ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

5ο Κεφάλαιο

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Γ. Τσιατούχας

Διάρθρωση

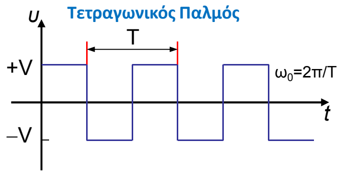
1. **Φάσμα συχνοτήτων**
2. **Πεδίο μιγαδικής συχνότητας – Πόλοι & μηδενικά**
3. **Συναρτήσεις μεταφοράς – Κέρδος & φάση**
4. **Διαγράμματα Bode κέρδους & φάσης**

VLSI Systems
and Computer Architecture Lab

Φάσμα Συχνοτήτων

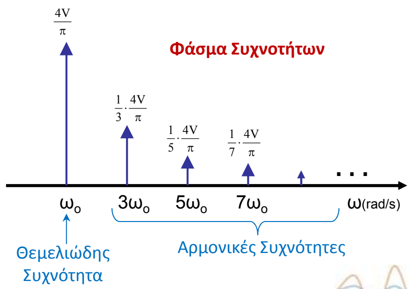
Το φάσμα συχνοτήτων αποτελεί μία περιγραφή ενός σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων. Επιτυγχάνεται μέσω μαθηματικών εργαλείων (σειρά και μετασχηματισμός Fourier).

Ειδικότερα, η σειρά Fourier επιτρέπει την έκφραση ενός σήματος, που είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου, ως το άθροισμα ενός άπειρου αριθμού ημιτόνων των οποίων οι συχνότητες έχουν αρμονική σχέση μεταξύ τους.



$$\upsilon(t) = \frac{4V}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \ldots\right)$$

Σειρά Fourier



Πεδίο Μιγαδικής Συχνότητας s

Ζητούμενο είναι η εύρεση της ενίσχυσης τάσης (ρεύματος) καθώς και της διαφοράς φάσης μεταξύ εισόδου-εξόδου ενός κυκλώματος ως συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας *s* ή *jω*, με αναφορά σε ημιτονοειδή σήματα.

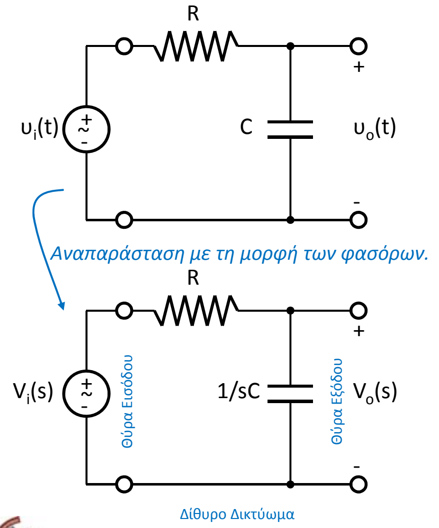
Για το σκοπό αυτό πραγματοποιείται ανάλυση στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας s, όπου η χωρητικότητα αντικαθίσταται από μια σύνθετη αγωγιμότητα sC (ή ισοδύναμα από μια σύνθετη αντίσταση 1/sC) και η επαγωγή από μια σύνθετη αντίσταση sL.

Ακολούθως, με τη χρήση των τεχνικών ανάλυσης κυκλωμάτων στη μορφή των φασόρων που έχουν παρουσιαστεί, βρίσκεται η *συνάρτηση μεταφοράς*, η οποία ορίζεται ως ο λόγος του σήματος (τάσης ή ρεύματος) στην έξοδο του κυκλώματος προς το σήμα (τάσης ή ρεύματος) στην είσοδό του.

$$T(s) = T(j\omega) \equiv H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} \quad \text{ή} \quad T(s) \equiv H(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)} = \frac{I_o(j\omega)}{I_i(j\omega)}$$

s = jω

Παράδειγμα 1

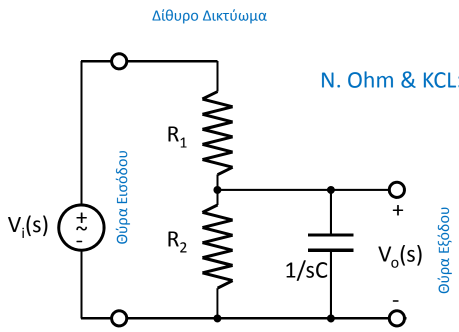


Διαιρέτης τάσης:

$$V_o(s)=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}V_i(s)\Rightarrow$$

$$T(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{1}{1+sRC}$$

Παράδειγμα 2



N. Ohm & KCL:

$$\frac{V_o(s)}{(R_2//(1/sC))}=\frac{V_i(s)}{R_1+(R_2//(1/sC))}\Rightarrow$$

$$T(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{\dfrac{R_2/sC}{R_2+1/sC}}{R_1+\left(\dfrac{R_2/sC}{R_2+1/sC}\right)}=$$

$$=\frac{R_2/sC}{R_1(R_2+1/sC)+R_2/sC}=\frac{R_2/sC}{R_1R_2+(R_1+R_2)/sC}=\frac{1/sCR_1}{1+(R_1+R_2)/sCR_1R_2}=$$

$$=\frac{1/CR_1}{s+(R_1+R_2)/CR_1R_2}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Γνωρίζοντας τη συνάρτηση μεταφοράς T(s) μπορούμε να τη μελετήσουμε για φυσικές συχνότητες με αντικατάσταση του s με jω. Η συνάρτηση μεταφοράς T(jω) είναι μια σύνθετη ποσότητα και το μέτρο της δίνει την απόκριση μέτρου (κέρδους) ενώ η γωνία την απόκριση φάσης ενός κυκλώματος.

Γενικά για τα κυκλώματα που μας ενδιαφέρουν η T(s) μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή λόγου πολυωνύμων:

$$T(s) = \frac{\alpha_m s^m + \alpha_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \alpha_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_0} \qquad (m \le n)$$

όπου οι συντελεστές α και b είναι πραγματικοί αριθμοί και η τάξη m του αριθμητή είναι μικρότερη ή ίση με την τάξη n του παρονομαστή (τάξη του δικτύου).

Πόλοι και Μηδενικά

Εναλλακτικά, με παραγοντοποίηση των δύο πολυωνύμων, η συνάρτηση μεταφοράς T(s) μπορεί να εκφραστεί ως:

$$T(s) = \alpha_m \frac{(s - Z_1)\cdot(s - Z_2)\cdots(s - Z_m)}{(s - P_1)\cdot(s - P_2)\cdots(s - P_n)}$$

όπου Z_1, Z_2, …,Z_m είναι οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή και P_1, P_2, …,P_n είναι οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή.

Τα Z_1, Z_2, …,Z_m ονομάζονται μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς και τα P_1, P_2, …,P_n ονομάζονται πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς ή φυσικές συχνότητες του συστήματος.

Οι πόλοι και τα μηδενικά μπορεί να είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί. Επειδή τα α, b είναι πραγματικοί, οι μιγαδικοί πόλοι ή μηδενικά πρέπει να εμφανίζονται σε συζυγή ζεύγη [(x+jy) και (x–jy)].

Για τιμές του s >> από όλους τους πόλους και τα μηδενικά ισχύει: $T(s) \cong \frac{\alpha_m}{s^{n-m}}$

Για να είναι ευσταθές ένα κύκλωμα θα πρέπει οι συντελεστές του παρονομαστή να είναι τέτοιοι ώστε οι ρίζες του παρονομαστή να έχουν όλες αρνητικά πραγματικά μέρη.

Κέρδος & Φάση Συνάρτησης Μεταφοράς

$$T(s) = \alpha_m \frac{(s-Z_1)\cdot(s-Z_2)\cdots(s-Z_m)}{(s-P_1)\cdot(s-P_2)\cdots(s-P_n)}$$

Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση μεταφοράς T(s) το *s* με *jω* παίρνουμε την T(jω) η οποία μπορεί να γραφεί στο συμβολισμό των φασόρων ως ακολούθως:

$$T(j\omega) = |T(j\omega)| \cdot e^{j\angle T(j\omega)}$$

όπου |T(jω)| το κέρδος (μέτρο) και ∠T(jω) η φάση (γωνία) της T(jω).

Το **κέρδος** δίδεται από την ακόλουθη σχέση:

$$|T(j\omega)| = |\alpha_m| \frac{|(j\omega - Z_1)|\cdot|(j\omega - Z_2)|\cdots|(j\omega - Z_m)|}{|(j\omega - P_1)|\cdot|(j\omega - P_2)|\cdots|(j\omega - P_n)|} = |\alpha_m| \frac{\sqrt{\omega^2 + Z_1^2}\cdot\sqrt{\omega^2 + Z_2^2}\cdots\sqrt{\omega^2 + Z_m^2}}{\sqrt{\omega^2 + P_1^2}\cdot\sqrt{\omega^2 + P_2^2}\cdots\sqrt{\omega^2 + P_n^2}}$$

Η **φάση** δίδεται από την ακόλουθη σχέση :

$$\angle T(j\omega) = \sum_{i=1}^{m}\left(\tan^{-1}\frac{\omega}{-Z_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\tan^{-1}\frac{\omega}{-P_i}\right)$$

αντίστροφο τόξο εφαπτομένης

$\tan^{-1}(x) \equiv \arctan(x)$

$y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$

Το Κέρδος (Μέτρο) σε dB

$$T(s) = \alpha_m \frac{(s-Z_1)\cdot(s-Z_2)\cdots(s-Z_m)}{(s-P_1)\cdot(s-P_2)\cdots(s-P_n)}$$

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, το κέρδος της ανωτέρω συνάρτησης μεταφοράς είναι:

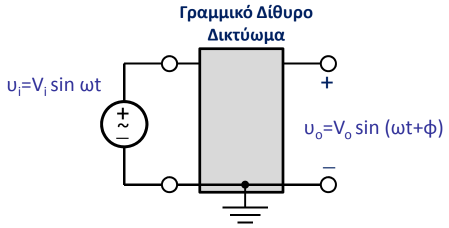
$$|T(j\omega)| = |\alpha_m| \frac{|(j\omega - Z_1)|\cdot|(j\omega - Z_2)|\cdots|(j\omega - Z_m)|}{|(j\omega - P_1)|\cdot|(j\omega - P_2)|\cdots|(j\omega - P_n)|} = |\alpha_m| \frac{\sqrt{\omega^2 + Z_1^2}\cdot\sqrt{\omega^2 + Z_2^2}\cdots\sqrt{\omega^2 + Z_m^2}}{\sqrt{\omega^2 + P_1^2}\cdot\sqrt{\omega^2 + P_2^2}\cdots\sqrt{\omega^2 + P_n^2}}$$

Συνηθίζουμε να εκφράζουμε το κέρδος σε *decibel* (*dB*), ως ακολούθως:

$$|T(j\omega)|_{(dB)} = 20\log_{10}|T(j\omega)| \quad \text{dB}$$

$$|T(j\omega)|_{(dB)} = |\alpha_m|_{(dB)} + \left(\sum_{i=1}^{m}|(j\omega + Z_i)|_{(dB)}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}|(j\omega + P_i)|_{(dB)}\right)$$

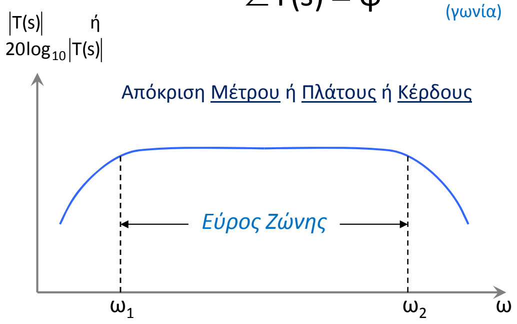
Απόκριση Συχνότητας Κυκλωμάτων



Συνάρτηση Μεταφοράς T(s)

$$|T(s)| = \left|\frac{V_o(s)}{V_i(s)}\right|$$ Κέρδος (μέτρο)

$$\angle T(s) = \phi$$ Φάση (γωνία)



Το εύρος των συχνοτήτων, για το οποίο το κέρδος του ενισχυτή είναι περίπου σταθερό (με διακύμανση μέχρι 3dB), ονομάζεται: **Εύρος Ζώνης**

Συναρτήσεις Πρώτης Τάξης

Συχνά, οι συναρτήσεις μεταφοράς που μας απασχολούν έχουν πραγματικούς πόλους και μηδενικά και μπορούν να γραφούν ως γινόμενο συναρτήσεων μεταφοράς πρώτης τάξης με την ακόλουθη μορφή:

$$T(s) = \frac{\alpha_1 s + \alpha_0}{s + \omega_0}$$

όπου $-\omega_0$ ο πραγματικός πόλος και η ω_0 καλείται συχνότητα πόλου και είναι ίση με το αντίστροφο της σταθεράς χρόνου του αντίστοιχου δικτύου μονής σταθεράς χρόνου.

Οι σταθερές α_0 και α_1 καθορίζουν τον τύπο του δικτύου μονής σταθεράς χρόνου.

Βαθυπερατό δίκτυο πρώτης τάξης: $T(s) = \frac{\alpha_0}{s + \omega_0}$ Κέρδος DC α_0/ω_0 και ω_0 συχνότητα γονάτου ή 3dB. Μηδενικό στο s=∞

Υψιπερατό δίκτυο πρώτης τάξης: $T(s) = \frac{\alpha_1 s}{s + \omega_0}$ Μηδενικό στο s=0

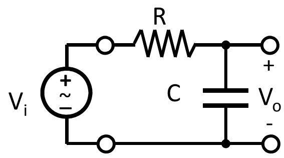
Δίκτυα Μονής Σταθεράς Χρόνου

Ένα δίκτυο μονής σταθεράς χρόνου – ΜΣΧ συνίσταται (ή μπορεί να εκφυλιστεί σε ένα τέτοιο) από ένα παθητικό στοιχείο (πηνίο ή πυκνωτή) και μία ωμική αντίσταση.

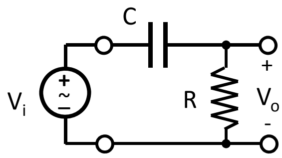
Δίκτυο Πυκνωτή C – Αντίστασης R | *Δίκτυο Πηνίου L – Αντίστασης R*

$\tau = CR$ ← **Σταθερά Χρόνου** → $\tau = \dfrac{L}{R}$

Δίκτυα Μονής Σταθεράς Χρόνου Πυκνωτή – Αντίστασης

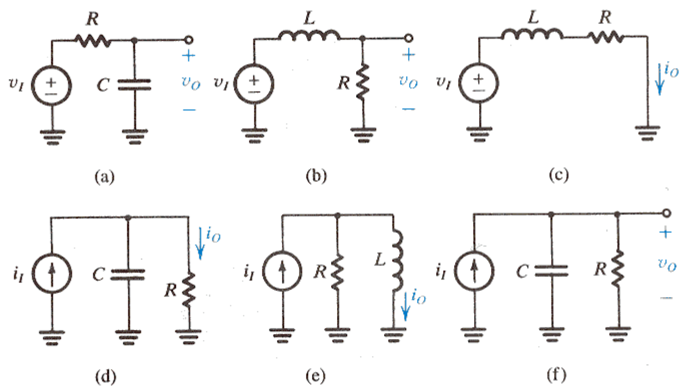


Βαθυπερατό



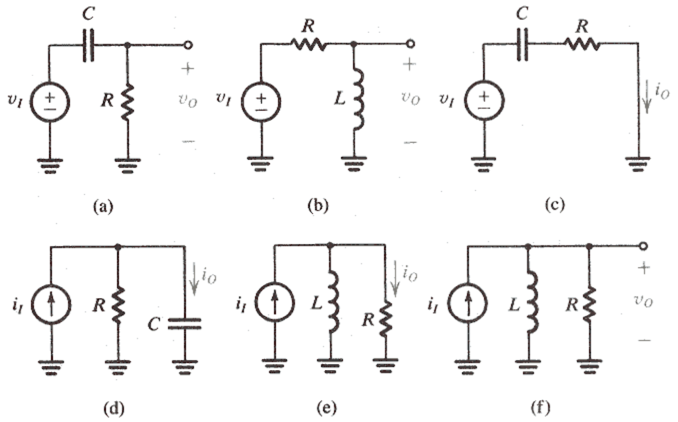
Υψιπερατό

Δίκτυα ΜΣΧ Βαθυπερατού Τύπου



$\omega \to 0 \Rightarrow Z_C = 1/(j\omega C) \to \infty$ και $Z_L = j\omega L \to 0$

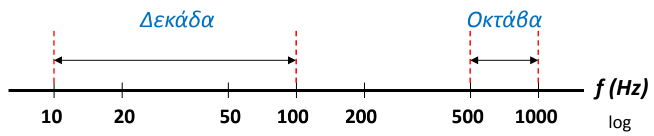
Δίκτυα ΜΣΧ Υψιπερατού Τύπου



$\omega \to \infty \Rightarrow Z_C = 1/(j\omega C) \to 0$ και $Z_L = j\omega L \to \infty$

Λογαριθμικές Κλίμακες Συχνότητας

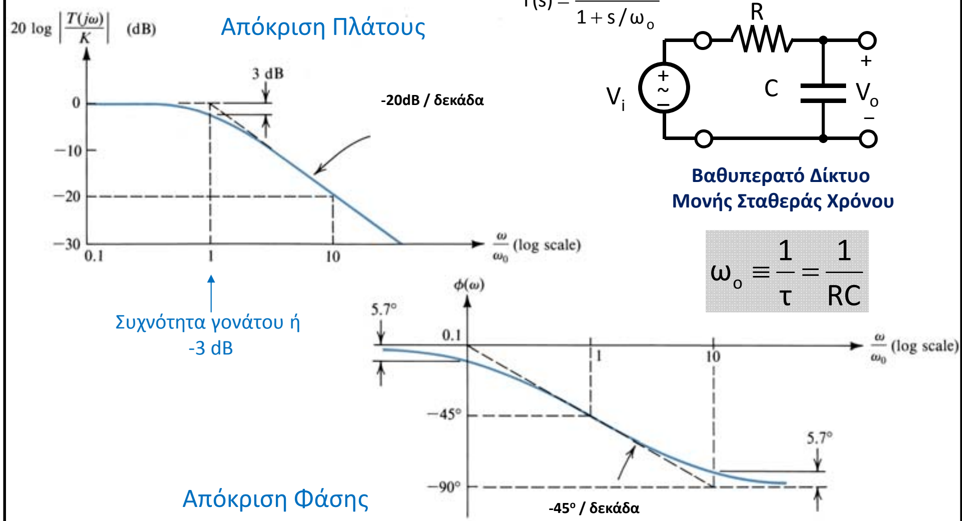
Στην αναπαράσταση της απόκρισης του κέρδους και της φάσης χρησιμοποιούμε λογαριθμική κλίμακα για τη συχνότητα. Μια τέτοια λογαριθμική κλίμακα δίδεται στο σχήμα που ακολουθεί.



- Μία *δεκάδα* είναι ένα εύρος συχνοτήτων για τις οποίες ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη είναι 10. Π.χ. το εύρος συχνοτήτων από 2Hz σε 20Hz είναι μία δεκάδα ενώ το εύρος συχνοτήτων από 50Hz σε 5000Hz είναι δύο δεκάδες.
- Μία *οκτάβα* είναι ένα εύρος συχνοτήτων για τις οποίες ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη είναι 2. Π.χ. το εύρος συχνοτήτων από 10Hz σε 20Hz είναι μία οκτάβα ενώ το εύρος συχνοτήτων από 2KHz σε 16KHz είναι τρεις οκτάβες.

Απόκριση Βαθυπερατών Δικτύων ΜΣΧ

$$T(s) = \frac{K}{1 + s/\omega_o}$$

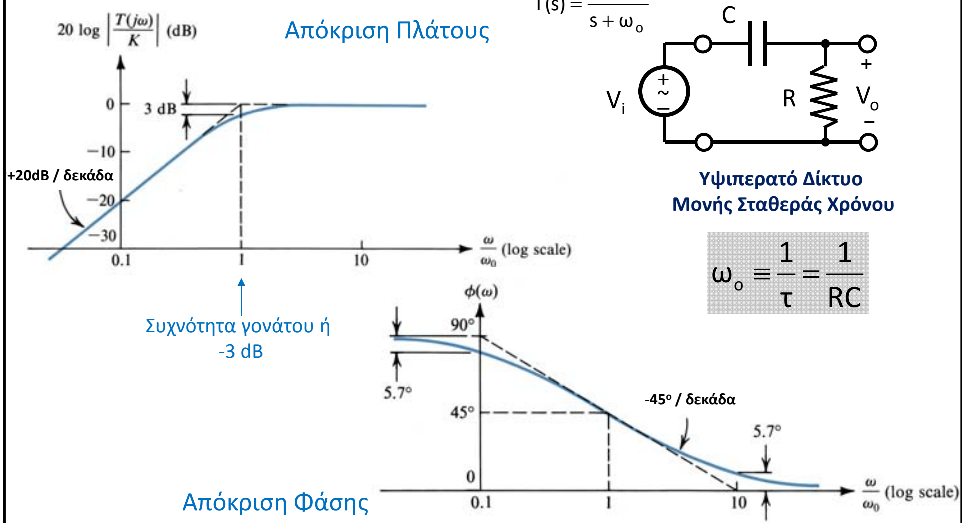


Βαθυπερατό Δίκτυο
Μονής Σταθεράς Χρόνου

$$\omega_o \equiv \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

Απόκριση Υψιπερατών Δικτύων ΜΣΧ

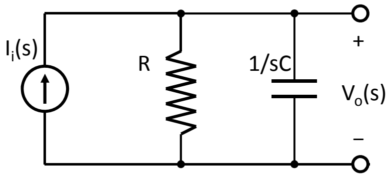
$$T(s) = \frac{Ks}{s + \omega_o}$$



Υψιπερατό Δίκτυο
Μονής Σταθεράς Χρόνου

$$\omega_o \equiv \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

Παράδειγμα 3 (I)



Η συνάρτηση μεταφοράς του RC κυκλώματος είναι:

$$T(s) = \frac{1/C}{s + 1/RC}$$

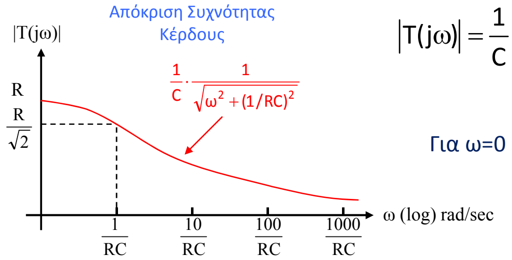
και έχει ένα πόλο στο $s = -1/RC$.

Αντικαθιστώντας το *s* με *jω,* το κέρδος και η φάση της T(jω) προκύπτουν ως εξής:

$$T(j\omega) = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{j\omega - (-1/RC)} \Rightarrow$$

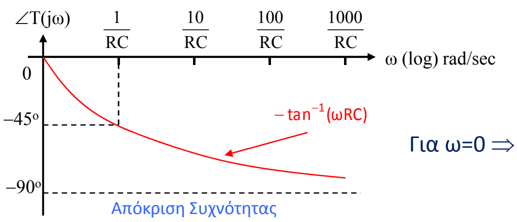
$$\Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)| = \dfrac{1}{C} \cdot \dfrac{1}{|j\omega - (-1/RC)|} = \dfrac{1}{C} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}} \\ \angle T(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC) \end{cases}$$

Παράδειγμα 3 (II)



$$|T(j\omega)| = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{|j\omega - (-1/RC)|} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}}$$

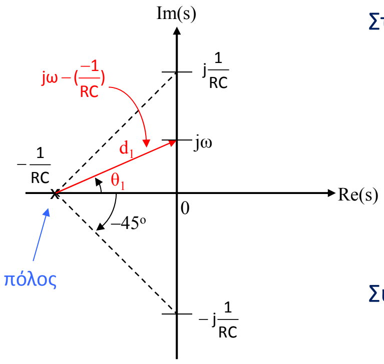
Για ω=0 ⇒ |T(0)|=R ενώ για ω>> ⇒ |T(jω)|≈1/ωC



$$\angle T(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

Για ω=0 ⇒ ∠T(0)=0 ενώ για ω>> ⇒ ∠T(jω) → –90º

Παράδειγμα 3 (III)



Στο επίπεδο της μιγαδικής συχνότητας θα έχουμε:

$$\left|\left(j\omega-\left(\frac{-1}{RC}\right)\right)\right|=d_1$$

$$\angle\left(j\omega-\left(\frac{-1}{RC}\right)\right)=\theta_1$$

Συνεπώς:

$$|T(j\omega)|=\frac{1}{Cd_1} \quad \text{και} \quad \angle T(j\omega)=-\theta_1$$

Για ω=−1/RC:

$$\left|T(j\frac{1}{RC})\right|=\frac{R}{\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad \angle T(j\omega)=-45^o$$

Διαγράμματα Bode Κέρδους (I)

Τα διαγράμματα Bode είναι μια απλή τεχνική για να εξάγουμε προσεγγιστικά διαγράμματα του κέρδους και της φάσης μιας συνάρτησης μεταφοράς όταν γνωρίζουμε τους πόλους και τα μηδενικά της.

Έστω η γενική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς:

$$T(s)=\alpha_m\frac{(s+Z_1)\cdot(s+Z_2)\cdots(s+Z_m)}{(s+P_1)\cdot(s+P_2)\cdots(s+P_n)}$$

Αντικαθιστώντας το *s* με *jω*, το κέρδος (μέτρο) θα είναι:

$$|T(j\omega)|=|\alpha_m|\frac{|(j\omega+Z_1)|\cdot|(j\omega+Z_2)|\cdots|(j\omega+Z_m)|}{|(j\omega+P_1)|\cdot|(j\omega+P_2)|\cdots|(j\omega+P_n)|}$$

Εκφράζοντας το κέρδος σε dB θα έχουμε:

$$|T(j\omega)|_{(dB)}=|\alpha_m|_{(dB)}+\left(\sum_{i=1}^{m}|(j\omega+Z_i)|_{(dB)}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}|(j\omega+P_i)|_{(dB)}\right)$$

Διαγράμματα Bode Κέρδους (II)

Η στρατηγική για τη σχεδίαση των διαγραμμάτων Bode του κέρδους $|T(j\omega)|$ σε dB είναι απλή και βασίζεται στη σχεδίαση ξεχωριστά κάθε όρου στο δεξί μέρος της προηγούμενης εξίσωσης και στη συνέχεια με υπέρθεση των γραφημάτων γίνεται η εξαγωγή του διαγράμματος:

α) Αρχικά ο όρος $|\alpha_m|_{dB}=20\log_{10}|\alpha_m|$ δίνει μία οριζόντια ευθεία γραμμή στο επίπεδο $20\log_{10}|\alpha_m|$.

β) Οι όροι $|(j\omega+Z_i)|_{dB}=20\log_{10}|(j\omega+Z_i)|$ μπορούν να αναλυθούν ως ακολούθως:

i. Για $\omega<<Z_i$ ο όρος $|j\omega+Z_i|$ μπορεί να αντικατασταθεί με το $|Z_i|$ με αποτέλεσμα για αυτές τις τιμές του ω η γραφική απόδοση είναι μία οριζόντια ευθεία γραμμή στο επίπεδο $20\log_{10}|Z_i|$.

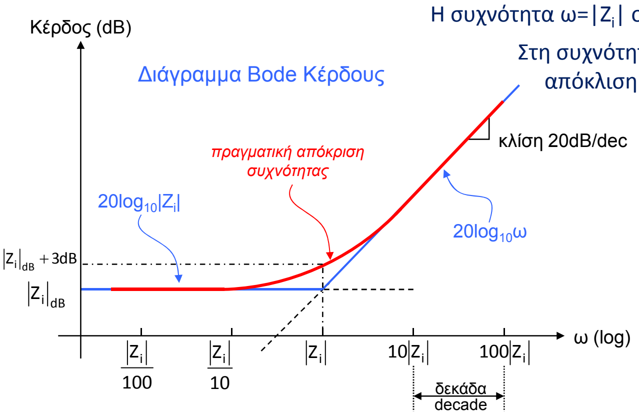
ii. Για $\omega>>Z_i$ ο όρος $|j\omega+Z_i|$ μπορεί να αντικατασταθεί με $|j\omega|$, που απλά είναι το ω. Συνεπώς για αυτές τις τιμές του ω η γραφική απόδοση είναι μία ευθεία γραμμή με κλίση 20dB/dec (*λογαριθμική κλίμακα στον x άξονα*).

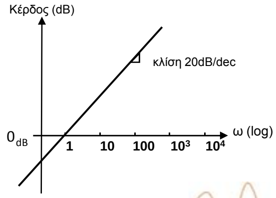
Υπενθύμιση: $\log(x\cdot y)=\log x+\log y$

Διαγράμματα Bode Κέρδους (III)

Η συχνότητα $\omega=|Z_i|$ ονομάζεται συχνότητα γονάτου

Στη συχνότητα αυτή εμφανίζεται η μέγιστη απόκλιση από την πραγματική καμπύλη, ίση με 3 db.





Όταν $Z_i=0$ η γραφική αποτελείται από μια μόνο ευθεία, με κλίση 20dB/dec, η οποία τέμνει τον άξονα 0dB στο ω=1.

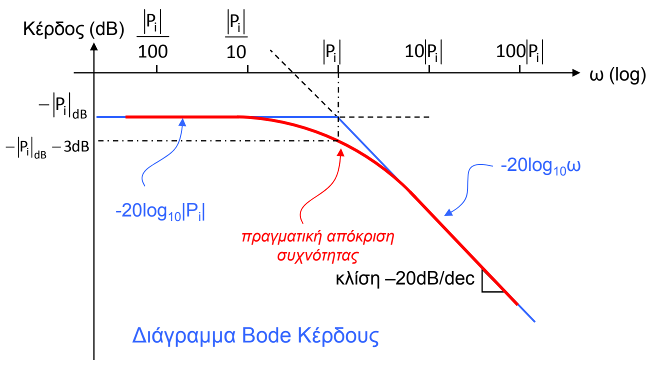
Διαγράμματα Bode Κέρδους (IV)

γ) Οι όροι $-|(j\omega+P_i)|_{dB}=-20\log_{10}|(j\omega+P_i)|$ μπορούν να αναλυθούν ως ακολούθως:

i. Για $\omega<<P_i$ ο όρος $|j\omega+P_i|$ μπορεί να αντικατασταθεί με το $|P_i|$ με αποτέλεσμα για αυτές τις τιμές του ω η γραφική απόδοση είναι μία οριζόντια ευθεία γραμμή στο επίπεδο $-20\log_{10}|P_i|$.

ii. Για $\omega>>P_i$ ο όρος $|j\omega+P_i|$ μπορεί να αντικατασταθεί με $|j\omega|$, που απλά είναι το ω. Συνεπώς για αυτές τις τιμές του ω η γραφική απόδοση είναι μία ευθεία γραμμή με κλίση –20dB/dec (*λογαριθμική κλίμακα στον x άξονα*).

Διαγράμματα Bode Κέρδους (V)



Η συχνότητα $\omega=|P_i|$ είναι η συχνότητα γονάτου

Απλοποίηση Διαδικασίας

Με βάση τη γενική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς μπορούμε να γράψουμε:

$$T(j\omega)=\alpha_m\frac{(j\omega+Z_1)\cdot(j\omega+Z_2)\ldots(j\omega+Z_m)}{(j\omega+P_1)\cdot(j\omega+P_2)\ldots(j\omega+P_n)}=\alpha_m\frac{Z_1(\frac{j\omega}{Z_1}+1)\cdot(j\omega+Z_2)\ldots(j\omega+Z_m)}{P_1(\frac{j\omega}{P_1}+1)\cdot(j\omega+P_2)\ldots(j\omega+P_n)}\Rightarrow$$

Νέα πολλαπλασιαστική σταθερά

$$T(j\omega)=\left(\alpha_m\frac{Z_1}{P_1}\right)\frac{(\frac{j\omega}{Z_1}+1)\cdot(j\omega+Z_2)\ldots(j\omega+Z_m)}{(\frac{j\omega}{P_1}+1)\cdot(j\omega+P_2)\ldots(j\omega+P_n)}$$

Με τη νέα έκφραση της συνάρτησης μεταφοράς, στο διάγραμμα Bode για το κέρδος, για τον παράγοντα $(1+j\omega/Z_1)$ ή τον παράγοντα $(1+j\omega/P_1)$, η ευθεία που αντιστοιχεί στη μονάδα βρίσκεται πάνω στον άξονα των x (στα 0dB). Έτσι η σχεδίαση του διαγράμματος Bode απλοποιείται σημαντικά.

Διαγράμματα Bode Φάσης (Ι)

Έστω και πάλι η γενική παραγοντοποιημένη μορφή της συνάρτησης μεταφοράς:

$$T(s)=\alpha_m\frac{(s+Z_1)\cdot(s+Z_2)\cdots(s+Z_m)}{(s+P_1)\cdot(s+P_2)\cdots(s+P_n)}$$

Αντικαθιστούμε το s με το jω :

$$T(j\omega)=\alpha_m\frac{(j\omega+Z_1)\cdot(j\omega+Z_2)\cdots(j\omega+Z_m)}{(j\omega+P_1)\cdot(j\omega+P_2)\cdots(j\omega+P_n)}$$

Η φάση θα δίνεται από τη σχέση:

$$\angle T(j\omega)=\sum_{i=1}^{m}\left(\tan^{-1}\frac{\omega}{Z_i}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\tan^{-1}\frac{\omega}{P_i}\right)$$

Παράδειγμα 4 (Ι)

Έστω κύκλωμα με συνάρτηση μεταφοράς τάσης T(s):

$$T(s) = 10\frac{s}{(1+s/10^2)\cdot(1+s/10^5)}$$

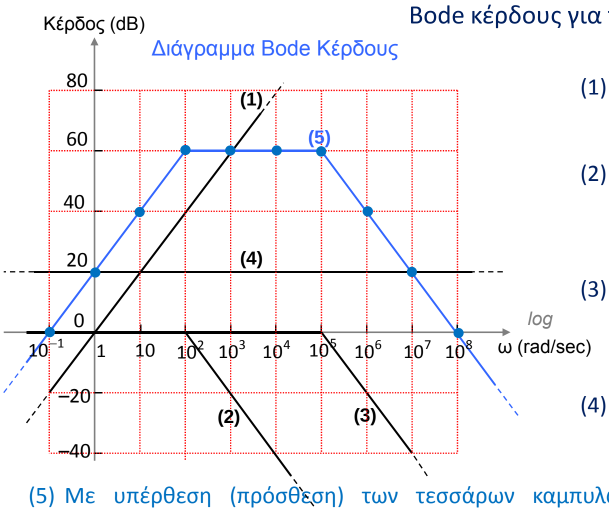
να βρεθούν οι πόλοι και τα μηδενικά και να σχεδιαστεί το κέρδος και η φάση ως προς τη συχνότητα.

⌘

Υπάρχει ένα μηδενικό στο s=0. Οι πόλοι είναι στο $s = -10^2$ και στο $s = -10^5$.

Παράδειγμα 4 (ΙΙ)

Το σχήμα δείχνει τα ασυμπτωτικά διαγράμματα Bode κέρδους για τους διάφορους παράγοντες της συνάρτησης μεταφοράς.



(1) Ευθεία γραμμή με κλίση +20dB/dec που αντιστοιχεί στο μηδενικό s=0.

(2) Καμπύλη που αντιστοιχεί στον πόλο $s= -10^2$ και αποτελείται από δύο ασύμπτωτες που τέμνονται στο $\omega=10^2$ rad/sec.

(3) Καμπύλη που αντιστοιχεί στον πόλο $s= -10^5$ και αποτελείται από δύο ασύμπτωτες που τέμνονται στο $\omega=10^5$ rad/sec.

(4) Οριζόντια ευθεία για την πολλαπλασιαστική σταθερά 10.

(5) Με υπέρθεση (πρόσθεση) των τεσσάρων καμπυλών έχουμε το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode για το κέρδος του κυκλώματος.

Διαγράμματα Bode Φάσης (ΙΙ)

Η στρατηγική για τη σχεδίαση των διαγραμμάτων Bode της φάσης ($\angle T(j\omega)$) βασίζεται και πάλι στη σχεδίαση ξεχωριστά κάθε όρου στο δεξί μέρος της εξίσωσης και την εν συνεχεία υπέρθεση των γραφημάτων ώστε να προκύψει το διάγραμμα:

α) Αρχικά επισημαίνεται ότι ο όρος α_m **δεν** επηρεάζει το διάγραμμα.

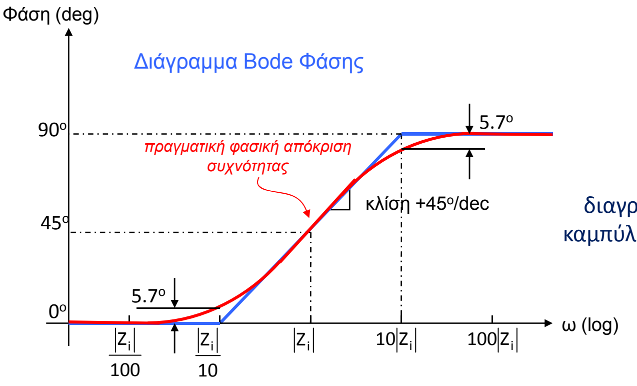
β) Οι όροι $(j\omega+Z_i)$ μπορούν να αναλυθούν ως ακολούθως:

i. Για $\omega<|Z_i|/10$, η γραφική απόδοση είναι μία οριζόντια ευθεία γραμμή στο επίπεδο 0 deg.

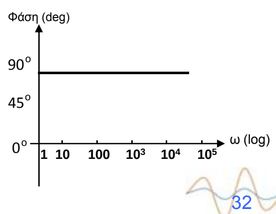
ii. Για $|Z_i|/10<\omega<10|Z_i|$, η γραφική απόδοση είναι μία ευθεία γραμμή με κλίση +45deg/dec (*log κλίμακα στον x άξονα*).

iii. Για $\omega>10|Z_i|$, η γραφική απόδοση είναι μία οριζόντια ευθεία γραμμή στο επίπεδο +90 deg.

Διαγράμματα Bode Φάσης (ΙΙΙ)



Η μέγιστη απόκλιση του διαγράμματος από την πραγματική καμπύλη, στις συχνότητες $|Z_i|/10$ και $10|Z_i|$, είναι ίση με 5,7°.



Όταν $Z_i=0$ η γραφική είναι παράλληλη στον x-άξονα στις 90°.

Διαγράμματα Bode Φάσης (IV)

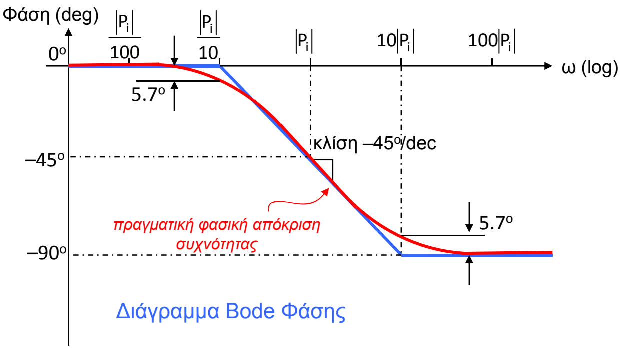
γ) Οι όροι ($j\omega+P_i$) μπορούν να αναλυθούν ως ακολούθως:

i. Για $\omega<|P_i|/10$, η γραφική απόδοση είναι μία οριζόντια ευθεία γραμμή στο επίπεδο 0 deg.

ii. Για $|P_i|/10<\omega<10|P_i|$, η γραφική απόδοση είναι μία ευθεία γραμμή με κλίση –45deg/dec (*log κλίμακα στον x άξονα*).

iii. Για $\omega>10|P_i|$, η γραφική απόδοση είναι μία οριζόντια ευθεία γραμμή στο επίπεδο – 90 deg.

Διαγράμματα Bode Φάσης (V)



Η μέγιστη απόκλιση του διαγράμματος από την πραγματική καμπύλη, στις συχνότητες $|P_i|/10$ και $10|P_i|$, είναι ίση με 5,7°.

Παράδειγμα 5 (I)

Έστω το κύκλωμα του προηγούμενου παραδείγματος με συνάρτηση μεταφοράς τάσης T(s):

$$T(s) = 10\frac{s}{(1+s/10^2)\cdot(1+s/10^5)}$$

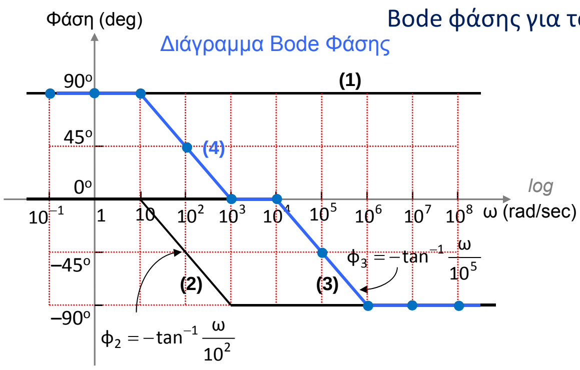
Να σχεδιαστεί η φάση ως προς τη συχνότητα.

⌘

Όπως είδαμε, υπάρχει ένα μηδενικό στο s=0 και δύο πόλοι στο $s = -10^2$ και στο $s = -10^5$.

Παράδειγμα 4 (III)

Το σχήμα δείχνει τα ασυμπτωτικά διαγράμματα Bode φάσης για τους διάφορους παράγοντες της συνάρτησης μεταφοράς.



(1) Οριζόντια ευθεία στις +90° που αντιστοιχεί στο μηδενικό s=0.

(2) Καμπύλη που αντιστοιχεί στον πόλο $s=-10^2$. Εντοπίζουμε τη συχνότητα $\omega=10^2$rad/sec και τις συχνότητες ω/10=10 rad/sec και 10ω= 10^3 rad/sec. Σχεδιάζουμε τις τρεις ευθείες.

(3) Καμπύλη που αντιστοιχεί στον πόλο $s=-10^5$. Εντοπίζουμε τη συχνότητα $\omega=10^5$rad/sec και τις συχνότητες $\omega/10=10^4$ rad/sec και $10\omega=10^6$ rad/sec. Σχεδιάζουμε τις τρεις ευθείες.

(4) Με υπέρθεση (πρόσθεση) των τριών καμπυλών έχουμε το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode για τη φάση του κυκλώματος.

end

Παράδειγμα 6 (Ι)

Έστω κύκλωμα με συνάρτηση μεταφοράς τάσης T(s):

$$T(s) = 10^9 \frac{s}{(10+s)\cdot(10^3+s)\cdot(10^4-s)}$$

Να απλοποιηθεί η συνάρτηση μεταφοράς. Εν συνεχεία, να βρεθούν οι πόλοι και τα μηδενικά και να σχεδιαστεί το κέρδος και η φάση ως προς τη συχνότητα.

⌘

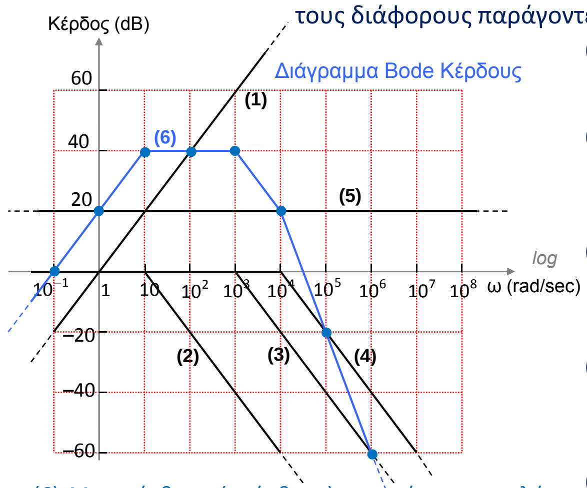
Απλοποιημένη συνάρτηση μεταφοράς:

$$T(s) = 10\frac{s}{(1+s/10)\cdot(1+s/10^3)\cdot(1-s/10^4)}$$

Υπάρχει ένα μηδενικό στο s=0.
Οι πόλοι είναι: s= -10, s= -10^3 και s= 10^4.

Παράδειγμα 6 (ΙΙ)

Γράφουμε τα ασυμπτωτικά διαγράμματα Bode κέρδους για τους διάφορους παράγοντες της συνάρτησης μεταφοράς.

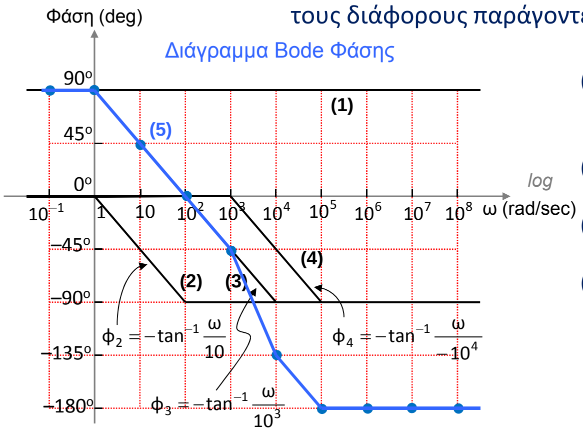


(1) Ευθεία γραμμή με κλίση +20dB/dec που αντιστοιχεί στο μηδενικό s=0.
(2) Καμπύλη που αντιστοιχεί στον πόλο s= -10 και αποτελείται από δύο ασύμπτωτες που τέμνονται στο ω=10 rad/sec.
(3) Καμπύλη που αντιστοιχεί στον πόλο s= -10^3 και αποτελείται από δύο ασύμπτωτες που τέμνονται στο ω=10^3 rad/sec.
(4) Καμπύλη που αντιστοιχεί στον πόλο s= 10^4 και αποτελείται από δύο ασύμπτωτες που τέμνονται στο ω=10^4 rad/sec.
(5) Οριζόντια ευθεία για την πολλαπλασιαστική σταθερά 10.

(6) Με υπέρθεση (πρόσθεση) των πέντε καμπυλών έχουμε το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode για το κέρδος του κυκλώματος.

Παράδειγμα 6 (ΙΙΙ)

Γράφουμε τα ασυμπτωτικά διαγράμματα Bode φάσης για τους διάφορους παράγοντες της συνάρτησης μεταφοράς.



(1) Οριζόντια ευθεία στις +90° που αντιστοιχεί στο μηδενικό s=0.
(2) Καμπύλη που αντιστοιχεί στον πόλο s= −10.
(3) Καμπύλη που αντιστοιχεί στον πόλο s= -10^3.
(4) Καμπύλη που αντιστοιχεί στον πόλο s= 10^4.

(5) Με υπέρθεση (πρόσθεση) των τριών καμπυλών έχουμε το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode για τη φάση του κυκλώματος.