

Θέματα Αλγορίθμων

Αλγόριθμοι και Εφαρμογές στον Πραγματικό Κόσμο

CSE.UOI : Μεταπτυχιακό Μάθημα

9η Ενότητα: Προβλήματα Δικτυακών Ροών

Σπύρος Κοντογιάννης

kontog@cse.uoi.gr

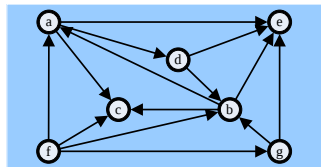


Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τετάρτη, 10 Μαΐου 2017

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

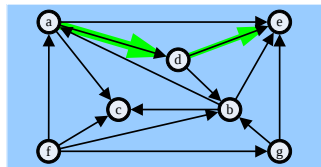
Μονοπάτια και Κύκλοι σε Κατευθυνόμενο Γράφημα $G = (V, A)$



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Μονοπάτια και Κύκλοι σε Κατευθυνόμενο Γράφημα $G = (V, A)$

(Κατευθυνόμενο) Μονοπάτι: Ακολουθία $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ από k διαφορετικές κορυφές του V , τ.ώ. $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, v_i v_{i+1} \in A$.

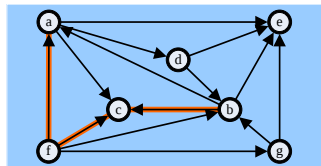


Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Μονοπάτια και Κύκλοι σε Κατευθυνόμενο Γράφημα $G = (V, A)$

Μη κατευθυνόμενο Μονοπάτι: Ακολουθία $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ από k διαφορετικές κορυφές του V , τ.ώ.

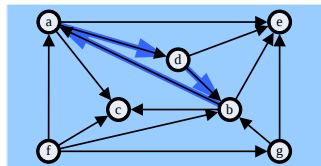
$\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, \{v_i v_{i+1}, v_{i+1} v_i\} \cap A \neq \emptyset$.



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Μονοπάτια και Κύκλοι σε Κατευθυνόμενο Γράφημα $G = (V, A)$

(Κατευθυνόμενος) Κύκλος: Ακολουθία $\langle v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1} = v_1 \rangle$ από k διαφορετικές (εκτός της τελευταίας, που ταυτίζεται με την πρώτη) κορυφές του V , τ.ώ. $\forall i \in \{1, \dots, k\}, v_i v_{i+1} \in A$.



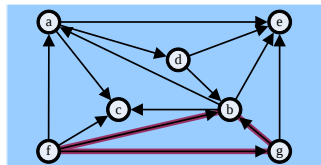
Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Μονοπάτια και Κύκλοι σε Κατευθυνόμενο Γράφημα $G = (V, A)$

Μη κατευθυνόμενος Κύκλος:

Ακολουθία $\langle v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1} = v_1 \rangle$ από k διαφορετικές κορυφές του V , τ.ώ.

$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \{v_i v_{i+1}, v_{i+1} v_i\} \cap A \neq \emptyset$.



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Μονοπάτια και Κύκλοι σε Κατευθυνόμενο Γράφημα $G = (V, A)$

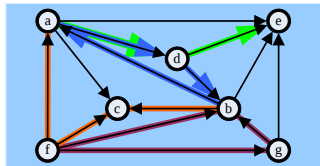
(Κατευθυνόμενο) Μονοπάτι: Ακολουθία $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ από k διαφορετικές κορυφές του V , τ.ώ. $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, v_i v_{i+1} \in A$.

Μη κατευθυνόμενο Μονοπάτι: Ακολουθία $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ από k διαφορετικές κορυφές του V , τ.ώ.
 $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, \{v_i v_{i+1}, v_{i+1} v_i\} \cap A \neq \emptyset$.

(Κατευθυνόμενος) Κύκλος: Ακολουθία $\langle v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1} = v_1 \rangle$ από k διαφορετικές (εκτός της τελευταίας, που ταυτίζεται με την πρώτη) κορυφές του V , τ.ώ. $\forall i \in \{1, \dots, k\}, v_i v_{i+1} \in A$.

Μη κατευθυνόμενος Κύκλος:

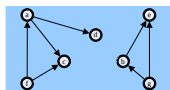
Ακολουθία $\langle v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1} = v_1 \rangle$ από k διαφορετικές κορυφές του V , τ.ώ.
 $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \{v_i v_{i+1}, v_{i+1} v_i\} \cap A \neq \emptyset$.



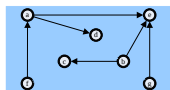
Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Συνδεσιμότητα και Ακυκλικότητα Κατευθυνόμενου Γραφήματος $G = (V, A)$

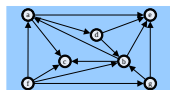
- **Συνδεδεμένο γράφημα:** Για κάθε ζεύγος κορυφών υπάρχει **μη κατευθυνόμενο** μονοπάτι που τις ενώνει.
- **Ισχυρά συνδεδεμένο γράφημα:** Για κάθε ζεύγος κορυφών υπάρχει **κατευθυνόμενο** μονοπάτι που τις ενώνει.
- **Άκυκλο γράφημα:** Δεν υπάρχει (ως υπογράφημα) μη κατευθυνόμενος κύκλος.
- **Δένδρο:** Συνδεδεμένο & άκυκλο γράφημα.



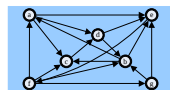
Μη συνδεδεμένο



άκυκλο & συνδεδεμένο



(όχι ισχυρά) συνδεδεμένο



ισχυρά συνδεδεμένο

- **Γεννητικό (συνδετικό) δένδρο:** Ένα συνδεδεμένο, άκυκλο υπογράφημα που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του G .
- **ΥΠΟΘΕΣΗ:** Σε προβλήματα δικτυακών ροών θεωρούμε (χβτγ) ότι το δίκτυο είναι **συνδεδεμένο γράφημα**.

Πρόβλημα Ανάθεσης Καθηκόντων (I)

ΕΙΣΟΔΟΣ: n καθήκοντα πρέπει να ανατεθούν σε n εργαζόμενους. Η ανάθεση του καθήκοντος $t_i \in T = \{t_1, \dots, t_n\}$ στον εργαζόμενο $w_j \in W = \{w_1, \dots, w_n\}$ έχει **κόστος** $c_{i,j} \in \mathbb{R}$. Πρέπει να γίνει *ανάθεση όλων των καθηκόντων* στους εργαζομένους, ώστε *κάθε εργαζόμενος να αναλάβει ακριβώς ένα καθήκον*.

ΣΤΟΧΟΣ: Η εύρεση της ανάθεσης με το ελάχιστο συνολικό κόστος.

Πρόβλημα Ανάθεσης Καθηκόντων (I)

ΕΙΣΟΔΟΣ: n καθήκοντα πρέπει να ανατεθούν σε n εργαζόμενους. Η ανάθεση του καθήκοντος $t_i \in T = \{t_1, \dots, t_n\}$ στον εργαζόμενο $w_j \in W = \{w_1, \dots, w_n\}$ έχει **κόστος** $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Πρέπει να γίνει *ανάθεση όλων των καθηκόντων* στους εργαζομένους, ώστε *κάθε εργαζόμενος να αναλάβει ακριβώς ένα καθήκον*.

ΣΤΟΧΟΣ: Η εύρεση της ανάθεσης με το ελάχιστο συνολικό κόστος.

- **Γραμμικό Πρόγραμμα:** Η **μεταβλητή απόφασης** $x_{ij} \in \{0, 1\}$ δηλώνει αν ο εργαζόμενος w_j αναλαμβάνει το καθήκον t_i .

Πρόβλημα Ανάθεσης Καθηκόντων (I)

ΕΙΣΟΔΟΣ: n καθήκοντα πρέπει να ανατεθούν σε n εργαζόμενους. Η ανάθεση του καθήκοντος $t_i \in T = \{t_1, \dots, t_n\}$ στον εργαζόμενο $w_j \in W = \{w_1, \dots, w_n\}$ έχει **κόστος** $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Πρέπει να γίνει **ανάθεση όλων των καθηκόντων** στους εργαζομένους, ώστε **κάθε εργαζόμενος να αναλάβει ακριβώς ένα καθήκον**.

ΣΤΟΧΟΣ: Η εύρεση της ανάθεσης με το ελάχιστο συνολικό κόστος.

- **Γραμμικό Πρόγραμμα:** Η **μεταβλητή απόφασης** $x_{ij} \in \{0, 1\}$ δηλώνει αν ο εργαζόμενος w_j αναλαμβάνει το καθήκον t_i .

$$\begin{array}{ll} \text{(IAP)} & \begin{array}{ll} \min. & \sum_{i \in [n]} \sum_{j \in [n]} c_{ij} \cdot x_{ij} \\ \text{s.t. :} & \sum_{w_j \in W} x_{ij} = 1, \quad \forall t_i \in T \\ & \sum_{t_i \in T} x_{ij} = 1, \quad \forall w_j \in W \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall t_i \in T, \forall w_j \in W \end{array} \end{array}$$

Πρόβλημα Ανάθεσης Καθηκόντων (II)

Q Πώς λύνουμε το (IAP);

Πρόβλημα Ανάθεσης Καθηκόντων (II)

Q Πώς λύνουμε το (IAP);

A1 «Εύκολοι» τρόποι:

💡 **Απαρίθμηση** (enumeration) όλων των ακέραιων λύσεων, κι επιλογή εκείνης με το ελάχιστο κόστος.

Πρόβλημα Ανάθεσης Καθηκόντων (II)

Q Πώς λύνουμε το (IAP);

A1 «Εύκολοι» τρόποι:

💡 **Απαρίθμηση** (enumeration) όλων των ακέραιων λύσεων, κι επιλογή εκείνης με το ελάχιστο κόστος.

😞 Απαγορευτικό πλήθος ($n!$ εφικτές ακέραιες λύσεις). Πχ, για $n = 20$ εργαζόμενους και καθήκοντα, πρέπει να ελεγχθούν $20! = 2.432.902.008.176.640.000 > 2^{61}$ αναθέσεις.

Πρόβλημα Ανάθεσης Καθηκόντων (II)

Q Πώς λύνουμε το (IAP);

A1 «Εύκολοι» τρόποι:

💡 **Απαρίθμηση** (enumeration) όλων των ακέραιων λύσεων, κι επιλογή εκείνης με το ελάχιστο κόστος.

😞 Απαγορευτικό πλήθος ($n!$ εφικτές ακέραιες λύσεις). Πχ, για $n = 20$ εργαζόμενους και καθήκοντα, πρέπει να ελεγχθούν $20! = 2.432.902.008.176.640.000 > 2^{61}$ αναθέσεις.

💡 Εφαρμογή γενικών τεχνικών αναζήτησης βέλτιστης ακέραιας λύσης (πχ, **Branch & Bound**).

Πρόβλημα Ανάθεσης Καθηκόντων (II)

Q Πώς λύνουμε το (IAP);

A1 «Εύκολοι» τρόποι:

💡 **Απαρίθμηση** (enumeration) όλων των ακέραιων λύσεων, κι επιλογή εκείνης με το ελάχιστο κόστος.

😞 Απαγορευτικό πλήθος ($n!$ εφικτές ακέραιες λύσεις). Πχ, για $n = 20$ εργαζόμενους και καθήκοντα, πρέπει να ελεγχθούν $20! = 2.432.902.008.176.640.000 > 2^{61}$ αναθέσεις.

💡 Εφαρμογή γενικών τεχνικών αναζήτησης βέλτιστης ακέραιας λύσης (πχ, **Branch & Bound**).

😞 Αποδεκτή μεθοδολογία, αν δεν υπάρχει καλύτερος τρόπος.

Πρόβλημα Ανάθεσης Καθηκόντων (II)

Q Πώς λύνουμε το (IAP);

A1 «Εύκολοι» τρόποι:

💡 **Απαρίθμηση** (enumeration) όλων των ακέραιων λύσεων, κι επιλογή εκείνης με το ελάχιστο κόστος.

😞 Απαγορευτικό πλήθος ($n!$ εφικτές ακέραιες λύσεις). Πχ, για $n = 20$ εργαζόμενους και καθήκοντα, πρέπει να ελεγχθούν $20! = 2.432.902.008.176.640.000 > 2^{61}$ αναθέσεις.

💡 Εφαρμογή γενικών τεχνικών αναζήτησης βέλτιστης ακέραιας λύσης (πχ, **Branch & Bound**).

😞 Αποδεκτή μεθοδολογία, αν δεν υπάρχει καλύτερος τρόπος.

A2 Πιο αποδοτικός τρόπος:

- ▶ Υπάρχει; Από τι εξαρτάται;
- ▶ Είναι **ανιχνεύσιμο** αυτό;

Ακεραιότητα Λύσεων Γραμμικών Συστημάτων Εξισώσεων



Έστω ακέραιο $n \times n$ μητρώο $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, και ακέραιο διάνυσμα $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$. Πότε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ έχει ακέραιες λύσεις;

Ακεραιότητα Λύσεων Γραμμικών Συστημάτων Εξισώσεων



Έστω ακέραιο $n \times n$ μητρώο $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, και ακέραιο διάνυσμα $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$. Πότε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ έχει ακέραιες λύσεις;

- **Κανόνας του Cramer:** Έστω $\det(A) \neq 0$. Τότε: Μοναδική λύση $\bar{\mathbf{x}} = A^{-1}\mathbf{a}$, ΚΑΙ

$$\forall i \in [n], \bar{x}_i = \frac{\det(A(i))}{\det(A)}$$

όπου $A(i)$ είναι το $n \times n$ μητρώο του οποίου οι στήλες ταυτίζονται με αυτές του A , εκτός από τη i -στή στήλη $A[*, i]$ του A , που αντικαθίσταται από το διάνυσμα σταθερών όρων $\mathbf{a}$.

Ακεραιότητα Λύσεων Γραμμικών Συστημάτων Εξισώσεων



Έστω ακέραιο $n \times n$ μητρώο $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, και ακέραιο διάνυσμα $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$. Πότε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ έχει ακέραιες λύσεις;

- **Κανόνας του Cramer:** Έστω $\det(A) \neq 0$. Τότε: Μοναδική λύση $\bar{\mathbf{x}} = A^{-1}\mathbf{a}$, ΚΑΙ

$$\forall i \in [n], \bar{x}_i = \frac{\det(A(i))}{\det(A)}$$

όπου $A(i)$ είναι το $n \times n$ μητρώο του οποίου οι στήλες ταυτίζονται με αυτές του A , εκτός από τη i -στή στήλη $A[*, i]$ του A , που αντικαθίσταται από το διάνυσμα σταθερών όρων $\mathbf{a}$.

- **ΙΚΑΝΗ (ΟΧΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑ) ΣΥΝΘΗΚΗ ΑΚΕΡΑΙΟΤΗΤΑΣ**

Ακεραιότητα Λύσεων Γραμμικών Συστημάτων Εξισώσεων



Έστω ακέραιο $n \times n$ μητρώο $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, και ακέραιο διάνυσμα $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$. Πότε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ έχει ακέραιες λύσεις;

- **Κανόνας του Cramer:** Έστω $\det(A) \neq 0$. Τότε: Μοναδική λύση $\bar{\mathbf{x}} = A^{-1}\mathbf{a}$, ΚΑΙ

$$\forall i \in [n], \bar{x}_i = \frac{\det(A(i))}{\det(A)}$$

όπου $A(i)$ είναι το $n \times n$ μητρώο του οποίου οι στήλες ταυτίζονται με αυτές του A , εκτός από τη i -στή στήλη $A[*, i]$ του A , που αντικαθίσταται από το διάνυσμα σταθερών όρων $\mathbf{a}$.

- **ΙΚΑΝΗ (ΟΧΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑ) ΣΥΝΘΗΚΗ ΑΚΕΡΑΙΟΤΗΤΑΣ**

$\text{if } \det(A) \in \{-1, 1\} \wedge \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n \text{ then } \bar{\mathbf{x}} = A^{-1}\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$

Total Unimodularity: Μια Χρήσιμη Ιδιότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα μητρώο A είναι **totally unimodular** ANN για κάθε τετραγωνικό υπομητρώο του B ισχύει: $\det(B) \in \{-1, 0, 1\}$.

Total Unimodularity: Μια Χρήσιμη Ιδιότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα μητρώο A είναι **totally unimodular** ANN για κάθε τετραγωνικό υπομητρώο του B ισχύει: $\det(B) \in \{-1, 0, 1\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Total Unimodularity $\Rightarrow$ Ακεραιότητα]

Αν το A είναι **totally unimodular** και $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, τότε **κάθε κορυφή** του πουλυέδρου $P = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}\}$ είναι **ακέραιο διάνυσμα**.

Total Unimodularity: Μια Χρήσιμη Ιδιότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα μητρώο A είναι **totally unimodular** ANN για κάθε τετραγωνικό υπομητρώο του B ισχύει: $\det(B) \in \{-1, 0, 1\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Total Unimodularity $\Rightarrow$ Ακεραιότητα]

Αν το A είναι **totally unimodular** και $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, τότε *κάθε κορυφή* του πουλυέδρου $P = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}\}$ είναι **ακέραιο διάνυσμα**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity $\Rightarrow$ Ακεραιότητα]

- ❶ Κάθε κορυφή $\mathbf{v}$ χαρακτηρίζεται από ένα ελάχιστο σύνολο *γραμμικά ανεξάρτητων και δεσμευτικών* ανισοτήτων.

Total Unimodularity: Μια Χρήσιμη Ιδιότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα μητρώο A είναι **totally unimodular** ANN για κάθε τετραγωνικό υπομητρώο του B ισχύει: $\det(B) \in \{-1, 0, 1\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Total Unimodularity $\Rightarrow$ Ακεραιότητα]

Αν το A είναι **totally unimodular** και $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, τότε *κάθε κορυφή* του πολυέδρου $P = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}\}$ είναι **ακέραιο διάνυσμα**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity $\Rightarrow$ Ακεραιότητα]

- 1 Κάθε κορυφή $\mathbf{v}$ χαρακτηρίζεται από ένα ελάχιστο σύνολο *γραμμικά ανεξάρτητων και δεσμευτικών* ανισοτήτων.
- 2 Έστω B το (τετραγωνικό, αντιστρέψιμο) υπομητρώο του A που αντιστοιχεί στις συγκεκριμένες ανισότητες, και $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, το υποσύστημα γραμμικών ανισοτήτων.

Total Unimodularity: Μια Χρήσιμη Ιδιότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα μητρώο A είναι **totally unimodular** ANN για κάθε τετραγωνικό υπομητρώο του B ισχύει: $\det(B) \in \{-1, 0, 1\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Total Unimodularity $\Rightarrow$ Ακεραιότητα]

Αν το A είναι **totally unimodular** και $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, τότε *κάθε κορυφή* του πολυέδρου $P = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}\}$ είναι **ακέραιο διάνυσμα**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity $\Rightarrow$ Ακεραιότητα]

- 1 Κάθε κορυφή $\mathbf{v}$ χαρακτηρίζεται από ένα ελάχιστο σύνολο *γραμμικά ανεξάρτητων και δεσμευτικών* ανισοτήτων.
- 2 Έστω B το (τετραγωνικό, αντιστρέψιμο) υπομητρώο του A που αντιστοιχεί στις συγκεκριμένες ανισότητες, και $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, το υποσύστημα γραμμικών ανισοτήτων.
- 3 Το B είναι **totally unimodular** και $\det(B) \in \{-1, 1\}$.
 $\therefore$ Η λύση $\mathbf{v} = [B^{-1}\mathbf{b} ; \mathbf{0}]$ είναι ακέραια (βλ. Cramer).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Totally Unimodular Μητρώο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Totally Unimodular Μητρώο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Εύκολα διαπιστώνεται ότι πρόκειται για totally unimodular μητρώο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Totally Unimodular Μητρώο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Εύκολα διαπιστώνεται ότι πρόκειται για totally unimodular μητρώο.
- Για ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ακέραιο διάνυσμα σταθερών όρων $\mathbf{a} = [a_1; a_2; a_3]$ ισχύει ότι:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} - \mathbf{a} \Rightarrow \text{...pivots...} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 + a_3 \\ a_2 - a_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: **ΟΧΙ** Totally Unimodular Μητρώο

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \textcolor{red}{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: **OXI** Totally Unimodular Μητρώο

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \textcolor{red}{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **OXI** totally unimodular μητρώο: $\det(B) = 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: **OXI** Totally Unimodular Μητρώο

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \textcolor{red}{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **OXI** totally unimodular μητρώο: $\det(B) = 2$.
- Ενδέχεται να μην είναι εξασφαλισμένη η ακεραιότητα κορυφών του $\{\mathbf{x} : B\mathbf{x} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Πχ:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: **OXI** Totally Unimodular Μητρώο

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \textcolor{red}{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **OXI** totally unimodular μητρώο: $\det(B) = 2$.
- Ενδέχεται να μην είναι εξασφαλισμένη η ακεραιότητα κορυφών του $\{\mathbf{x} : B\mathbf{x} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Πχ:
- Για το ακέραιο διάνυσμα σταθερών όρων $\mathbf{b} = [1; 1; 1]$ ισχύει ότι:

$$\mathbf{y} = B\mathbf{x} - \mathbf{b} \Rightarrow \text{...pivots...} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Επιλυσιμότητα (ILP) με Totally Unimodular Μητρώο Συντελεστών (I)

ΘΕΩΡΗΜΑ [Ακεραιότητα ($LP_{\geq}$) με Totally Unimodular Μητρώο Συντελεστών]

Έστω το ακόλουθο ζεύγος γραμμικών προγραμμάτων:

$$(P) \quad \min. \{ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \} \quad (D) \quad \max. \{ \mathbf{a}'\mathbf{y} : A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \}$$

Αν $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^n$ και το A είναι *totally unimodular*, τότε τα (P), (D) έχουν βέλτιστη λύση με **ακέραιες τιμές**.

Επιλυσιμότητα (ILP) με Totally Unimodular Μητρώο Συντελεστών (I)

ΘΕΩΡΗΜΑ [Ακεραιότητα ($LP_{\geq}$) με Totally Unimodular Μητρώο Συντελεστών]

Έστω το ακόλουθο ζεύγος γραμμικών προγραμμάτων:

$$(P) \quad \min. \{ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \} \quad (D) \quad \max. \{ \mathbf{a}'\mathbf{y} : A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \}$$

Αν $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^n$ και το A είναι *totally unimodular*, τότε τα (P), (D) έχουν βέλτιστη λύση με **ακέραιες τιμές**.

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Ακεραιότητα ($LP_{\geq}$) με Totally Unimodular Μητρώο Συντελεστών]

Όλες οι κορυφές είναι ακέραια διανύσματα, και κάποια από αυτές είναι βέλτιστη λύση.

Επιλυσιμότητα (ILP) με Totally Unimodular Μητρώο Συντελεστών (II)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Για επίλυση του ΑΚΕΡΑΙΟΥ γραμμικού προγράμματος

$$(ILP) \quad \min. \{ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}; \mathbf{x} \in \mathbb{N}^n \}$$

όπου το μητρώο συντελεστών $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$ είναι *totally unimodular* και $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^m$, αρκεί να βρούμε μια από τις *βέλτιστες λύσεις* του γραμμικού προγράμματος

$$(RLP) \quad \min. \{ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

που *συμβαίνει* να έχει *ακέραιες τιμές*.

Επιλυσιμότητα (ILP) με Totally Unimodular Μητρώο Συντελεστών (II)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Για επίλυση του ΑΚΕΡΑΙΟΥ γραμμικού προγράμματος

$$(ILP) \quad \min. \{ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}; \mathbf{x} \in \mathbb{N}^n \}$$

όπου το μητρώο συντελεστών $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$ είναι *totally unimodular* και $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^m$, αρκεί να βρούμε μια από τις *βέλτιστες λύσεις* του γραμμικού προγράμματος

$$(RLP) \quad \min. \{ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

που *συμβαίνει* να έχει *ακέραιες τιμές*.

Q Πώς μπορούμε να βρούμε μια βέλτιστη λύση με *ακέραιες τιμές* για το (ILP) όταν το A είναι totally unimodular, και $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^m$;

Επιλυσιμότητα (ILP) με Totally Unimodular Μητρώο Συντελεστών (II)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Για επίλυση του ΑΚΕΡΑΙΟΥ γραμμικού προγράμματος

$$(ILP) \quad \min. \{ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}; \mathbf{x} \in \mathbb{N}^n \}$$

όπου το μητρώο συντελεστών $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$ είναι *totally unimodular* και $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^m$, αρκεί να βρούμε μια από τις *βέλτιστες λύσεις* του γραμμικού προγράμματος

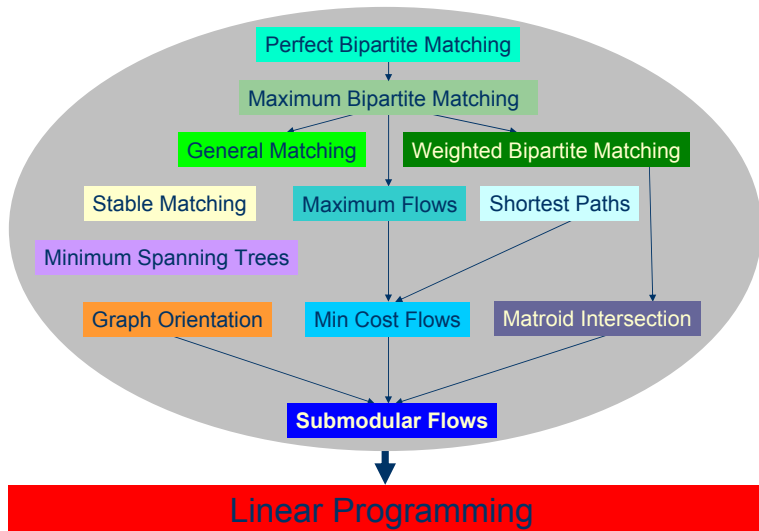
$$(RLP) \quad \min. \{ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

που *συμβαίνει* να έχει *ακέραιες τιμές*.

Q Πώς μπορούμε να βρούμε μια βέλτιστη λύση με *ακέραιες τιμές* για το (ILP) όταν το A είναι totally unimodular, και $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^m$;

A Εκτέλεση του **SIMPLEX** στο (RLP).

Επιλυσιμότητα (ILP) με Totally Unimodular Μητρώο Συντελεστών (III)



Κατευθυνόμενα Γραφήματα

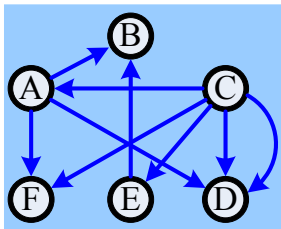
- **(Κατευθυνόμενο) Γράφημα:** Διατεταγμένος ζεύγος $G = (V, A)$ όπου V είναι ένα σύνολο διακεκριμένων αντικειμένων (κορυφές), και $A \subseteq V \times V$ ένα σύνολο κατευθυνόμενων ακμών (τόξων) που ορίζουν μια διμελή σχέση στο V .

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

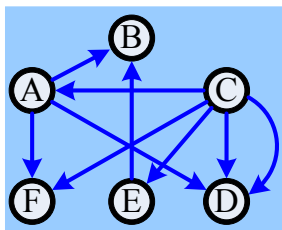
- **(Κατευθυνόμενο) Γράφημα:** Διατεταγμένος ζεύγος $G = (V, A)$ όπου V είναι ένα σύνολο διακεκριμένων αντικειμένων (κορυφές), και $A \subseteq V \times V$ ένα σύνολο κατευθυνόμενων ακμών (τόξων) που ορίζουν μια διμελή σχέση στο V .
- **Πίνακας Πρόσπτωσης** Κατευθυνόμενου Γραφήματος (δίχως ανακυκλώσεις): Ένα μητρώο $M_G \in \{-1, 0, 1\}^{|V| \times |E|}$ που στις γραμμές αντιστοιχούν οι κορυφές, στις στήλες αντιστοιχούν οι ακμές, και κάθε στήλη υποδεικνύει την ουρά (με $+1$) και την κεφαλή (με -1) της αντίστοιχης ακμής, ενώ όλες οι άλλες θέσεις ισούνται με 0 :

$$\forall v \in V, \forall a \in A, M_G[v, a] = \begin{cases} 1, & v = tail(a) \\ -1, & v = head(a), \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παράδειγμα Αναπαράστασης Γραφήματος με Πίνακα Πρόσπτωσης



Παράδειγμα Αναπαράστασης Γραφήματος με Πίνακα Πρόσπτωσης



$M_G =$

	<i>AB</i>	<i>AD</i>	<i>AF</i>	<i>CA</i>	<i>CD1</i>	<i>CD2</i>	<i>CE</i>	<i>CF</i>	<i>EB</i>
<i>A</i>	1	1	1	-1	0	0	0	0	0
<i>B</i>	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1
<i>C</i>	0	0	0	1	1	1	1	1	0
<i>D</i>	0	-1	0	0	-1	-1	0	0	0
<i>E</i>	0	0	0	0	0	0	-1	0	1
<i>F</i>	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (I)

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

Για οποιοδήποτε **κατευθυνόμενο** γράφημα $G = (V, A)$ (δίχως βρόχους), ο πίνακας πρόσπτωσης M_G είναι **totally unimodular**.

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (I)

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

Για οποιοδήποτε **κατευθυνόμενο** γράφημα $G = (V, A)$ (δίχως βρόχους), ο πίνακας πρόσπτωσης M_G είναι **totally unimodular**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

Κάνουμε μαθηματική επαγωγή στο μέγεθος $1 \leq k \leq n$ του τετραγωνικού $k \times k$ υποπίνακα του M_G που εξετάζουμε.

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (I)

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

Για οποιοδήποτε **κατευθυνόμενο** γράφημα $G = (V, A)$ (δίχως βρόχους), ο πίνακας πρόσπτωσης M_G είναι **totally unimodular**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

Κάνουμε μαθηματική επαγωγή στο μέγεθος $1 \leq k \leq n$ του τετραγωνικού $k \times k$ υποπίνακα του M_G που εξετάζουμε.

[Βάση] Για $k = 1$, είναι προφανές από τον ορισμό του M_G .

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (I)

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

Για οποιοδήποτε **κατευθυνόμενο** γράφημα $G = (V, A)$ (δίχως βρόχους), ο πίνακας πρόσπτωσης M_G είναι **totally unimodular**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

Κάνουμε μαθηματική επαγωγή στο μέγεθος $1 \leq k \leq n$ του τετραγωνικού $k \times k$ υποπίνακα του M_G που εξετάζουμε.

[Βάση] Για $k = 1$, είναι προφανές από τον ορισμό του M_G .

[Επαγωγική Υπόθεση] Για $k \in \{1, \dots, n-1\}$, κάθε $m \times m$ υπομητρώο C ($1 \leq m \leq k$) έχει: $\det(C) \in \{-1, 0, 1\}$.

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (I)

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

Για οποιοδήποτε **κατευθυνόμενο** γράφημα $G = (V, A)$ (δίχως βρόχους), ο πίνακας πρόσπτωσης M_G είναι **totally unimodular**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

Κάνουμε μαθηματική επαγωγή στο μέγεθος $1 \leq k \leq n$ του τετραγωνικού $k \times k$ υποπίνακα του M_G που εξετάζουμε.

[Βάση] Για $k = 1$, είναι προφανές από τον ορισμό του M_G .

[Επαγωγική Υπόθεση] Για $k \in \{1, \dots, n-1\}$, κάθε $m \times m$ υπομητρώο C ($1 \leq m \leq k$) έχει: $\det(C) \in \{-1, 0, 1\}$.

[Επαγωγικό Βήμα] Για τον $(k+1) \times (k+1)$ υποπίνακα D διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

[Περίπτωση 1] Υπάρχει μηδενική στήλη $\Rightarrow \det(D) = 0$.

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

[Επαγωγικό Βήμα] (συνέχεια)

[Περίπτωση 2] Δεν υπάρχει μηδενική στήλη, και υπάρχει στήλη με ΕΝΑ μη μηδενικό στοιχείο στο M_G .

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

[Επαγωγικό Βήμα] (συνέχεια)

[Περίπτωση 2] Δεν υπάρχει μηδενική στήλη, και υπάρχει στήλη με ΕΝΑ μη μηδενικό στοιχείο στο M_G .

$\therefore \det(D) = (\pm 1) \cdot \det(C) \in \{-1, 0, 1\}$ για $k \times k$ υποπίνακα C του D (και του M_G).
/* Επαγ. Υπόθεση: $\det(C) \in \{-1, 0, 1\}$ */

[Περίπτωση 3] Κάθε στήλη του D έχει ακριβώς δύο μη μηδενικά στοιχεία.

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

[Επαγωγικό Βήμα] (συνέχεια)

[Περίπτωση 2] Δεν υπάρχει μηδενική στήλη, και υπάρχει στήλη με ΕΝΑ μη μηδενικό στοιχείο στο M_G .

$\therefore \det(D) = (\pm 1) \cdot \det(C) \in \{-1, 0, 1\}$ για $k \times k$ υποπίνακα C του D (και του M_G).
/* Επαγ. Υπόθεση: $\det(C) \in \{-1, 0, 1\}$ */

[Περίπτωση 3] Κάθε στήλη του D έχει ακριβώς δύο μη μηδενικά στοιχεία.

★ Ο ακόλουθος μη μηδενικός γραμμικός συνδυασμός (όλων) των γραμμών του D δίνει το σημείο $\mathbf{0}$: $\sum_{k=1}^n D[k, *] = \mathbf{0}'$.

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

[Επαγωγικό Βήμα] (συνέχεια)

[Περίπτωση 2] Δεν υπάρχει μηδενική στήλη, και υπάρχει στήλη με ΕΝΑ μη μηδενικό στοιχείο στο M_G .

$\therefore \det(D) = (\pm 1) \cdot \det(C) \in \{-1, 0, 1\}$ για $k \times k$ υποπίνακα C του D (και του M_G).
/* Επαγ. Υπόθεση: $\det(C) \in \{-1, 0, 1\}$ */

[Περίπτωση 3] Κάθε στήλη του D έχει ακριβώς δύο μη μηδενικά στοιχεία.

★ Ο ακόλουθος μη μηδενικός γραμμικός συνδυασμός (όλων) των γραμμών του D δίνει το σημείο 0 : $\sum_{k=1}^n D[k, *] = \mathbf{0}'$.

$\therefore$ Υπάρχει γραμμική εξάρτηση ως προς τις γραμμές του D .

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

[Επαγωγικό Βήμα] (συνέχεια)

[Περίπτωση 2] Δεν υπάρχει μηδενική στήλη, και υπάρχει στήλη με ENA μη μηδενικό στοιχείο στο M_G .

$\therefore \det(D) = (\pm 1) \cdot \det(C) \in \{-1, 0, 1\}$ για $k \times k$ υποπίνακα C του D (και του M_G).
/* Επαγ. Υπόθεση: $\det(C) \in \{-1, 0, 1\}$ */

[Περίπτωση 3] Κάθε στήλη του D έχει ακριβώς δύο μη μηδενικά στοιχεία.

★ Ο ακόλουθος μη μηδενικός γραμμικός συνδυασμός (όλων) των γραμμών του D δίνει το σημείο 0 : $\sum_{k=1}^n D[k, *] = \mathbf{0}'$.

$\therefore$ Υπάρχει γραμμική εξάρτηση ως προς τις γραμμές του D .

$\therefore \det(D) = 0$.

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Total Unimodularity του Πίνακα Πρόσπτωσης]

[Επαγωγικό Βήμα] (συνέχεια)

[Περίπτωση 2] Δεν υπάρχει μηδενική στήλη, και υπάρχει στήλη με ENA μη μηδενικό στοιχείο στο M_G .

$\therefore \det(D) = (\pm 1) \cdot \det(C) \in \{-1, 0, 1\}$ για $k \times k$ υποπίνακα C του D (και του M_G).
/* Επαγ. Υπόθεση: $\det(C) \in \{-1, 0, 1\}$ */

[Περίπτωση 3] Κάθε στήλη του D έχει ακριβώς δύο μη μηδενικά στοιχεία.

★ Ο ακόλουθος μη μηδενικός γραμμικός συνδυασμός (όλων) των γραμμών του D δίνει το σημείο 0 : $\sum_{k=1}^n D[k, *] = \mathbf{0}'$.

$\therefore$ Υπάρχει γραμμική εξάρτηση ως προς τις γραμμές του D .

$\therefore \det(D) = 0$. ■

Μη κατευθυνόμενα Γραφήματα

- **Μη κατευθυνόμενο γράφημα** $G = (V, E)$: V είναι ένα σύνολο διακεκριμένων αντικειμένων (κορυφές), και $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$ ένα σύνολο μη κατευθυνόμενων ακμών που ορίζουν μια **συμετρική διμελή σχέση** στο V .

Μη κατευθυνόμενα Γραφήματα

- **Μη κατευθυνόμενο γράφημα** $G = (V, E)$: V είναι ένα σύνολο διακεκριμένων αντικειμένων (κορυφές), και $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$ ένα σύνολο μη κατευθυνόμενων ακμών που ορίζουν μια **συμετρική διμελή σχέση** στο V .
- **Πίνακας Πρόσπτωσης** Μη Κατευθυνόμενου Γραφήματος (δίχως ανακυκλώσεις): Ένα μητρώο $M_G \in \{0, 1\}^{|V| \times |E|}$ που στις γραμμές αντιστοιχούν οι κορυφές, στις στήλες αντιστοιχούν οι ακμές, και κάθε στήλη υποδεικνύει την ουρά και την κεφαλή (με 1) της αντίστοιχης ακμής:

$$\forall v \in V, \forall e \in E, M_G[v, e] = \begin{cases} 1, & v \in e \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Μη κατευθυνόμενα Γραφήματα

- **Μη κατευθυνόμενο γράφημα** $G = (V, E)$: V είναι ένα σύνολο διακεκριμένων αντικειμένων (κορυφές), και $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$ ένα σύνολο μη κατευθυνόμενων ακμών που ορίζουν μια **συμετρική διμελή σχέση** στο V .
- **Πίνακας Πρόσπτωσης** Μη Κατευθυνόμενου Γραφήματος (δίχως ανακυκλώσεις): Ένα μητρώο $M_G \in \{0, 1\}^{|V| \times |E|}$ που στις γραμμές αντιστοιχούν οι κορυφές, στις στήλες αντιστοιχούν οι ακμές, και κάθε στήλη υποδεικνύει την ουρά και την κεφαλή (με 1) της αντίστοιχης ακμής:

$$\forall v \in V, \forall e \in E, M_G[v, e] = \begin{cases} 1, & v \in e \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- **Διμερές Γράφημα** $G = (V = X \cup Y, E)$: Το σύνολο κορυφών διαμερίζεται από τα X, Y (άρα, $X \cap Y = \emptyset$ και $X \cup Y = V$) και όλες οι ακμές του E έχουν τα άκρα τους σε διαφορετικά μερίδια (δλδ, $E \subseteq \{\{u, v\} : u \in X, v \in Y\}$).

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (III)

ΘΕΩΡΗΜΑ [Total Unimodularity Μη Κατευθυνόμενων Διμερών Γραφημάτων]

Για κάθε *μη κατευθυνόμενο, διμερές* γράφημα $G = (V = X \cup Y, E)$, το μητρώο πρόσπτωσης M_G είναι **totally unimodular**.

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (III)

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Total Unimodularity Μη Κατευθυνόμενων Διμερών Γραφημάτων]

Για κάθε *μη κατευθυνόμενο, διμερές* γράφημα $G = (V = X \cup Y, E)$, το μητρώο πρόσπτωσης M_G είναι **totally unimodular**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity Μη Κατευθυνόμενων Διμερών Γραφημάτων]

Επαγωγή στη διάσταση ενός $k \times k$ υπομητρώου του M_G .

- [Βάση] Για $k = 1$, προφανές.

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (III)

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Total Unimodularity Μη Κατευθυνόμενων Διμερών Γραφημάτων]

Για κάθε **μη κατευθυνόμενο, διμερές** γράφημα $G = (V = X \cup Y, E)$, το μητρώο πρόσπτωσης M_G είναι **totally unimodular**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity Μη Κατευθυνόμενων Διμερών Γραφημάτων]

Επαγωγή στη διάσταση ενός $k \times k$ υπομητρώου του M_G .

- [Βάση] Για $k = 1$, προφανές.
- [Υπόθεση] Έστω ότι για $k \in \{1, \dots, n-1\}$, κάθε $m \times m$ υπομητρώο C ($1 \leq m \leq k$) έχει: $\det(C) \in \{-1, 0, 1\}$.
- [Βήμα] Έστω $(k+1) \times (k+1)$ υπομητρώο D του M_G .
 - ▶ [Περίπτωση 1] Υπάρχει μηδενική στήλη $\Rightarrow \det(D) = 0$.

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (III)

ΘΕΩΡΗΜΑ [Total Unimodularity Μη Κατευθυνόμενων Διμερών Γραφημάτων]

Για κάθε **μη κατευθυνόμενο, διμερές** γράφημα $G = (V = X \cup Y, E)$, το μητρώο πρόσπτωσης M_G είναι **totally unimodular**.

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Total Unimodularity Μη Κατευθυνόμενων Διμερών Γραφημάτων]

Επαγωγή στη διάσταση ενός $k \times k$ υπομητρώου του M_G .

- [Βάση] Για $k = 1$, προφανές.
- [Υπόθεση] Έστω ότι για $k \in \{1, \dots, n-1\}$, κάθε $m \times m$ υπομητρώο C ($1 \leq m \leq k$) έχει: $\det(C) \in \{-1, 0, 1\}$.
- [Βήμα] Έστω $(k+1) \times (k+1)$ υπομητρώο D του M_G .
 - ▶ [Περίπτωση 1] Υπάρχει μηδενική στήλη $\Rightarrow \det(D) = 0$.
 - ▶ [Περίπτωση 2] Δεν υπάρχει μηδενική στήλη και υπάρχει στήλη με ένα μη μηδενικό στοιχείο, στο D .
 $\therefore \det(D) = (\pm 1) \cdot \det(C) \in \{-1, 0, 1\}$ για κάποιο $k \times k$ υπομητρώο C του D , άρα και του M_G .

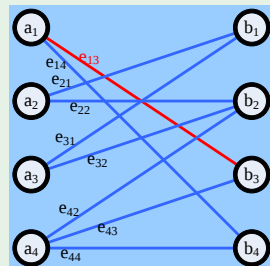
Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity Μη Κατευθυνόμενων Διμερών Γραφημάτων]

- [Βήμα] (συνέχεια)

- ▶ [Περίπτωση 3] Κάθε στήλη του D έχει δυο μη μηδενικά στοιχεία.



	e_{13}	e_{14}	e_{21}	e_{22}	e_{31}	e_{32}	e_{42}	e_{43}	e_{44}
a_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
a_2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0	1	1	0	0	0
a_4	0	0	0	0	0	0	1	1	1
b_1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
b_2	0	0	0	1	0	1	1	0	0
b_3	1	0	0	0	0	0	0	1	0
b_4	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (III)

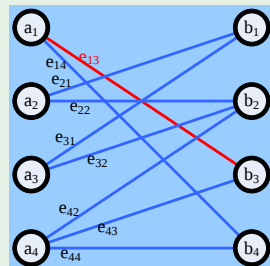
ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity Μη Κατευθυνόμενων Διμερών Γραφημάτων]

- [Βήμα] (συνέχεια)

- ▶ [Περίπτωση 3] Κάθε στήλη του D έχει δυο μη μηδενικά στοιχεία.

- ★ Κάθε στήλη του D έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε μερίδιο.



	e_{13}	e_{14}	e_{21}	e_{22}	e_{31}	e_{32}	e_{42}	e_{43}	e_{44}
a_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
a_2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0	1	1	0	0	0
a_4	0	0	0	0	0	0	1	1	1
b_1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
b_2	0	0	0	1	0	1	1	0	0
b_3	1	0	0	0	0	0	0	1	0
b_4	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity Μη Κατευθυνόμενων Διμερών Γραφημάτων]

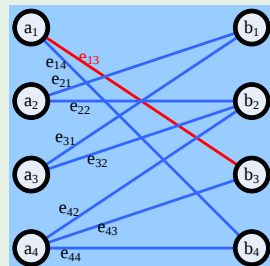
- [Βήμα] (συνέχεια)

- ▶ [Περίπτωση 3] Κάθε στήλη του D έχει δυο μη μηδενικά στοιχεία.

- ★ Κάθε στήλη του D έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε μερίδιο.

- ★ Ο ακόλουθος γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του D δίνει το $\mathbf{0}$:

$$\sum_{x \in X} D[x, *] - \sum_{y \in Y} D[i, *] = \mathbf{0}'$$



	e_{13}	e_{14}	e_{21}	e_{22}	e_{31}	e_{32}	e_{42}	e_{43}	e_{44}
a_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
a_2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0	1	1	0	0	0
a_4	0	0	0	0	0	0	1	1	1
b_1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
b_2	0	0	0	1	0	1	1	0	0
b_3	1	0	0	0	0	0	0	1	0
b_4	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity Μη Κατευθυνόμενων Διμερών Γραφημάτων]

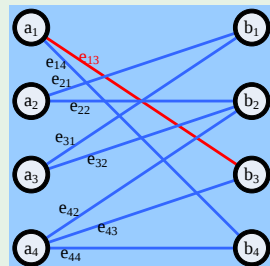
• [Βήμα] (συνέχεια)

- ▶ [Περίπτωση 3] Κάθε στήλη του D έχει δυο μη μηδενικά στοιχεία.

- ★ Κάθε στήλη του D έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε μερίδιο.
- ★ Ο ακόλουθος γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του D δίνει το $\mathbf{0}$:

$$\sum_{x \in X} D[x, *] - \sum_{y \in Y} D[i, *] = \mathbf{0}'$$

$$\therefore \det(D) = 0.$$



	e_{13}	e_{14}	e_{21}	e_{22}	e_{31}	e_{32}	e_{42}	e_{43}	e_{44}
a_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
a_2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0	1	1	0	0	0
a_4	0	0	0	0	0	0	1	1	1
b_1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
b_2	0	0	0	1	0	1	1	0	0
b_3	1	0	0	0	0	0	0	1	0
b_4	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Θεμελιώδεις Ιδιότητες Γραφημάτων (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ:

[Total Unimodularity Μη Κατευθυνόμενων Διμερών Γραφημάτων]

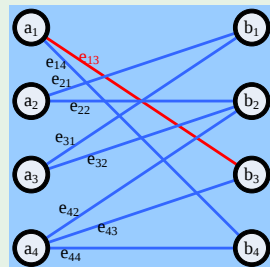
• [Βήμα] (συνέχεια)

- ▶ [Περίπτωση 3] Κάθε στήλη του D έχει δυο μη μηδενικά στοιχεία.

- ★ Κάθε στήλη του D έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε μερίδιο.
- ★ Ο ακόλουθος γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του D δίνει το $\mathbf{0}$:

$$\sum_{x \in X} D[x, *] - \sum_{y \in Y} D[i, *] = \mathbf{0}'$$

$$\therefore \det(D) = 0.$$



	e_{13}	e_{14}	e_{21}	e_{22}	e_{31}	e_{32}	e_{42}	e_{43}	e_{44}
a_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
a_2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0	1	1	0	0	0
a_4	0	0	0	0	0	0	1	1	1
b_1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
b_2	0	0	0	1	0	1	1	0	0
b_3	1	0	0	0	0	0	0	1	0
b_4	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Μητρώα Πρόσπτωσης Ασθενώς Συνδεδεμένων Γραφημάτων (I)

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Βαθμός Μητρώου Πρόσπτωσης]

Το μητρώο πρόσπτωσης ενός ασθενώς συνδεδεμένου (κατευθυνόμενου) γραφήματος $D = (V, A)$ είναι $|V| - 1$.

Μητρώα Πρόσπτωσης Ασθενώς Συνδεδεμένων Γραφημάτων (I)

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Βαθμός Μητρώου Πρόσπτωσης]

Το μητρώο πρόσπτωσης ενός ασθενώς συνδεδεμένου (κατευθυνόμενου) γραφήματος $D = (V, A)$ είναι $|V| - 1$.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

- Στο υποκείμενο (μη κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (V, E)$ ως προς το D , υπάρχει γεννητικό δένδρο T .
- Το T έχει $|V| = n$ κορυφές, $n - 1$ ακμές, και τουλάχιστον δύο κορυφές βαθμού 1 (φύλλα). Έστω $d_T(v_1) = 1$.
- Το $T_1 = T - v_1$ είναι επίσης δένδρο. Έστω ότι η v_2 είναι φύλλο του T_1 .
- Το $T_2 = T_1 - v_2$ είναι επίσης δένδρο.
- ...

Μητρώα Πρόσπτωσης Ασθενώς Συνδεδεμένων Γραφημάτων (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: (συνέχεια)

- Μητρώο πρόσπτωσης του T :

$$M_T = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \pm 1 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & M_{T_1} & \\ \hline \end{array} = \begin{matrix} v_1 \\ v_1 \\ v_3 \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \pm 1 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & \pm 1 & \mathbf{0}' \\ \hline & M_{T_2} & \\ \hline \end{array}$$

$$= \dots = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \pm 1 & 0 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & \pm 1 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & \pm 1 \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

Μητρώα Πρόσπτωσης Ασθενώς Συνδεδεμένων Γραφημάτων (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: (συνέχεια)

- Μητρώο πρόσπτωσης του T :

$$M_T = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \pm 1 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & M_{T_1} & \\ \hline \end{array} = \begin{matrix} v_1 \\ v_1 \\ v_3 \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \pm 1 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & \pm 1 & \mathbf{0}' \\ \hline & M_{T_2} & \\ \hline \end{array}$$

$$= \dots = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \pm 1 & 0 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & \pm 1 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline & & & \ddots \\ \hline & & & \pm 1 \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

- $\text{rank}(M_T) = n - 1 \Rightarrow \text{rank}(D) \geq n - 1.$
- $\sum_{i \in V} M[i, *] = \mathbf{0}' \Rightarrow \text{rank}(D) < n.$

Μητρώα Πρόσπτωσης Ασθενώς Συνδεδεμένων Γραφημάτων (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: (συνέχεια)

- Μητρώο πρόσπτωσης του T :

$$M_T = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \pm 1 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & M_{T_1} & \\ \hline \end{array} = \begin{matrix} v_1 \\ v_1 \\ v_3 \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \pm 1 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & \pm 1 & \mathbf{0}' \\ \hline & M_{T_2} & \\ \hline \end{array}$$

$$= \dots = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \pm 1 & 0 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & \pm 1 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline & & & \ddots \\ \hline & & & \pm 1 \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

- $\text{rank}(M_T) = n - 1 \Rightarrow \text{rank}(D) \geq n - 1.$

- $\sum_{i \in V} M[i, *] = \mathbf{0}' \Rightarrow \text{rank}(D) < n.$

$$\therefore \text{rank}(D) = n - 1.$$

Μητρώα Πρόσπτωσης Ασθενώς Συνδεδεμένων Γραφημάτων (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: (συνέχεια)

- Μητρώο πρόσπτωσης του T :

$$M_T = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \pm 1 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & M_{T_1} & \\ \hline \end{array} = \begin{matrix} v_1 \\ v_1 \\ v_3 \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \pm 1 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & \pm 1 & \mathbf{0}' \\ \hline & M_{T_2} & \\ \hline \end{array}$$

$$= \dots = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \pm 1 & 0 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & \pm 1 & 0 & \mathbf{0}' \\ \hline & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline & & & \ddots \\ \hline & & & \pm 1 \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

- $\text{rank}(M_T) = n - 1 \Rightarrow \text{rank}(D) \geq n - 1.$

- $\sum_{i \in V} M[i, *] = \mathbf{0}' \Rightarrow \text{rank}(D) < n.$

$$\therefore \text{rank}(D) = n - 1.$$

Μητρώα Πρόσπτωσης Ασθενώς Συνδεδεμένων Γραφημάτων (III)

ΠΟΡΙΣΜΑ

[Επέκταση Μητρώου Πρόσπτωσης]

Για ασθενώς συνδεδεμένο (κατευθυνόμενο) γράφημα $D = (V, E)$, έστω v_n μια αυθαίρετη κορυφή (που εκλαμβάνουμε ως «ρίζα» κάθε γεννητικού δένδρου του D). Τότε:

- 1 Το μητρώο $A = [M_D, \mathbf{e}_n]$ έχει βαθμό $|V| = n$ και είναι totally unimodular. Επίσης, οποιαδήποτε βάση του A περιλαμβάνει οπωσδήποτε και τη μεταβλητή z που αντιστοιχεί στη στήλη $\mathbf{e}_n$.
- 2 Η προσθήκη (στηλών και) βοηθητικών (slack, auxiliary) μεταβλητών στο σύστημα $A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}$ δεν αναιρεί την ιδιότητα του totally unimodularity.

Μητρώα Πρόσπτωσης Ασθενώς Συνδεδεμένων Γραφημάτων (IV)

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Βάσεις Μητρώων Πρόσπτωσης]

Για ασθενώς συνδεδεμένο (κατευθυνόμενο) γράφημα $D = (V, E)$ με m ακμές και n κορυφές, έστω αυθαίρετη «ρίζα» v_n και οποιαδήποτε βάση του μητρώου $A = [M_D, \mathbf{e}_n]$. Τότε, η β αντιστοιχεί σε ένα γεννητικό δένδρο του D .

Μητρώα Πρόσπτωσης Ασθενώς Συνδεδεμένων Γραφημάτων (IV)

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Βάσεις Μητρώων Πρόσπτωσης]

Για ασθενώς συνδεδεμένο (κατευθυνόμενο) γράφημα $D = (V, E)$ με m ακμές και n κορυφές, έστω αυθαίρετη «ρίζα» v_n και οποιαδήποτε βάση του μητρώου $A = [M_D, \mathbf{e}_n]$. Τότε, η β αντιστοιχεί σε ένα γεννητικό δένδρο του D .

ΕΞΗΓΗΣΗ:

- Έστω οποιαδήποτε βάση $\beta \subseteq \{ A[* , 1], \dots, A[* , m], \mathbf{e}_n \}$.
- $|\beta| = n$ και $\mathbf{e}_n \in \beta$.
- Οι ακμές του $\beta - \mathbf{e}_n$ επάγουν στο D ένα ασθενώς συνδεδεμένο υπογράφημα: Αν όχι, τότε η συνιστώσα που δεν περιέχει τη v_n θα ήταν υπογράφημα για το οποίο το άθροισμα ακμών στο M_D (άρα και στο A) δίνει $\mathbf{0}'$ (άτοπο γιατί υποδεικνύει εξάρτηση στηλών της βάσης).

Μητρώα Πρόσπτωσης Ασθενώς Συνδεδεμένων Γραφημάτων (IV)

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Βάσεις Μητρώων Πρόσπτωσης]

Για ασθενώς συνδεδεμένο (κατευθυνόμενο) γράφημα $D = (V, E)$ με m ακμές και n κορυφές, έστω αυθαίρετη «ρίζα» v_n και οποιαδήποτε βάση του μητρώου $A = [M_D, \mathbf{e}_n]$. Τότε, η β αντιστοιχεί σε ένα γεννητικό δένδρο του D .

ΕΞΗΓΗΣΗ:

- Έστω οποιαδήποτε βάση $\beta \subseteq \{ A[*, 1], \dots, A[*, m], \mathbf{e}_n \}$.
- $|\beta| = n$ και $\mathbf{e}_n \in \beta$.
- Οι ακμές του $\beta - \mathbf{e}_n$ επάγουν στο D ένα ασθενώς συνδεδεμένο υπογράφημα: Αν όχι, τότε η συνιστώσα που δεν περιέχει τη v_n θα ήταν υπογράφημα για το οποίο το άθροισμα ακμών στο M_D (άρα και στο A) δίνει $\mathbf{0}'$ (άτοπο γιατί υποδεικνύει εξάρτηση στηλών της βάσης). ■

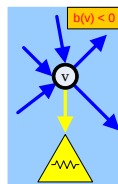
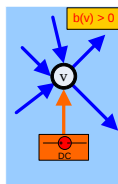
- Ένα **τετραγωνικό** μητρώο $A \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$ έχει την **ιδιότητα δικτύου** (network property) αν κάθε στήλη του A έχει **το πολύ ένα** κελί με τιμή -1 , **το πολύ ένα** κελί με τιμή 1 , και όλα τα υπόλοιπα κελιά με τιμή 0 . Δηλαδή, το άθροισμα απόλυτων τιμών των κελιών του, ανήκει στο $\{0, 1, 2\}$ και το άθροισμα των κελιών του (δίχως απόλυτες τιμές) ανήκει στο $\{-1, 0, 1\}$.

- Ένα **τετραγωνικό** μητρώο $A \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$ έχει την **ιδιότητα δικτύου** (network property) αν κάθε στήλη του A έχει **το πολύ ένα** κελί με τιμή -1 , **το πολύ ένα** κελί με τιμή 1 , και όλα τα υπόλοιπα κελιά με τιμή 0 . Δηλαδή, το άθροισμα απόλυτων τιμών των κελιών του, ανήκει στο $\{0, 1, 2\}$ και το άθροισμα των κελιών του (δίχως απόλυτες τιμές) ανήκει στο $\{-1, 0, 1\}$.
- **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Η κλάση των **τετραγωνικών** totally unimodular μητρώων, είναι υποκλάση των μητρώων με την ιδιότητα δικτύου.

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Ορισμός

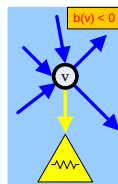
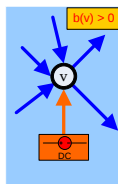
- **Δίκτυο** (κατευθυνόμενο γράφημα) $G = (V, A)$.
- $\forall i \in V, b_i \in \mathbb{Z}$ είναι η (**ακέραια**) παροχή/κατανάλωση του διαμοιραζόμενου αγαθού στον κόμβο i . Ο i είναι:
 - ▶ **Κόμβος παροχής** (supply node), αν $b_i > 0$.
 - ▶ **Κόμβος απαίτησης** (demand node), αν $b_i < 0$.
 - ▶ **Κόμβος μεταγωγής** (transshipment node), αν $b_i = 0$.



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Ορισμός

- **Δίκτυο** (κατευθυνόμενο γράφημα) $G = (V, A)$.
- $\forall i \in V, b_i \in \mathbb{Z}$ είναι η (**ακέραια**) παροχή/κατανάλωση του διαμοιραζόμενου αγαθού στον κόμβο i . Ο i είναι:
 - ▶ **Κόμβος παροχής** (supply node), αν $b_i > 0$.
 - ▶ **Κόμβος απαίτησης** (demand node), αν $b_i < 0$.
 - ▶ **Κόμβος μεταγωγής** (transshipment node), αν $b_i = 0$.



- $\forall a = ij \in A, c_{ij} \in \mathbb{Z}$ είναι το **κόστος μεταφοράς** (ανά μονάδα ροής του αγαθού) στην ακμή a , ενώ $\ell_{ij}, u_{ij} \in \mathbb{N}$ είναι κάτω και άνω φράγματα στη **χωρητικότητα** (capacity) ως προς την επιτρεπόμενη ροή που κινείται κατά μήκος του a .

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Εφικτές Ροές

Εφικτή Ροή: Οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_{ij}) \in \mathbb{N}^{|A|}$ τ.ώ.: να ικανοποιούνται οι εξής περιορισμοί:

- **Περιορισμοί Χωρητικότητας** (Capacity):

$$\forall ij \in A, \ell_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Εφικτές Ροές

Εφικτή Ροή: Οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_{ij}) \in \mathbb{N}^{|A|}$ τ.ώ.: να ικανοποιούνται οι εξής περιορισμοί:

- **Περιορισμοί Χωρητικότητας** (Capacity):

$$\forall ij \in A, \ell_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

- **Περιορισμοί Εξισορρόπησης Ροών** (Flow Balance):

$$\forall i \in V, \sum_{ik \in A} x_{ik} - \sum_{ki \in A} x_{ki} = b_i$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Εφικτές Ροές

Εφικτή Ροή: Οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_{ij}) \in \mathbb{N}^{|A|}$ τ.ώ.: να ικανοποιούνται οι εξής περιορισμοί:

- **Περιορισμοί Χωρητικότητας** (Capacity):

$$\forall ij \in A, \ell_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

- **Περιορισμοί Εξισορρόπησης Ροών** (Flow Balance):

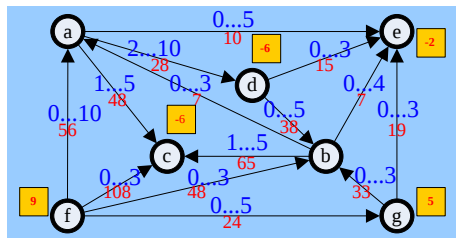
$$\forall i \in V, \sum_{ik \in A} x_{ik} - \sum_{ki \in A} x_{ki} = b_i$$

$\forall ij \in A:$

$\ell_{ij} \dots u_{ij} =$ περιορισμοί χωρητικότητας

$c_{ij} =$ κόστος χρήσης ακμής

$x_{ij} =$ ροή ακμής



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Εφικτές Ροές

Εφικτή Ροή: Οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_{ij}) \in \mathbb{N}^{|A|}$ τ.ώ.: να ικανοποιούνται οι εξής περιορισμοί:

- **Περιορισμοί Χωρητικότητας** (Capacity):

$$\forall ij \in A, \ell_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

- **Περιορισμοί Εξισορρόπησης Ροών** (Flow Balance):

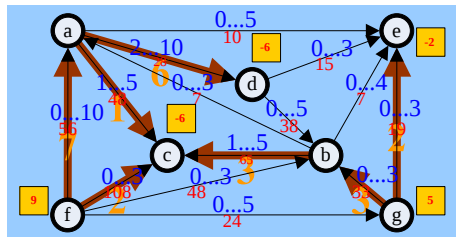
$$\forall i \in V, \sum_{ik \in A} x_{ik} - \sum_{ki \in A} x_{ki} = b_i$$

$\forall ij \in A$:

$\ell_{ij} \dots u_{ij} =$ περιορισμοί χωρητικότητας

$c_{ij} =$ κόστος χρήσης ακμής

$x_{ij} =$ ροή ακμής



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Το (MCF) ως **Ακέραιο** ΓΠ

- **ΕΙΣΟΔΟΣ:** $G = (V, A)$, $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{|A|}$, $\ell, \mathbf{u} \in \mathbb{N}^{|A|}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{|V|}$.
- Ακέραιο ΓΠ για (MCF):

(MCF)

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & \sum_{ij \in A} c_{ij} \cdot x_{ij} \\ \text{s.t.} & \sum_{ik \in A} x_{ik} - \sum_{ki \in A} x_{ki} = b_i, \quad i \in V \\ & x_{ij} \geq \ell_{ij}, \quad ij \in A \\ & x_{ij} \leq u_{ij}, \quad ij \in A \\ & x_{ij} \in \mathbb{N}, \quad ij \in A\end{array}$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Το (MCF) ως **Ακέραιο** ΓΠ

- **ΕΙΣΟΔΟΣ:** $G = (V, A)$, $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{|A|}$, $\ell, \mathbf{u} \in \mathbb{N}^{|A|}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{|V|}$.
- Ακέραιο ΓΠ για (MCF):

$$\begin{array}{ll} \text{(MCF)} & \begin{array}{l} \text{minimize} \quad \sum_{ij \in A} c_{ij} \cdot x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad \sum_{ik \in A} x_{ik} - \sum_{ki \in A} x_{ki} = b_i, \quad i \in V \\ \quad \quad \quad x_{ij} \geq \ell_{ij}, \quad ij \in A \\ \quad \quad \quad x_{ij} \leq u_{ij}, \quad ij \in A \\ \quad \quad \quad x_{ij} \in \mathbb{N}, \quad ij \in A \end{array} \end{array}$$

- Σε μορφή μητρώων:

$$\text{(MCF)} \quad \boxed{\text{minimize } \{ \mathbf{c}'\mathbf{x} : M_G \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}; \mathbf{u} \geq \mathbf{x} \geq \ell; \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{|A|} \}}$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Μερικές Απλοποιήσεις του (MCF)

- 1 Τα **κάτω φράγματα χωρητικότητας** μπορούν να απαλειφθούν, δίχως βλάβη της γενικότητας.

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Μερικές Απλοποιήσεις του (MCF)

- 1 Τα **κάτω φράγματα χωρητικότητας** μπορούν να απαλειφθούν, δίχως βλάβη της γενικότητας.

► Αλλαγή μεταβλητής: $\forall ij \in A, f_{ij} = x_{ij} - \ell_{ij} \in \mathbb{N}$

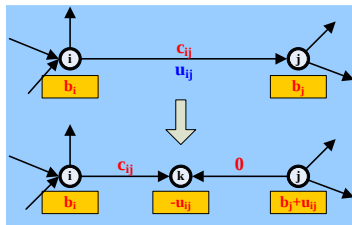
Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Μερικές Απλοποιήσεις του (MCF)

- ❶ Τα **κάτω φράγματα χωρητικότητας** μπορούν να απαλειφθούν, δίχως βλάβη της γενικότητας.

► Αλλαγή μεταβλητής: $\forall ij \in A, f_{ij} = x_{ij} - \ell_{ij} \in \mathbb{N}$

- ❷ Τα **άνω φράγματα χωρητικότητας** μπορούν να απαλειφθούν, με κατάλληλο μετασχηματισμό:



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

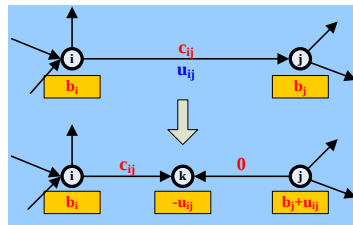
Μερικές Απλοποιήσεις του (MCF)

- ❶ Τα **κάτω φράγματα χωρητικότητας** μπορούν να απαλειφθούν, δίχως βλάβη της γενικότητας.

► Αλλαγή μεταβλητής: $\forall ij \in A, f_{ij} = x_{ij} - \ell_{ij} \in \mathbb{N}$

- ❷ Τα **άνω φράγματα χωρητικότητας** μπορούν να απαλειφθούν, με κατάλληλο μετασχηματισμό:

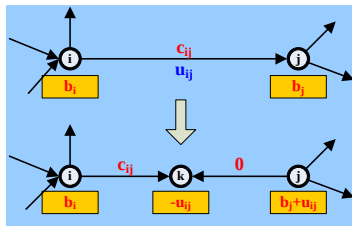
$$\begin{aligned} f_{ij} + \sum_{it \in A \setminus \{ij\}} f_{it} - \sum_{ti \in A} f_{ti} &= b_i \\ \sum_{jt \in A} f_{jt} - f_{ij} - \sum_{tj \in A \setminus \{ij\}} f_{tj} &= b_j \\ f_{ij} &\leq u_{ij} \end{aligned}$$



Μερικές Απλοποιήσεις του (MCF)

- Αλλαγή μεταβλητής: $\forall ij \in A, f_{ij} = x_{ij} - \ell_{ij} \in \mathbb{N}$

- $$\begin{aligned} f_{ij} + \sum_{it \in A \setminus \{ij\}} f_{it} - \sum_{ti \in A} f_{ti} &= b_i \\ \sum_{jt \in A} f_{jt} - f_{ij} - \sum_{tj \in A \setminus \{ij\}} f_{tj} &= b_j \\ f_{ij} + s_{ij} &= u_{ij} \end{aligned}$$



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

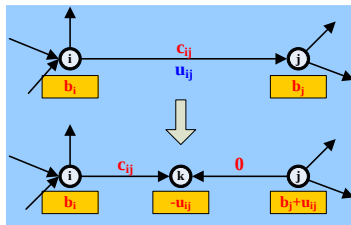
Μερικές Απλοποιήσεις του (MCF)

- ❶ Τα **κάτω φράγματα χωρητικότητας** μπορούν να απαλειφθούν, δίχως βλάβη της γενικότητας.

► Αλλαγή μεταβλητής: $\forall ij \in A, f_{ij} = x_{ij} - \ell_{ij} \in \mathbb{N}$

- ❷ Τα **άνω φράγματα χωρητικότητας** μπορούν να απαλειφθούν, με κατάλληλο μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} f_{ij} + \sum_{it \in A \setminus \{ij\}} f_{it} - \sum_{ti \in A} f_{ti} &= b_i \\ \sum_{jt \in A} f_{jt} + f_{jk} - u_{ij} - \sum_{tj \in A \setminus \{ij\}} f_{tj} &= b_j \\ f_{ij} + f_{jk} &= u_{ij} \end{aligned}$$



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

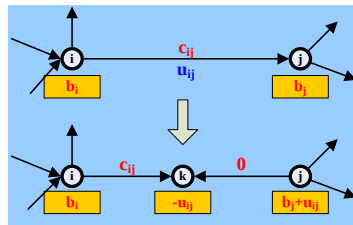
Μερικές Απλοποιήσεις του (MCF)

- ❶ Τα **κάτω φράγματα χωρητικότητας** μπορούν να απαλειφθούν, δίχως βλάβη της γενικότητας.

► Αλλαγή μεταβλητής: $\forall ij \in A, f_{ij} = x_{ij} - \ell_{ij} \in \mathbb{N}$

- ❷ Τα **άνω φράγματα χωρητικότητας** μπορούν να απαλειφθούν, με κατάλληλο μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} f_{ik} + \sum_{it \in A \setminus \{ij\}} f_{it} - \sum_{ti \in A} f_{ti} &= b_i \\ \sum_{jt \in A} f_{jt} + f_{jk} - u_{ij} - \sum_{tj \in A \setminus \{ij\}} f_{tj} &= b_j \\ f_{ij} + f_{jk} &= u_{ij} \end{aligned}$$



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Μερικές Απλοποιήσεις του (MCF)

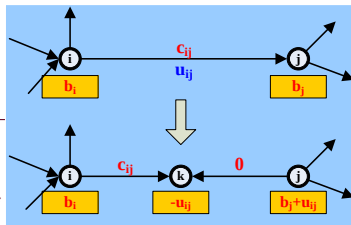
- ❶ Τα **κάτω φράγματα χωρητικότητας** μπορούν να απαλειφθούν, δίχως βλάβη της γενικότητας.

► Αλλαγή μεταβλητής: $\forall ij \in A, f_{ij} = x_{ij} - \ell_{ij} \in \mathbb{N}$

- ❷ Τα **άνω φράγματα χωρητικότητας** μπορούν να απαλειφθούν, με κατάλληλο μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} f_{ik} + \sum_{it \in A \setminus \{ij\}} f_{it} - \sum_{ti \in A} f_{ti} &= b_i \\ \sum_{jt \in A} f_{jt} + f_{jk} - u_{ij} - \sum_{tj \in A \setminus \{ij\}} f_{tj} &= b_j \\ f_{ij} + f_{jk} &= u_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{ik} + \sum_{it \in A \setminus \{ik\}} f_{it} - \sum_{ti \in A} f_{ti} &= \hat{b}_i = b_i \\ f_{jk} + \sum_{jt \in A \setminus \{jk\}} f_{jt} - \sum_{tj \in A} f_{tj} &= \hat{b}_j = b_j + u_{ij} \\ -f_{ik} - f_{jk} &= \hat{b}_k = -u_{ij} \end{aligned}$$



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Μοντελοποίηση (UMCF) Δίχως Χωρητικότητες Ακμών (χβτγ)

- **ΕΙΣΟΔΟΣ:** Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$, με κόστη ακμών $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{|A|}$, και απαιτήσεις κορυφών $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{|V|}$.
- Ακέραιο ΓΠ:

$$\begin{array}{ll} \text{(UMCF)} & \begin{array}{l} \text{minimize} \quad \sum_{ij \in A} c_{ij} \cdot f_{ij} \\ \text{s.t.} \quad \sum_{ik \in A} f_{ik} - \sum_{ki \in A} f_{ki} = b_i, \quad i \in V \\ \quad \quad \quad f_{ij} \in \mathbb{N}, \quad ij \in A \end{array} \end{array}$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Μοντελοποίηση (UMCF) Δίχως Χωρητικότητες Ακμών (χβτγ)

- **ΕΙΣΟΔΟΣ:** Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$, με κόστη ακμών $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{|A|}$, και απαιτήσεις κορυφών $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{|V|}$.
- Ακέραιο ΓΠ:

$$\begin{array}{ll} \text{(UMCF)} & \begin{array}{l} \text{minimize} \quad \sum_{ij \in A} c_{ij} \cdot f_{ij} \\ \text{s.t.} \quad \sum_{ik \in A} f_{ik} - \sum_{ki \in A} f_{ki} = b_i, \quad i \in V \\ \quad \quad \quad f_{ij} \in \mathbb{N}, \quad ij \in A \end{array} \end{array}$$

- Σε μορφή μητρώων:

$$\text{(UMCF)} \quad \text{minimize } \{ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{f} : M_G \cdot \mathbf{f} = \mathbf{b}; \mathbf{f} \in \mathbb{N}^{|A|} \}$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Μοντελοποίηση (UMCF) Δίχως Χωρητικότητες Ακμών (χβτγ)

- **ΕΙΣΟΔΟΣ:** Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$, με κόστη ακμών $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{|A|}$, και απαιτήσεις κορυφών $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{|V|}$.
- Ακέραιο ΓΠ:

$$\begin{array}{ll} \text{(UMCF)} & \begin{array}{l} \text{minimize} \quad \sum_{ij \in A} c_{ij} \cdot f_{ij} \\ \text{s.t.} \quad \sum_{ik \in A} f_{ik} - \sum_{ki \in A} f_{ki} = b_i, \quad i \in V \\ \quad \quad \quad f_{ij} \in \mathbb{N}, \quad ij \in A \end{array} \end{array}$$

- Σε μορφή μητρώων:

$$\text{(UMCF)} \quad \text{minimize } \{ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{f} : M_G \cdot \mathbf{f} = \mathbf{b}; \mathbf{f} \geq \mathbf{0} \}$$

😊 Επιλύσιμο λόγω της *total unimodularity* του μητρώου συντελεστών!!! **Ισοδύναμο** (χαλαρωμένο) ΓΠ.

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Δυϊκό Ροών Ελαχίστου Κόστους

- Πρωτεύον πρόγραμμα ροών ελάχιστου κόστους:

(UMCF) $\text{minimize } \{ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{f} : M_G \cdot \mathbf{f} = \mathbf{b}; \mathbf{f} \geq \mathbf{0} \}$

- Δυϊκό πρόγραμμα;

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Δυσικό Ροών Ελαχίστου Κόστους

- Πρωτεύον πρόγραμμα ροών ελάχιστου κόστους:

(UMCF) $\text{minimize } \{ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{f} : M_G \cdot \mathbf{f} = \mathbf{b}; \mathbf{f} \geq \mathbf{0} \}$

- Δυσικό πρόγραμμα;

(DMCF) $\text{maximize } \{ \mathbf{b}' \cdot \mathbf{y} : (M_G)' \cdot \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \}$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Δυϊκό Ροών Ελαχίστου Κόστους

- Πρωτεύον πρόγραμμα ροών ελάχιστου κόστους:

(UMCF) $\text{minimize } \{ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{f} : M_G \cdot \mathbf{f} = \mathbf{b}; \mathbf{f} \geq \mathbf{0} \}$

- Δυϊκό πρόγραμμα;

(DMCF) $\text{maximize } \{ \mathbf{b}' \cdot \mathbf{y} : (M_G)' \cdot \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}; \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \}$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Δυϊκό Ροών Ελαχίστου Κόστους

- Πρωτεύον πρόγραμμα ροών ελάχιστου κόστους:

(UMCF) $\text{minimize } \{ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{f} : M_G \cdot \mathbf{f} = \mathbf{b}; \mathbf{f} \geq \mathbf{0} \}$

- Δυϊκό πρόγραμμα;

(DMCF) $\text{maximize } \{ \mathbf{b}' \cdot \mathbf{y} : (M_G)' \cdot \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}; \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \}$

- Σε λεπτομέρεια:

(DMCF)
$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \sum_{i \in V} b_i \cdot y_i \\ &\text{s.t.} && y_i - y_j + z_{ij} = c_{ij}, \quad ij \in A \\ &&& z_{ij} \geq 0, \quad ij \in A \end{aligned}$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Δυσικό Ροών Ελαχίστου Κόστους

- Πρωτεύον πρόγραμμα ροών ελάχιστου κόστους:

(UMCF) $\text{minimize } \{ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{f} : M_G \cdot \mathbf{f} = \mathbf{b}; \mathbf{f} \geq \mathbf{0} \}$

- Δυσικό πρόγραμμα;

(DMCF) $\text{maximize } \{ \mathbf{b}' \cdot \mathbf{y} : (M_G)' \cdot \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}; \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \}$

- Σε λεπτομέρεια:

(DMCF)
$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \sum_{i \in V} b_i \cdot y_i \\ &\text{s.t.} && y_i - y_j + z_{ij} = c_{ij}, \quad ij \in A \\ &&& z_{ij} \geq 0, \quad ij \in A \end{aligned}$$

- Συνθήκη Βελτιστότητας (Συμπληρωματική Χαλαρότητα);

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Δυϊκό Ροών Ελαχίστου Κόστους

- Πρωτεύον πρόγραμμα ροών ελάχιστου κόστους:

(UMCF) $\text{minimize } \{ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{f} : M_G \cdot \mathbf{f} = \mathbf{b}; \mathbf{f} \geq \mathbf{0} \}$

- Δυϊκό πρόγραμμα;

(DMCF) $\text{maximize } \{ \mathbf{b}' \cdot \mathbf{y} : (M_G)' \cdot \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}; \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \}$

- Σε λεπτομέρεια:

(DMCF)
$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \sum_{i \in V} b_i \cdot y_i \\ &\text{s.t.} && y_i - y_j + z_{ij} = c_{ij}, \quad ij \in A \\ &&& z_{ij} \geq 0, \quad ij \in A \end{aligned}$$

- Συνθήκη Βελτιστότητας (Συμπληρωματική Χαλαρότητα);

$$\forall ij \in A, \quad x_{ij} \cdot z_{ij} = 0$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

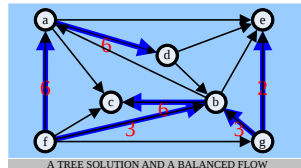
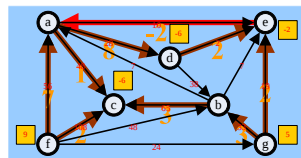
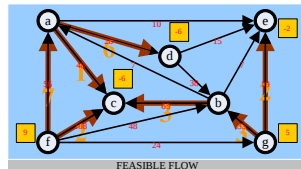
Ισορροπημένες & Δενδρικές Ροές

Εφικτή Ροή:

- ▶ $\forall i \in V, \sum_{ij \in A} f_{ij} - \sum_{ji \in A} f_{ji} = b_i$
- ▶ $\forall ij \in A, f_{ij} \geq 0$

- **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Σε μια ισορροπημένη ροή μπορεί να «ρέει» ποσότητα του διακινούμενου αγαθού **προς τη λάθος κατεύθυνση** μιας ακμής (αρνητική ροή).

Δενδρική Ροή: Μια **ισορροπημένη ροή** που αναθέτει μηδενική τιμή σε όλες τις ροές των ακμών εκτός ενός (συγκεκριμένου) γεννητικού δένδρου του G .



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

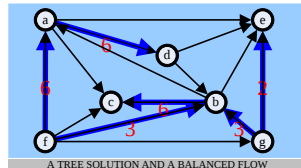
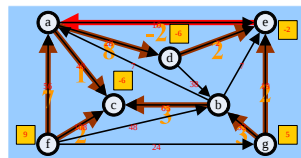
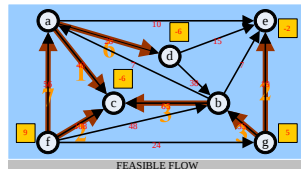
Ισορροπημένες & Δενδρικές Ροές

Ισορροπημένη Ροή:

$$\begin{aligned} \triangleright \forall i \in V, \sum_{j \in A} f_{ij} - \sum_{j \in A} f_{ji} &= b_i \\ \forall ij \in A, f_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

- **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Σε μια ισορροπημένη ροή μπορεί να «ρέει» ποσότητα του διακινούμενου αγαθού **προς τη λάθος κατεύθυνση** μιας ακμής (αρνητική ροή).

Δενδρική Ροή: Μια **ισορροπημένη ροή** που αναθέτει μηδενική τιμή σε όλες τις ροές των ακμών εκτός ενός (συγκεκριμένου) γεννητικού δένδρου του G .



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Κατασκευή Δενδρικής Ροής (I)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένα δίκτυο με απαιτήσεις στους κόμβους, και ένα **γεννητικό δένδρο** του.

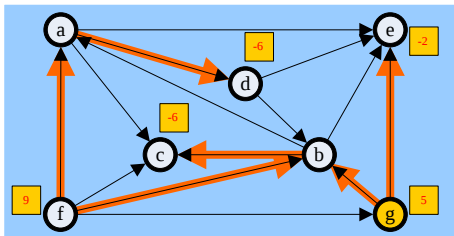
- Αυθαίρετη επιλογή κόμβου του δένδρου ως **ρίζα**.
- **Εξισορρόπηση** στους κόμβους, από τα φύλλα προς τη ρίζα: Ξεκινώντας από τα φύλλα, **μεταφέρουμε την απαίτηση ροής** στους γονείς, μέχρι να συρρικνώσουμε το δένδρο σε μια κορυφή. Οριστικοποιούμε τη ροή της δενδρικής ακμής που επιτρέπει τη μεταφορά.

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Κατασκευή Δενδρικής Ροής (I)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένα δίκτυο με απαιτήσεις στους κόμβους, και ένα **γεννητικό δένδρο** του.

- Αυθαίρετη επιλογή κόμβου του δένδρου ως **ρίζα**.
- **Εξισορρόπηση** στους κόμβους, από τα φύλλα προς τη ρίζα: Ξεκινώντας από τα φύλλα, **μεταφέρουμε την απαίτηση ροής** στους γονείς, μέχρι να συρρικνώσουμε το δένδρο σε μια κορυφή. Οριστικοποιούμε τη ροή της δενδρικής ακμής που επιτρέπει τη μεταφορά.

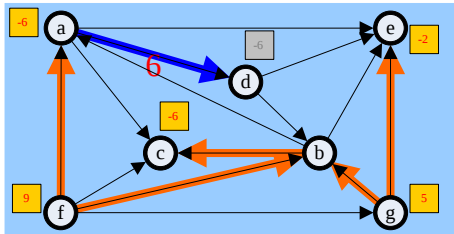


Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Κατασκευή Δενδρικής Ροής (I)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένα δίκτυο με απαιτήσεις στους κόμβους, και ένα **γεννητικό δένδρο** του.

- Αυθαίρετη επιλογή κόμβου του δένδρου ως **ρίζα**.
- **Εξισορρόπηση** στους κόμβους, από τα φύλλα προς τη ρίζα: Ξεκινώντας από τα φύλλα, **μεταφέρουμε την απαίτηση ροής** στους γονείς, μέχρι να συρρικνώσουμε το δένδρο σε μια κορυφή. Οριστικοποιούμε τη ροή της δενδρικής ακμής που επιτρέπει τη μεταφορά.



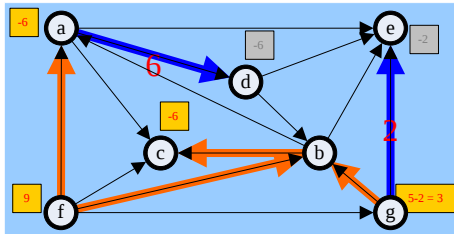
$$d: \quad -x(ad) = -6 \Rightarrow x(ad) = 6$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Κατασκευή Δενδρικής Ροής (I)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένα δίκτυο με απαιτήσεις στους κόμβους, και ένα **γεννητικό δένδρο** του.

- Αυθαίρετη επιλογή κόμβου του δένδρου ως **ρίζα**.
- **Εξισορρόπηση** στους κόμβους, από τα φύλλα προς τη ρίζα: Ξεκινώντας από τα φύλλα, **μεταφέρουμε την απαίτηση ροής** στους γονείς, μέχρι να συρρικνώσουμε το δένδρο σε μια κορυφή. Οριστικοποιούμε τη ροή της δενδρικής ακμής που επιτρέπει τη μεταφορά.



$$d: -x(ad) = -6 \Rightarrow x(ad) = 6$$

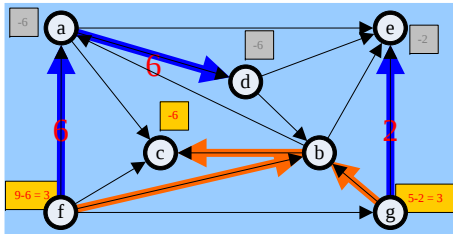
$$e: -x(ge) = -2 \Rightarrow x(ge) = 2$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Κατασκευή Δενδρικής Ροής (I)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένα δίκτυο με απαιτήσεις στους κόμβους, και ένα **γεννητικό δένδρο** του.

- Αυθαίρετη επιλογή κόμβου του δένδρου ως **ρίζα**.
- **Εξισορρόπηση** στους κόμβους, από τα φύλλα προς τη ρίζα: Ξεκινώντας από τα φύλλα, **μεταφέρουμε την απαίτηση ροής** στους γονείς, μέχρι να συρρικνώσουμε το δένδρο σε μια κορυφή. Οριστικοποιούμε τη ροή της δενδρικής ακμής που επιτρέπει τη μεταφορά.



$$d: \quad -x(ad) = -6 \Rightarrow x(ad) = 6$$

$$e: \quad -x(ge) = -2 \Rightarrow x(ge) = 2$$

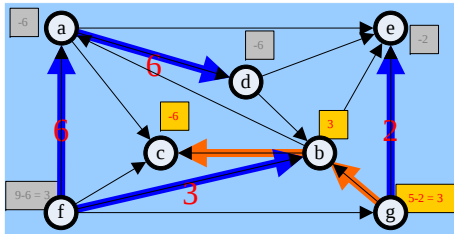
$$a: \quad -x(fa) = -6 \Rightarrow x(fa) = 6$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Κατασκευή Δενδρικής Ροής (I)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένα δίκτυο με απαιτήσεις στους κόμβους, και ένα **γεννητικό δένδρο** του.

- Αυθαίρετη επιλογή κόμβου του δένδρου ως **ρίζα**.
- **Εξισορρόπηση** στους κόμβους, από τα φύλλα προς τη ρίζα: Ξεκινώντας από τα φύλλα, **μεταφέρουμε την απαίτηση ροής** στους γονείς, μέχρι να συρρικνώσουμε το δένδρο σε μια κορυφή. Οριστικοποιούμε τη ροή της δενδρικής ακμής που επιτρέπει τη μεταφορά.



$$d: -x(ad) = -6 \Rightarrow x(ad) = 6$$

$$e: -x(ge) = -2 \Rightarrow x(ge) = 2$$

$$a: -x(fa) = -6 \Rightarrow x(fa) = 6$$

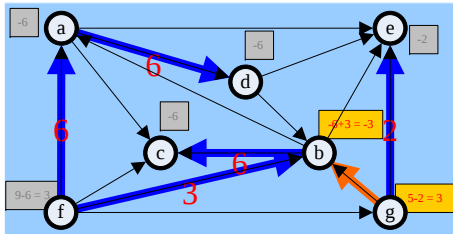
$$f: x(fb) = 3$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Κατασκευή Δενδρικής Ροής (I)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένα δίκτυο με απαιτήσεις στους κόμβους, και ένα **γεννητικό δένδρο** του.

- Αυθαίρετη επιλογή κόμβου του δένδρου ως **ρίζα**.
- **Εξισορρόπηση** στους κόμβους, από τα φύλλα προς τη ρίζα: Ξεκινώντας από τα φύλλα, **μεταφέρουμε την απαίτηση ροής** στους γονείς, μέχρι να συρρικνώσουμε το δένδρο σε μια κορυφή. Οριστικοποιούμε τη ροή της δενδρικής ακμής που επιτρέπει τη μεταφορά.



$$d: -x(ad) = -6 \Rightarrow x(ad) = 6$$

$$e: -x(ge) = -2 \Rightarrow x(ge) = 2$$

$$a: -x(fa) = -6 \Rightarrow x(fa) = 6$$

$$f: x(fb) = 3$$

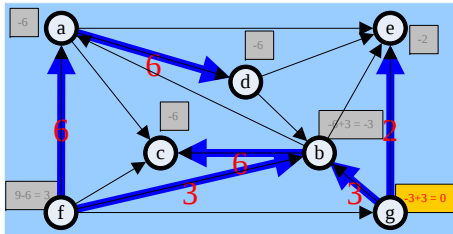
$$c: -x(bc) = -6 \Rightarrow x(bc) = 6$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Κατασκευή Δενδρικής Ροής (I)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένα δίκτυο με απαιτήσεις στους κόμβους, και ένα **γεννητικό δένδρο** του.

- Αυθαίρετη επιλογή κόμβου του δένδρου ως **ρίζα**.
- **Εξισορρόπηση** στους κόμβους, από τα φύλλα προς τη ρίζα: Ξεκινώντας από τα φύλλα, **μεταφέρουμε την απαίτηση ροής** στους γονείς, μέχρι να συρρικνώσουμε το δένδρο σε μια κορυφή. Οριστικοποιούμε τη ροή της δενδρικής ακμής που επιτρέπει τη μεταφορά.



$$d: -x(ad) = -6 \Rightarrow x(ad) = 6$$

$$e: -x(ge) = -2 \Rightarrow x(ge) = 2$$

$$a: -x(fa) = -6 \Rightarrow x(fa) = 6$$

$$f: x(fb) = 3$$

$$c: -x(bc) = -6 \Rightarrow x(bc) = 6$$

$$b: -x(gb) = -3 \Rightarrow x(gb) = 3$$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Κατασκευή Δενδρικής Ροής (I)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ο μηχανισμός κατασκευής δενδρικής ροής, ως προς συγκεκριμένο ΓΔ είναι πάντα επιτυχής, γιατί:

- ▶ Κάθε δένδρο έχει τουλάχιστον δύο **φύλλα**.
- ▶ Η **διαγραφή φύλλου** (μαζί με την προσκείμενη σε αυτό ακμή) από δένδρο δίνει νέο δένδρο.
- ▶ Όλες οι κορυφές του **G** περιλαμβάνονται στο (ΓΔ) **T**.
- ▶ Το άθροισμα απαιτήσεων των κορυφών σε προβλήματα ροής είναι **μηδέν**.

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Κατασκευή Δενδρικής Ροής (I)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ο μηχανισμός κατασκευής δενδρικής ροής, ως προς συγκεκριμένο ΓΔ είναι πάντα επιτυχής, γιατί:

- ▶ Κάθε δένδρο έχει τουλάχιστον δύο **φύλλα**.
- ▶ Η **διαγραφή φύλλου** (μαζί με την προσκείμενη σε αυτό ακμή) από δένδρο δίνει νέο δένδρο.
- ▶ Όλες οι κορυφές του **G** περιλαμβάνονται στο (ΓΔ) **T**.
- ▶ Το άθροισμα απαιτήσεων των κορυφών σε προβλήματα ροής είναι **μηδέν**.



Η δενδρική λύση του παραδείγματος (εκτός από ισορροπημένη) είναι και **εφικτή**. Συμβαίνει πάντα αυτό;

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

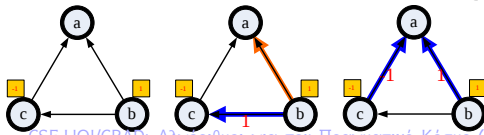
Κατασκευή Δενδρικής Ροής (I)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ο μηχανισμός κατασκευής δενδρικής ροής, ως προς συγκεκριμένο ΓΔ είναι πάντα επιτυχής, γιατί:

- ▶ Κάθε δένδρο έχει τουλάχιστον δύο **φύλλα**.
- ▶ Η **διαγραφή φύλλου** (μαζί με την προσκείμενη σε αυτό ακμή) από δένδρο δίνει νέο δένδρο.
- ▶ Όλες οι κορυφές του **G** περιλαμβάνονται στο (ΓΔ) **T**.
- ▶ Το άθροισμα απαιτήσεων των κορυφών σε προβλήματα ροής είναι **μηδέν**.

Q Η δενδρική λύση του παραδείγματος (εκτός από ισορροπημένη) είναι και **εφικτή**. Συμβαίνει πάντα αυτό;

A **ΟΧΙ** (εξαρτάται από το ΓΔ που θεωρούμε)!!!



Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Συσχέτιση Βάσεων & Γεννητικών Δένδρων στο (MCF) (I)

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1 (Σημειώσεις)

Για οποιοδήποτε πρόβλημα δικτυακής ροής ελάχιστου κόστους (MCF) σε ένα συνδεδεμένο κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$ με πίνακα πρόσπτωσης $M = M_G$ ένας υποπίνακας N του M ορίζει μια **βάση** του M αν και μόνο αν οι στήλες του αντιστοιχούν σε όλες τις ακμές ενός **γεννητικού δένδρου** του G .

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Συσχέτιση Βάσεων & Γεννητικών Δένδρων στο (MCF) (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1 (Σημειώσεις)

($\Rightarrow$) Χβτγ, έστω $N = M(1 : n-1, 1 : n-1)$ ο υποπίνακας που αντιστοιχεί στις γραμμές (κορυφές $v_1, \dots, v_{n-1}$) και στήλες (ακμές $a_1, \dots, a_{n-1}$) του M , με $\text{rank}(N) = n-1$. Θδο οι ακμές που αντιστοιχούν στις στήλες του N ορίζουν ένα γεννητικό δένδρο του G .

if για $1 \leq k \leq n-1$, υπάρχει k -κύκλος στο επαγόμενο υπογράφημα από τις ακμές $a_1, \dots, a_{n-1}$ (πχ, $\langle a_1 = v_1 v_2, a_2 = v_2 v_3, \dots, a_k = v_k v_1 \rangle$)

then $1 \cdot N(:, 1) + \dots + 1 \cdot N(:, k) = 0$

then υπάρχει **γραμμική εξάρτηση** στο N (ΑΤΟΠΟ)

$\therefore$ Άκυκλο γράφημα $n-1$ ακμών $\Rightarrow$ ΓΔ του G .

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Συσχέτιση Βάσεων & Γεννητικών Δένδρων στο (MCF) (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1 (Σημειώσεις)

- ($\Leftarrow$) Χβτγ, έστω $N = M(1 : n - 1, 1 : n - 1)$ ο υποπίνακας που αντιστοιχεί στις γραμμές (κορυφές $v_1, \dots, v_{n-1}$) και στήλες (ακμές $a_1, \dots, a_{n-1}$) ενός ΓΔ T του G . Θδο $\text{rank}(N) = n - 1$.
- Έστω ότι $\lambda_1 \cdot N(:, 1) + \dots + \lambda_{n-1} \cdot N(:, 1) = 0$.
 - Κάθε δένδρο έχει τουλάχιστον ένα φύλλο.

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Συσχέτιση Βάσεων & Γεννητικών Δένδρων στο (MCF) (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1 (Σημειώσεις)

($\Leftarrow$) Χβτγ, έστω $N = M(1 : n-1, 1 : n-1)$ ο υποπίνακας που αντιστοιχεί στις γραμμές (κορυφές $v_1, \dots, v_{n-1}$) και στήλες (ακμές $a_1, \dots, a_{n-1}$) ενός ΓΔ T του G . Θδο $\text{rank}(N) = n-1$.

- Έστω ότι $\lambda_1 \cdot N(:, 1) + \dots + \lambda_{n-1} \cdot N(:, 1) = 0$.

- Κάθε δένδρο έχει τουλάχιστον ένα φύλλο.

if v_1 είναι φύλλο του $T_1 = T$

then $\lambda_1 = 0$ (δεν υπάρχει άλλη ακμή στο T_1 που προσπίπτει στη v_1).

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Συσχέτιση Βάσεων & Γεννητικών Δένδρων στο (MCF) (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1 (Σημειώσεις)

($\Leftarrow$) Χβτγ, έστω $N = M(1 : n-1, 1 : n-1)$ ο υποπίνακας που αντιστοιχεί στις γραμμές (κορυφές $v_1, \dots, v_{n-1}$) και στήλες (ακμές $a_1, \dots, a_{n-1}$) ενός ΓΔ T του G . Θδο $\text{rank}(N) = n-1$.

- Έστω ότι $\lambda_1 \cdot N(:, 1) + \dots + \lambda_{n-1} \cdot N(:, 1) = 0$.

- Κάθε δένδρο έχει τουλάχιστον ένα φύλλο.

if v_1 είναι φύλλο του $T_1 = T$

then $\lambda_1 = 0$ (δεν υπάρχει άλλη ακμή στο T_1 που προσπίπτει στη v_1).

then $\lambda_2 \cdot N(:, 1) + \dots + \lambda_{n-1} \cdot N(:, 1) = 0$

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Συσχέτιση Βάσεων & Γεννητικών Δένδρων στο (MCF) (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1 (Σημειώσεις)

($\Leftarrow$) Χβτγ, έστω $N = M(1 : n-1, 1 : n-1)$ ο υποπίνακας που αντιστοιχεί στις γραμμές (κορυφές $v_1, \dots, v_{n-1}$) και στήλες (ακμές $a_1, \dots, a_{n-1}$) ενός ΓΔ T του G . Θδο $\text{rank}(N) = n-1$.

- Έστω ότι $\lambda_1 \cdot N(:, 1) + \dots + \lambda_{n-1} \cdot N(:, 1) = 0$.

- Κάθε δένδρο έχει τουλάχιστον ένα φύλλο.

if v_1 είναι φύλλο του $T_1 = T$

then $\lambda_1 = 0$ (δεν υπάρχει άλλη ακμή στο T_1 που προσπίπτει στη v_1).

then $\lambda_2 \cdot N(:, 1) + \dots + \lambda_{n-1} \cdot N(:, 1) = 0$

if v_2 φύλλο του $T_2 = T_1 - v_1$ then $\lambda_2 = 0$

...

Ροές Ελάχιστου Κόστους – Min Cost Flows

Συσχέτιση Βάσεων & Γεννητικών Δένδρων στο (MCF) (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1 (Σημειώσεις)

($\Leftarrow$) Χβτγ, έστω $N = M(1 : n-1, 1 : n-1)$ ο υποπίνακας που αντιστοιχεί στις γραμμές (κορυφές $v_1, \dots, v_{n-1}$) και στήλες (ακμές $a_1, \dots, a_{n-1}$) ενός ΓΔ T του G . Θδο $\text{rank}(N) = n-1$.

- Έστω ότι $\lambda_1 \cdot N(:, 1) + \dots + \lambda_{n-1} \cdot N(:, 1) = 0$.

- Κάθε δένδρο έχει τουλάχιστον ένα φύλλο.

if v_1 είναι φύλλο του $T_1 = T$

then $\lambda_1 = 0$ (δεν υπάρχει άλλη ακμή στο T_1 που προσπίπτει στη v_1).

then $\lambda_2 \cdot N(:, 1) + \dots + \lambda_{n-1} \cdot N(:, 1) = 0$

if v_2 φύλλο του $T_2 = T_1 - v_1$ then $\lambda_2 = 0$

...

$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$

Επισκόπηση του NETWORK SIMPLEX

- 1 Βρες σημείο εκκίνησης (γεννητικό δένδρο T , με εφικτή δενδρική ροή).
- 2 Υπολόγισε εφικτή δενδρική ροή $f(T)$ και ελαττωμένα κόστη για τις μη-δενδρικές ακμές.
- 3 **if** μη αρνητικά ελαττωμένα κόστη **then stop** .
- 4 Επίλεξε pivot-in ακμή $pq \notin T$ με βάση το Pricing Rule.
- 5 **if** μη φραγμένο πρόγραμμα **then stop** .
- 6 Βρες την pivot-out ακμή $uv \in T$, με χρήση LMR (για αποφυγή κύκλων).
- 7 $Pivot(uv , pq)$
- 8 **go to** 2.

Λεπτομέρειες Εκτέλεσης NETWORK SIMPLEX

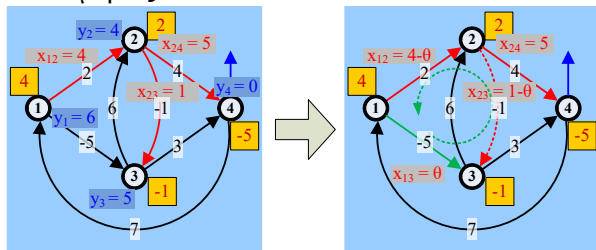
Υπολογισμός δενδρικής ροής και δυναμικών...

- **Υπολογισμός εφικτής (δενδρικής) ροής:** Σε μια **bottom-up διάσχιση** του δένδρου, υπολογίζουμε τιμές ροής για δενδρικές ακμές, εφαρμόζοντας τους **περιορισμούς διατήρησης ροής** στους κόμβους και τις ακμές του γεννητικού δένδρου.
- **Υπολογισμός δυναμικών:** Για κάθε δενδρική ακμή ij πρέπει να ισχύει ότι $z_{ij} = 0$. Θεωρούμε «γειωμένη» την κορυφή – ρίζα του δένδρου και, σε μια **top-down διάσχιση** του δένδρου, υπολογίζουμε δυναμικά εφαρμόζοντας τον κανόνα: $\forall ij \in T, \underline{c}_{ij} = z_{ij} = 0 \Rightarrow y_i - y_j = c_{ij}$
- **Υπολογισμός τιμών για ελαττωμένα κόστη μη δενδρικών ακμών:** Με δεδομένα πλέον τα δυναμικά, εφαρμόζουμε τον εξής κανόνα: $\forall ij \notin T, \underline{c}_{ij} := z_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$

Λεπτομέρειες Εκτέλεσης NETWORK SIMPLEX

Ενημέρωση δενδρικής ροής κατά την εκτέλεση pivot...

Ενημέρωση Ροής: Η νεοεισερχόμενη ακμή $pq \notin T$ δημιουργεί μη-κατευθυνόμενο κύκλο $C_T[pq]$ μαζί με το T . Πχ, στο αριστερό σχήμα, όπου το T απαρτίζεται από τις κόκκινες ακμές, η νεοεισερχόμενη ακμή $pq = 13$ δημιουργεί τον κύκλο $C_T[13] = \langle 1, 2, 3, 1 \rangle$. Στην υπάρχουσα δενδρική ροή, προσθέτουμε ροή $\theta \geq 0$ μονάδων κατά μήκος του κύκλου $C_T[pq]$, *προς την κατεύθυνση της pq* . Η τιμή του θ είναι η μέγιστη δυνατή *χωρίς να παραβιάζει τα πρόσημα* των ροών κατά μήκος του κύκλου:

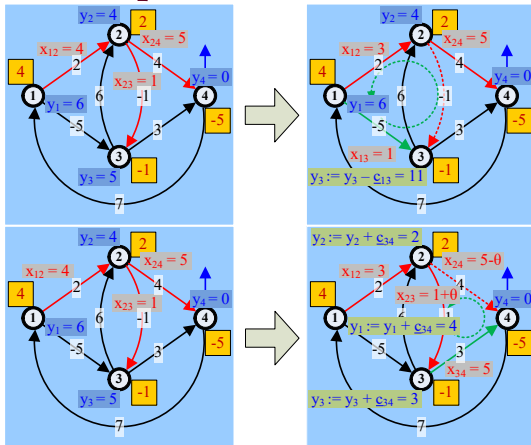


Λεπτομέρειες Εκτέλεσης NETWORK SIMPLEX

Ενημέρωση δυναμικών κατά την εκτέλεση pivot...

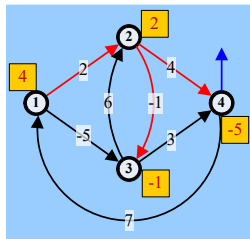
Ενημέρωση Δυναμικών: Η ακμή που γίνεται pivot-out αποκόπτει το T σε δυο υποδένδρα, το T_1 που περιλαμβάνει τη ρίζα, και το T_2 .

- Το T_1 διατηρεί τα ίδια δυναμικά.
- Το T_2 έχει ως ρίζα του το ένα άκρο της uv . Υπολογίζουμε το δυναμικό της ρίζας του T_2 . Η μεταβολή που γίνεται στη ρίζα, γίνεται και στις άλλες κορυφές του T_2 .



Παράδειγμα Εκτέλεσης NETWORK SIMPLEX

Εύρεση εφικτής δενδρικής ροής από βάση εκκίνησης...



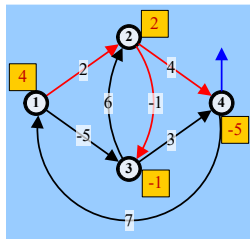
- Βάση: $\beta_0 = \{12, 23, 24, 4\}$
- Ροή: $\mathbf{x}_0 = [x_0[12] = 4; x_0[23] = 1; x_0[24] = 5; x_0[4] = 0]$.
- Δυναμικά: $\mathbf{y}_0 = [y_0[1] = 6, y_0[2] = 4, y_0[3] = 5, y_0[4] = 0]$.

- Ελ. κόστη:

$\underline{c}_0[13]$	$= c[13] - y_0[1] + y_0[3] =$	-6
$\underline{c}_0[32]$	$= c[32] - y_0[3] + y_0[2] =$	5
$\underline{c}_0[34]$	$= c[34] - y_0[3] + y_0[4] =$	-2
$\underline{c}_0[41]$	$= c[41] - y_0[4] + y_0[1] =$	13

Παράδειγμα Εκτέλεσης NETWORK SIMPLEX

Εύρεση εφικτής δενδρικής ροής από βάση εκκίνησης...



- Βάση: $\beta_0 = \{1\,2, 2\,3, 2\,4, 4\}$
- Ροή: $\mathbf{x}_0 = [x_0[1\,2] = 4; x_0[2\,3] = 1; x_0[2\,4] = 5; x_0[4] = 0]$.
- Δυναμικά: $\mathbf{y}_0 = [y_0[1] = 6, y_0[2] = 4, y_0[3] = 5, y_0[4] = 0]$.

- Ελ. κόστη:

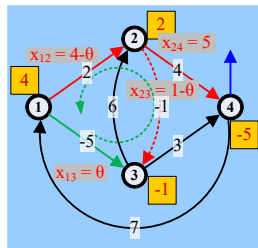
$\underline{c}_0[1\,3]$	$= c[1\,3] - y_0[1] + y_0[3] =$	-6
$\underline{c}_0[3\,2]$	$= c[3\,2] - y_0[3] + y_0[2] =$	5
$\underline{c}_0[3\,4]$	$= c[3\,4] - y_0[3] + y_0[4] =$	-2
$\underline{c}_0[4\,1]$	$= c[4\,1] - y_0[4] + y_0[1] =$	13

- Επόμενο pivot-in: $1\,3$.

Παράδειγμα Εκτέλεσης NETWORK SIMPLEX

Εκτέλεση *pivot*(23, 13) και ενημέρωση δενδρικής ροής και δυναμικών...

- pivot-in = 13.
- $\theta = 1 \Rightarrow$ pivot-out = 23.
- Νέα βάση: $\beta_1 = \{12, 13, 24, 4\}$



- Νέα Ροή: $\mathbf{x}_1 = [x_1[12] = 3; x_1[13] = 1; x_1[24] = 5; x_1[4] = 0]$
- Νέα Δυναμικά:
 $\mathbf{y}_1 = [y_1[1] = 6, y_1[2] = 4, y_1[3] = 1, y_1[4] = 0]$

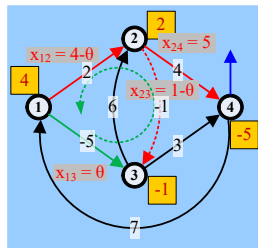
- Ενημέρωση κόστους:

$\underline{c}_1[23]$	$= c[23] - y_1[2] + y_1[3] =$	6
$\underline{c}_1[32]$	$= c[32] - y_1[3] + y_1[2] =$	-1
$\underline{c}_1[34]$	$= c[34] - y_1[3] + y_1[4] =$	-8
$\underline{c}_1[41]$	$= c[41] - y_1[4] + y_1[1] =$	1

Παράδειγμα Εκτέλεσης NETWORK SIMPLEX

Εκτέλεση $\text{pivot}(23, 13)$ και ενημέρωση δενδρικής ροής και δυναμικών...

- $\text{pivot-in} = 13$.
- $\theta = 1 \Rightarrow \text{pivot-out} = 23$.
- Νέα βάση: $\beta_1 = \{12, 13, 24, 4\}$



- Νέα Ροή: $\mathbf{x}_1 = [x_1[12] = 3; x_1[13] = 1; x_1[24] = 5; x_1[4] = 0]$
- Νέα Δυναμικά:
 $\mathbf{y}_1 = [y_1[1] = 6, y_1[2] = 4, y_1[3] = 1, y_1[4] = 0]$

- Ενημέρωση κόστους:

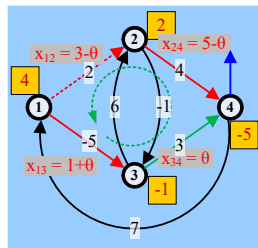
$\underline{c}_1[23]$	$= c[23] - y_1[2] + y_1[3] =$	6
$\underline{c}_1[32]$	$= c[32] - y_1[3] + y_1[2] =$	-1
$\underline{c}_1[34]$	$= c[34] - y_1[3] + y_1[4] =$	-8
$\underline{c}_1[41]$	$= c[41] - y_1[4] + y_1[1] =$	1

- Επόμενο pivot-in : 34.

Παράδειγμα Εκτέλεσης NETWORK SIMPLEX

Εκτέλεση *pivot*(12, 34) και ενημέρωση δενδρικής ροής και δυναμικών...

- pivot-in = 34.
- $\theta = 3 \Rightarrow$ pivot-out = 12.
- Νέα βάση: $\beta_2 = \{13, 24, 34, 4\}$



- Νέα Ροή: $\mathbf{x}_2 = [x_2[13] = 4; x_2[24] = 2; x_2[34] = 3; x_2[4] = 0]$
- Νέα Δυναμικά:
 $\mathbf{y}_2 = [y_2[1] = -2, y_2[2] = 4, y_2[3] = 3, y_2[4] = 0]$

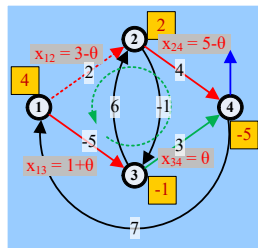
- Ενημέρωση κόστους:

$\underline{c}_2[12]$	$= c[12] - y_2[3] + y_2[4] =$	8
$\underline{c}_2[23]$	$= c[23] - y_2[2] + y_2[3] =$	-2
$\underline{c}_2[32]$	$= c[32] - y_2[3] + y_2[2] =$	7
$\underline{c}_2[41]$	$= c[41] - y_2[4] + y_2[1] =$	5

Παράδειγμα Εκτέλεσης NETWORK SIMPLEX

Εκτέλεση $\text{pivot}(12, 34)$ και ενημέρωση δενδρικής ροής και δυναμικών...

- $\text{pivot-in} = 34$.
- $\theta = 3 \Rightarrow \text{pivot-out} = 12$.
- Νέα βάση: $\beta_2 = \{13, 24, 34, 4\}$



- Νέα Ροή: $\mathbf{x}_2 = [x_2[13] = 4; x_2[24] = 2; x_2[34] = 3; x_2[4] = 0]$
- Νέα Δυναμικά:
 $\mathbf{y}_2 = [y_2[1] = -2, y_2[2] = 4, y_2[3] = 3, y_2[4] = 0]$

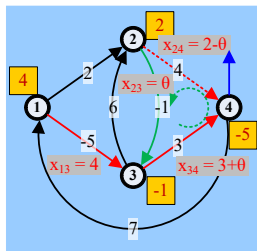
- Ενημέρωση κόστους:

$\underline{c}_2[12]$	$= c[12] - y_2[3] + y_2[4] =$	8
$\underline{c}_2[23]$	$= c[23] - y_2[2] + y_2[3] =$	-2
$\underline{c}_2[32]$	$= c[32] - y_2[3] + y_2[2] =$	7
$\underline{c}_2[41]$	$= c[41] - y_2[4] + y_2[1] =$	5
- Επόμενο pivot-in : 23.

Παράδειγμα Εκτέλεσης NETWORK SIMPLEX

Εκτέλεση *pivot*(24, 23) και ενημέρωση δενδρικής ροής και δυναμικών...

- pivot-in = 23.
- $\theta = 2 \Rightarrow$ pivot-out = 24.
- Νέα βάση: $\beta_3 = \{1\,3, 23, 34, 4\}$



- Νέα Ροή: $\mathbf{x}_3 = [x_3[1\,3] = 4; x_3[23] = 2; x_3[34] = 5; x_2[4] = 0]$
- Νέα Δυναμικά:
 $\mathbf{y}_3 = [y_3[1] = -2, y_3[2] = 2, y_3[3] = 3, y_3[4] = 0]$

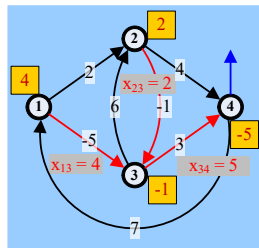
- Ενημέρωση κόστους:

$\underline{c}_3[1\,2]$	$= c[1\,2] - y_3[1] + y_3[2] =$	6
$\underline{c}_3[24]$	$= c[24] - y_3[2] + y_3[4] =$	2
$\underline{c}_3[32]$	$= c[32] - y_3[3] + y_3[2] =$	5
$\underline{c}_3[41]$	$= c[41] - y_3[4] + y_3[1] =$	5

Παράδειγμα Εκτέλεσης NETWORK SIMPLEX

Εκτέλεση $\text{pivot}(24, 23)$ και ενημέρωση δενδρικής ροής και δυναμικών...

- $\text{pivot-in} = 23$.
- $\theta = 2 \Rightarrow \text{pivot-out} = 24$.
- Νέα βάση: $\beta_3 = \{13, 23, 34, 4\}$



- Νέα Ροή: $\mathbf{x}_3 = [x_3[13] = 4; x_3[23] = 2; x_3[34] = 5; x_2[4] = 0]$
- Νέα Δυναμικά:
 $\mathbf{y}_3 = [y_3[1] = -2, y_3[2] = 2, y_3[3] = 3, y_3[4] = 0]$

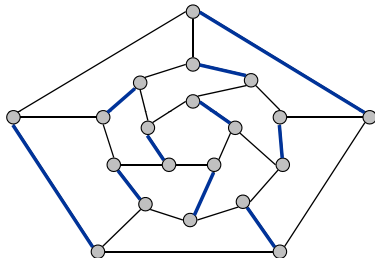
- Ενημέρωση κόστους:
$$\begin{aligned}\underline{c}_3[12] &= c[12] - y_3[1] + y_3[2] = 6 \\ \underline{c}_3[24] &= c[24] - y_3[2] + y_3[4] = 2 \\ \underline{c}_3[32] &= c[32] - y_3[3] + y_3[2] = 5 \\ \underline{c}_3[41] &= c[41] - y_3[4] + y_3[1] = 5\end{aligned}$$

Βέλτιστη Λύση!

Μέγιστα Ταιριάσματα Σε Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα (I)

ΕΙΣΟΔΟΣ:

- ▶ Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με μητρώο πρόσπτωσης $M_G \in \{0, 1\}^{|V| \times |E|}$.
- ▶ Συνάρτηση (μη αρνητικών) **ωφελειών** για επιλογή των ακμών, $p : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

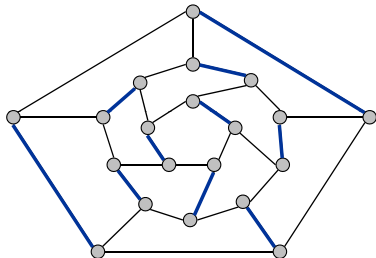


ΣΤΟΧΟΣ: Υπολογισμός ενός υποσυνόλου ακμών που δεν μοιράζονται κοινό άκρο (**ταίριασμα**) με μέγιστη ωφέλεια.

Μέγιστα Ταιριάσματα Σε Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα (I)

ΕΙΣΟΔΟΣ:

- ▶ Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με μητρώο πρόσπτωσης $M_G \in \{0, 1\}^{|V| \times |E|}$.
- ▶ Συνάρτηση (μη αρνητικών) **ωφελειών** για επιλογή των ακμών, $p : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.



ΣΤΟΧΟΣ: Υπολογισμός ενός υποσυνόλου ακμών που δεν μοιράζονται κοινό άκρο (**ταιρίασμα**) με μέγιστη ωφέλεια.

• Μορφοποίηση ως Ακέραιο ΓΠ:

$$\begin{array}{ll} \text{(WM)} & \begin{array}{l} \text{maximize} \quad \sum_{e \in E} p(e) \cdot x(e) \\ \text{s.t. : } \quad \forall v \in V, \quad \sum_{e \in E: v \in e} x(e) \leq 1 \\ \quad \quad \quad \forall e \in E, \quad x(e) \in \{0, 1\} \end{array} \end{array}$$

Μέγιστα Ταιριάσματα Σε Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα (II)

- Αναπαράσταση με μητρώα και διανύσματα:

(WM)

$$\text{maximize } \{ \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x} : M_G \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{1}; \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|E|} \}$$

Μέγιστα Ταιριάσματα Σε Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα (II)

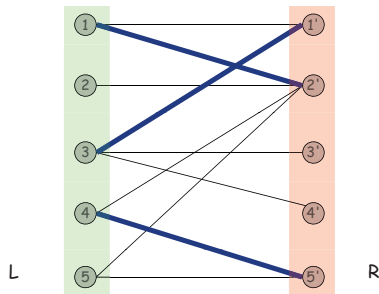
- Αναπαράσταση με μητρώα και διανύσματα:

(WM)

$$\text{maximize } \{ \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x} : M_G \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{1}; \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|E|} \}$$



Για **διμερή** γραφήματα
 $G = (L \cup R, E)$, το M_G είναι **totally unimodular**.



Μέγιστα Ταιριάσματα Σε Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα (II)

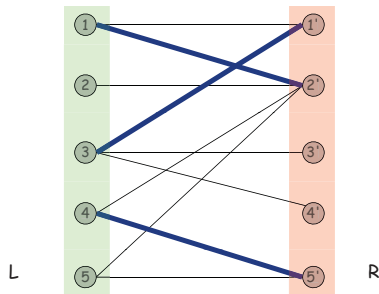
- Αναπαράσταση με μητρώα και διανύσματα:

(WM)

$$\text{maximize } \{ \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x} : M_G \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{1}; \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|E|} \}$$



Για **διμερή** γραφήματα
 $G = (L \cup R, E)$, το M_G είναι **totally unimodular**.



(WBM)

$$\text{maximize } \{ \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x} : M_G \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{1}; \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|E|} \}$$

Μέγιστα Ταιριάσματα Σε Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα (II)

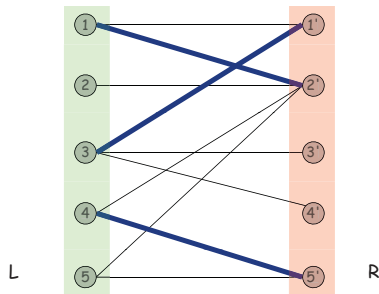
- Αναπαράσταση με μητρώα και διανύσματα:

(WM)

$$\text{maximize } \{ \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x} : M_G \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{1}; \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|E|} \}$$



Για **διμερή** γραφήματα
 $G = (L \cup R, E)$, το M_G είναι **totally unimodular**.



(WBM)

$$\text{maximize } \{ \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x} : M_G \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{1}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

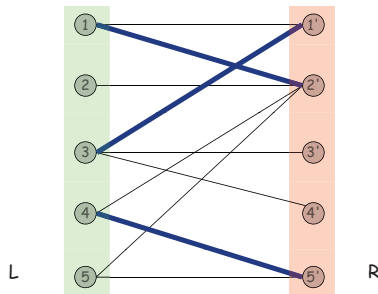
Μέγιστα Ταιριάσματα Σε Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα (II)

- Αναπαράσταση με μητρώα και διανύσματα:

(WM)

$$\text{maximize } \{ \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x} : M_G \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{1}; \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|E|} \}$$

😊 Για **διμερή** γραφήματα $G = (L \cup R, E)$, το M_G είναι **totally unimodular**.



(WBM)

$$\text{maximize } \{ \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x} : M_G \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{1}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

😞 Για **μη διμερή** γραφήματα, υπάρχει κύκλος περιττού μήκους, που δείχνει ότι το M_G **δεν είναι totally unimodular**.

Τέλεια Ταιριάσματα Σε Διμερή Γραφήματα

- **Perfect Bipartite Matchings (PBM)**: Για πλήρες διμερές (μη κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (A \cup B, E = \{uv : u \in A, v \in B\})$ με βάρη στις ακμές $p : E \rightarrow \mathbb{R}$, ζητείται **τέλειο ταίριασμα** (κάθε κορυφή είναι τερματικό σημείο ακριβώς μιας ακμής του ταιριάσματος) ελάχιστου κόστους.

Τέλεια Ταιριάσματα Σε Διμερή Γραφήματα

- **Perfect Bipartite Matchings (PBM)**: Για πλήρες διμερές (μη κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (A \cup B, E = \{uv : u \in A, v \in B\})$ με βάρη στις ακμές $p : E \rightarrow \mathbb{R}$, ζητείται **τέλειο ταίριασμα** (κάθε κορυφή είναι τερματικό σημείο ακριβώς μιας ακμής του ταιριάσματος) ελάχιστου κόστους.
- Ισοδύναμο με το πρόβλημα **ανάθεσης n εργασιών σε n εργαζόμενους** – **Assignment Problem (IAP)**.

Τέλεια Ταιριάσματα Σε Διμερή Γραφήματα

- **Perfect Bipartite Matchings (PBM)**: Για πλήρες διμερές (μη κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (A \cup B, E = \{uv : u \in A, v \in B\})$ με βάρη στις ακμές $p : E \rightarrow \mathbb{R}$, ζητείται **τέλειο ταίριασμα** (κάθε κορυφή είναι τερματικό σημείο ακριβώς μιας ακμής του ταιριάσματος) ελάχιστου κόστους.
- Ισοδύναμο με το πρόβλημα **ανάθεσης n εργασιών σε n εργαζόμενους** – **Assignment Problem (IAP)**.
- Ειδική περίπτωση του Weighted Bipartite Matching (WBM):

$$\begin{array}{ll} \text{(PBM)} & \begin{array}{l} \text{maximize} \quad \sum_{e \in E} p(e) \cdot x(e) \\ \text{s.t. : } \quad \forall v \in V, \quad \sum_{e \in E: v \in e} x(e) = 1 \\ \quad \quad \quad \forall e \in E, \quad x(e) \in \{0, 1\} \end{array} \end{array}$$

Τέλεια Ταιριάσματα Σε Διμερή Γραφήματα

- **Perfect Bipartite Matchings (PBM)**: Για πλήρες διμερές (μη κατευθυνόμενο) γράφημα $G = (A \cup B, E = \{uv : u \in A, v \in B\})$ με βάρη στις ακμές $p : E \rightarrow \mathbb{R}$, ζητείται **τέλειο ταίριασμα** (κάθε κορυφή είναι τερματικό σημείο ακριβώς μιας ακμής του ταιριάσματος) ελάχιστου κόστους.
- Ισοδύναμο με το πρόβλημα **ανάθεσης n εργασιών σε n εργαζόμενους** – **Assignment Problem (IAP)**.
- Ειδική περίπτωση του Weighted Bipartite Matching (WBM):

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{e \in E} p(e) \cdot x(e) \\ \text{s.t. : } & \forall v \in V, \quad \sum_{e \in E: v \in e} x(e) = 1 \\ & \forall e \in E, \quad x(e) \geq 0 \end{array}$$

(PBM)

/* Από **total unimodularity** του M_G , αφού έχουμε **διμερές** μη κατευθυνόμενο γράφημα */

Ελάχιστα Καλύμματα Κορυφών Σε Διμερή Γραφήματα

ΕΙΣΟΔΟΣ: Διμερές μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V = A \cup B, E)$, με πίνακα πρόσπτωσης $M = M_G$. Μη αρνητικοί συντελεστές κόστους για επιλογή κορυφών $c : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

ΣΤΟΧΟΣ: Υποσύνολο κορυφών $U \subseteq V$ ελάχιστου κόστους, ώστε κάθε ακμή να έχει τουλάχιστον ένα άκρο στο U .

Ελάχιστα Καλύμματα Κορυφών Σε Διμερή Γραφήματα

ΕΙΣΟΔΟΣ: Διμερές μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V = A \cup B, E)$, με πίνακα πρόσπτωσης $M = M_G$. Μη αρνητικοί συντελεστές κόστους για επιλογή κορυφών $c : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

ΣΤΟΧΟΣ: Υποσύνολο κορυφών $U \subseteq V$ ελάχιστου κόστους, ώστε κάθε ακμή να έχει τουλάχιστον ένα άκρο στο U .

- Μοντελοποίηση ως ακέραιο ΓΠ: $y(v) \in \{0, 1\}, \forall v \in V$.

$$\begin{array}{ll} \text{(BVC)} & \begin{array}{l} \text{minimize} \quad \sum_{v \in V} c(v) \cdot y(v) \\ \text{s.t. : } \quad \forall uv \in E, \quad y(u) + y(v) \geq 1 \\ \quad \quad \quad \forall v \in V, \quad y(v) \in \{0, 1\} \end{array} \end{array}$$

$$\equiv \text{minimize } \left\{ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{y} : M' \cdot \mathbf{y} \geq \mathbf{1}; \mathbf{y} \in \{0, 1\}^{|V|} \right\}$$

Ελάχιστα Καλύμματα Κορυφών Σε Διμερή Γραφήματα

ΕΙΣΟΔΟΣ: Διμερές μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V = A \cup B, E)$, με πίνακα πρόσπτωσης $M = M_G$. Μη αρνητικοί συντελεστές κόστους για επιλογή κορυφών $c : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

ΣΤΟΧΟΣ: Υποσύνολο κορυφών $U \subseteq V$ ελάχιστου κόστους, ώστε κάθε ακμή να έχει τουλάχιστον ένα άκρο στο U .

- Μοντελοποίηση ως ακέραιο ΓΠ: $y(v) \in \{0, 1\}, \forall v \in V$.

$$\begin{array}{ll} \text{(BVC)} & \begin{array}{l} \text{minimize} \quad \sum_{v \in V} c(v) \cdot y(v) \\ \text{s.t. : } \quad \forall uv \in E, \quad y(u) + y(v) \geq 1 \\ \quad \quad \quad \forall v \in V, \quad y(v) \in \{0, 1\} \end{array} \end{array}$$

$$\equiv \text{minimize } \{ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{y} : M' \cdot \mathbf{y} \geq \mathbf{1}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \}$$

/* από total unimodularity, λόγω διμερούς μη κατευθυνόμενου γραφήματος */

Μέγιστη Ροή – Maximum Flow (MF)

ΕΙΣΟΔΟΣ:

- ▶ Δίκτυο (κατευθυνόμενο γράφημα) $G = (V, A)$.
- ▶ **Κορυφή – πηγή** $o \in V$, και **κορυφή – καταβόθρα** $d \in V$.

ΣΤΟΧΟΣ: Εύρεση **εφικτής ροής** $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, όπου όλοι οι κόμβοι εκτός των o, d είναι κόμβοι μεταγωγής, με τη μέγιστη δυνατή ροή να μεταφέρεται από την πηγή o στην καταβόθρα d .

Μέγιστη Ροή – Maximum Flow (MF)

ΕΙΣΟΔΟΣ:

- ▶ Δίκτυο (κατευθυνόμενο γράφημα) $G = (V, A)$.
- ▶ **Κορυφή – πηγή** $o \in V$, και **κορυφή – καταβόθρα** $d \in V$.

ΣΤΟΧΟΣ: Εύρεση **εφικτής ροής** $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, όπου όλοι οι κόμβοι εκτός των o, d είναι κόμβοι μεταγωγής, με τη μέγιστη δυνατή ροή να μεταφέρεται από την πηγή o στην καταβόθρα d .

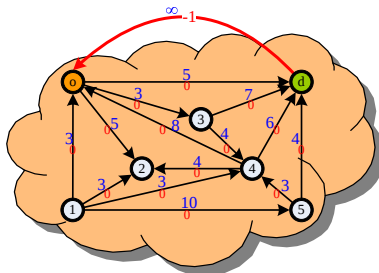
- Μοντελοποίηση ως ακέραιο ΓΠ:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z \\ \text{s.t.} & \sum_{ik \in A} f_{ik} - \sum_{ki \in A} f_{ki} = 0, \quad i \in V \setminus \{o, d\} \\ & \sum_{ok \in A} f_{ok} - \sum_{ko \in A} f_{ko} = z, \\ & \sum_{dk \in A} f_{dk} - \sum_{kd \in A} f_{kd} = -z, \\ & f_{ij} \leq u_{ij} \quad ij \in A \\ & f_{ij} \in \mathbb{N}, \quad ij \in A \end{array}$$

(MF)

Μέγιστη Ροή – Maximum Flow (MF)

(MF) $\Rightarrow$ (MCF)



(MF)

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && (-1) \cdot f_{do} \\
 &\text{s.t.} && \sum_{ik \in A} f_{ik} - \sum_{ki \in A} f_{ki} = 0, \quad i \in V \setminus \{o, d\} \\
 & && \sum_{ok \in A} f_{ok} - \sum_{ko \in A} f_{ko} - f_{do} = 0, \\
 & && f_{do} + \sum_{dk \in A} f_{dk} - \sum_{kd \in A} f_{kd} = 0, \\
 & && f_{ij} \leq u_{ij} \quad ij \in A \\
 & && f_{do}, f_{ij} \in \mathbb{N}, \quad ij \in A
 \end{aligned}$$

Ελάχιστου Μήκους Μονοπάτι – Shortest Path (SP)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$ με **μη αρνητικά** μήκη $d : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ στις ακμές. Ζεύγος κόμβων $(s, t) \in V \times V$.

ΣΤΟΧΟΣ: Εύρεση (αν υπάρχει) διαδρομής από το s στο t , με ελάχιστο συνολικό μήκος.

Ελάχιστου Μήκους Μονοπάτι – Shortest Path (SP)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$ με **μη αρνητικά** μήκη $d : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ στις ακμές. Ζεύγος κόμβων $(s, t) \in V \times V$.

ΣΤΟΧΟΣ: Εύρεση (αν υπάρχει) διαδρομής από το s στο t , με ελάχιστο συνολικό μήκος.

- $(SP) \Rightarrow (MCF)$:

$$\begin{array}{ll} \text{(SP)} & \begin{array}{l} \min. \quad \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot f_{ij} \\ \text{s.t. :} \quad \sum_{ik \in A} f_{ik} - \sum_{ki \in A} f_{ki} = 0, \quad i \in V \setminus \{s, t\} \\ \sum_{sk \in A} f_{sk} - \sum_{ks \in A} f_{ks} = 1, \\ \sum_{tk \in A} f_{tk} - \sum_{kt \in A} f_{kt} = -1, \\ f_{ij} \in \{0, 1\}, \quad ij \in A \end{array} \end{array}$$

Ελάχιστου Μήκους Μονοπάτι – Shortest Path (SP)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$ με **μη αρνητικά** μήκη $d : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ στις ακμές. Ζεύγος κόμβων $(s, t) \in V \times V$.

ΣΤΟΧΟΣ: Εύρεση (αν υπάρχει) διαδρομής από το s στο t , με ελάχιστο συνολικό μήκος.

• $(SP) \Rightarrow (MCF)$:

$$\begin{array}{ll} \text{(SP)} & \begin{array}{l} \min. \quad \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot f_{ij} \\ \text{s.t. :} \quad \sum_{ik \in A} f_{ik} - \sum_{ki \in A} f_{ki} = 0, \quad i \in V \setminus \{s, t\} \\ \quad \sum_{sk \in A} f_{sk} - \sum_{ks \in A} f_{ks} = 1, \\ \quad \sum_{tk \in A} f_{tk} - \sum_{kt \in A} f_{kt} = -1, \\ \quad \quad \quad 0 \leq f_{ij} \leq 1 \quad ij \in A \end{array} \end{array}$$

/* Από **total unimodularity**, λόγω κατευθυνόμενου γραφήματος */

Δένδρο Ελάχιστων Μονοπατιών από Ρίζα – Single Source Shortest Paths (SSSP)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$ με **μη αρνητικά** μήκη $d : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ στις ακμές. Ρίζα $s \in V$.

ΣΤΟΧΟΣ: Εύρεση (αν υπάρχει) διαδρομών από το s προς όλους τους άλλους κόμβους, με ελάχιστο συνολικό μήκος.

Δένδρο Ελάχιστων Μονοπατιών από Ρίζα – Single Source Shortest Paths (SSSP)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$ με **μη αρνητικά** μήκη $d : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ στις ακμές. Ρίζα $s \in V$.

ΣΤΟΧΟΣ: Εύρεση (αν υπάρχει) διαδρομών από το s προς όλους τους άλλους κόμβους, με ελάχιστο συνολικό μήκος.

- $(SSSP) \Rightarrow (MCF)$:

$$\begin{array}{ll} \text{(SSSP)} & \begin{array}{l} \min. \quad \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot f_{ij} \\ \text{s.t. :} \quad \sum_{ik \in A} f_{ik} - \sum_{ki \in A} f_{ki} = -1, \quad i \in V \setminus \{s\} \\ \quad \quad \sum_{sk \in A} f_{sk} - \sum_{ks \in A} f_{ks} = n - 1, \\ \quad \quad \quad f_{ij} \in \{0, 1\}, \quad ij \in A \end{array} \end{array}$$

Δένδρο Ελάχιστων Μονοπατιών από Ρίζα – Single Source Shortest Paths (SSSP)

ΕΙΣΟΔΟΣ: Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$ με **μη αρνητικά** μήκη $d : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ στις ακμές. Ρίζα $s \in V$.

ΣΤΟΧΟΣ: Εύρεση (αν υπάρχει) διαδρομών από το s προς όλους τους άλλους κόμβους, με ελάχιστο συνολικό μήκος.

- $(SSSP) \Rightarrow (MCF)$:

$$\begin{array}{ll} \text{(SSSP)} & \begin{array}{l} \min. \quad \sum_{ij \in A} d_{ij} \cdot f_{ij} \\ \text{s.t. :} \quad \sum_{ik \in A} f_{ik} - \sum_{ki \in A} f_{ki} = -1, \quad i \in V \setminus \{s\} \\ \quad \quad \sum_{sk \in A} f_{sk} - \sum_{ks \in A} f_{ks} = n - 1, \\ \quad \quad \quad 0 \leq f_{ij} \leq 1 \quad ij \in A \end{array} \end{array}$$

/* Από **total unimodularity**, λόγω κατευθυνόμενου γραφήματος */

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!

Ερωτήσεις / Σχόλια ;