ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Γ. Τσιατούχας

Διάρθρωση

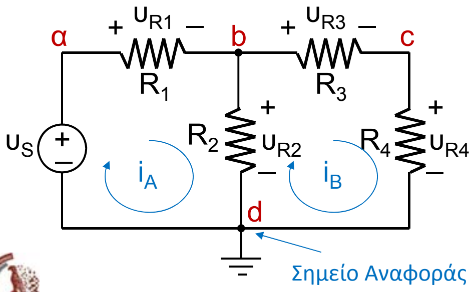
1. Ανάλυση Δικτύου
2. Μέθοδος Κομβικών Τάσεων
3. Μέθοδος Ρεύματος Απλών Κόμβων
4. Κυκλώματα με Ελεγχόμενες Πηγές
5. Αρχή της Υπέρθεσης - Επαλληλίας

VLSI Systems
and Computer Architecture Lab

Ανάλυση Δικτύου

Η *ανάλυση δικτύου* αποσκοπεί στον προσδιορισμό των άγνωστων ρευμάτων σε κάθε κλάδο και των άγνωστων τάσεων σε κάθε κόμβο ενός ηλεκτρικού δικτύου. Για την επίτευξή της απαιτείται:

- ο καθορισμός όλων των σχετικών παραμέτρων,
- η αναγνώριση των γνωστών και των αγνώστων παραμέτρων,
- η κατάστρωση των απαραίτητων εξισώσεων που συσχετίζουν τις παραμέτρους και
- η επίλυση των εξισώσεων.



$$\upsilon_S = \upsilon_a - \cancelto{0}{\upsilon_d} = \upsilon_a$$

$$\upsilon_{R1} = \upsilon_a - \upsilon_b \equiv \upsilon_{ab}$$

$$\upsilon_{R2} = \upsilon_b - \cancelto{0}{\upsilon_d} = \upsilon_b$$

$$\upsilon_{R3} = \upsilon_b - \upsilon_c \equiv \upsilon_{bc}$$

$$\upsilon_{R4} = \upsilon_c - \cancelto{0}{\upsilon_d} = \upsilon_c$$

Μέθοδος Κομβικών Τάσεων Ι

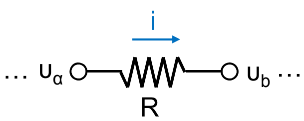
Η *μέθοδος των κομβικών τάσεων* (*node voltage method*) βασίζεται στον καθορισμό της τάσης σε κάθε κόμβο σαν μια ανεξάρτητη μεταβλητή.

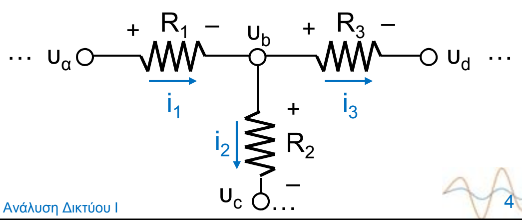
- Ένας κόμβος, συνήθως η γείωση, επιλέγεται ως *κόμβος αναφοράς*.
- Μόλις καθοριστεί η τάση σε κάθε κόμβο, εφαρμόζεται ο *νόμος του Ohm* για τον καθορισμό των ρευμάτων στους κλάδους μεταξύ γειτονικών κόμβων.
- Με τη μέθοδο αυτή το ρεύμα κάθε κλάδου εκφράζεται σαν συνάρτηση των τάσεων στα άκρα του και συνεπώς τα ρεύματα <u>δεν</u> υπεισέρχονται στις εξισώσεις (*φυσικά και οι δύο νόμοι του Kirchhoff παραμένουν σε χρήση*).

KCL στον b: $i_1 - i_2 - i_3 = 0 \Leftrightarrow$

N. Ohm $\quad i = \dfrac{\upsilon_\alpha - \upsilon_b}{R}$

$$\frac{\upsilon_\alpha - \upsilon_b}{R_1} - \frac{\upsilon_b - \upsilon_c}{R_2} - \frac{\upsilon_b - \upsilon_d}{R_3} = 0$$





Μέθοδος Κομβικών Τάσεων ΙΙ

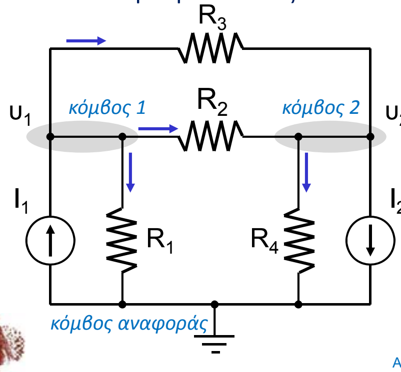
Έστω κύκλωμα με n κόμβους. Για την εφαρμογή της *μεθόδου ανάλυσης των κομβικών τάσεων*:

- Επιλέξτε, αν δεν δίδεται, έναν *κόμβο αναφοράς*. Η τάση οποιουδήποτε άλλου κόμβου ορίζεται ως η διαφορά με την τάση του κόμβου αναφοράς.
- Προσδιορίστε από τις υπόλοιπες n-1 κομβικές τάσεις ποιες είναι εξαρτημένες μεταβλητές (έστω ότι *m* πηγές τάσεις αντιστοιχούν σε εξαρτημένες μεταβλητές) και ποιες είναι ανεξάρτητες μεταβλητές (οι τάσεις των κόμβων που δεν συνδέονται με πηγές τάσης αντιστοιχούν σε ανεξάρτητες μεταβλητές).
- Εφαρμόστε το *νόμο ρεύματος του Kirchhoff* σε κάθε κόμβο που αντιστοιχεί σε ανεξάρτητη μεταβλητή παρουσιάζοντας τα σχετικά ρεύματα ως συνάρτηση των τάσεων στους γειτονικούς κόμβους.
- Επιλύστε το γραμμικό σύστημα των n-1-m άγνωστων μεταβλητών (τάσεων).

Παράδειγμα: Ανάλυση Κόμβων Ι

Πρόβλημα: Να βρεθούν όλα τα άγνωστα ρεύματα και οι τάσεις στο κύκλωμα, όταν I_1=10mA, I_2=50mA, R_1=1KΩ, R_2=2KΩ, R_3=10KΩ και R_4=2KΩ.

Λύση: Στο κύκλωμα ∃ τρεις κόμβοι από τους οποίους ο ένας είναι ο κόμβος αναφοράς (γείωση).
Συνεπώς, ∃ δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: οι υ_1 και υ_2.
Γράφουμε τον νόμο KCL στους κόμβους 1 και 2. Οι φορές των ρευμάτων στις αντιστάσεις επιλέγονται αυθαίρετα.



κόμβος 1

$$I_1 - I_{R1} - I_{R2} - I_{R3} = 0 \Rightarrow$$

$$I_1 - \frac{\upsilon_1 - 0}{R_1} - \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{R_2} - \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{R_3} = 0$$

κόμβος 2

$$I_{R2} + I_{R3} - I_{R4} - I_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{R_2} + \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{R_3} - \frac{\upsilon_2 - 0}{R_4} - I_2 = 0$$

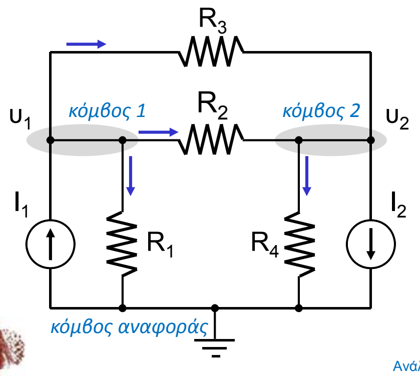
Παρατήρηση: Ορίσαμε αυθαίρετα με θετικό πρόσημο τα ρεύματα που εισέρχονται σε έναν κόμβο και με αρνητικό αυτά που εξέρχονται. Θα ακολουθούμε μόνιμα αυτή την πρακτική!

Παράδειγμα: Ανάλυση Κόμβων Ι

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε:

κόμβος 1 $$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\cdot\upsilon_1-\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\cdot\upsilon_2=I_1\Rightarrow 1.6\upsilon_1-0.6\upsilon_2=10$$

κόμβος 2 $$\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\cdot\upsilon_1-\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)\cdot\upsilon_2=I_2\Rightarrow 0.6\upsilon_1-1.1\upsilon_2=50$$



Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων βρίσκουμε:

$$\upsilon_1=-13.57\text{ V} \quad \text{και} \quad \upsilon_2=-52.86\text{ V}$$

Για τα ρεύματα ισχύει από το Ν. Ohm:

$$I_{R1}=\frac{\upsilon_1}{R_1}=-13.57\text{mA},\quad I_{R2}=\frac{\upsilon_1-\upsilon_2}{R_2}=19.645\text{mA}$$

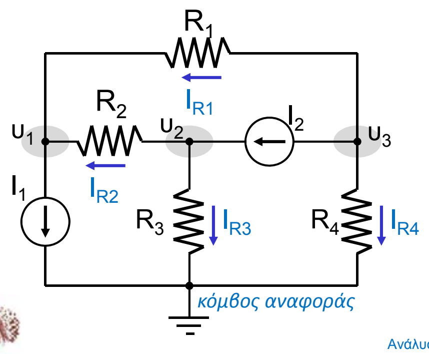
$$I_{R3}=\frac{\upsilon_1-\upsilon_2}{R_3}=3.93\text{mA},\quad I_{R4}=\frac{\upsilon_2}{R_4}=-26.43\text{mA}$$

end

Παράδειγμα: Ανάλυση Κόμβων ΙΙ

Πρόβλημα: Να βρεθεί η τάση στα άκρα της R_3, όταν I_1=2A, I_2=3A, R_1=2Ω, R_2=1Ω, R_3=4Ω και R_4=3Ω.

Λύση: Στο κύκλωμα ∃ τέσσερις κόμβοι. Κόμβος αναφοράς είναι η γείωση. Συνεπώς, ∃ τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές: οι υ_1 και υ_2 και υ_3. Γράφουμε τον νόμο KCL στους τρεις κόμβους (οι φορές των ρευμάτων επιλέγονται αυθαίρετα).



$$\frac{\upsilon_3-\upsilon_1}{R_1}+\frac{\upsilon_2-\upsilon_1}{R_2}-I_1=0 \qquad \textit{κόμβος 1}$$

$$-\frac{\upsilon_2-\upsilon_1}{R_2}-\frac{\upsilon_2-0}{R_3}+I_2=0 \qquad \textit{κόμβος 2}$$

$$-\frac{\upsilon_3-\upsilon_1}{R_1}-\frac{\upsilon_3-0}{R_4}-I_2=0 \qquad \textit{κόμβος 3}$$

Παράδειγμα: Ανάλυση Κόμβων ΙΙ

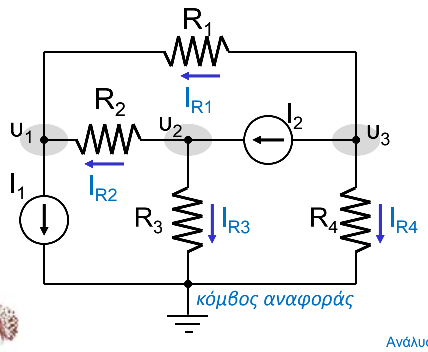
Διαχωρίζοντας τις μεταβλητές, ισχύει:

κόμβος 1 $$-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cdot \upsilon_1+\frac{1}{R_2}\cdot \upsilon_2+\frac{1}{R_1}\cdot \upsilon_3 = I_1 \Rightarrow -3\upsilon_1+2\upsilon_2+\upsilon_3=4 \quad (1)$$

κόμβος 2 $$\frac{1}{R_2}\cdot \upsilon_1-\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\cdot \upsilon_2 = -I_2 \Rightarrow 4\upsilon_1-5\upsilon_2=-12 \quad (2)$$

κόμβος 3 $$\frac{1}{R_1}\cdot \upsilon_1-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)\cdot \upsilon_3 = I_2 \Rightarrow 3\upsilon_1-5\upsilon_3=18 \quad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow$$



$$\left.\begin{aligned} \upsilon_2 &= \frac{4\upsilon_1+12}{5} \\ \upsilon_3 &= \frac{3\upsilon_1-18}{5} \end{aligned}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$-3\upsilon_1+2\frac{4\upsilon_1+12}{5}+\frac{3\upsilon_1-18}{5}=4 \Rightarrow \upsilon_1=-3.5\text{V}$$

$$\upsilon_2=-0.4\text{V} \qquad \upsilon_3=-5.7\text{V}$$

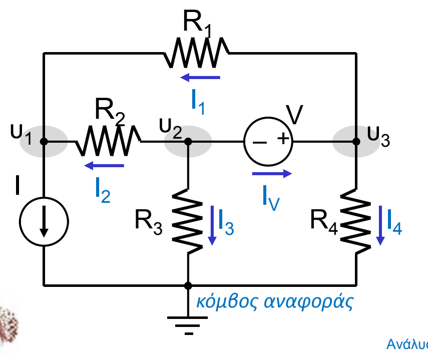
end

Παράδειγμα: Ανάλυση Κόμβων ΙΙΙ

Πρόβλημα: Να βρεθεί το ρεύμα I_V που διαρρέει την πηγή τάσης, όταν I=2A, V=3V, R_1=2Ω, R_2=2Ω, R_3=4Ω και R_4=3Ω.

Λύση: Στο κύκλωμα ∃ τέσσερις κόμβοι. Κόμβος αναφοράς είναι η γείωση. Υπάρχουν δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, οι υ_1 και υ_2, και μία εξαρτημένη, η υ_3, εξ αιτίας της παρουσίας της πηγής τάσης V. Γράφουμε τον νόμο KCL στους τρεις κόμβους (οι φορές των ρευμάτων επιλέγονται αυθαίρετα).

$$V=\upsilon_3-\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_3 = V+\upsilon_2$$



$$\frac{\upsilon_3-\upsilon_1}{R_1}+\frac{\upsilon_2-\upsilon_1}{R_2}-I=0 \qquad \textit{κόμβος 1}$$

$$-\frac{\upsilon_2-\upsilon_1}{R_2}-\frac{\upsilon_2-0}{R_3}-I_V=0 \qquad \textit{κόμβος 2}$$

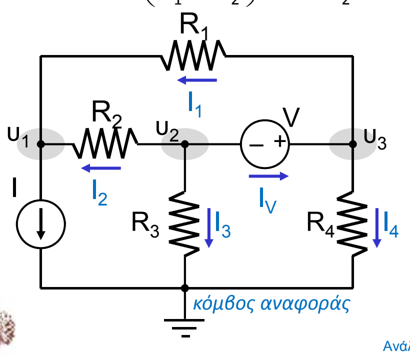
$$I_V-\frac{\upsilon_3-\upsilon_1}{R_1}-\frac{\upsilon_3-0}{R_4}=0 \quad (1) \qquad \textit{κόμβος 3}$$

Παράδειγμα: Ανάλυση Κόμβων ΙΙΙ

Ισχύει:

$$(1)\ \Rightarrow\ I_V = \frac{\upsilon_3-\upsilon_1}{R_1}+\frac{\upsilon_3-0}{R_4} \qquad \overset{\text{κόμβος 2}}{\Rightarrow} \qquad \frac{\upsilon_1-\upsilon_2}{R_2}-\frac{\upsilon_2}{R_3}-\frac{\upsilon_3-\upsilon_1}{R_1}-\frac{\upsilon_3}{R_4}=0\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)\cdot\upsilon_1-\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\cdot\upsilon_2-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)\upsilon_3=0\Rightarrow 12\upsilon_1-9\upsilon_2-10\upsilon_3=0 \quad (2)\\ \text{κόμβος 1} \quad -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cdot\upsilon_1+\frac{1}{R_2}\cdot\upsilon_2+\frac{1}{R_1}\cdot\upsilon_3=I\Rightarrow -2\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3=4 \quad (3)\end{array}\right\}\Rightarrow$$



Καθώς: $\upsilon_3=\upsilon_2+V\ \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}12\upsilon_1-19\upsilon_2=30\\ -2\upsilon_1+2\upsilon_2=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\upsilon_1=-5.64V \quad \upsilon_2=-5.14V \quad \upsilon_3=-2.14V$

$(1)\ \Rightarrow\ \boxed{I_V=1.04A}$

end

Γραμμικές Εξισώσεις Ι

Για την επίλυση συστημάτων των γραμμικών εξισώσεων που συναντούμε κατά την ανάλυση κυκλωμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο κανόνας του Cramer. Κατά την εφαρμογή του κανόνα χρησιμοποιείται η έννοια της ορίζουσας.

Η *ορίζουσα* αποδίδεται με την μορφή πίνακα ως ακολούθως:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32})-\alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{31})+\alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31})$$

Γραμμικές Εξισώσεις ΙΙ

Ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορεί να αναπαρασταθεί με την ακόλουθη μορφή πινάκων:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &= b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Ο κανόνας του Cramer για την εύρεση των αγνώστων x_1 και x_2 εφαρμόζεται ως ακολούθως:

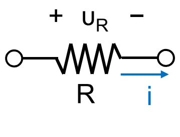
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & \alpha_{12} \\ b_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1\alpha_{22} - \alpha_{12}b_2}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & b_1 \\ \alpha_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\alpha_{11}b_2 - b_1\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}$$

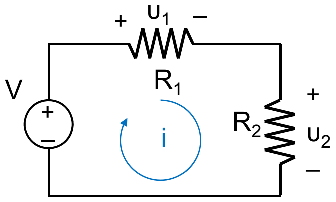
Μέθοδος Ρεύματος Απλών Βρόχων Ι

Η *μέθοδος ρευμάτων σε απλούς βρόχους* (*mesh currents*) χρησιμοποιεί τα ρεύματα στους βρόχους σαν ανεξάρτητες μεταβλητές.

- Τα ρεύματα των απλών βρόχων επιλέγεται να έχουν φορά αυτή των δεικτών του ρολογιού.
- Μόλις καθοριστεί το ρεύμα σε ένα βρόχο, εφαρμόζεται ο *νόμος του Kirchhoff για τις τάσεις* ώστε να προκύψει η επιθυμητή εξίσωση.
- Με τη μέθοδο αυτή η τάση κάθε κλάδου εκφράζεται σαν συνάρτηση του ρεύματος που τον διαρρέει και συνεπώς οι τάσεις <u>δεν</u> υπεισέρχονται στις εξισώσεις.

KVL: $V - \upsilon_1 - \upsilon_2 = 0 \Leftrightarrow V - iR_1 - iR_2 = 0$





N. Ohm $\upsilon_R = i \cdot R$

Μέθοδος Ρεύματος Απλών Βρόχων II

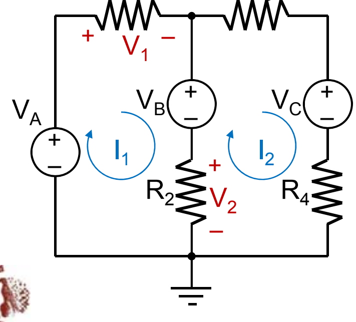
Για την εφαρμογή της *μεθόδου ρευμάτων σε απλούς βρόχους* :

- Καθορίστε με συνέπεια το ρεύμα **κάθε** απλού βρόχου. Δηλ. τα άγνωστα ρεύματα στους απλούς βρόχους ορίζονται να ακολουθούν πάντα την κατεύθυνση των δεικτών του ρολογιού (*σύμβαση*). Τα γνωστά ρεύματα στους βρόχους (πηγές ρεύματος) ορίζονται να ακολουθούν πάντα την κατεύθυνση της πηγής ρεύματος.
- Σε ένα κύκλωμα με *n* απλούς βρόχους και *m* πηγές ρεύματος προκύπτουν n−m ανεξάρτητες εξισώσεις. Τα άγνωστα ρεύματα στους βρόχους θα είναι οι n−m ανεξάρτητες μεταβλητές του συστήματος.
- Εφαρμόστε το *νόμο τάσης του Kirchhoff* σε κάθε απλό βρόχο που τον διαρρέει ένα άγνωστο ρεύμα, γράφοντας κάθε τάση ως συνάρτηση του ρεύματος ενός ή περισσοτέρων βρόχων.
- Επιλύστε το γραμμικό σύστημα των n−m άγνωστων μεταβλητών (ρευμάτων).

Παράδειγμα: Ανάλυση Βρόχων I

Πρόβλημα: Να βρεθούν τα ρεύματα των απλών βρόχων στο κύκλωμα, όταν V_A=10V, V_B=9V, V_C=1V, R_1=5Ω, R_2=10Ω, R_3=5Ω και R_4=5Ω.

Λύση: Ορίζουμε την κατεύθυνση των ρευμάτων στους δύο απλούς βρόχους σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.
Συνεπώς, θα έχουμε δύο εξισώσεις (μία για κάθε βρόχο) με δύο άγνωστα ρεύματα. Εφαρμόζουμε KVL:



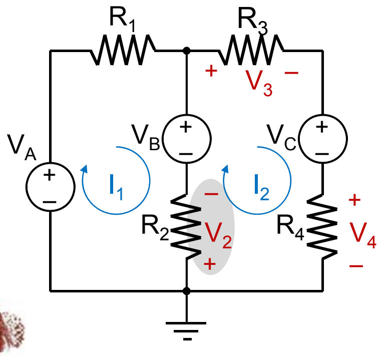
$$V_A - R_1 I_1 - V_B - R_2(I_1 - I_2) = 0$$ *βρόχος 1*

Παράδειγμα: Ανάλυση Βρόχων I

Για τη δεύτερη εξίσωση εργαζόμαστε παρόμοια στον δεύτερο βρόχο, λαμβάνοντας υπόψιν σε αυτή την περίπτωση την πολικότητα της πτώσης τάσης στην R_2 η οποία ορίζεται σύμφωνα με τη φορά του ρεύματος I_2.

$$V_B - R_3 I_2 - V_C - R_4 I_2 - R_2 (I_2 - I_1) = 0 \qquad \textit{βρόχος 2}$$

Με αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών στις δύο εξισώσεις προκύπτει:



$$\left.\begin{aligned} 15I_1 - 10I_2 &= 1 \\ -10I_1 + 20I_2 &= 8 \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\begin{aligned} I_1 &= 0.5A \\ I_2 &= 0.65A \end{aligned}}$$

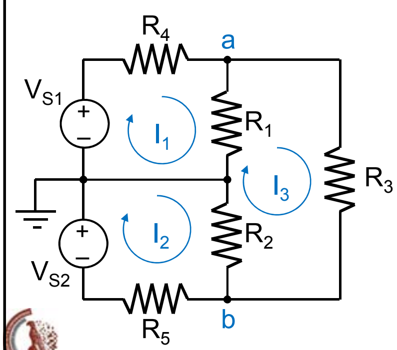
Παρατήρηση: Την πολικότητα της τάσης στα άκρα μιας αντίστασης την καθορίζει σε κάθε περίπτωση η φορά του ρεύματος στον βρόχο όπου εργαζόμαστε!

end

Παράδειγμα: Ανάλυση Βρόχων II

Πρόβλημα: Να βρεθούν οι τάσεις στους κόμβους a και b, όταν $V_{S1}=V_{S2}=110V$, $R_1=15\Omega$, $R_2=40\Omega$, $R_3=16\Omega$ και $R_4=R_5=1.3\Omega$.

Λύση: Ορίζουμε την κατεύθυνση των ρευμάτων στους τρεις απλούς βρόχους σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Συνεπώς, θα έχουμε τρεις εξισώσεις (μία για κάθε βρόχο) με τρία άγνωστα ρεύματα. Εφαρμόζουμε KVL:



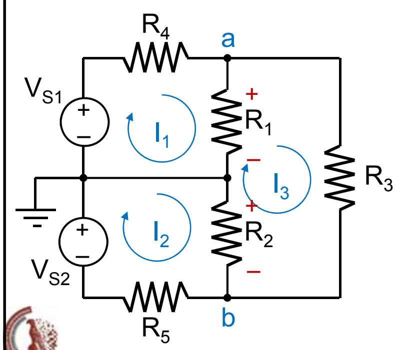
$$\left.\begin{aligned} V_{S1} - R_4 I_1 - R_1 (I_1 - I_3) &= 0 && \textit{βρόχος 1} \\ V_{S2} - R_2 (I_2 - I_3) - R_5 I_2 &= 0 && \textit{βρόχος 2} \\ -R_1 (I_3 - I_1) - R_2 (I_3 - I_2) - R_3 I_3 &= 0 && \textit{βρόχος 3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} -(R_1 + R_4)\cdot I_1 + R_1 I_3 &= -V_{S1} && \textit{βρόχος 1} \\ -(R_2 + R_5)\cdot I_2 + R_2 I_3 &= -V_{S2} && \textit{βρόχος 2} \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 - (R_1 + R_2 + R_3)\cdot I_3 &= 0 && \textit{βρόχος 3} \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Ανάλυση Βρόχων ΙΙ

Οι λύσεις του συστήματος είναι: $I_1 = 17.11A \quad I_2 = 13.57A \quad I_3 = 11.26A$

Με βάση το νόμο του Ohm στις αντιστάσεις R_1 και R_2 και λαμβάνοντας υπόψιν τη θέση του κόμβου αναφοράς θα ισχύει:



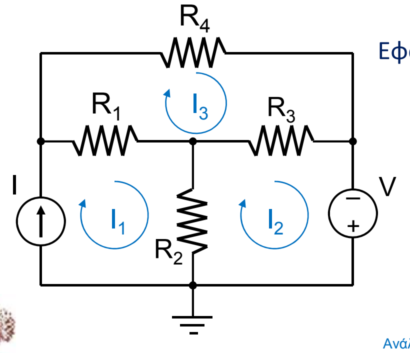
$$V_a - 0 = V_a = R_1(I_1 - I_3) = 87.75V$$

$$V_b - 0 = V_b = -R_2(I_2 - I_3) = -92.40V$$

Παράδειγμα: Ανάλυση Βρόχων ΙΙΙ

Πρόβλημα: Να βρεθούν τα ρεύματα στους απλούς βρόχους, όταν I=0.5A, V=6V, R_1=3Ω, R_2=8Ω, R_3=6Ω και R_4=4Ω.

Λύση: Ορίζουμε την κατεύθυνση των ρευμάτων στους τρεις απλούς βρόχους σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή των πηγών ρεύματος.
Στο βρόχο 1 το ρεύμα είναι ήδη γνωστό από την παρουσία της πηγής ρεύματος, δηλ. I_1=I.
Συνεπώς, θα έχουμε δύο εξισώσεις, με δύο άγνωστα ρεύματα.



Εφαρμόζουμε KVL:

$$I_1 = I \qquad \textit{βρόχος 1}$$

$$V - R_2(I_2 - I_1) - R_3(I_2 - I_3) = 0 \qquad \textit{βρόχος 2}$$

$$-R_1(I_3 - I_1) - R_4 I_3 - R_3(I_3 - I_2) = 0 \qquad \textit{βρόχος 3}$$

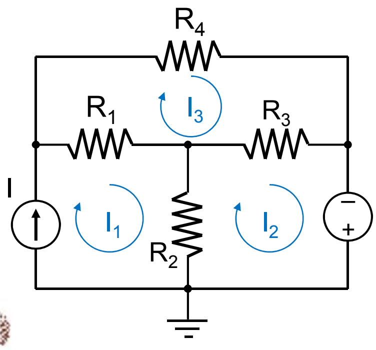
Παράδειγμα: Ανάλυση Βρόχων ΙΙΙ

Αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$14I_2 - 6I_3 = 10$$

$$-6I_2 + 13I_3 = 1.5$$

Από τις λύσεις των εξισώσεων βρίσκουμε: $I_2 = 0.95A$ $\quad I_3 = 0.55A$



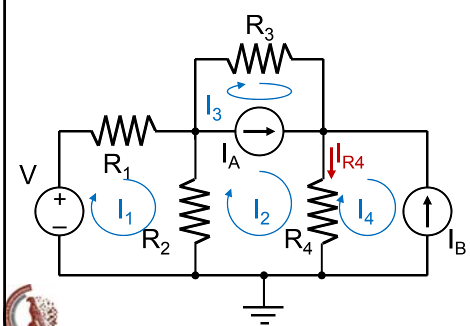
Παρατήρηση: Ουσιαστικά, η παρουσία της γνωστής σταθερής πηγής ρεύματος (Ι) απλούστευσε σημαντικά την επίλυση του προβλήματος!

Παράδειγμα: Ανάλυση Βρόχων IV

Πρόβλημα: Να βρεθεί το ρεύμα I_{R4} που διαρρέει την αντίσταση R_4, όταν V=1V, I_A=2A, I_B=1A, R_1=3Ω, R_2=4Ω, R_3=2Ω και R_4=5Ω.

Λύση: Στο κύκλωμα ∃ τέσσερις απλοί βρόχοι. Ορίζουμε τις φορές των ρευμάτων σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Γράφουμε τον νόμο KVL στους βρόχους.

Επειδή οι βρόχοι 2 και 3 έχουν μια κοινή πηγή ρεύματος, διαχειριζόμαστε αυτούς τους βρόχους ως ένα βρόχο όπου δεν υπάρχει η πηγή ρεύματος (αλλά με τις αντιστάσεις κάθε βρόχου να διαρρέονται από το ρεύμα του βρόχου) και γράφουμε την *εξίσωση συσχέτισης* της πηγής ρεύματος με τα ρεύματα των δύο βρόχων.



βρόχος 1 $\quad V - I_1R_1 - (I_1 - I_2)\cdot R_2 = 0$

βρόχοι 2, 3 $\quad -(I_2 - I_1)\cdot R_2 - I_3R_3 - (I_2 - I_4)\cdot R_4 = 0$

και $\quad I_A = I_2 - I_3 \quad$ *εξίσωση συσχέτισης*

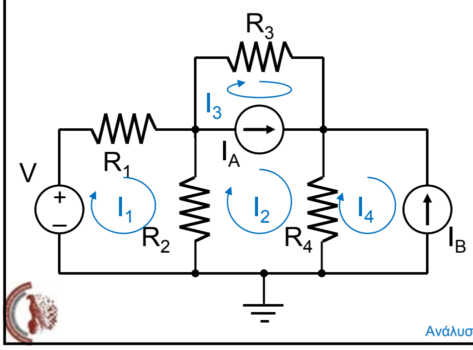
βρόχος 4 $\quad I_4 = -I_B$

Παράδειγμα: Ανάλυση Βρόχων IV

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε διαχωρίζοντας τις μεταβλητές:

βρόχος 1 $V - I_1R_1 - (I_1 - I_2)\cdot R_2 = 0 \Rightarrow (R_1 + R_2)\cdot I_1 - R_2I_2 = V$

$$\left.\begin{array}{l}\textit{βρόχοι 2, 3}\quad -(I_2 - I_1)\cdot R_2 - I_3R_3 - (I_2 - I_4)\cdot R_4 = 0 \Rightarrow R_2I_1 - (R_2 + R_4)\cdot I_2 - R_3I_3 + R_4I_4 = 0 \\ \text{και}\quad I_A = I_2 - I_3 \Rightarrow I_3 = I_2 - I_A \\ \textit{βρόχος 4}\quad I_4 = -I_B\end{array}\right\}$$



$$\left.\begin{array}{l}(R_1 + R_2)\cdot I_1 - R_2I_2 = V \\ R_2I_1 - (R_2 + R_4)\cdot I_2 - R_3(I_2 - I_A) - R_4I_B = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}(R_1 + R_2)\cdot I_1 - R_2I_2 = V \\ R_2I_1 - (R_2 + R_4 + R_3)\cdot I_2 = R_4I_B - R_3I_A\end{array}\right\} \Rightarrow$$

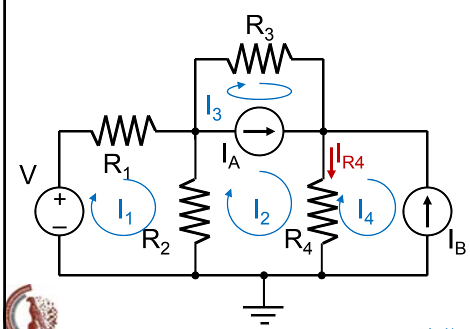
Παράδειγμα: Ανάλυση Βρόχων IV

Συνεπώς:

$$\left.\begin{array}{l}(R_1 + R_2)\cdot I_1 - R_2I_2 = V \\ R_2I_1 - (R_2 + R_4 + R_3)\cdot I_2 = R_4I_B - R_3I_A\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}7I_1 - 4I_2 = 1 \\ 4I_1 - 11I_2 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}I_1 = 0.16A \\ I_2 = -0.03A\end{array}$$

Προκύπτει:

$$I_{R4} = I_2 - I_4 = I_2 + I_B = 0.96A$$



end

Κυκλώματα με Ελεγχόμενες Πηγές

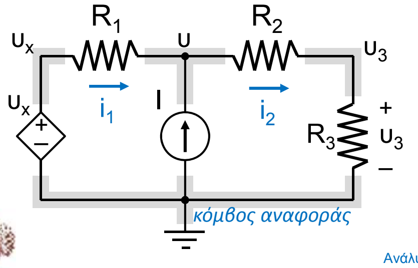
Οι μέθοδοι ανάλυσης (κόμβων ή απλών βρόχων) που περιγράψαμε μπορούν να εφαρμοστούν και στην περίπτωση που στα υπό ανάλυση κυκλώματα εμπεριέχονται εξαρτώμενες (ελεγχόμενες) πηγές. Σε αυτή την περίπτωση εργαζόμαστε ως ακολούθως:

- Αρχικά χειριζόμαστε την εξαρτώμενη πηγή ως ιδανική πηγή και καταστρώνουμε τις εξισώσεις κόμβων ή απλών βρόχων ανάλογα.
- Στις εξισώσεις που προκύπτουν υπάρχει και μια εξίσωση που συσχετίζει την εξαρτημένη πηγή με εκείνη την τάση ή εκείνο το ρεύμα του κυκλώματος από το οποίο εξαρτάται. Αυτή η εξίσωση καλείται *εξίσωση περιορισμού* (*constraint equation*).
- Επιλύουμε τις εξισώσεις ως προς τους αγνώστους.

Παράδειγμα: Εξαρτημένες Πηγές Ι

Πρόβλημα: Να βρεθούν οι τάσεις στους κόμβους του κυκλώματος, όταν I=0.5A, R_1=5Ω, R_2=2Ω και R_3=4Ω. Ισχύει $\upsilon_x = 2\upsilon_3$

Λύση: Στο κύκλωμα ∃ τέσσερις κόμβοι. Κόμβος αναφοράς είναι η γείωση. Επίσης, ∃ δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, οι υ και υ_3 και μία εξαρτημένη μεταβλητή η υ_x.
Γράφουμε τον νόμο KCL στους κόμβους υ και υ_3. Οι φορές των ρευμάτων επιλέγονται αυθαίρετα.



$$\frac{\upsilon_x - \upsilon}{R_1} + I - \frac{\upsilon - \upsilon_3}{R_2} = 0$$ *κόμβος υ*

$$\frac{\upsilon - \upsilon_3}{R_2} - \frac{\upsilon_3 - 0}{R_3} = 0$$ *κόμβος υ_3*

Επίσης ισχύει η εξίσωση περιορισμού:

$$\upsilon_x = 2\upsilon_3$$ *κόμβος υ_x*

Παράδειγμα: Εξαρτημένες Πηγές Ι

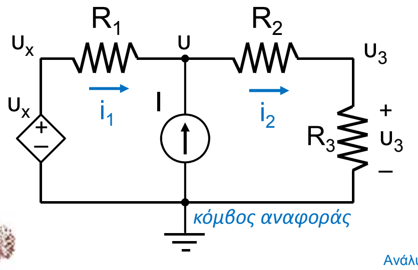
Αντικαθιστώντας τη υ_x προκύπτει:

κόμβος υ $\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cdot\upsilon-\left(\frac{2}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cdot\upsilon_3=I\Rightarrow 0.7\upsilon-0.9\upsilon_3=0.5$ (1)

κόμβος υ_3 $\frac{1}{R_2}\cdot\upsilon-\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\cdot\upsilon_3=0\Rightarrow 0.5\upsilon-0.75\upsilon_3=0$ (2)

$\Rightarrow$

$\upsilon=5V$ $\qquad \upsilon_3=3.33V$ $\qquad \upsilon_x=6.66V$

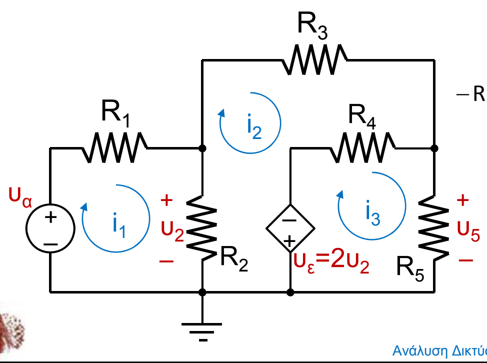


end

Παράδειγμα: Εξαρτημένες Πηγές ΙΙ

Πρόβλημα: Να βρεθεί ο λόγος $\upsilon_5/\upsilon_\alpha$ (κέρδος τάσης) στο κύκλωμα, όταν R_1=1Ω, R_2=0.5Ω, R_3=0.5Ω, R_4=0.25Ω και R_5=0.25Ω. Ισχύει η εξίσωση περιορισμού: $\upsilon_\varepsilon=2\upsilon_2$.

Λύση: Ορίζουμε την κατεύθυνση των ρευμάτων στους τρεις απλούς βρόχους σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Συνεπώς, θα έχουμε τρεις εξισώσεις, με τρία άγνωστα ρεύματα. Εφαρμόζουμε KVL σε κάθε βρόχο:



$\upsilon_\alpha-R_1i_1-R_2(i_1-i_2)=0$ *βρόχος 1*

$-R_2(i_2-i_1)-R_3i_2-R_4(i_2-i_3)+\upsilon_\varepsilon=0$ *βρόχος 2*

$-\upsilon_\varepsilon-R_4(i_3-i_2)-R_5i_3=0$ *βρόχος 3*

$\upsilon_\varepsilon=2\upsilon_2$ *εξίσωση περιορισμού*

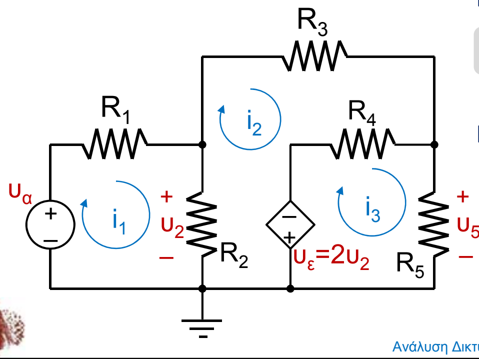
Παράδειγμα: Εξαρτημένες Πηγές ΙΙ

Ισχύει ότι $\upsilon_2 = R_2(i_1 - i_2)$ και συνεπώς:

βρόχος 1 $(R_1 + R_2)\cdot i_1 - R_2 i_2 = \upsilon_\alpha$

βρόχος 2 $R_2(i_1 - i_2) - R_3 i_2 - R_4(i_2 - i_3) + 2R_2(i_1 - i_2) = 0 \Leftrightarrow 3R_2 i_1 - (3R_2 + R_3 + R_4)\cdot i_2 + R_4 i_3 = 0$

βρόχος 3 $-2R_2(i_1 - i_2) - R_4(i_3 - i_2) - R_5 i_3 = 0 \Leftrightarrow -2R_2 i_1 + (2R_2 + R_4)\cdot i_2 - (R_4 + R_5)\cdot i_3 = 0$



Η λύση του συστήματος δίνει:

$i_1 = 0.88\upsilon_\alpha$ $\quad i_2 = 0.32\upsilon_\alpha$ $\quad i_3 = 0.16\upsilon_\alpha$

Ισχύει: $\upsilon_5 = R_5 i_3 \Rightarrow \upsilon_5 = 0.16\cdot R_5 \cdot \upsilon_\alpha \Rightarrow$

$$\frac{\upsilon_5}{\upsilon_\alpha} = 0.16\cdot R_5 = 0.16\times 0.25 \Rightarrow \frac{\upsilon_5}{\upsilon_\alpha} = 0.04$$

Παρατηρήσεις

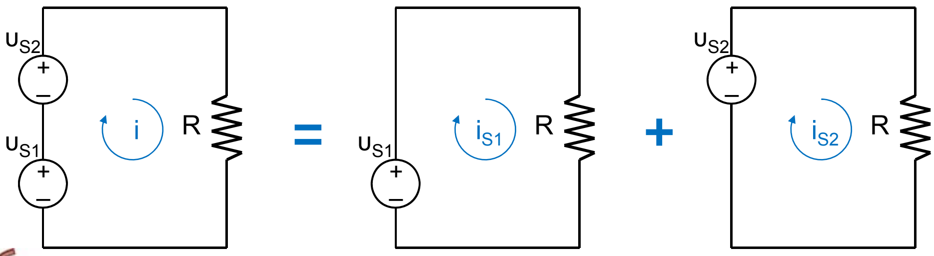
- Οι μέθοδοι ανάλυσης που παρουσιάστηκαν στην τρέχουσα ενότητα είναι γενικές τεχνικές και μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση οποιουδήποτε γραμμικού κυκλώματος πέραν της ανάλυσης κυκλωμάτων αντιστάσεων.
- Καθώς αυτές οι μέθοδοι βασίζονται στους θεμελιώδεις νόμους (KCL και KVL) για την ανάλυση κυκλωμάτων, μπορούν να εφαρμοστούν και σε κυκλώματα που συνθέτονται με μη γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία (π.χ. διόδους, τρανζίστορ κ.α.).

Αρχή της Υπέρθεσης ή Επαλληλίας

Η *αρχή της υπέρθεσης* (*superposition principle*) μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα γραμμικά κυκλώματα ως ακολούθως:

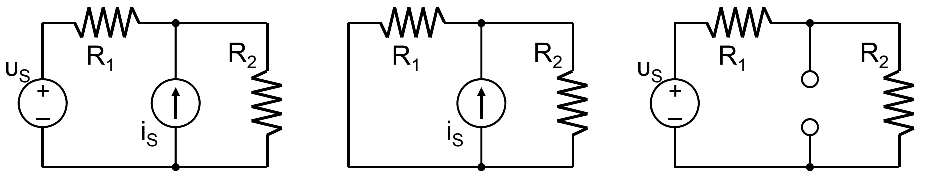
- Σε γραμμικό κύκλωμα με Ν πηγές, το ρεύμα σε κάθε κλάδο και η τάση σε κάθε κόμβο δίδεται από το άθροισμα Ν ρευμάτων και Ν τάσεων αντίστοιχα, όπου κάθε ρεύμα και κάθε τάση υπολογίζεται με την υπόθεση ότι στο κύκλωμα υπάρχει μόνο μία πηγή κάθε φορά και όλες οι υπόλοιπες Ν–1 πηγές είναι μηδενισμένες.

Ν. Ohm: $i = \frac{u_{S1} + u_{S2}}{R} = \frac{u_{S1}}{R} + \frac{u_{S2}}{R} = i_{S1} + i_{S2}$



Μηδενισμός Πηγών

- Ο μηδενισμός μιας πηγής τάσης επιτυγχάνεται βραχυκυκλώνοντας τους ακροδέκτες της (δηλ. *αντικαθίσταται με βραχυκύκλωμα*).
- Ο μηδενισμός μιας πηγής ρεύματος επιτυγχάνεται ανοικτοκυκλώνοντας ένα άκρο της (δηλ. *αντικαθίσταται με ανοικτοκύκλωμα*).



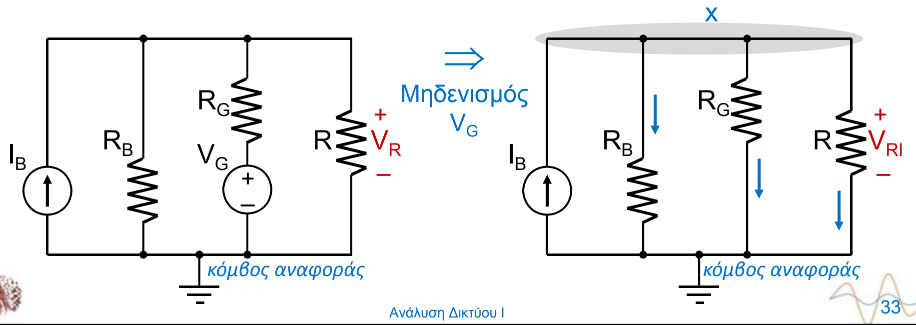
Μηδενισμός πηγής τάσης   Μηδενισμός πηγής ρεύματος

Παράδειγμα: Υπέρθεση

Πρόβλημα: Να βρεθεί η τάση στα άκρα της αντίστασης R στο κύκλωμα, όταν V_G=12V, I_B=12A, R_B=1Ω, R_G=0.3Ω, και R=0.23Ω.

Λύση: Μηδενίζουμε αρχικά την πηγή τάσης και επιλέγουμε φορές ρευμάτων. Εφαρμόζουμε KCL στον κόμβο x:

$$I_B - \frac{V_{RI}}{R_B} - \frac{V_{RI}}{R_G} - \frac{V_{RI}}{R} = 0 \Rightarrow V_{RI} = \frac{I_B}{1/R_B + 1/R_G + 1/R} = 1.38\text{V}$$



Παράδειγμα: Υπέρθεση

Ακολούθως, μηδενίζουμε την πηγή ρεύματος και εφαρμόζουμε KCL στο x:

$$I_{RB} - I_{RG} + I_R = 0 \Rightarrow \frac{V_{RV}}{R_B} - \frac{V_G - V_{RV}}{R_G} + \frac{V_{RV}}{R} = 0 \Rightarrow$$

$$V_{RV} = \frac{V_G/R_G}{1/R_B + 1/R_G + 1/R} = 4.61\text{V}$$

Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης ισχύει: $V_R = V_{RI} + V_{RV} = 1.38\text{V} + 4.61\text{V} = 5.99\text{V}$