
Δυσικότητα

Λεωνίδας Παληός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Δυσικότητα

Παρατήρηση

1 **2-διάστατο σημείο** έχει **2 βαθμούς ελευθερίας**

1 **ευθεία γραμμή στο επίπεδο** έχει **2 βαθμούς ελευθερίας**

Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε μια **1-1 και επί απεικόνιση** μεταξύ **2-διάστατων σημείων** και **ευθειών γραμμών στο επίπεδο**.

Ο **μετασχηματισμός δυσικότητας** μας επιτρέπει να λύσουμε προβλήματα για **2-διάστατα σημεία** χρησιμοποιώντας **διατάξεις ευθειών γραμμών** στο επίπεδο.

Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

Μειονέκτημα

“ένα σύνολο σημείων γίνεται μια διάταξη ευθειών”
(δηλαδή ένα σύνολο n σημείων γίνεται μια διάταξη ευθειών μεγέθους $\Theta(n^2)$ στη χειρότερη περίπτωση).

Πλεονέκτημα

“ένα σύνολο σημείων γίνεται μια διάταξη ευθειών”
(δηλαδή σχέσεις μεταξύ των σημείων **αποκαλύπτονται**).

Σημεία και Ευθείες στο Επίπεδο

Σημείο (a, b)

Ευθεία $Ax + By + C = 0$

- $(a, b) \in Ax + By + C = 0$ ανν $Aa + Bb + C = 0$

Υποθέτοντας ότι η ευθεία $Ax + By + C = 0$ δεν είναι κατακόρυφη:

- (a, b) ψηλότερα από $Ax + By + C = 0$ ανν $b > -(Aa + C) / B$
- (a, b) χαμηλότερα από $Ax + By + C = 0$ ανν $b < -(Aa + C) / B$

Μετασχηματισμός Δυϊκότητας

Δυϊκότητα

$$D: p = (a, b) \Leftrightarrow L: y = 2ax - b$$

Σημείωση: **όχι** για κατακόρυφες ευθείες

Πολικότητα

$$P: p = (a, b) \Leftrightarrow L: ax + by = 1$$

Σημείωση: **όχι** για ευθείες που περνούν από την αρχή (0,0) των αξόνων

Ιδιότητες

- Συμμετρικότητα

$D(D(x)) = x$ για κάθε σημείο ή (μη κατακόρυφη) ευθεία x .

- Διατήρηση της Γειννιάσης

$$p \in L \Leftrightarrow D(L) \in D(p).$$

Ιδιότητες Μετασχηματ. Δυϊκότητας

Ιδιότητες (συνέχεια)

- **Αντιστροφή της Σειράς**

p ψηλότερα από $L \Rightarrow D(p)$ χαμηλότερα από $D(L)$ και

p χαμηλότερα από $L \Rightarrow D(p)$ ψηλότερα από $D(L)$.

Σημείωση: οι σχέσεις “ψηλότερα” και “χαμηλότερα” είναι καλά ορισμένες για μη κατακόρυφες ευθείες

- Δύο ευθείες L_1 και L_2 **τέμνονται** σε σημείο p **ανν** τα σημεία $D(L_1)$ και $D(L_2)$ **ανήκουν** στην ευθεία $D(p)$.
- Τρία σημεία p_1, p_2 και p_3 είναι **συνευθειακά ανν** οι δυϊκές ευθείες $D(p_1), D(p_2)$ και $D(p_3)$ **συντρέχουν** στο ίδιο σημείο.

Μεθοδολογία

Για τον υπολογισμό της **δυϊκής εικόνας** ενός συνόλου σημείων S :

- **αν** το S μπορεί να εκφρασθεί ως **ένωση ευθειών**, τότε η **δυϊκή εικόνα** του S είναι η **ένωση** των **δυϊκών εικόνων των ευθειών**
- **αλλιώς** θεωρούμε το S ως **ένωση σημείων**, και η **δυϊκή εικόνα** του S είναι η **ένωση** των **δυϊκών εικόνων των σημείων**.

Παραδείγματα

- Η **δυϊκή εικόνα** του τμήματος του επιπέδου **μεταξύ των παραλλήλων ευθειών** $y = 2x$ και $y = 2x - 2$ είναι το **(κατακόρυφο) ευθύγραμμο τμήμα** με άκρα τα σημεία **(1,0)** και **(1,2)**.
- Η **δυϊκή εικόνα** του **ευθύγραμμου τμήματος** με άκρα τα σημεία **(1,1)** και **(2,3)** είναι το τμήμα του επιπέδου **μεταξύ των ευθειών** $y = 2x - 1$ και $y = 4x - 3$.

k -Σύνολα & Επίπεδα Διάταξης

Επίπεδο k = σύνολο ακμών διάταξης με $k-1$ ευθείες ψηλότερα

Δοθέντος ενός συνόλου S σημείων στο επίπεδο,
ένα **k -σύνολο** (k -set) είναι ένα **υποσύνολο A** του S τέτοιο ώστε

- $|A| = k$ και
- \exists γραμμή που διαχωρίζει το S σε A και $S-A$.

Πόσα **διαφορετικά k -σύνολα** υπάρχουν για ένα σημειοσύνολο S ;

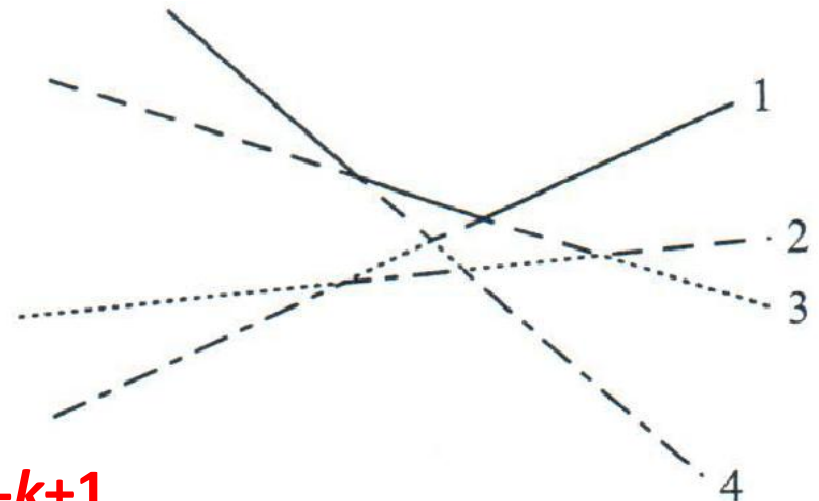
Τόσα όσες και οι **περιοχές** στη
διάταξη των **δυϊκών εικόνων**
των σημείων του S

μεταξύ των **επιπέδων k** και **$k+1$**

και

εάν k : $|S| \neq 2k+1$, επίσης

μεταξύ των **επιπέδων $|S|-k$** και **$|S|-k+1$** .



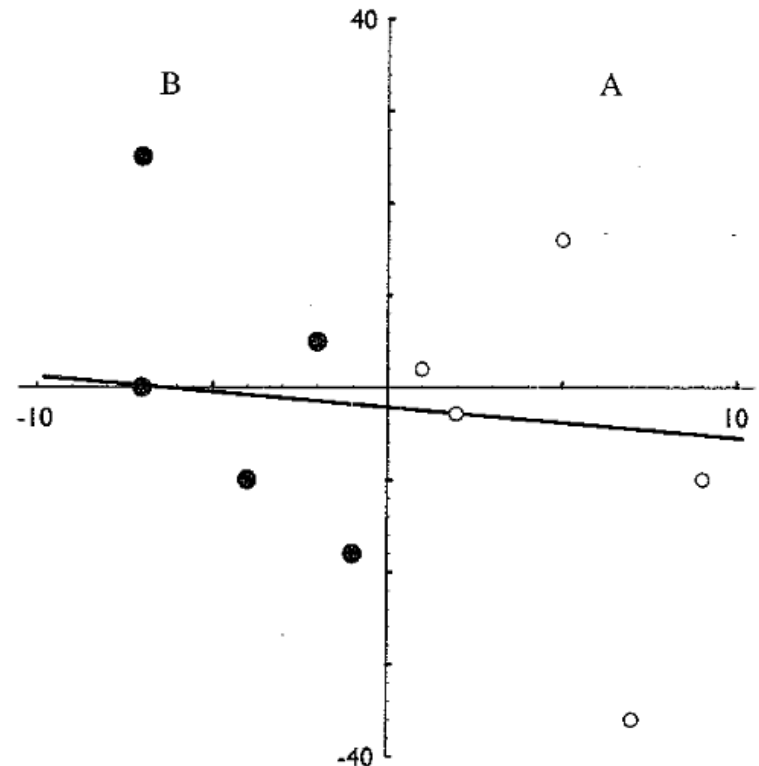
Κοινή Διχοτόμος 2 Συνόλων $\in \mathbb{R}^2$

Πρόβλημα **Κοινής Διχοτόμου 2 Συνόλων** (*ham-sandwich cut*)

Δοθέντων δύο συνόλων σημείων A και B στο επίπεδο, να βρεθεί μια **ευθεία γραμμή** που **διχοτομεί και τα δύο** σύνολα.

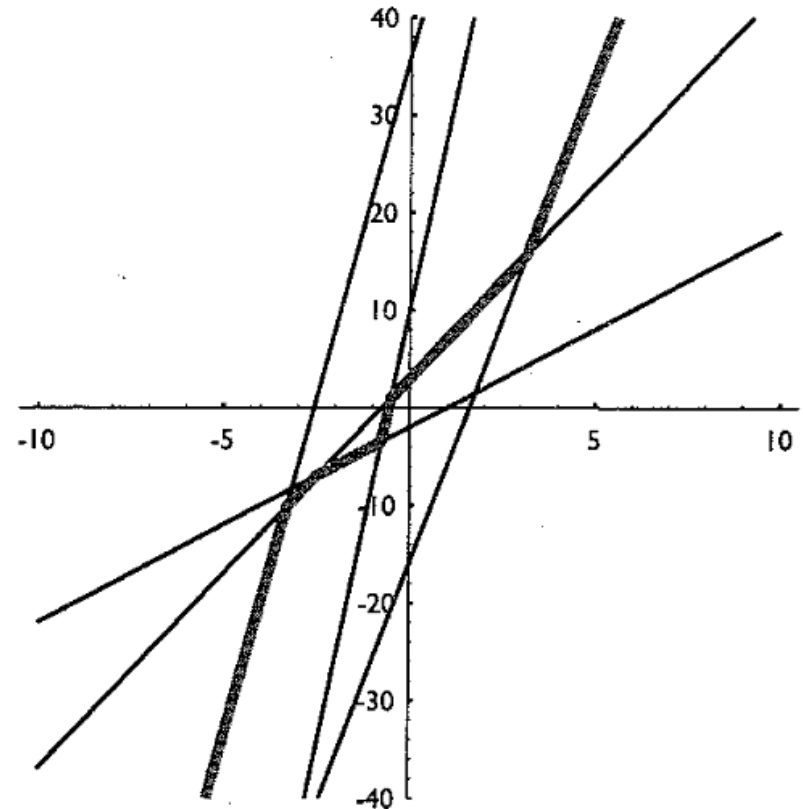
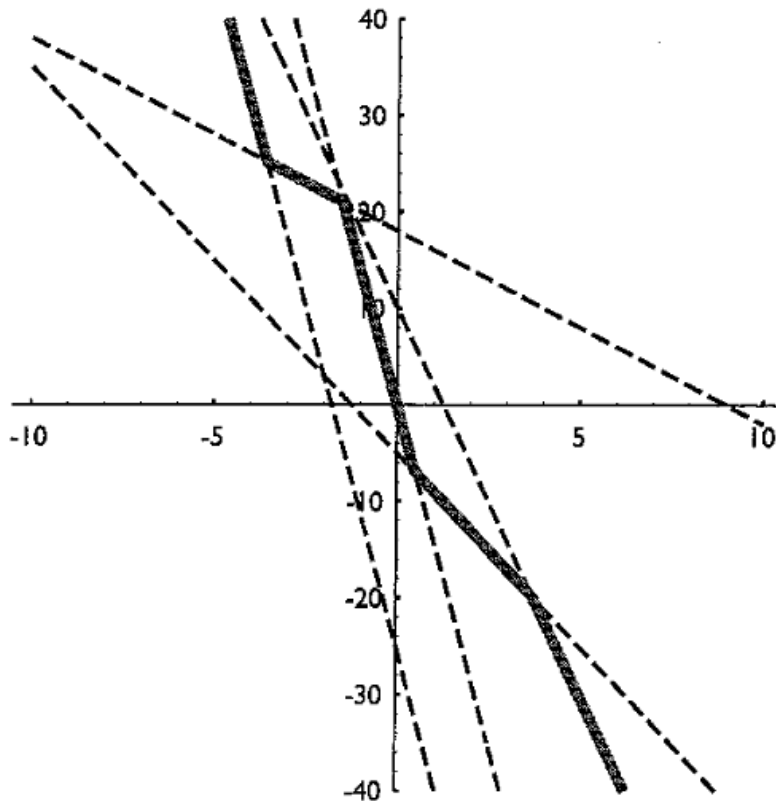
Για απλότητα, θεωρούμε ότι τα A και B

- είναι **διαχωρίσιμα** (μάλιστα, θεωρούμε ότι τα A και B είναι **εκατέρωθεν του y -άξονα**) και
- $|A|, |B| =$ **περιττός** αριθμός.



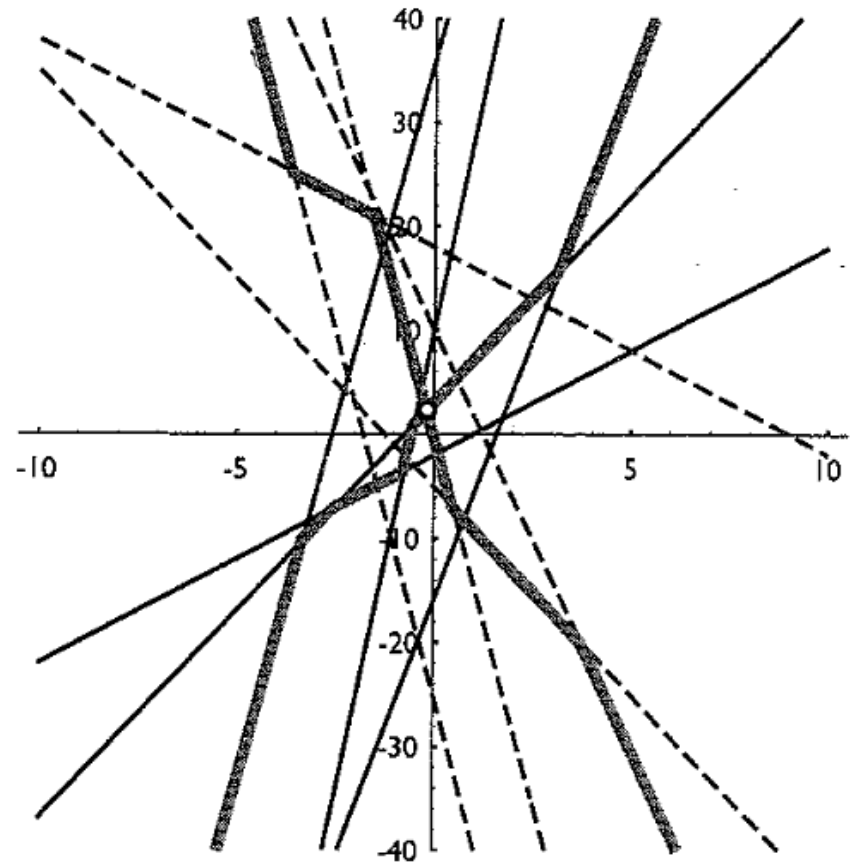
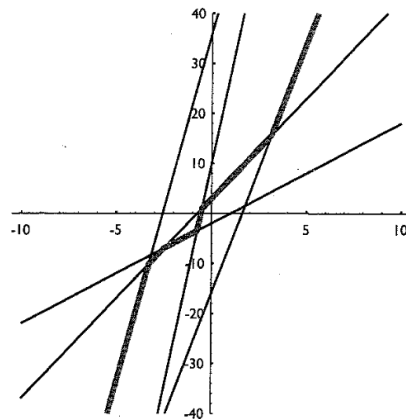
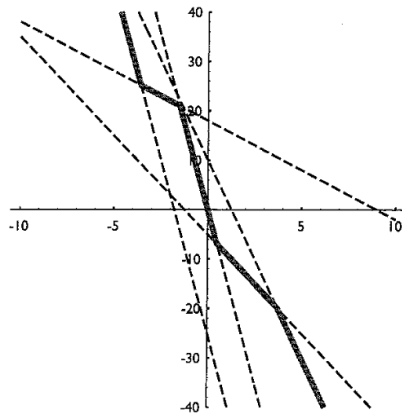
Κοινή Διχοτόμος 2 Συνόλων $\in \mathbb{R}^2$

Στη **διάταξη** των **δυσικών εικόνων** των συνόλων σημείων **A** και **B**, θεωρούμε τα **μεσαία επίπεδα**.



Κοινή Διχοτόμος 2 Συνόλων $\in \mathbb{R}^2$

Το **σημείο τομής** των **μεσαίων επιπέδων** είναι η **δυϊκή εικόνα** της ζητούμενης **κοινής διχοτόμου**.



Περισσότερες Εφαρμογές

- Έλεγχος **γενικής θέσης** σημείων
- **Πλαίσιο που περικλείει** όλες τις **κορυφές** διάταξης ευθειών
- (κενό) Τρίγωνο **ελαχίστου εμβαδού**
- Ευθεία **μεγίστου stabbing number**
- Υπολογισμός **όλων** των **γωνιακών ταξινομήσεων**
- **Μέγιστη discrepancy**
$$\Delta_S(h) = | \text{εμβαδόν}(h \cap U) / \text{εμβαδόν}(U) - |S \cap h| / |S| |$$
- **Halfplane range reporting**

...και πολλές άλλες...