Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

Θεωρία για το πότε ένας σχεδιασμός είναι «καλός»

Η θεωρία βασίζεται στις Συναρτησιακές Εξαρτήσεις (Functional Dependencies)

Τι είναι;

Εξαρτήσεις ανάμεσα σε σύνολα από γνωρίσματα

Συμβολισμός

S1 → S2 (όπου S1, S2 σύνολα γνωρισμάτων)

Τι σημαίνει:

Αν ίδιες τιμές στα γνωρίσματα του S1 ⇒ ίδιες τιμές στα γνωρίσματα του S2

Παράδειγμα: Σχήμα Σχέσης R(A, B, C, D) (Υπενθύμιση συμβολισμού)

Στιγμιότυπο, r(R)

	A	B	C	D
r1	a_1	b_1	c_1	d_1
r2	a_1	b_2	c_1	d_2
r3	a_2	b_3	c_2	d_3
r4	a_3	b_3	c_2	d_4

Συμβολισμός

$r1[A] = a_1$

$r2[BC] = b_2\ c_1$

Έστω ένα σχήμα σχέσης R(A_1, A_2, …, A_n). Θα συμβολίζουμε με $R = \{A_1, A_2, …, A_n\}$ το σύνολο των γνωρισμάτων της R.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $X \subseteq R$ και $Y \subseteq R$,

μια συναρτησιακή εξάρτηση $X \rightarrow Y$ ισχύει στο σχήμα R

αν για κάθε σχέση r(R), για κάθε ζεύγος πλειάδων t_1 και t_2 της r, τέτοιες ώστε $t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]$

Με απλά λόγια, μια συναρτησιακή εξάρτηση $X \rightarrow Y$ μας λέει ότι

αν οποιεσδήποτε δυο πλειάδες μιας σχέσης της R συμφωνούν (έχουν την ίδια τιμή) σε κάποια γνωρίσματα $X \subseteq R$ τότε συμφωνούν (έχουν την ίδια τιμή) και σε κάποια γνωρίσματα $Y \subseteq R$.

Αντί $\{A_1, A_2, …, An\} \rightarrow \{B_1, B_2, …, B_m\}$ γράφουμε

$A_1A_2 …A_n \rightarrow B_1B_2 …B_m$

Ισχύουν στο <u>σχήμα</u> - δηλαδή για όλες τις πιθανές σχέσεις (πλειάδες)

Παράδειγμα: Ποιες (μη τετριμμένες) συναρτησιακές εξαρτήσεις *ικανοποιεί* η παρακάτω σχέση – δεν ξέρουμε αν ισχύουν στο σχήμα

Μπορούμε όμως να πούμε ποιες **δεν ισχύουν**

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_2	c_1	d_2
a_2	b_3	c_2	d_3
a_3	b_3	c_2	d_4

- Το Y *εξαρτάται συναρτησιακά* από το X
- Γιατί καλούνται συναρτησιακές
- $K \subseteq R$ **υπερκλειδί** της R ανν $K \rightarrow$?

Υπενθύμιση: R είναι το σύνολο των γνωρισμάτων του σχήματος

Μια γενίκευση της έννοιας του κλειδιού

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

Παρατήρηση

$A_1A_2 \ldots A_n \to B_1$ και $A_1A_2 \ldots A_n \to B_2 \Leftrightarrow A_1A_2 \ldots A_n \to B_1B_2$

Παράδειγμα φυσικής σημασίας εξαρτήσεων

Έστω το παρακάτω σχεσιακό σχήμα:

Εγγραφή(Μάθημα, Φοιτητής, Ώρα, Αίθουσα, Βαθμός)

(συντομογραφία) **Ε(Μ, Φ, Ω, Α, Β)**

1. Τα μαθήματα προσφέρονται μόνο μια φορά (σε μια συγκεκριμένη ώρα και αίθουσα).
2. Οι φοιτητές δεν μπορούν να είναι σε δυο διαφορετικά μέρη ταυτόχρονα
3. Δε γίνεται να έχουμε δυο μαθήματα ταυτόχρονα (την ίδια ώρα) στην ίδια αίθουσα
4. Ένας φοιτητής παίρνει μόνο ένα βαθμό σε κάθε μάθημα

Ποιες συναρτησιακές εξαρτήσεις εκφράζουν αυτές τις συνθήκες.
Ποιο (ποια) είναι το κλειδί αν ισχύουν τα (1) έως (4)

5. Τι σημαίνει $Φ \to Μ$, $ΜΒ \to Φ$

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

Παράδειγμα: Στο παρακάτω σχήμα ένας λογαριασμός μπορεί να ανήκει σε παραπάνω από έναν πελάτη και ένας πελάτης πολλούς λογαριασμούς. Ποιες άλλες (εκτός του κλειδιού) συναρτησιακές εξαρτήσεις μπορεί να ισχύουν αλλά δε φαίνονται στο παρακάτω σχήμα;

Λογαριασμός

Όνομα-Υποκαταστήματος	<u>Αριθμός-Λογαριασμού</u>	Ποσό	<u>Όνομα-Πελάτη</u>

Παράδειγμα: Ένας Πελάτης πολλά δάνεια και ένα Δάνειο από παραπάνω από έναν πελάτη

Πελάτης

<u>Όνομα-Πελάτη</u>	Οδός	Πόλη	<u>Αριθμός-Δανείου</u>

Διεύθυνση πελάτη

Σημείωση: Στα παραπάνω σχεσιακά μοντέλα, με τα κλειδιά εκφράζεται μόνο ένα υποσύνολο των περιορισμών

Διαισθητικά, οι δύο παραπάνω σχεδιασμοί δεν είναι «καλοί», γιατί;

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

Στο παρακάτω σχήμα, υπάρχει κάποιος περιορισμός που δεν εκφράζεται από τα κλειδιά;

Ταινία

<u>Τίτλος</u>	<u>Έτος</u>	Διάρκεια	Είδος

Παίζει

<u>Όνομα-Ηθοποιού</u>	<u>Τίτλος</u>	<u>Έτος</u>

Ηθοποιός

<u>Όνομα</u>	Διεύθυνση	Έτος-Γέννησης	Σύζυγος-Ηθοποιού

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

Τετριμμένες εξαρτήσεις (ισχύουν για όλα τα σχήματα)

Παράδειγμα: $A \to A$ ή $AB \to B$

Γενικά,
$X \to Y$ **τετριμμένη**, όταν $Y \subseteq X$

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

- Οι συναρτησιακές εξαρτήσεις ορίζονται στο **σχήμα** μιας σχέσης
- Ένα σύνολο από συναρτησιακές εξαρτήσεις F *ισχύει* σε ένα σχήμα
- Έλεγχος αν μια σχέση *ικανοποιεί* το σύνολο F

Κανόνες Συμπερασμού

Συνάγουμε νέες εξαρτήσεις από ένα δεδομένο σύνολο εξαρτήσεων

$F \models X \rightarrow Y$: η συναρτησιακή εξάρτηση $X \rightarrow Y$ **συνάγεται** από το σύνολο εξαρτήσεων F

Κανόνες Συμπερασμού

F^+ : **κλειστότητα** του F: σύνολο όλων των συναρτησιακών εξαρτήσεων που συνάγονται από το F

Κανόνες Συμπερασμού- για τη συναγωγή εξαρτήσεων

Κανόνες Συμπερασμού

Κανόνες Συμπερασμού (Inference Rules)

1. Ανακλαστικός Κανόνας

Αν $X \supseteq Y$, τότε $X \rightarrow Y$

2. Επαυξητικός Κανόνας

$\{X \rightarrow Y\} \models XZ \rightarrow YZ$

3. Μεταβατικός Κανόνας

$\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\} \models X \rightarrow Z$

Κανόνες του Amstrong: *βάσιμοι* (sound) δε δίνουν λανθασμένες εξαρτήσεις και *πλήρεις* (complete) μας δίνουν όλο το F^+

Κανόνες Συμπερασμού

$\{X \rightarrow Y\} \models XZ \rightarrow YZ$ Επαυξητικός Κανόνας

Απόδειξη

(με επαγωγή σε άτοπο:) έστω ότι σε κάποιο στιγμιότυπο της r ισχύει

$X \rightarrow Y$ (1) αλλά όχι $XZ \rightarrow YZ$ (2)

Από (2 & ορισμό), υπάρχουν δυο πλειάδες $t1[XZ] = t2[XZ]$ (3)

και $t1[YZ] \neq t2[YZ]$

Από (3), $t1[X] = t2[X]$ (4) και $t1[Z] = t2[Z]$ (5)

Από (1) και (4), $t1[Y] = t2[Y]$ (6)

Από (5) και (6), $t1[YZ] = t2[YZ]$ Άτοπο!

Απόδειξη των 3 κανόνων με βάση τον ορισμό

Κανόνες Συμπερασμού

Επιπρόσθετοι κανόνες

4. Ενωτικός Κανόνας

$\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\} \models X \rightarrow YZ$

5. Διασπαστικός Κανόνας

$\{X \rightarrow YZ\} \models X \rightarrow Y$

6. Ψευδομεταβατικός Κανόνας

$\{X \rightarrow Y, YZ \rightarrow W\} \models XZ \rightarrow W$

Κανόνες Συμπερασμού

Ενωτικός Κανόνας

$\{X \rightarrow Y\ (1), X \rightarrow Z\ (2)\} \models X \rightarrow YZ$

Απόδειξη (με χρήση των κανόνων του Amstrong)

(2) + Επαυξ. $XY \rightarrow YZ$ (3)

(1) + Επαυξ. $X \rightarrow XY$ (4)

(3) (4) Μεταβ. $X \rightarrow YZ$

Απόδειξη των επιπλέον κανόνων με βάση τον ορισμό ή/και των κανόνων του Amstrong

Ανακλαστικός Κανόνας

Αν $X \supseteq Y$, τότε $X \rightarrow Y$

Επαυξητικός Κανόνας

$\{X \rightarrow Y\} \models XZ \rightarrow YZ$

Μεταβατικός Κανόνας

$\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\} \models X \rightarrow Z$

Κανόνες Συμπερασμού

1. **Ανακλαστικός Κανόνας** Αν $X \supseteq Y$, τότε $X \rightarrow Y$
2. **Επαυξητικός Κανόνας** $\{X \rightarrow Y\}$ συνάγει $XZ \rightarrow YZ$
3. **Μεταβατικός Κανόνας** $\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\}$ συνάγει $X \rightarrow Z$
4. **Ενωτικός Κανόνας** $\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\}$ συνάγει $X \rightarrow YZ$
5. **Διασπαστικός Κανόνας** $\{X \rightarrow YZ\}$ συνάγει $X \rightarrow Y$
6. **Ψευδομεταβατικός Κανόνας** $\{X \rightarrow Y, YZ \rightarrow W\}$ συνάγει $XZ \rightarrow W$

Κανόνες Συμπερασμού

Έστω R = {A, B, C, G, H, I} και F = {$A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$, $CG \rightarrow H$, $CG \rightarrow I$, $B \rightarrow H$}

Παραδείγματα συναρτησιακών εξαρτήσεων που συνάγονται από το F

- $A \rightarrow H$
- $CG \rightarrow HI$
- $AG \rightarrow I$

(α) Υπάρχει τρόπος/αλγόριθμος να τις υπολογίσουμε όλες;

(β) Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το κλειδί;

Κλειστότητα

X^+ : *κλειστότητα (closure) ενός συνόλου X από γνωρίσματα από το F*

σύνολο όλων των γνωρισμάτων που εξαρτώνται συναρτησιακά από το X μέσω του F

Υπολογισμός του X^+

```
Result := X
while (αλλαγή στο Result)
        Για κάθε συναρτησιακή εξάρτηση: Y → Z ∈ F
                Αν Y ⊆ Result, Result := Result ∪ Z
```


Κλειστότητα

Παράδειγμα

Έστω R = {A, B, C, G, H, I} και F = {$A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$, $CG \rightarrow H$, $CG \rightarrow I$, $B \rightarrow H$}

Υπολογισμός του $\{A, G\}^+$

Κλειστότητα

- Είναι ο αλγόριθμος σωστός

  (α) Για κάθε $Y \in$ Result, ισχύει $Y \in X^+$

  (β) Για κάθε $Y \in X^+$, ισχύει $Y \in$ Result

- Πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης

Κλειστότητα

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο (πως;) για να:

1. Δείξουμε αν μια συναρτησιακή εξάρτηση ισχύει
2. Υπολογίσουμε τα κλειδιά ενός σχήματος σχέσης
3. Υπολογίσουμε το F^+

Παράδειγμα Ι

R(A, B, C, D) $F = \{AB \to C, C \to D, D \to A\}$

1. Δείξουμε αν μια συναρτησιακή εξάρτηση ισχύει

$C \to A$?

$A \to D$?

$AB \to D$?

Παράδειγμα Ι

R(A, B, C, D) $F = \{AB \to C, C \to D, D \to A\}$

2. Υπολογίσουμε τα κλειδιά ενός σχήματος σχέσης

Παράδειγμα Ι

R(A, B, C, D) $F = \{AB \to C, C \to D, D \to A\}$

3. Υπολογίσουμε το F^+

Παράδειγμα ΙΙ

R(A, B, C, D, E) $F = \{A \to BC, C \to AD, B \to ED, AD \to E\}$

1. Υπολογίστε το
A^+, B^+, C^+, D^+, E^+

2. Υποψήφια κλειδιά;

Κάλυμμα

Απλοποίηση ενός δοσμένου συνόλου συναρτησιακών εξαρτήσεων χωρίς να μεταβάλλουμε την κλειστότητά του

Έστω δυο σύνολα συναρτησιακών εξαρτήσεων E και F

Λέμε ότι το F **καλύπτει** το E (ή το E καλύπτεται από το F), αν κάθε ΣΕ στο E, ανήκει στο F^+ (δηλαδή, συνάγεται από το F) (αλλιώς, $E \subseteq F^+$)

Δυο σύνολα συναρτησιακών εξαρτήσεων E και F είναι **ισοδύναμα**

ανν $E^+ = F^+$.

(δηλαδή, αν το E καλύπτει το F και το F καλύπτει το E)

Κάλυμμα

- Πως μπορούμε να υπολογίσουμε αν ένα σύνολο F καλύπτει ένα σύνολο E;

- Πως μπορούμε να υπολογίσουμε αν ένα σύνολο F είναι ισοδύναμο με ένα σύνολο E;

Παράδειγμα

F1 = {$A \to C$, $B \to C$}

F2 = {$A \to B$, $A \to C$}

F3 = {$A \to B$, $AB \to C$}

F1 καλύπτει το F3;

F3 καλύπτει το F1;

F1 ισοδύναμο του F3;

F2 καλύπτει το F3;

Ελάχιστο Κάλυμμα

Ελάχιστο κάλυμμα F_{min} της F: ελάχιστο σύνολο από ΣΕ που είναι ισοδύναμο με την F

Ένα σύνολο F συναρτησιακών εξαρτήσεων είναι **ελάχιστο** αν:

1. κάθε ΣΕ στο F έχει *ένα μόνο γνώρισμα* στο δεξιό της μέρος

2. δε μπορούμε να αντικαταστήσουμε μια ΣΕ $X \to Z$ από το F με μια ΣΕ $Y \to Z$ τέτοια ώστε $Y \subset X$ και να πάρουμε ένα σύνολο ισοδύναμο του F (δεν υπάρχει *περιττό γνώρισμα στο α.μ* της συναρτησιακής εξάρτησης)

3. δε *μπορούμε να αφαιρέσουμε μια ΣΕ* από το F και να πάρουμε ένα σύνολο ισοδύναμο του F (η ΣΕ είναι περιττή)

Ελάχιστο Κάλυμμα

Αλγόριθμος υπολογισμού ελάχιστου καλύμματος

1. Αντικατέστησε τις συναρτησιακές εξαρτήσεις
   $X_1 \to Y_1Y_2$ με $X_1 \to Y_1$ και $X_1 \to Y_2$.
2. Για κάθε ΣΕ
   (i) Βρες τα *περιττά γνωρίσματα* στο α.μ., αφαίρεσε τα
   (ii) Έλεγξε αν είναι *περιττή*, αν ναι αφαίρεσέ τη

Ελάχιστο Κάλυμμα

Περιττά γνωρίσματα: γνωρίσματα που αν αφαιρεθούν δεν επηρεάζουν το κλείσιμο (δηλαδή προκύπτει ισοδύναμο σύνολο)

Για παράδειγμα: το γνώρισμα $AB \to C$ το A είναι περιττό στην εξάρτηση ανν

F ισοδύναμο $\underbrace{(F - \{AB \to C\}) \cup \{B \to C\}}_{F'}$

Προφανώς το F' καλύπτει το F, άρα αρκεί να ελέγξουμε αν το F καλύπτει το F'

Ελάχιστο Κάλυμμα

Γενικεύοντας:

Έστω ένα σύνολο F συναρτησιακών εξαρτήσεων και η ΣΕ $X \to Y \in F$

Το γνώρισμα $A \in X$ είναι **περιττό στο X** αν
F καλύπτει $(F - \{X \to Y\}) \cup \{(X - A) \to Y\}$

• Πως θα υπολογίσουμε αν ένα γνώρισμα στο **α.μ.** μιας ΣΕ είναι περιττό; Θα πρέπει να δείξουμε ότι οι ΣΕ του F' ανήκουν στο F^+, δηλαδή:

Υπολόγισε το $(X - \{A\})^+$ με βάση τις ΣΕ του συνόλου F.
Το A είναι περιττό αν το Y ανήκει στο $(X - \{A\})^+$

Ελάχιστο Κάλυμμα

• Πως θα υπολογίσουμε αν μια ΣΕ $X \to B$ (με ένα γνώρισμα στο δ.μ.) είναι περιττή;

Υπολογίζουμε το $(X)^+$ χρησιμοποιώντας το $F - \{X \to B\}$
Περιττό αν το B ανήκει στο $(X)^+$

Ελάχιστο Κάλυμμα

Αλγόριθμος υπολογισμού ελάχιστου καλύμματος

1. Αντικατέστησε τις συναρτησιακές εξαρτήσεις

   $X_1 \rightarrow Y_1Y_2$ με $X_1 \rightarrow Y_1$ και $X_1 \rightarrow Y_2$.

2. Για κάθε ΣΕ

   (i) Βρες τα περιττά γνωρίσματα στο α.μ.

   A περιττό στο X ($X \rightarrow Y$): υπολόγισε το $(X\text{-}\{A\})^+$

   (ii) Έλεγξε αν είναι περιττή, αν ναι αφαίρεσε τη

   Εξάρτηση $X \rightarrow B$ περιττή: υπολόγισε το X^+

Βάσεις Δεδομένων 2008-2009 Ευαγγελία Πιτουρά 37

Ελάχιστο Κάλυμμα

Παράδειγμα

Έστω R(A, B, C) και F = $\{A \rightarrow BC, B \rightarrow C, A \rightarrow B, AB \rightarrow C\}$.

Βρείτε το F_{min}.

Βάσεις Δεδομένων 2008-2009 Ευαγγελία Πιτουρά 38

Ελάχιστο Κάλυμμα

Παράδειγμα

Έστω R(A, B, C) και F = $\{A \rightarrow BC, B \rightarrow C, A \rightarrow B, AB \rightarrow C\}$. Βρείτε το F_{min}.

Μετά το βήμα 1: $\{A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C, \cancel{A \rightarrow C}, AB \rightarrow C\}$

Βήμα 2: Εξέταση αν το A είναι περιττό στο $AB \rightarrow C$, υπολογίζοντας το $(B)^+$

είναι περιττό

Νέο σύνολο: $\{A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C, \cancel{B \rightarrow C}\}$

Βήμα 3: Εξέταση αν η ΣΕ $A \rightarrow B$ είναι περιττή όχι

Εξέταση αν η ΣΕ $A \rightarrow C$ είναι περιττή ναι

Νέο σύνολο: $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$

Εξέταση αν η ΣΕ $B \rightarrow C$ είναι περιττή όχι

Αποτέλεσμα: $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$

Βάσεις Δεδομένων 2008-2009 Ευαγγελία Πιτουρά 39

Ελάχιστο Κάλυμμα

Παρατηρήσεις

- Το ελάχιστο κάλυμμα *δεν* είναι μοναδικό
- Το βήμα (i) πρέπει να προηγηθεί του βήματος (ii), δηλαδή πρέπει *πρώτα* να βρούμε τα περιττά γνωρίσματα στο α.μ. και μετά τις περιττές εξαρτήσεις

Βάσεις Δεδομένων 2008-2009 Ευαγγελία Πιτουρά 40

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις (σύνοψη)

Ανακεφαλαίωση

- Συναρτησιακή εξάρτηση
- Κανόνες συμπερασμού συναρτησιακών εξαρτήσεων
- Κλειστότητα γνωρίσματος
- Ισοδυναμία συνόλου εξαρτήσεων
- Ελάχιστο κάλυμμα

Βάσεις Δεδομένων 2008-2009 Ευαγγελία Πιτουρά 41