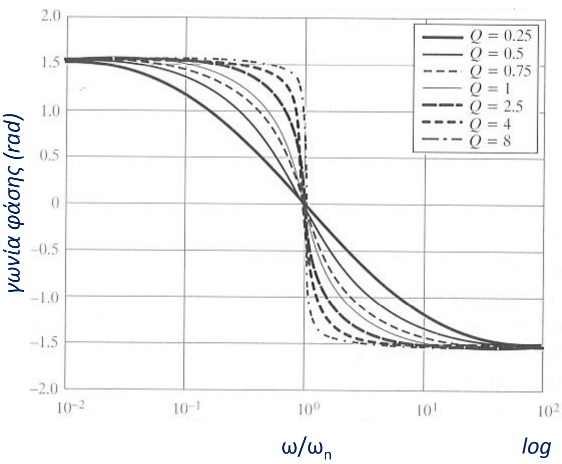
Η περιοχή των συχνοτήτων μεταξύ των σημείων της τομής της ευθείας στο ύψος 0,707 και της καμπύλης της απόκρισης πλάτους ορίζεται ως το *εύρος ζώνης μισής ισχύος* (*half-power bandwidth*).

Οι συχνότητες που αντιστοιχούν στις τομές της ευθείας με την απόκριση πλάτους ονομάζονται *συχνότητες μισής ισχύος* (*half-power frequencies*).

Ένας άλλος ορισμός για το εύρος ζώνης είναι ο εξής: $B = \dfrac{\omega_n}{Q}$

Απόκριση Φάσης

Κανονικοποιημένη απόκριση φάσης ζωνοπερατού φίλτρου RLC.



Όσο αυξάνει ο συντελεστής Q, τόσο περισσότερο απότομη είναι η μεταβολή της φάσης.

Παράδειγμα: Ζωνοπερατό Φίλτρο

Πρόβλημα: Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του ζωνοπερατού φίλτρου όταν:
α) R=1KΩ, C=10μF και L=5mH και β) R=10Ω, C=10μF και L=5mH .

Λύση: Για το συγκεκριμένο φίλτρο βρήκαμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{sCR}{1 + sCR + s^2LC} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR + (j\omega)^2 LC}$$

α) Στην πρώτη περίπτωση οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι:

ω_1 = 100,05 rad/sec και ω_2 = 199899,95 rad/sec

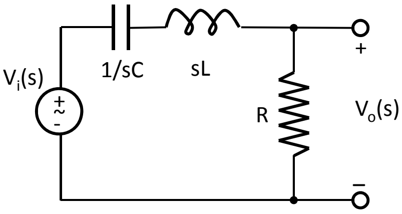
Η συχνότητα συντονισμού είναι:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 4{,}4 \times 10^3 \text{rad/sec}$$

Ο συντελεστής ποιότητας είναι:

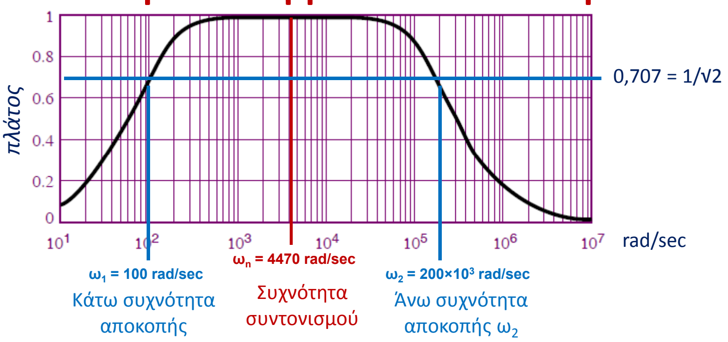
$$Q = \frac{1}{\omega_n CR} = 0{,}022$$

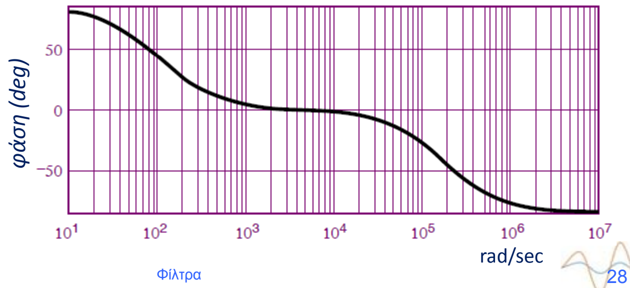
Το εύρος ζώνης είναι: $B = \frac{\omega_n}{Q} = 203182 \text{rad/sec}$



Αναπαράσταση με τη μορφή των φασόρων.

Παράδειγμα: Ζωνοπερατό Φίλτρο



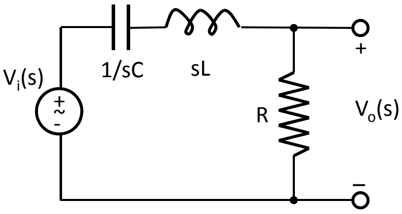


Παράδειγμα: Ζωνοπερατό Φίλτρο

β) Στην δεύτερη περίπτωση οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι:

$\omega_1 = 3711{,}85$ rad/sec και $\omega_2 = 5388{,}15$ rad/sec

Η συχνότητα συντονισμού είναι και πάλι: $\omega_n = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} = 4{,}4 \times 10^3 \,\text{rad/sec}$



Ο συντελεστής ποιότητας είναι:

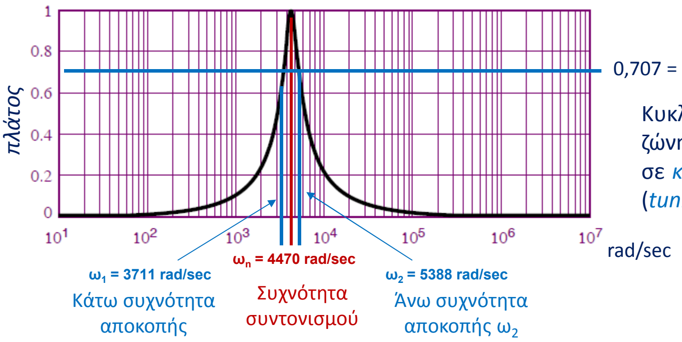
$$Q = \frac{1}{\omega_n CR} = 2{,}22$$

Το εύρος ζώνης είναι:

$$B = \frac{\omega_n}{Q} = 2013 \quad \text{rad/sec}$$

Αναπαράσταση με τη μορφή των φασόρων.

Παράδειγμα: Ζωνοπερατό Φίλτρο



Κυκλώματα με στενό εύρος ζώνης βρίσκουν εφαρμογή σε *κυκλώματα συντονισμού* (*tuning circuits*).

Όσο πιο επιλεκτικό είναι το φίλτρο τόσο πιο απότομη είναι η μεταβολή της φάσης.