ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Γ. Τσιατούχας

Διάρθρωση

1. **Χρονικά Εξαρτημένες Πηγές**
2. **Φάσορες**
3. **Σύνθετη Αντίσταση**
4. **Ανάλυση Δικτύων AC**

VLSI Systems
and Computer Architecture Lab

Χρονικά Εξαρτημένες Πηγές Σήματος

- Στην ηλεκτρονική μας ενδιαφέρουν πηγές που παράγουν χρονικά εξαρτημένες τάσεις και ρεύματα.
- Μια σημαντική κατηγορία είναι οι πηγές περιοδικών σημάτων και πιο ειδικά οι ημιτονοειδής πηγές.
- Τα ημιτονοειδή σήματα χαρακτηρίζονται από την περίοδο T (ή ισοδύναμα τη συχνότητα f), το πλάτος A και τη φάση φ.

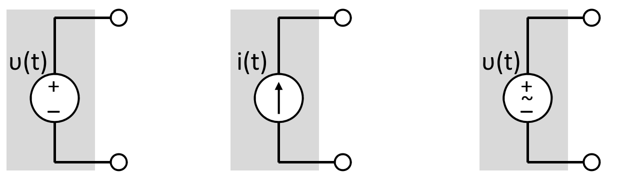
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

f = φυσική συχνότητα = 1/T σε Hertz (Hz)

ω = κυκλική συχνότητα = 2πf σε rad/sec

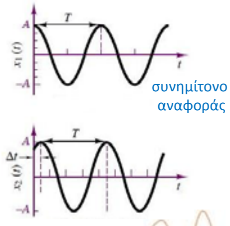
φ = φάση =2π Δt/T σε rad

φ = 360 Δt/T σε deg



Σύμβολα Χρονικά Εξαρτημένων Πηγών

Ημιτονοειδής Πηγή



Μέση και RMS Τιμή

Με στόχο την έκφραση της ισχύος μιας χρονικά εξαρτώμενης πηγής σήματος εισάγουμε τις ακόλουθες έννοιες:

- Μέση ή DC τιμή (average value)

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

  - Η μέση τιμή ημιτονικού σήματος x(t)=Acos(ωt) είναι **μηδέν**.

- Τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου (root mean square – RMS value)

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt}$$

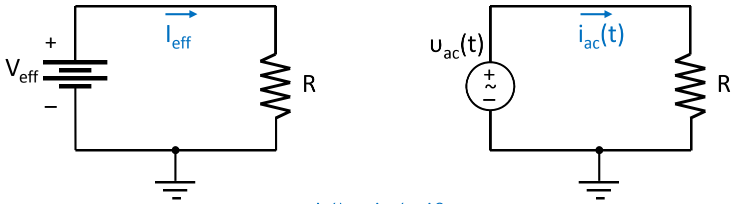
  - Η RMS τιμή ημιτονικού σήματος x(t)=Acos(ωt) είναι **A/√2=0,707A**.

Φυσική Σημασία της RMS Τιμής

Η έννοια της RMS τιμής μιας χρονικά εξαρτώμενης (AC) πηγής μας βοηθάει να απαντήσουμε στο ερώτημα: Πόση πρέπει να είναι η τιμή του ρεύματος (*ενεργός τιμή* - I_{eff}) μιας DC πηγής ώστε η μέση τιμή της ισχύος που καταναλώνεται σε μια αντίσταση R να είναι ίση με τη μέση ισχύ η οποία καταναλώνεται στην ίδια αντίσταση R από την χρονικά εξαρτώμενη πηγή;

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T R\cdot i_{ac}^2(t)dt = R\cdot I_{eff}^2 \Rightarrow I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i_{ac}^2(t)dt} = I_{RMS}$$

Η RMS ή ***ενεργός τιμή*** μιας χρονικά εξαρτώμενης (AC) πηγής είναι η σταθερή (DC) τιμή που προκαλεί την ίδια μέση κατανάλωση ισχύος σε μια αντίσταση με αυτή που προκαλεί η AC πηγή.



Μιγαδική Άλγεβρα Ι

Για τη διαχείριση των φανταστικών αριθμών χρησιμοποιείται το στοιχείο j με την ακόλουθη ιδιότητα:

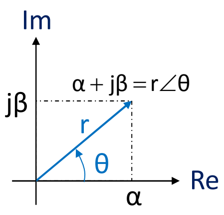
$$j^2 = -1 \quad \text{ή} \quad j = \sqrt{-1}$$

Ισχύει: $j^3 = -j, \quad j^4 = 1, \quad j^5 = j$ κ.λ.π.

Ένας *μιγαδικός αριθμός* A είναι μια έκφραση της μορφής **A** = α+jβ και αποτελείται από το πραγματικό μέρος α και το φανταστικό μέρος jβ.

$$\alpha = \mathrm{Re}\,A = \mathrm{Re}(\alpha + j\beta) \quad \text{και} \quad j\beta = \mathrm{Im}\,A = \mathrm{Im}(\alpha + j\beta)$$

(α και β πραγματικοί αριθμοί)



μιγαδικό επίπεδο

Από την αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο διαπιστώνουμε ότι:

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{και} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$\alpha = r\cdot\cos\theta \quad \text{και} \quad \beta = r\cdot\sin\theta$$

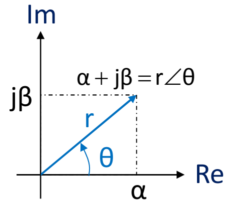
Μιγαδική Άλγεβρα ΙΙ

Με βάση την προηγούμενη ανάλυση, ισχύει:

$$A = \alpha + j\beta = r \cdot \cos\theta + j \cdot r \cdot \sin\theta = r(\cos\theta + j\sin\theta) = r\angle\theta \quad \textit{πολική μορφή}$$

Ο αριθμός r καλείται *μέτρο* (ή *πλάτος*) και ο αριθμός θ καλείται *γωνία* (ή *όρισμα*) και συμβολίζονται ως:

$$r = |A| = |\alpha + j\beta| \quad \text{και} \quad \theta = \arg A = \angle A = \angle(\alpha + j\beta)$$



❈

Ο *συζυγής μιγαδικός* του A = α+jβ είναι:

$$A^* = \alpha - j\beta$$

Ισχύει: $A \cdot A^* = (\alpha + j\beta) \cdot (\alpha - j\beta) = \alpha^2 + \beta^2$

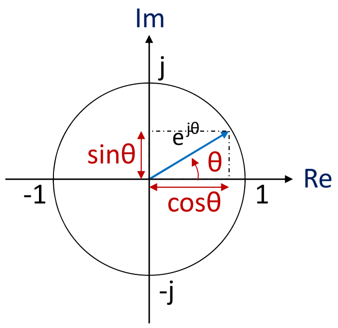
Ταυτότητα του Euler

Η ταυτότητα του Euler ορίζει το *μιγαδικό εκθετικό* ως ακολούθως:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

Το πλάτος (μέτρο) για το μιγαδικό εκθετικό είναι:

$$\left|e^{j\theta}\right| = |\cos\theta + j\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$



Η γωνία (όρισμα) για το μιγαδικό εκθετικό είναι:

$$\angle\left(e^{j\theta}\right) \equiv \arg\left(e^{j\theta}\right) = \theta$$

❈

Συνεπώς ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως:

$$A = \alpha + j\beta = r(\cos\theta + j\sin\theta) = r \cdot e^{j\theta} = r\angle\theta$$

Πράξεις Μιγαδικών Αριθμών

Πρόσθεση και αφαίρεση μιγαδικών αριθμών $\mathbf{A_1}$ και $\mathbf{A_2}$:

$$(\alpha_1 + j\beta_1) + (\alpha_2 + j\beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) + j(\beta_1 + \beta_2)$$

$$(\alpha_1 + j\beta_1) - (\alpha_2 + j\beta_2) = (\alpha_1 - \alpha_2) + j(\beta_1 - \beta_2)$$

Πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών $\mathbf{A_1}$ και $\mathbf{A_2}$:

$$(\alpha_1 + j\beta_1)\cdot(\alpha_2 + j\beta_2) = \left(r_1 e^{j\theta}\right)\cdot\left(r_2 e^{j\phi}\right) = r_1 r_2 e^{j(\theta+\phi)} = r_1 r_2 \angle(\theta+\phi)$$

Διαίρεση μιγαδικών αριθμών $\mathbf{A_1}$ και $\mathbf{A_2}$:

$$\frac{(\alpha_1 + j\beta_1)}{(\alpha_2 + j\beta_2)} = \frac{\left(r_1 e^{j\theta}\right)}{\left(r_2 e^{j\phi}\right)} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta-\phi)} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta-\phi)$$

Φάσορες Ι

Χρησιμοποιούμε την *αναπαράσταση* των ημιτονοειδών σημάτων με *μιγαδικούς αριθμούς*, ώστε στην ανάλυση κυκλωμάτων με πυκνωτές και πηνία να μην απαιτείται η επίλυση διαφορικών εξισώσεων!

Με βάση την ταυτότητα του Euler ένα ημιτονοειδές σήμα μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$A\cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}\left(Ae^{j(\omega t+\theta)}\right) = \mathrm{Re}\left(Ae^{j\omega t}e^{j\theta}\right)$$

καθώς ισχύει: $\mathrm{Re}\left(Ae^{j(\omega t+\theta)}\right) = \mathrm{Re}\left(A\cos(\omega t+\theta) + jA\sin(\omega t+\theta)\right) = A\cos(\omega t+\theta)$

Ο *μιγαδικός φάσορας* (*complex phasor*) που αντιστοιχεί στο ημιτονοειδές σήμα ορίζεται ως ο μιγαδικός αριθμός $e^{j\theta}$, δηλ.:

$$Ae^{j\theta} = A\cos(\omega t + \theta) = A\angle\theta$$

Φάσορες ΙΙ

Συνεπώς, ένα ημιτονοειδές σήμα παριστάνεται με δύο τρόπους:

- στη μορφή της αναπαράστασης χρόνου (time domain form)

$$\text{π.χ.}\quad \upsilon(t) = A\cos(\omega t+\theta) = \mathrm{Re}\left(Ae^{j(\omega t+\theta)}\right) = \mathrm{Re}\left(Ae^{j\omega t}e^{j\theta}\right)$$

- στη μορφή της περιοχής συχνοτήτων (frequency domain)

$$\text{π.χ.}\quad V(j\omega) = Ae^{j\theta} = A\angle\theta$$

Προσοχή: στην αναπαράσταση στη μορφή της περιοχής συχνοτήτων (ή φασόρων) ο όρος $e^{j\omega t}$ υπονοείται!

$$Ae^{j\theta} = A\cos(\omega t+\theta) = A\angle\theta$$

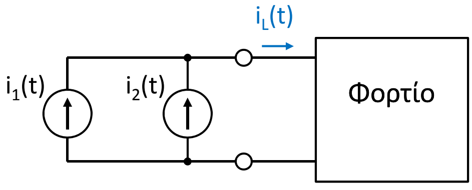
Υπέρθεση Σημάτων AC

Στο κύκλωμα του σχήματος, δύο ημιτονοειδείς πηγές ρεύματος σε παράλληλη συνδεσμολογία οδηγούν ένα φορτίο. Ισχύει στο πεδίο του χρόνου:

$$\left.\begin{array}{l} i_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t+\theta_1) \\ i_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t+\theta_2) \end{array}\right\} \overset{\text{KCL}}{\Rightarrow} i_L(t) = i_1(t)+i_2(t) = A_1\cos(\omega_1 t+\theta_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\theta_2)$$

και στο πεδίο των συχνοτήτων:

$$\left.\begin{array}{l} I_1(j\omega) = \mathrm{Re}\left(A_1e^{j\theta_1}e^{j\omega_1 t}\right) = A_1e^{j\theta_1} \\ I_2(j\omega) = \mathrm{Re}\left(A_2e^{j\theta_2}e^{j\omega_2 t}\right) = A_2e^{j\theta_2} \end{array}\right\} I_L(j\omega) = I_1(j\omega)+I_2(j\omega) = A_1e^{j\theta_1}+A_2e^{j\theta_2}$$



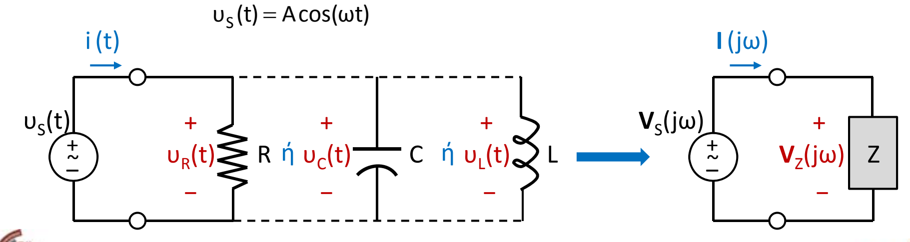
Σύνθετη Αντίσταση – Εμπέδηση

Οι αντιστάσεις, οι πυκνωτές και τα πηνία στα AC κυκλώματα μπορούν να περιγραφούν κάτω από το πρίσμα των φασόρων ως μια *μιγαδική αντίσταση* που ονομάζεται *σύνθετη αντίσταση* ή *εμπέδηση* (*impedance*) *Z*.

Η έννοια της σύνθετης αντίστασης δηλώνει τη συμπεριφορά των πυκνωτών και των πηνίων ως αντιστάσεις των οποίων η τιμή εξαρτάται από τη συχνότητα της ημιτονοειδούς διέγερσης. Η σύνθετη αντίσταση **δεν** είναι φάσορας είναι ένας απλός μιγαδικός αριθμός.

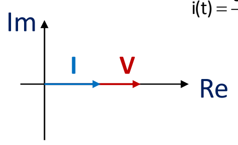
Υπό αυτή την θεώρηση, τα θεωρήματα και οι τεχνικές που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα για δίκτυα αντιστάσεων επεκτείνονται και στα δίκτυα AC.

$$\upsilon_S(t) = A\cos(\omega t)$$



Αντίσταση – Πυκνωτής – Πηνίο

Αντίσταση

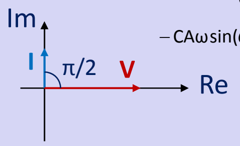


$$i(t) = \frac{\upsilon_S(t)}{R} = \frac{A}{R}\cos(\omega t)$$

$$\left.\begin{aligned} V_Z(j\omega) &= A\angle 0 \\ I(j\omega) &= \frac{A}{R}\angle 0 \end{aligned}\right\} Z_R(j\omega) = \frac{V_Z(j\omega)}{I(j\omega)} = R$$

Σύνθετη Αντίσταση Ωμικής Αντίστασης

Πυκνωτής



$$i_C(t) = C\frac{d\upsilon_S(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}A\cos(\omega t) =$$

$$-CA\omega\sin(\omega t) = CA\omega\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

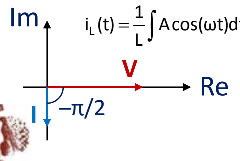
$$\left.\begin{aligned} V_Z(j\omega) &= A\angle 0 \\ I(j\omega) &= \omega CA\angle\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} Z_C(j\omega) = \frac{V_Z(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{1}{j\omega C}$$

Σύνθετη Αντίσταση Πυκνωτή

Πηνίο

$$\upsilon_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L}\int \upsilon_L(t)dt =$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int A\cos(\omega t)dt = \frac{A}{\omega L}\sin(\omega t) = \frac{A}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

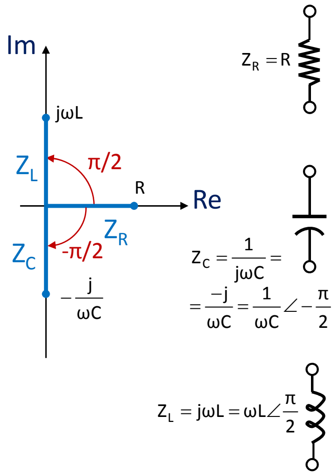


$$\left.\begin{aligned} V_Z(j\omega) &= A\angle 0 \\ I(j\omega) &= \frac{A}{\omega L}\angle -\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} Z_L(j\omega) = \frac{V_Z(j\omega)}{I(j\omega)} = j\omega L$$

Σύνθετη Αντίσταση Πηνίου

Ισχύει: $\frac{1}{j} = -j$

Άεργη Αντίσταση



$Z_R = R$

$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle -\frac{\pi}{2}$

$Z_L = j\omega L = \omega L \angle \frac{\pi}{2}$

Ισχύει: $\frac{1}{j} = -j$

Η έννοια της σύνθετης αντίστασης καθίσταται χρήσιμη στην επίλυση προβλημάτων σε κυκλώματα AC καθώς διευκολύνει την εφαρμογή των θεωρημάτων (τεχνικών) που παρουσιάστηκαν για κυκλώματα DC με τη διαχείριση των κυκλωματικών στοιχείων ως σύνθετες αντιστάσεις.

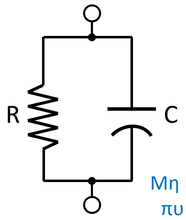
Στη γενική μορφή η σύνθετη αντίσταση ενός στοιχείου κυκλώματος εκφράζεται ως το άθροισμα ενός πραγματικού και ενός φανταστικού μέρους:

$$Z(j\omega) = R(\omega) + j \cdot X(\omega)$$

Η ποσότητα R ονομάζεται *AC αντίσταση* ενώ η X ονομάζεται *άεργη αντίσταση* (*reactance*).

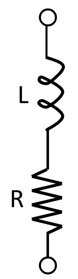
Παράδειγμα: Σύνθετη Αντίσταση I

Πρόβλημα: Να βρεθούν οι σύνθετες αντιστάσεις μη ιδανικού πυκνωτή και πηνίου.
Λύση:



Μη ιδανικός πυκνωτής

$$Z_{CR}(j\omega) = R // \frac{1}{j\omega C} = \frac{R\left(\frac{1}{j\omega C}\right)}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega CR}$$



Μη ιδανικό πηνίο

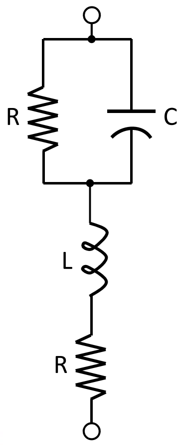
$$Z_{LR}(j\omega) = R + j\omega L$$

end

Παράδειγμα: Σύνθετη Αντίσταση II

Πρόβλημα: Να βρεθεί η σύνθετη αντίσταση του σύνθετου κυκλώματος, όταν $\omega=10^4$rad/s, R=100Ω, C=10μF και L=10mH.

Λύση:



$j^2=-1$

$$Z_{CR}(j\omega)=R//\frac{1}{j\omega C}=\frac{R}{1+j\omega CR}=\frac{R(1-j\omega CR)}{(1+j\omega CR)\cdot(1-j\omega CR)}=\frac{R(1-j\omega CR)}{1+(\omega CR)^2}$$

$$Z_{o\lambda}(j\omega)=R+j\omega L+Z_{CR}(j\omega)=R+j\omega L+\frac{R(1-j\omega CR)}{1+(\omega CR)^2}\Rightarrow$$

$$Z_{o\lambda}(j\omega)=101.92+j\cdot 90.38$$

Επαγωγική σύνθετη αντίσταση

end

Σύνθετη Αγωγιμότητα

Η *σύνθετη αγωγιμότητα* (*admittance*) *Y* ορίζεται ως το αντίστροφο της σύνθετης αντίστασης.

Όταν Z=R τότε η σύνθετη αγωγιμότητα ισούται με την αγωγιμότητα G (Y=G).

Στη γενική περίπτωση ισχύει: Y = G + jB όπου ποσότητα *B* ονομάζεται *επιδεκτικότητα* (*susceptance*).

$$Z=R+j\cdot X\Rightarrow Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{R+j\cdot X}\Rightarrow Y=\frac{1}{R+j\cdot X}\cdot\frac{R-j\cdot X}{R-j\cdot X}=\frac{R-j\cdot X}{R^2+X^2}\Rightarrow$$

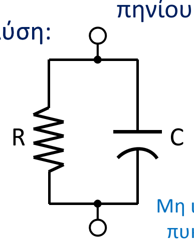
$$Y=\frac{R}{R^2+X^2}-j\frac{X}{R^2+X^2}$$

Συνεπώς: $G=\frac{R}{R^2+X^2}$ και $B=\frac{-X}{R^2+X^2}$

Παράδειγμα: Σύνθετη Αγωγιμότητα

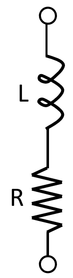
Πρόβλημα: Να βρεθούν οι σύνθετες αγωγιμότητες μη ιδανικού πυκνωτή και πηνίου.

Λύση:



Μη ιδανικός πυκνωτής

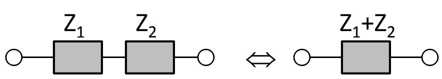
$$Z_{CR}(j\omega)=\frac{R}{1+j\omega CR}\Rightarrow Y_{CR}(j\omega)=\frac{1+j\omega CR}{R}=\frac{1}{R}+j\omega C$$



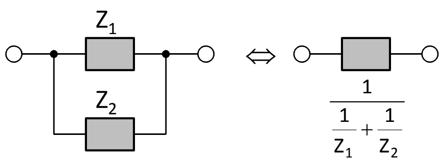
Μη ιδανικό πηνίο

$$Z_{LR}(j\omega)=R+j\omega L\Rightarrow Y_{LR}(j\omega)=\frac{1}{R+j\omega L}=\frac{R-j\omega L}{R^2+(\omega L)^2}$$

Ισοδύναμα Κυκλώματα AC



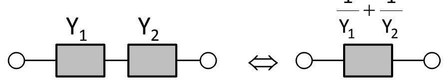
Εν σειρά σύνθετες αντιστάσεις



$$\frac{1}{\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}}$$

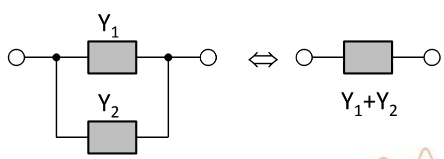
Εν παραλλήλω σύνθετες αντιστάσεις

Εν σειρά σύνθετες αγωγιμότητες



$$\frac{1}{\frac{1}{Y_1}+\frac{1}{Y_2}}$$

Εν παραλλήλω σύνθετες αγωγιμότητες



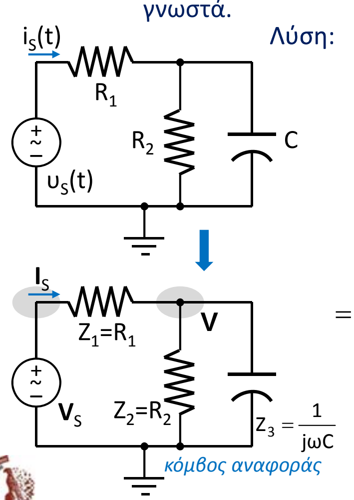
Ανάλυση Κυκλωμάτων AC

Η αναπαράσταση των κυκλωμάτων (που περιλαμβάνουν παθητικά στοιχεία R, L, C και διεγείρονται από ημιτονοειδή σήματα) με τη μορφή των φασόρων και της σύνθετης αντίστασης μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε άγνωστες τάσεις και άγνωστα ρεύματα στην περιοχή των συχνοτήτων (*ανάλυση AC*).

Στην ανάλυση AC οι πηγές μετατρέπονται στη μορφή φάσορα και κάθε κυκλωματικό στοιχείο R, L, C σε σύνθετη αντίσταση. Κατά την ανάλυση χρησιμοποιούμε τους νόμους των Ohm και Kirchhoff, τις μεθόδους των κομβικών τάσεων ή των ρευμάτων απλών βρόχων και τα θεωρήματα Thevenin και Norton.

Παράδειγμα: AC Ανάλυση Κόμβων

Πρόβλημα: Εκφράστε το ρεύμα της πηγής $\mathbf{I}_S$ ως συνάρτηση της συχνότητας με εφαρμογή της μεθόδου ανάλυσης φασόρων στο κύκλωμα, αν τα μεγέθη της πηγής τάσης, των αντιστάσεων και του πυκνωτή είναι γνωστά.



Λύση: Αναπαριστούμε το κύκλωμα με τη μορφή των φασόρων. Εν συνεχεία, εφαρμόζουμε την ανάλυση κομβικών τάσεων. Υπάρχουν τρεις κόμβοι.

$$\frac{V_S - V}{Z_1} = \frac{V}{Z_2 // Z_3} \Leftrightarrow \frac{V_S}{Z_1} = \left(\frac{1}{Z_2 // Z_3} + \frac{1}{Z_1}\right)V =$$

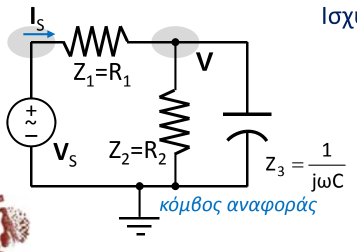
$$= \left(\frac{1}{\dfrac{R_2 \cdot (1/j\omega C)}{R_2 + (1/j\omega C)}} + \frac{1}{R_1}\right)V = \left(\frac{R_2 + (1/j\omega C)}{R_2 \cdot (1/j\omega C)} + \frac{1}{R_1}\right)V \Rightarrow$$

Παράδειγμα: AC Ανάλυση Κόμβων

$$\Rightarrow \frac{V_S}{R_1} = \left(\frac{j\omega CR_2 + 1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) V = \left(\frac{(j\omega CR_1R_2 + R_1) + R_2}{R_1R_2}\right) V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{R_1R_2}{j\omega CR_1R_2 + R_1 + R_2}\right)\frac{V_S}{R_1} = \left(\frac{R_2}{(R_1 + R_2) + j\omega CR_1R_2}\right) V_S =$$

$$= \left(\frac{R_2\left((R_1 + R_2) - j\omega CR_1R_2\right)}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega CR_1R_2)^2}\right) V_S = \left(\frac{R_2(R_1 + R_2) - j\omega CR_1R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega CR_1R_2)^2}\right) V_S$$

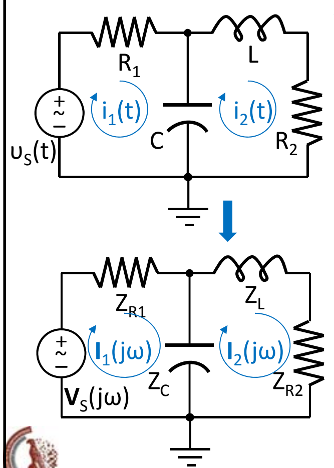


Ισχύει:

$$I_S(j\omega) = \frac{V_S - V}{R_1} = \left[1 - \left(\frac{R_2(R_1 + R_2) - j\omega CR_1R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega CR_1R_2)^2}\right)\right]\frac{V_S(j\omega)}{R_1}$$

Παράδειγμα: Ανάλυση Απλών Βρόχων

Πρόβλημα: Εκφράστε τα ρεύματα $\mathbf{I}_1(j\omega)$ και $\mathbf{I}_2(j\omega)$ ως συνάρτηση της συχνότητας με εφαρμογή της μεθόδου ανάλυσης φασόρων στο κύκλωμα, αν τα μεγέθη της πηγής τάσης, των αντιστάσεων, του πηνίου και του πυκνωτή είναι γνωστά.



Λύση: Αναπαριστούμε το κύκλωμα με τη μορφή των φασόρων. Εν συνεχεία, εφαρμόζουμε την ανάλυση απλών βρόχων. Υπάρχουν δύο απλοί βρόχοι.

$$\left.\begin{aligned} &\text{βρόχος 1} \quad V_S(j\omega) - Z_{R1}I_1(j\omega) - Z_C\left[I_1(j\omega) - I_2(j\omega)\right] = 0 \\ &\text{βρόχος 2} \quad -Z_C\left[I_2(j\omega) - I_1(j\omega)\right] - Z_LI_2(j\omega) - Z_{R2}I_2(j\omega) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

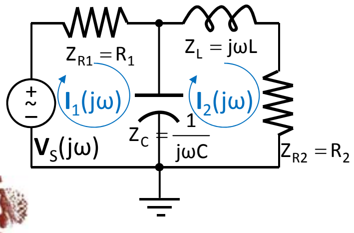
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} Z_{R1} + Z_C & -Z_C \\ -Z_C & Z_C + Z_L + Z_{R2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(j\omega) \\ I_2(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_S(j\omega) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Ανάλυση Απλών Βρόχων

Μέθοδος Cramer

$$I_1(j\omega)=\frac{\begin{vmatrix} V_S(j\omega) & -Z_C \\ 0 & Z_C+Z_L+Z_{R2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{R1}+Z_C & -Z_C \\ -Z_C & Z_C+Z_L+Z_{R2}\end{vmatrix}}=\frac{Z_C+Z_L+Z_{R2}}{(Z_{R1}+Z_C)(Z_C+Z_L+Z_{R2})-Z_C^2}V_S(j\omega)$$

$$I_2(j\omega)=\frac{\begin{vmatrix} Z_{R1}+Z_C & V_S(j\omega) \\ -Z_C & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{R1}+Z_C & -Z_C \\ -Z_C & Z_C+Z_L+Z_{R2}\end{vmatrix}}=\frac{Z_C}{(Z_{R1}+Z_C)(Z_C+Z_L+Z_{R2})-Z_C^2}V_S(j\omega)$$

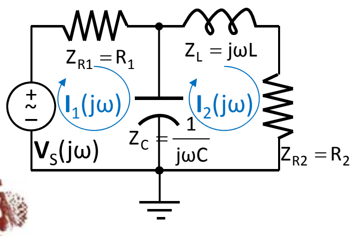


Παράδειγμα: Ανάλυση Απλών Βρόχων

Συνεπώς, με αντικατάσταση των τιμών των σύνθετων αντιστάσεων προκύπτει:

$$I_1(j\omega)=\frac{1/j\omega C+j\omega L+R_2}{(R_1+1/j\omega C)(1/j\omega C+j\omega L+R_2)-(1/j\omega C)^2}V_S(j\omega)$$

$$I_2(j\omega)=\frac{1/j\omega C}{(R_1+1/j\omega C)(1/j\omega C+j\omega L+R_2)-(1/j\omega C)^2}V_S(j\omega)$$



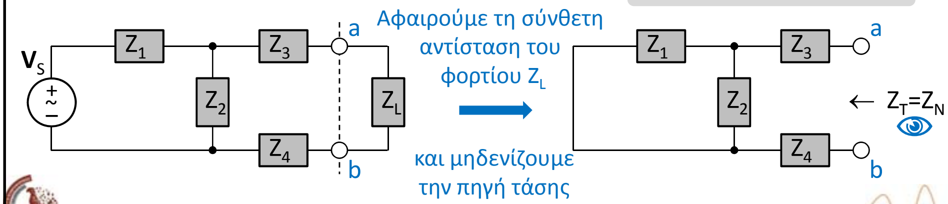
end

Θεωρήματα Thevenin – Norton I

Τα θεωρήματα Thevenin και Norton εφαρμόζονται και στα δικτυώματα AC.

- Για τον υπολογισμό της ισοδύναμης σύνθετης αντίστασης κατά Thevenin (Z_T) ή Norton (Z_N) σε ένα δίκτυο AC πραγματοποιούμε τις ίδιες ενέργειες με εκείνες για τα δικτυώματα απλών αντιστάσεων.
- Συνεπώς, αφαιρούμε το φόρτο, θέτουμε όλες της πηγές του κυκλώματος ίσες με μηδέν και υπολογίζουμε ακολούθως την ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση στα τερματικά άκρα του δικτύου.
- Οι πηγές τάσης μηδενίζονται βραχυκυκλώνοντας τα άκρα τους (*αντικαθίστανται από βραχυκύκλωμα*), ενώ οι πηγές ρεύματος μηδενίζονται ανοικτοκυκλώνοντας ένα άκρο τους (*αντικαθίστανται από ανοικτοκύκλωμα*).
- Ισχύει ότι Z_T=Z_N.

$$Z_T = Z_N = Z_3 + (Z_1 // Z_2) + Z_4$$



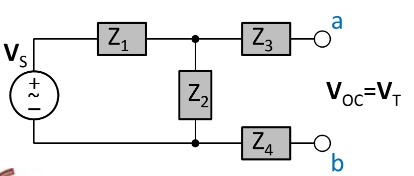
Θεωρήματα Thevenin – Norton II

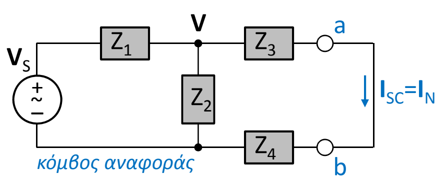
- Για τον υπολογισμό του ισοδύναμου κυκλώματος κατά Thevenin, η πηγή τάσης Thevenin έχει τιμή ίση με την τάση ανοικτού κυκλώματος στα άκρα όπου συνδέεται το φορτίο (όταν δηλ. το φορτίο έχει αφαιρεθεί).
- Για τον υπολογισμό του ισοδύναμου κυκλώματος κατά Norton, η πηγή ρεύματος Norton έχει τιμή ίση με το ρεύμα βραχυκυκλώματος μεταξύ των άκρων όπου συνδέεται το φορτίο (όταν δηλ. το φορτίο έχει αντικατασταθεί από ένα βραχυκύκλωμα).

$$V_{OC} \equiv V_T = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_S$$

$$I_{SC} = \frac{V}{Z_3 + Z_4} = \frac{1}{Z_3 + Z_4} \cdot \frac{Z_2 // (Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_2 // (Z_3 + Z_4)} V_S \Rightarrow$$

$$I_{SC} \equiv I_N = \frac{Z_2}{Z_1 (Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2 (Z_3 + Z_4)} V_S$$



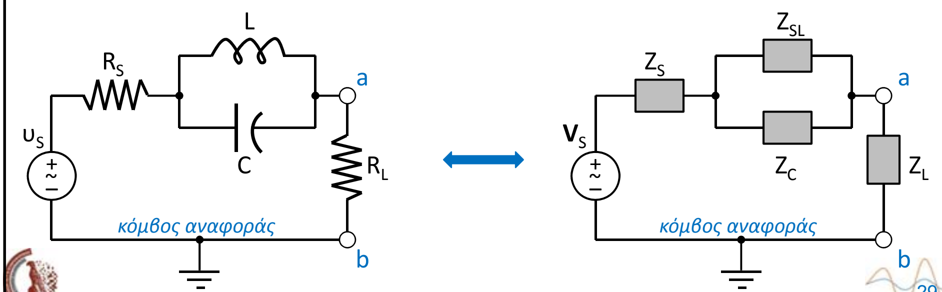


Παράδειγμα: Ισοδύναμο Thevenin

Πρόβλημα: Να βρεθεί το ισοδύναμο κύκλωμα κατά Thevenin για το κύκλωμα αριστερά των ακροδεκτών a, b, με δεδομένες τις τιμές των μεγεθών υ_S, R_S, C και L.

Λύση: Εμφανίζουμε το κύκλωμα με τη χρήση σύνθετων αντιστάσεων. Αφαιρούμε το φορτίο Z_L και μηδενίζουμε την πηγή τάσης.
Η αντίσταση Thevenin θα είναι:

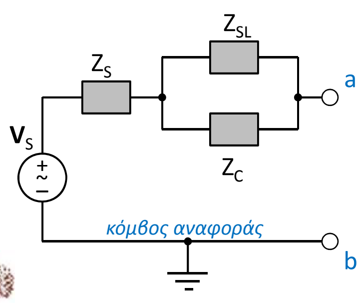
$$Z_T = Z_S + \left(Z_C // Z_{SL}\right) = R_S + \frac{j\omega L \times 1/j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C} = R_S + j\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}$$



Παράδειγμα: Ισοδύναμο Thevenin

Για την εύρεση της τάσης Thevenin αφαιρούμε το φορτίο Z_L. Το κύκλωμα δεν διαρρέεται από ρεύμα και συνεπώς:

$$\mathbf{V_T = V_S}$$



Ισοδύναμο κύκλωμα κατά Thevenin