Θέματα Αλγορίθμων

Αλγόριθμοι και Εφαρμογές στον Πραγματικό Κόσμο

CSE.UOI : Μεταπτυχιακό Μάθημα

8η Ενότητα: Εισαγωγή στον Γραμμικό Προγραμματισμό

Σπύρος Κοντογιάννης

kontog@cse.uoi.gr

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τετάρτη, 3 Μαΐου 2017

Τι είναι Γραμμικός Προγραμματισμός

... παραδείγματα, ορισμοί και ισοδυναμίες...

Γιατί Βελτιστοποίηση;

Leonhard Euler: *«Nothing happens in the Universe that does not have a sense of either a certain **maximum** or **minimum**».*

Γιατί Βελτιστοποίηση;

Leonhard Euler: *«Nothing happens in the Universe that does not have a sense of either a certain* ***maximum*** *or* ***minimum****»*.

- **Σύστημα:** Σύνολο οντοτήτων που αλληλεπιδρούν σύμφωνα με συγκεκριμένους *κανόνες*, για την επίτευξη κάποιου *στόχου* (πχ, ελαχιστοποίηση κόστους / μεγιστοποίηση κοινωνικής ωφέλειας, κ.λπ.).

Γιατί Βελτιστοποίηση;

Leonhard Euler: *«Nothing happens in the Universe that does not have a sense of either a certain **maximum** or **minimum**»*.

- **Σύστημα:** Σύνολο οντοτήτων που αλληλεπιδρούν σύμφωνα με συγκεκριμένους *κανόνες*, για την επίτευξη κάποιου *στόχου* (πχ, ελαχιστοποίηση κόστους / μεγιστοποίηση κοινωνικής ωφέλειας, κ.λπ.).
- **Μοντέλο:** Περιγράφει κάποιο σύστημα (πχ, *χάρτης* που απεικονίζει οδικό δίκτυο, ένα *στοχαστικό μοντέλο* που μελετά την εξέλιξη της οικονομίας μιας χώρας, κ.λπ.) με σκοπό την **πρόβλεψη** ή τον υπολογισμό μιας **βέλτιστης λύσης** (πχ, εξοικονόμηση ενέργειας, μεγιστοποίηση κέρδους, κ.λπ.) ως προς το σύστημα.

Γιατί Βελτιστοποίηση;

Leonhard Euler: *«Nothing happens in the Universe that does not have a sense of either a certain **maximum** or **minimum**»*.

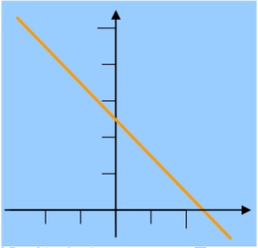
- **Σύστημα:** Σύνολο οντοτήτων που αλληλεπιδρούν σύμφωνα με συγκεκριμένους *κανόνες*, για την επίτευξη κάποιου *στόχου* (πχ, ελαχιστοποίηση κόστους / μεγιστοποίηση κοινωνικής ωφέλειας, κ.λπ.).
- **Μοντέλο:** Περιγράφει κάποιο σύστημα (πχ, *χάρτης* που απεικονίζει οδικό δίκτυο, ένα *στοχαστικό μοντέλο* που μελετά την εξέλιξη της οικονομίας μιας χώρας, κ.λπ.) με σκοπό την **πρόβλεψη** ή τον υπολογισμό μιας **βέλτιστης λύσης** (πχ, εξοικονόμηση ενέργειας, μεγιστοποίηση κέρδους, κ.λπ.) ως προς το σύστημα.

Trade-off: *Ακρίβεια* του μοντέλου αλλά και δυνατότητα *αποδοτικής επίλυσης* (computational tractability).

Τι σημαίνει «Βελτιστοποίηση»...

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποια απάντηση θα επιστρέψει καθένας από τους ακόλουθους **τελεστές ελαχιστοποίησης**;

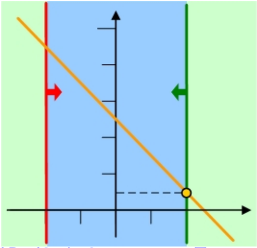
- $\min\{5-2x : x \in \mathbb{R}\} \equiv \min\{y : y = 5-2x;\ \ x,y \in \mathbb{R}\}$



Τι σημαίνει «Βελτιστοποίηση»...

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποια απάντηση θα επιστρέψει καθένας από τους ακόλουθους **τελεστές ελαχιστοποίησης**;

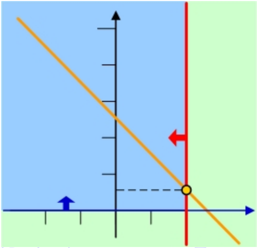
- $\min\{5 - 2x : x \in \mathbb{R}\} \equiv \min\{y : y = 5 - 2x;\ \ x,y \in \mathbb{R}\}$
- $\min\{5 - 2x : -2 \leq x \leq 2\} \equiv \min\{y : y = 5 - 2x,\ \ -2 \leq x \leq 2,\ \ y \in \mathbb{R}\}$



Τι σημαίνει «Βελτιστοποίηση»...

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποια απάντηση θα επιστρέψει καθένας από τους ακόλουθους **τελεστές ελαχιστοποίησης**;

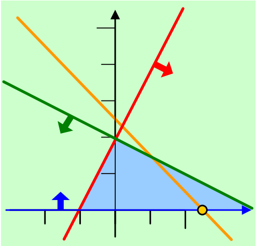
- $\min\{5-2x : x \in \mathbb{R}\} \equiv \min\{y : y = 5-2x;\ \ x,y \in \mathbb{R}\}$
- $\min\{5-2x : -2 \leq x \leq 2\} \equiv \min\{y : y = 5-2x,\ \ -2 \leq x \leq 2,\ \ y \in \mathbb{R}\}$
- $\min\{y = 5-2x :\ \ x \leq 2,\ \ y \geq 0\}$



Τι σημαίνει «Βελτιστοποίηση»...

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποια απάντηση θα επιστρέψει καθένας από τους ακόλουθους **τελεστές ελαχιστοποίησης**;

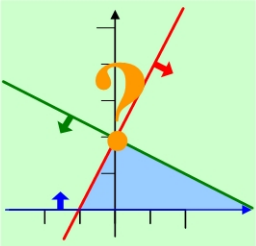
- $\min\{5-2x : x \in \mathbb{R}\} \equiv \min\{y : y = 5-2x;\ \ x,y \in \mathbb{R}\}$
- $\min\{5-2x : -2 \le x \le 2\} \equiv \min\{y : y = 5-2x,\ \ -2 \le x \le 2,\ \ y \in \mathbb{R}\}$
- $\min\{y = 5-2x :\ \ x \le 2,\ \ y \ge 0\}$
- $\min\{y = 5-2x : y \le 2+2x,\ \ y \ge 0,\ \ 2y+x \le 4\}$



Τι σημαίνει «Βελτιστοποίηση»...

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποια απάντηση θα επιστρέψει καθένας από τους ακόλουθους **τελεστές ελαχιστοποίησης**;

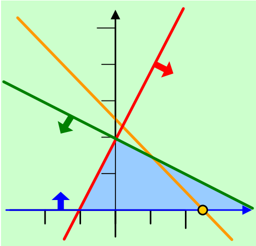
- $\min\{5-2x : x \in \mathbb{R}\} \equiv \min\{y : y = 5-2x;\ \ x,y \in \mathbb{R}\}$
- $\min\{5-2x : -2 \leq x \leq 2\} \equiv \min\{y : y = 5-2x,\ \ -2 \leq x \leq 2,\ \ y \in \mathbb{R}\}$
- $\min\{y = 5-2x :\ \ x \leq 2,\ \ y \geq 0\}$
- $\min\{y = 5-2x : y \leq 2+2x,\ \ y \geq 0,\ \ 2y+x \leq 4\}$
- $\min\{y+2x : y \leq 2+2x,\ \ y \geq 0,\ \ 2y+x \leq 4\}$



Τι σημαίνει «Βελτιστοποίηση»...

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποια απάντηση θα επιστρέψει καθένας από τους ακόλουθους **τελεστές ελαχιστοποίησης**;

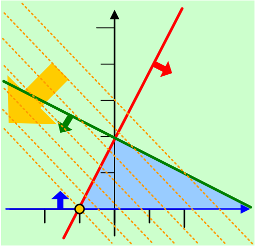
- $\min\{5-2x : x \in \mathbb{R}\} \equiv \min\{y : y = 5-2x;\ \ x,y \in \mathbb{R}\}$
- $\min\{5-2x : -2 \le x \le 2\} \equiv \min\{y : y = 5-2x,\ \ -2 \le x \le 2,\ \ y \in \mathbb{R}\}$
- $\min\{y = 5-2x :\ \ x \le 2,\ \ y \ge 0\}$
- $\min\{y = 5-2x : y \le 2+2x,\ \ y \ge 0,\ \ 2y + x \le 4\}$
- $\min\{y + 2x : y \le 2+2x,\ \ y \ge 0,\ \ 2y + x \le 4\}$



Τι σημαίνει «Βελτιστοποίηση»...

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποια απάντηση θα επιστρέψει καθένας από τους ακόλουθους **τελεστές ελαχιστοποίησης**;

- $\min\{5-2x : x \in \mathbb{R}\} \equiv \min\{y : y = 5-2x;\ \ x,y \in \mathbb{R}\}$
- $\min\{5-2x : -2 \le x \le 2\} \equiv \min\{y : y = 5-2x,\ \ -2 \le x \le 2,\ \ y \in \mathbb{R}\}$
- $\min\{y = 5-2x :\ \ x \le 2,\ \ y \ge 0\}$
- $\min\{y = 5-2x : y \le 2+2x,\ \ y \ge 0,\ \ 2y+x \le 4\}$
- $\min\{y+2x : y \le 2+2x,\ \ y \ge 0,\ \ 2y+x \le 4\}$



Τι σημαίνει «Βελτιστοποίηση»...

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποια απάντηση θα επιστρέψει καθένας από τους ακόλουθους **τελεστές ελαχιστοποίησης**;

- $\min\{5-2x : x \in \mathbb{R}\} \equiv \min\{y : y = 5-2x;\ \ x,y \in \mathbb{R}\}$
- $\min\{5-2x : -2 \le x \le 2\} \equiv \min\{y : y = 5-2x,\ \ -2 \le x \le 2,\ \ y \in \mathbb{R}\}$
- $\min\{y = 5-2x :\ \ x \le 2,\ \ y \ge 0\}$
- $\min\{y = 5-2x : y \le 2+2x,\ \ y \ge 0,\ \ 2y + x \le 4\}$
- $\min\{y + 2x : y \le 2+2x,\ \ y \ge 0,\ \ 2y + x \le 4\}$
- $\min\{5y - 2x + 3z : -2x + y \le 2,\ \ 5x - y + z \le 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0\}$

Μαθηματικός Προγραμματισμός;

Μελέτη στρατηγικών επιλογής τιμών σε ένα σύστημα **διαπλεκόμενων παραμέτρων** (**μεταβλητές απόφασης**) που **μοντελοποιεί** κάποιο πρόβλημα λήψης αποφάσεων, με στόχο την καλύτερη δυνατή τιμή για μια **συνάρτηση – στόχο** (χαρακτηρίζει την **ποιότητα** της παρεχόμενης λύσης).

Μαθηματικός Προγραμματισμός;

Μελέτη στρατηγικών επιλογής τιμών σε ένα σύστημα **διαπλεκόμενων παραμέτρων** (**μεταβλητές απόφασης**) που **μοντελοποιεί** κάποιο πρόβλημα λήψης αποφάσεων, με στόχο την καλύτερη δυνατή τιμή για μια **συνάρτηση – στόχο** (χαρακτηρίζει την **ποιότητα** της παρεχόμενης λύσης).

Κατηγορίες Μαθηματικού Προγραμματισμού:

- **Γραμμικός Προγραμματισμός:** Βελτιστοποίηση (της τιμής) **γραμμικών** συναρτήσεων, δεδομένων περιορισμών που εκφράζονται ως **γραμμικές** εξισώσεις / ανισότητες.

Μαθηματικός Προγραμματισμός;

Μελέτη στρατηγικών επιλογής τιμών σε ένα σύστημα **διαπλεκόμενων παραμέτρων** (**μεταβλητές απόφασης**) που **μοντελοποιεί** κάποιο πρόβλημα λήψης αποφάσεων, με στόχο την καλύτερη δυνατή τιμή για μια **συνάρτηση – στόχο** (χαρακτηρίζει την **ποιότητα** της παρεχόμενης λύσης).

Κατηγορίες Μαθηματικού Προγραμματισμού:

- **Γραμμικός Προγραμματισμός:** Βελτιστοποίηση (της τιμής) **γραμμικών** συναρτήσεων, δεδομένων περιορισμών που εκφράζονται ως **γραμμικές** εξισώσεις / ανισότητες.
- **Μη Γραμμικός Προγραμματισμός:** Βελτιστοποίηση (της τιμής) **μη γραμμικών** συναρτήσεων.
  - Δίχως περιορισμούς.
  - Με περιορισμούς που εκφράζονται ως (συνήθως **γραμμικές**) εξισώσεις / ανισότητες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Πρόβλημα της Δίαιτας

- Ο Κώστας θέλει *να* ακολουθήσει μια υγιεινή διατροφή αλλά έχει μόνο ένα πεπερασμένο εισόδημα.
- Θέλει *να* ξοδέψει όσο το δυνατόν **λιγότερα χρήματα**, έτσι όμως ώστε *να* ικανοποιούνται οι διατροφικές του **ανάγκες** ανά ημέρα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Πρόβλημα της Δίαιτας

ΒΗΜΑ 1: Καταγραφή δεδομένων

Είδος	Δοσολογία	Θερμίδες (kcal)	Πρωτεΐνη (gr)	Ασβέστιο (mgr)	Τιμή (ευρώ)
Δημητριακά	$28gr$	110	4	2	0.3
Κοτόπουλο	$100gr$	205	32	12	2.4
Αβγά	2	160	13	54	1.3
Γάλα	$237ml$	160	8	285	0.9
Γλυκό	$170gr$	420	4	22	2.0
Χοιρινό	260	260	14	80	1.9

- Ο διαιτολόγος δίνει στον Κώστα το μητρώο δεδομένων, και τις ποσότητες για την κατάρτιση μιας υγιεινής ημερήσιας διατροφής. Πρέπει να λαμβάνει *τουλάχιστον*:
  - 2000 Kcals.
  - $55gr$ πρωτεΐνης.
  - $800mgr$ ασβέστιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Πρόβλημα της Δίαιτας

ΒΗΜΑ 2: Μεταβλητές (Λήψης) Απόφασης

Είδος	Δοσολογία	Θερμίδες (kcal)	Πρωτεΐνη (gr)	Ασβέστιο (mgr)	Τιμή (ευρώ)
Δημητριακά	$28gr$	110	4	2	0.3
Κοτόπουλο	$100gr$	205	32	12	2.4
Αβγά	2	160	13	54	1.3
Γάλα	$237ml$	160	8	285	0.9
Γλυκό	$170gr$	420	4	22	2.0
Χοιρινό	260	260	14	80	1.9

- Έστω ότι ο Κώστας λαμβάνει ημερησίως:
  - x_1 «μονάδες» δημητριακά.
  - x_2 «μονάδες» κοτόπουλο.
  - x_3 «μονάδες» αβγά.
  - x_4 «μονάδες» γάλα.
  - x_5 «μονάδες» γλυκό.
  - x_6 «μονάδες» χοιρινό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Πρόβλημα της Δίαιτας

ΒΗΜΑ 2: Μεταβλητές (Λήψης) Απόφασης

Είδος	Δοσολογία	Θερμίδες (kcal)	Πρωτεΐνη (gr)	Ασβέστιο (mgr)	Τιμή (ευρώ)
Δημητριακά	$28gr$	110	4	2	0.3
Κοτόπουλο	$100gr$	205	32	12	2.4
Αβγά	2	160	13	54	1.3
Γάλα	$237ml$	160	8	285	0.9
Γλυκό	$170gr$	420	4	22	2.0
Χοιρινό	260	260	14	80	1.9

- Έστω ότι ο Κώστας λαμβάνει ημερησίως:
  - x_1 «μονάδες» δημητριακά.
  - x_2 «μονάδες» κοτόπουλο.
  - x_3 «μονάδες» αβγά.
  - x_4 «μονάδες» γάλα.
  - x_5 «μονάδες» γλυκό.
  - x_6 «μονάδες» χοιρινό.

- Περιορισμοί;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Πρόβλημα της Δίαιτας

ΒΗΜΑ 3: Αποτύπωση (μη τετριμμένων) Περιορισμών και Στόχου

Είδος	Δοσολογία	Θερμίδες (kcal)	Πρωτεΐνη (gr)	Ασβέστιο (mgr)	Τιμή (ευρώ)
Δημητριακά	$28gr$	$110x_1$	$4x_1$	$2x_1$	0.3
Κοτόπουλο	$100gr$	$+205x_2$	$+32x_2$	$+12x_2$	2.4
Αβγά	2	$+160x_3$	$+13x_3$	$+54x_3$	1.3
Γάλα	$237ml$	$+160x_4$	$+8x_4$	$+285x_4$	0.9
Γλυκό	$170gr$	$+420x_5$	$+4x_5$	$+22x_5$	0.2
Χοιρινό	260	$+260x_6$	$+14x_6$	$+80x_6$	1.9
Περιορισμοί		≥ 2000	≥ 55	≥ 800	

- Έστω ότι ο Κώστας λαμβάνει ημερησίως:
  - x_1 «μονάδες» δημητριακά.
  - x_2 «μονάδες» κοτόπουλο.
  - x_3 «μονάδες» αβγά.
  - x_4 «μονάδες» γάλα.
  - x_5 «μονάδες» γλυκό.
  - x_6 «μονάδες» χοιρινό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Πρόβλημα της Δίαιτας

ΒΗΜΑ 3: Αποτύπωση (μη τετριμμένων) Περιορισμών και Στόχου

Είδος	Δοσολογία	Θερμίδες (kcal)	Πρωτεΐνη (gr)	Ασβέστιο (mgr)	Τιμή (ευρώ)
Δημητριακά	28gr	$110x_1$	$4x_1$	$2x_1$	0.3
Κοτόπουλο	100gr	$+205x_2$	$+32x_2$	$+12x_2$	2.4
Αβγά	2	$+160x_3$	$+13x_3$	$+54x_3$	1.3
Γάλα	237ml	$+160x_4$	$+8x_4$	$+285x_4$	0.9
Γλυκό	170gr	$+420x_5$	$+4x_5$	$+22x_5$	0.2
Χοιρινό	260	$+260x_6$	$+14x_6$	$+80x_6$	1.9
Περιορισμοί		≥ 2000	≥ 55	≥ 800	

- Έστω ότι ο Κώστας λαμβάνει ημερησίως:
  - x_1 «μονάδες» δημητριακά.
  - x_2 «μονάδες» κοτόπουλο.
  - x_3 «μονάδες» αβγά.
  - x_4 «μονάδες» γάλα.
  - x_5 «μονάδες» γλυκό.
  - x_6 «μονάδες» χοιρινό.
- Στόχος;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Πρόβλημα της Δίαιτας

ΒΗΜΑ 3: Αποτύπωση (μη τετριμμένων) Περιορισμών και Στόχου

Είδος	Δοσολογία	Θερμίδες (kcal)	Πρωτεΐνη (gr)	Ασβέστιο (mgr)	Τιμή (ευρώ)
Δημητριακά	$28gr$	$110x_1$	$4x_1$	$2x_1$	$0.3x_1$
Κοτόπουλο	$100gr$	$+205x_2$	$+32x_2$	$+12x_2$	$+2.4x_2$
Αβγά	2	$+160x_3$	$+13x_3$	$+54x_3$	$+1.3x_3$
Γάλα	$237ml$	$+160x_4$	$+8x_4$	$+285x_4$	$+0.9x_4$
Γλυκό	$170gr$	$+420x_5$	$+4x_5$	$+22x_5$	$+0.2x_5$
Χοιρινό	260	$+260x_6$	$+14x_6$	$+80x_6$	$+1.9x_6$
Περιορισμοί		≥ 2000	≥ 55	≥ 800	

- Έστω ότι ο Κώστας λαμβάνει ημερησίως:
  - x_1 «μονάδες» δημητριακά.
  - x_2 «μονάδες» κοτόπουλο.
  - x_3 «μονάδες» αβγά.
  - x_4 «μονάδες» γάλα.
  - x_5 «μονάδες» γλυκό.
  - x_6 «μονάδες» χοιρινό.
- Στόχος; $\text{min.}\{0.3x_1 + 2.4x_2 + 1.3x_3 + 0.9x_4 + 0.2x_5 + 1.9x_6\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Πρόβλημα της Δίαιτας

ΒΗΜΑ 4: Μοντελοποίηση

minimize $0.3x_1 \quad +2.4x_2 \quad +1.3x_3 \quad +0.9x_4 \quad +2x_5 \quad +1.9x_6$

συνάρτηση – στόχος

Subject to :

μη τετριμμένοι περιορισμοί

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
110x_1 & +205x_2 & +160x_3 & +160x_4 & +420x_5 & +260x_6 & \geq 2000 \\
4x_1 & +32x_2 & +13x_3 & +8x_4 & +4x_5 & +14x_6 & \geq 55 \\
2x_1 & +12x_2 & +54x_3 & +285x_4 & +22x_5 & +80x_6 & \geq 800
\end{array}
$$

περιορισμοί προσήμου

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Πρόβλημα της Δίαιτας

ΒΗΜΑ 4: Μοντελοποίηση ⇒ Επίλυση

minimize $0.3x_1 + 2.4x_2 + 1.3x_3 + 0.9x_4 + 2x_5 + 1.9x_6$

συνάρτηση – στόχος

Subject to :

μη τετριμμένοι περιορισμοί

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
110x_1 & +205x_2 & +160x_3 & +160x_4 & +420x_5 & +260x_6 & \geq 2000 \\
4x_1 & +32x_2 & +13x_3 & +8x_4 & +4x_5 & +14x_6 & \geq 55 \\
2x_1 & +12x_2 & +54x_3 & +285x_4 & +22x_5 & +80x_6 & \geq 800
\end{array}
$$

περιορισμοί προσήμου

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0$$

Επόμενα Βήματα:

1. Υπολογισμός **βέλτιστης** λύσης (μοντέλου):
   $x_1 = 14.24; \;\; x_2 = x_3 = 0; \;\; x_4 = 2.707; \;\; x_5 = x_6 = 0.$
2. **Κόστος** Βέλτιστης Λύσης: 6.7083 ευρώ ανά ημέρα.

minimize $0.3x_1 + 2.4x_2 + 1.3x_3 + 0.9x_4 + 2x_5 + 1.9x_6$

συνάρτηση – στόχος

Subject to :

μη τετριμμένοι περιορισμοί

$$
\begin{aligned}
110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 &\geq 2000\\
4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 &\geq 55\\
2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 &\geq 800
\end{aligned}
$$

περιορισμοί προσήμου

$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad x_3 \geq 0,\quad x_4 \geq 0,\quad x_5 \geq 0,\quad x_6 \geq 0$$

Επόμενα Βήματα:

1. Υπολογισμός **βέλτιστης** λύσης (μοντέλου):
   $x_1 = 14.24;\ x_2 = x_3 = 0;\ x_4 = 2.707;\ x_5 = x_6 = 0.$
2. **Κόστος** Βέλτιστης Λύσης: 6.7083 ευρώ ανά ημέρα.
3. *Αξιολόγηση* λύσης και *επαναπροσδιορισμός* μοντέλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

- Μια φάρμα παράγει 22 λίτρα γάλα ανά εβδομάδα. Ο αγρότης παράγει από το γάλα παγωτό και βούτυρο. Κάθε κιλό βουτύρου απαιτεί 2 λίτρα γάλα. Κάθε κιλό παγωτού απαιτεί 3 λίτρα γάλα:
- Το ψυγείο του χωρά απεριόριστη ποσότητα βουτύρου, αλλά το πολύ 6 κιλά παγωτού:
- Ο αγρότης εργάζεται το πολύ 6 ώρες ανά εβδομάδα. Απαιτείται μια ώρα εργασίας για την παραγωγή 4 κιλών παγωτού, ή 1 κιλού βουτύρου:
- Το παγωτό πωλείται προς 5 ευρώ το κιλό, ενώ το βούτυρο προς 4 ευρώ το κιλό. Ποια η αναλογία παγωτού / βουτύρου που μεγιστοποιεί τον τζίρο του αγρότη;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

- Μια φάρμα παράγει 22 λίτρα γάλα ανά εβδομάδα. Ο αγρότης παράγει από το γάλα παγωτό και βούτυρο. Κάθε κιλό βουτύρου απαιτεί 2 λίτρα γάλα. Κάθε κιλό παγωτού απαιτεί 3 λίτρα γάλα: $\boxed{2x_b + 3x_i \leq 22}$
- Το ψυγείο του χωρά απεριόριστη ποσότητα βουτύρου, αλλά το πολύ 6 κιλά παγωτού:
- Ο αγρότης εργάζεται το πολύ 6 ώρες ανά εβδομάδα. Απαιτείται μια ώρα εργασίας για την παραγωγή 4 κιλών παγωτού, ή 1 κιλού βουτύρου:
- Το παγωτό πωλείται προς 5 ευρώ το κιλό, ενώ το βούτυρο προς 4 ευρώ το κιλό. Ποια η αναλογία παγωτού / βουτύρου που μεγιστοποιεί τον τζίρο του αγρότη;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

- Μια φάρμα παράγει 22 λίτρα γάλα ανά εβδομάδα. Ο αγρότης παράγει από το γάλα παγωτό και βούτυρο. Κάθε κιλό βουτύρου απαιτεί 2 λίτρα γάλα. Κάθε κιλό παγωτού απαιτεί 3 λίτρα γάλα: $\boxed{2x_b + 3x_i \leq 22}$
- Το ψυγείο του χωρά απεριόριστη ποσότητα βουτύρου, αλλά το πολύ 6 κιλά παγωτού: $\boxed{x_i \leq 6}$
- Ο αγρότης εργάζεται το πολύ 6 ώρες ανά εβδομάδα. Απαιτείται μια ώρα εργασίας για την παραγωγή 4 κιλών παγωτού, ή 1 κιλού βουτύρου:
- Το παγωτό πωλείται προς 5 ευρώ το κιλό, ενώ το βούτυρο προς 4 ευρώ το κιλό. Ποια η αναλογία παγωτού / βουτύρου που μεγιστοποιεί τον τζίρο του αγρότη;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

- Μια φάρμα παράγει 22 λίτρα γάλα ανά εβδομάδα. Ο αγρότης παράγει από το γάλα παγωτό και βούτυρο. Κάθε κιλό βουτύρου απαιτεί 2 λίτρα γάλα. Κάθε κιλό παγωτού απαιτεί 3 λίτρα γάλα: $\boxed{2x_b + 3x_i \leq 22}$

- Το ψυγείο του χωρά απεριόριστη ποσότητα βουτύρου, αλλά το πολύ 6 κιλά παγωτού: $\boxed{x_i \leq 6}$

- Ο αγρότης εργάζεται το πολύ 6 ώρες ανά εβδομάδα. Απαιτείται μια ώρα εργασίας για την παραγωγή 4 κιλών παγωτού, ή 1 κιλού βουτύρου: $\boxed{x_b + 0.25x_i \leq 6}$

- Το παγωτό πωλείται προς 5 ευρώ το κιλό, ενώ το βούτυρο προς 4 ευρώ το κιλό. Ποια η αναλογία παγωτού / βουτύρου που μεγιστοποιεί τον τζίρο του αγρότη;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

- Μια φάρμα παράγει 22 λίτρα γάλα ανά εβδομάδα. Ο αγρότης παράγει από το γάλα παγωτό και βούτυρο. Κάθε κιλό βουτύρου απαιτεί 2 λίτρα γάλα. Κάθε κιλό παγωτού απαιτεί 3 λίτρα γάλα: $\boxed{2x_b + 3x_i \leq 22}$

- Το ψυγείο του χωρά απεριόριστη ποσότητα βουτύρου, αλλά το πολύ 6 κιλά παγωτού: $\boxed{x_i \leq 6}$

- Ο αγρότης εργάζεται το πολύ 6 ώρες ανά εβδομάδα. Απαιτείται μια ώρα εργασίας για την παραγωγή 4 κιλών παγωτού, ή 1 κιλού βουτύρου: $\boxed{x_b + 0.25x_i \leq 6}$

- Το παγωτό πωλείται προς 5 ευρώ το κιλό, ενώ το βούτυρο προς 4 ευρώ το κιλό. Ποια η αναλογία παγωτού / βουτύρου που μεγιστοποιεί τον τζίρο του αγρότη; $\boxed{\text{max. } 4x_b + 5x_i}$

$$
\begin{array}{lrrl}
\textbf{maximize} & 4x_b & +5x_i & \\
\text{subject to :} & 2x_b & +3x_i & \leq 22 \\
 & x_b & +0.25x_i & \leq 6 \\
 & & x_i & \leq 6 \\
 & x_b \geq 0 & x_i \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrl}
\textbf{maximize} & 4x_b & +5x_i & \\
\text{subject to :} & 2x_b & +3x_i & \leq 22 \\
 & x_b & +0.25x_i & \leq 6 \\
 & & x_i & \leq 6 \\
 & x_b \geq 0 & x_i \geq 0 &
\end{array}
$$

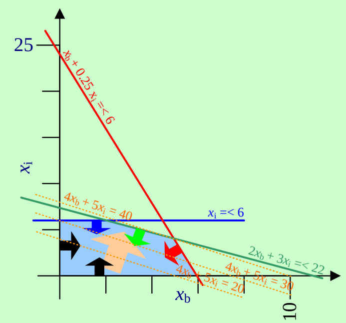
- **Συμπαγείς Ευθείες** (υπερεπίπεδα): Οριοθετούν το χώρο εφικτών λύσεων (σκιασμένη περιοχή).
- **Ισοσταθμικές (διακεκομμένες) Ευθείες**: Σημεία που εξασφαλίζουν συγκεκριμένες τιμές συνάρτησης – στόχου (τζίρος).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

Μοντελοποίηση Προβλήματος κι Επίλυση

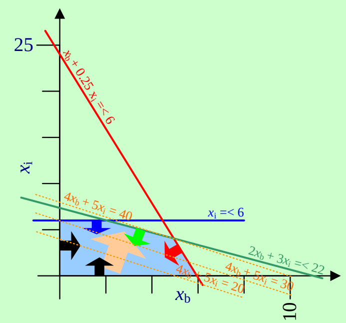
$$
\begin{array}{lrrl}
\textbf{maximize} & 4x_b & +5x_i & \\
 & & & \\
\text{subject to :} & 2x_b & +3x_i & \leq 22 \\
 & x_b & +0.25x_i & \leq 6 \\
 & & x_i & \leq 6 \\
 & & & \\
 & x_b \geq 0 & x_i \geq 0 &
\end{array}
$$

- **Συμπαγείς Ευθείες** (υπερεπίπεδα): Οριοθετούν το χώρο εφικτών λύσεων (σκιασμένη περιοχή).
- **Ισοσταθμικές (διακεκομμένες) Ευθείες**: Σημεία που εξασφαλίζουν συγκεκριμένες τιμές συνάρτησης – στόχου (τζίρος).



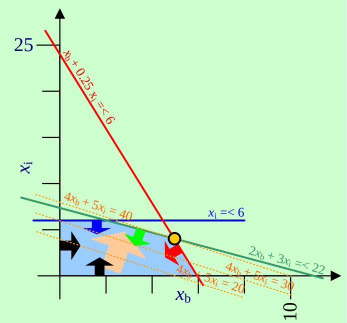
$$\begin{array}{lrrl} \textbf{maximize} & 4x_b & +5x_i & \\ \text{subject to :} & 2x_b & +3x_i & \leq 22 \\ & x_b & +0.25x_i & \leq 6 \\ & & x_i & \leq 6 \\ & x_b \geq 0 & x_i \geq 0 & \end{array}$$

- **Συμπαγείς Ευθείες** (υπερεπίπεδα): Οριοθετούν το χώρο εφικτών λύσεων (σκιασμένη περιοχή).
- **Ισοσταθμικές (διακεκομμένες) Ευθείες**: Σημεία που εξασφαλίζουν συγκεκριμένες τιμές συνάρτησης – στόχου (τζίρος).
- Βέλτιστη λύση;



$$
\begin{array}{lrrl}
\textbf{maximize} & 4x_b & +5x_i & \\
\text{subject to :} & 2x_b & +3x_i & \leq 22 \\
 & x_b & +0.25x_i & \leq 6 \\
 & & x_i & \leq 6 \\
 & x_b \geq 0 & x_i \geq 0 &
\end{array}
$$

- **Συμπαγείς Ευθείες** (υπερεπίπεδα): Οριοθετούν το χώρο εφικτών λύσεων (σκιασμένη περιοχή).
- **Ισοσταθμικές (διακεκομμένες) Ευθείες**: Σημεία που εξασφαλίζουν συγκεκριμένες τιμές συνάρτησης – στόχου (τζίρος).
- Βέλτιστη λύση; $(x_b, x_i) = (5, 4)$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

Μια παραλλαγή...

Q1 Τι θα *γινόταν* αν ο αγρότης άλλαζε την τιμή p_i του παγωτού; Μέχρι ποιο σημείο μπορεί *να* γίνει αυτή η μεταβολή **δίχως να αλλάξει** η βέλτιστη λύση;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

Μια παραλλαγή...

Q1 Τι θα γινόταν αν ο αγρότης άλλαζε την τιμή p_i του παγωτού; Μέχρι ποιο σημείο μπορεί να γίνει αυτή η μεταβολή **δίχως να αλλάξει** η βέλτιστη λύση;

A1 Μεταβολή του $p_i \Rightarrow$ Ισοσταθμικές **διαφορετικής κλίσης**.

Μέγιστη/ελάχιστη τιμή παγωτού ώστε είναι βέλτιστη λύση το $(x_b = 5,\ x_i = 4)$;

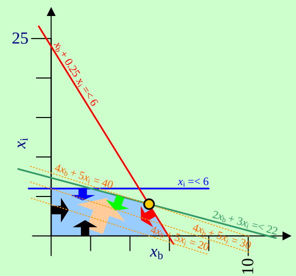
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

Μια παραλλαγή...

Q1 Τι θα γινόταν αν ο αγρότης άλλαζε την τιμή p_i του παγωτού; Μέχρι ποιο σημείο μπορεί να γίνει αυτή η μεταβολή **δίχως να αλλάξει** η βέλτιστη λύση;

A1 Μεταβολή του $p_i \Rightarrow$ Ισοσταθμικές **διαφορετικής κλίσης**.

Μέγιστη/ελάχιστη τιμή παγωτού ώστε είναι βέλτιστη λύση το $(x_b = 5,\ x_i = 4)$; $p_i^{\max} = 6,\ p_i^{\min} = 1$.



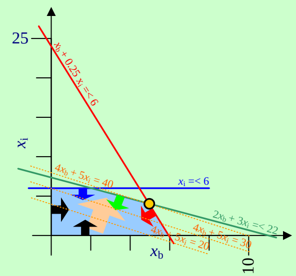
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

Μια παραλλαγή...

Q1 Τι θα γινόταν αν ο αγρότης άλλαζε την τιμή p_i του παγωτού; Μέχρι ποιο σημείο μπορεί να γίνει αυτή η μεταβολή **δίχως να αλλάξει** η βέλτιστη λύση;

A1 Μεταβολή του $p_i \Rightarrow$ Ισοσταθμικές **διαφορετικής κλίσης**.

Μέγιστη/ελάχιστη τιμή παγωτού ώστε είναι βέλτιστη λύση το $(x_b = 5,\ x_i = 4)$; $p_i^{\max} = 6,\ p_i^{\min} = 1$.



- Εξήγηση: $p_i = 5 + \gamma$, για $\gamma > -5$.
  - Ισοσταθμικά υπερεπίπεδα: $x_i = \delta - \frac{4}{5+\gamma} x_b$, για σταθερές δ.
  - Κόκκινο υπερεπίπεδο: $x_i = 24 - 4x_b$.
  - Πράσινο υπερεπίπεδο: $x_i = \frac{22}{3} - \frac{2}{3} x_b$.

$\therefore\ -\frac{2}{3} \geq -\frac{4}{5+\gamma} \geq -4 \Rightarrow \gamma \in [-4, 1] \Rightarrow p_i \in [1, 6]$.

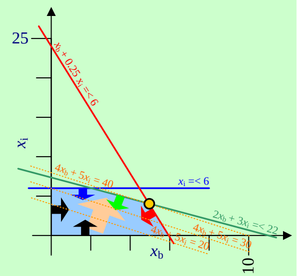
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

Μια παραλλαγή...

Q1 Τι θα γινόταν αν ο αγρότης άλλαζε την τιμή p_i του παγωτού; Μέχρι ποιο σημείο μπορεί να γίνει αυτή η μεταβολή **δίχως να αλλάξει** η βέλτιστη λύση;

A1 Μεταβολή του $p_i \Rightarrow$ Ισοσταθμικές **διαφορετικής κλίσης**.

Μέγιστη/ελάχιστη τιμή παγωτού ώστε είναι βέλτιστη λύση το $(x_b = 5,\ x_i = 4)$; $p_i^{\max} = 6,\ p_i^{\min} = 1$.



- Εξήγηση: $p_i = 5 + \gamma$, για $\gamma > -5$.
  - Ισοσταθμικά υπερεπίπεδα: $x_i = \delta - \frac{4}{5+\gamma} x_b$, για σταθερές δ.
  - Κόκκινο υπερεπίπεδο: $x_i = 24 - 4x_b$.
  - Πράσινο υπερεπίπεδο: $x_i = \frac{22}{3} - \frac{2}{3} x_b$.

$\therefore\ -\frac{2}{3} \geq -\frac{4}{5+\gamma} \geq -4 \Rightarrow \gamma \in [-4, 1] \Rightarrow p_i \in [1, 6]$.

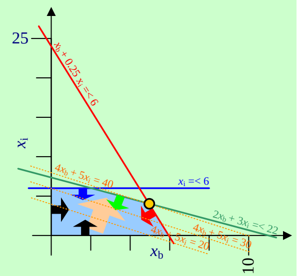
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

Μια παραλλαγή...

Q1 Τι θα γινόταν αν ο αγρότης άλλαζε την τιμή p_i του παγωτού; Μέχρι ποιο σημείο μπορεί να γίνει αυτή η μεταβολή **δίχως να αλλάξει** η βέλτιστη λύση;

A1 Μεταβολή του $p_i \Rightarrow$ Ισοσταθμικές **διαφορετικής κλίσης**.

Μέγιστη/ελάχιστη τιμή παγωτού ώστε είναι βέλτιστη λύση το $(x_b = 5,\ x_i = 4)$; $p_i^{\max} = 6,\ p_i^{\min} = 1$.



- Εξήγηση: $p_i = 5 + \gamma$, για $\gamma > -5$.
  - Ισοσταθμικά υπερεπίπεδα: $x_i = \delta - \frac{4}{5+\gamma} x_b$, για σταθερές δ.
  - Κόκκινο υπερεπίπεδο: $x_i = 24 - 4x_b$.
  - Πράσινο υπερεπίπεδο: $x_i = \frac{22}{3} - \frac{2}{3} x_b$.

$\therefore\ -\frac{2}{3} \geq -\frac{4}{5+\gamma} \geq -4 \Rightarrow \gamma \in [-4, 1] \Rightarrow p_i \in [1, 6]$.

Q2 Βέλτιστη λύση για $p_i = 6.01$, ή $p_i = 0.99$;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

Μια άλλη παραλλαγή...

Q3 Πώς αλλάζει το πρόβλημα, αν ο αγρότης μπορεί *να* αγοράσει y λίτρα γάλα επιπλέον, προς 1 ευρώ το λίτρο, για *να* φτιάξει βούτυρο και παγωτό;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

Μια άλλη παραλλαγή...

Q3 Πώς αλλάζει το πρόβλημα, αν ο αγρότης μπορεί *να* αγοράσει y λίτρα γάλα επιπλέον, προς 1 ευρώ το λίτρο, για *να* φτιάξει βούτυρο και παγωτό;

A3 Θα αγοραστούν επιπλέον 5 λίτρα γάλακτος.

- Μεταβλητή απόφασης y = ποσότητα γάλακτος που αγοράζεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

Μια άλλη παραλλαγή...

Q3 Πώς αλλάζει το πρόβλημα, αν ο αγρότης μπορεί *να* αγοράσει y λίτρα γάλα επιπλέον, προς 1 ευρώ το λίτρο, για *να* φτιάξει βούτυρο και παγωτό;

A3 Θα αγοραστούν επιπλέον 5 λίτρα γάλακτος.

- Μεταβλητή απόφασης y = ποσότητα γάλακτος που αγοράζεται.
- Νέο ΓΠ;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

Μια άλλη παραλλαγή...

Q3 Πώς αλλάζει το πρόβλημα, αν ο αγρότης μπορεί *να* αγοράσει y λίτρα γάλα επιπλέον, προς 1 ευρώ το λίτρο, για *να* φτιάξει βούτυρο και παγωτό;

A3 Θα αγοραστούν επιπλέον 5 λίτρα γάλακτος.

- Μεταβλητή απόφασης y = ποσότητα γάλακτος που αγοράζεται.
- Νέο ΓΠ;
- Απλούστερη μορφή;

$$
\begin{array}{lrrrl}
\textbf{maximize} & 4x_b & +5x_i & -y & \\
\text{subject to:} & 2x_b & +3x_i & -y & \leq 22 \\
 & x_b & +0.25x_i & & \leq 6 \\
 & & x_i & & \leq 6 \\
 & x_b \geq 0 & x_i \geq 0 & y \geq 0 &
\end{array}
$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

Μια άλλη παραλλαγή...

Q3 Πώς αλλάζει το πρόβλημα, αν ο αγρότης μπορεί να αγοράσει y λίτρα γάλα επιπλέον, προς 1 ευρώ το λίτρο, για να φτιάξει βούτυρο και παγωτό;

A3 Θα αγοραστούν επιπλέον 5 λίτρα γάλακτος.

- Μεταβλητή απόφασης y = ποσότητα γάλακτος που αγοράζεται.
- Νέο ΓΠ;
- Απλούστερη μορφή;

$$
\begin{array}{lrrrl}
\textbf{maximize} & 2x_b & +2x_i & & +22 \\
\text{subject to :} & 2x_b & +3x_i & -y & = 22 \\
 & 2x_b & +3x_i & & \geq 22 \\
 & x_b & +0.25x_i & & \leq 6 \\
 & & x_i & & \leq 6 \\
 & x_b \geq 0 & x_i \geq 0 & y \geq 0 &
\end{array}
$$

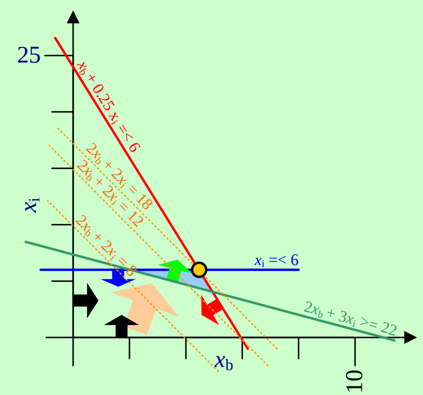
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Πρόβλημα Παραγωγής

Μια άλλη παραλλαγή...

Q3 Πώς αλλάζει το πρόβλημα, αν ο αγρότης μπορεί να αγοράσει *y* λίτρα γάλα επιπλέον, προς 1 ευρώ το λίτρο, για να φτιάξει βούτυρο και παγωτό;

A3 Θα αγοραστούν επιπλέον 5 λίτρα γάλακτος.

- Μεταβλητή απόφασης *y* = ποσότητα γάλακτος που αγοράζεται.
- Νέο ΓΠ;
- Απλούστερη μορφή;



Ορισμός Γραμμικού Προγράμματος

- **Γραμμικό πρόγραμμα (ΓΠ)**: Πρόβλημα *βελτιστοποίησης* μιας *γραμμικής* **συνάρτησης–στόχου** (objective function) σε ένα σύνολο (συνεχών) **μεταβλητών απόφασης** $x_1, \ldots, x_n$, έτσι ώστε να τηρούνται ένα σύνολο από **περιορισμούς** που εκφράζονται μέσα από *γραμμικές ισότητες ή/και ανισότητες* μεταξύ των μεταβλητών απόφασης.

Ορισμός Γραμμικού Προγράμματος

- **Γραμμικό πρόγραμμα (ΓΠ)**: Πρόβλημα *βελτιστοποίησης* μιας *γραμμικής* **συνάρτησης–στόχου** (objective function) σε ένα σύνολο (συνεχών) **μεταβλητών απόφασης** $x_1, \ldots, x_n$, έτσι ώστε να τηρούνται ένα σύνολο από **περιορισμούς** που εκφράζονται μέσα από *γραμμικές ισότητες ή/και ανισότητες* μεταξύ των μεταβλητών απόφασης.
- **Χώρος Εφικτών Λύσεων:** Υποσύνολο σημείων του $\mathbb{R}^n$ που οι συντεταγμένες τους (ως τιμές των μεταβλητών απόφασης) ικανοποιούν ταυτόχρονα ΟΛΟΥΣ τους περιορισμούς του ΓΠ.

Ορισμός Γραμμικού Προγράμματος

- **Γραμμικό πρόγραμμα (ΓΠ)**: Πρόβλημα *βελτιστοποίησης* μιας *γραμμικής* **συνάρτησης–στόχου** (objective function) σε ένα σύνολο (συνεχών) **μεταβλητών απόφασης** $x_1, \ldots, x_n$, έτσι ώστε να τηρούνται ένα σύνολο από **περιορισμούς** που εκφράζονται μέσα από *γραμμικές ισότητες ή/και ανισότητες* μεταξύ των μεταβλητών απόφασης.
- **Χώρος Εφικτών Λύσεων:** Υποσύνολο σημείων του $\mathbb{R}^n$ που οι συντεταγμένες τους (ως τιμές των μεταβλητών απόφασης) ικανοποιούν ταυτόχρονα ΟΛΟΥΣ τους περιορισμούς του ΓΠ.
  - Χώρος λύσεων = Η **τομή υποχώρων** (που ορίζονται από τους *περιορισμούς ανισότητας*) **ή/και υπερεπιπέδων** (που ορίζονται από τους *περιορισμούς ισότητας*).

Ορισμός Γραμμικού Προγράμματος

- **Γραμμικό πρόγραμμα (ΓΠ)**: Πρόβλημα *βελτιστοποίησης* μιας *γραμμικής* **συνάρτησης–στόχου** (objective function) σε ένα σύνολο (συνεχών) **μεταβλητών απόφασης** $x_1, \ldots, x_n$, έτσι ώστε να τηρούνται ένα σύνολο από **περιορισμούς** που εκφράζονται μέσα από *γραμμικές ισότητες ή/και ανισότητες* μεταξύ των μεταβλητών απόφασης.
- **Χώρος Εφικτών Λύσεων:** Υποσύνολο σημείων του $\mathbb{R}^n$ που οι συντεταγμένες τους (ως τιμές των μεταβλητών απόφασης) ικανοποιούν ταυτόχρονα ΟΛΟΥΣ τους περιορισμούς του ΓΠ.
  - Χώρος λύσεων = Η **τομή υποχώρων** (που ορίζονται από τους *περιορισμούς ανισότητας*) **ή/και υπερεπιπέδων** (που ορίζονται από τους *περιορισμούς ισότητας*).
- Ελαχιστοποίηση (Μεγιστοποίηση) συνάρτησης–στόχου...

⇒ Γραμμικό πρόβλημα *ελαχιστοποίησης* (*μεγιστοποίησης*).

Μορφές Αναπαράστασης
(LPG): Γενική Μορφή

- Πρόβλημα **ελαχιστοποίησης**, με συγκεκριμένης μορφής ανισότητες (αν υπάρχουν) ως *κάτω φράγματα* γραμμικών συναρτήσεων και ΚΑΠΟΙΑ **πρόσημα**:

$$\begin{array}{llllr}
\textbf{minimize} & \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j & & & /*\ \text{συνάρτηση} - \text{στόχος}\ */ \\
\text{s.t.}: & \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j & = a_i, & i \in [m] & /*\ \text{περιορισμοί ισότητας}\ */ \\
 & \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} \cdot x_j & \geq b_i, & i \in [m'] & /*\ \text{περιορισμοί ανισότητας}\ */ \\
 & x_j & \geq 0, & j \in I \subseteq [n] & /*\ \text{περιορισμοί προσήμου}\ */
\end{array}$$

Μορφές Αναπαράστασης

(LPG): Γενική Μορφή

- Πρόβλημα **ελαχιστοποίησης**, με συγκεκριμένης μορφής ανισότητες (αν υπάρχουν) ως *κάτω φράγματα* γραμμικών συναρτήσεων και ΚΑΠΟΙΑ **πρόσημα**:

minimize	$\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$		/* συνάρτηση − στόχος */
s.t. :	$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j$	$= a_i, \quad i \in [m]$	/* περιορισμοί ισότητας */
	$\sum_{j=1}^{n} B_{i,j} \cdot x_j$	$\geq b_i, \quad i \in [m']$	/* περιορισμοί ανισότητας */
	x_j	$\geq 0, \quad j \in I \subseteq [n]$	/* περιορισμοί προσήμου */

- Αναπαράσταση με χρήση μητρώων και διανυσμάτων:

$$\boxed{\mathbf{min.} \left\{ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{x} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}; \quad B \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{b}; \qquad x_j \geq 0, \ \forall j \in I \subseteq [n] \right\}}$$

Μορφές Αναπαράστασης

($LP_=$): Μόνο Ισότητες (και Πρόσημα)

- Πρόβλημα **ελαχιστοποίησης**, μόνο με περιορισμούς **ισότητας** και ΟΛΑ τα πρόσημα:

$$\begin{array}{llll} \textbf{minimize} & \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j & & /*\ \text{συνάρτηση} - \text{στόχος}\ */ \\ \text{s.t.}: & \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j & = a_i, \quad i \in [m] & /*\ \text{περιορισμοί ισότητας}\ */ \\ & x_j & \geq 0, \quad j \in [n] & /*\ \text{περιορισμοί προσήμου}\ */ \end{array}$$

- Πρόβλημα **ελαχιστοποίησης**, μόνο με περιορισμούς **ισότητας** και ΟΛΑ τα πρόσημα:

$$\begin{array}{rlll} \textbf{minimize} & \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j & & /* \text{ συνάρτηση} - \text{στόχος } */ \\ \text{s.t.}: & \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j & = a_i, \quad i \in [m] & /* \text{ περιορισμοί ισότητας } */ \\ & x_j & \geq 0, \quad j \in [n] & /* \text{ περιορισμοί προσήμου } */ \end{array}$$

- Αναπαράσταση με χρήση μητρώων και διανυσμάτων:

$$\boxed{\mathbf{min}.\ \{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{x} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}; \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$$

Μορφές Αναπαράστασης

(LP$_\geq$): Μόνο Ανισότητες (και Πρόσημα)

- Πρόβλημα **ελαχιστοποίησης**, μόνο με περιορισμούς **ανισότητας** (ως *κάτω φράγματα* γραμμικών συναρτήσεων) και ΟΛΑ τα πρόσημα:

$$
\begin{array}{rllr}
\textbf{minimize} & \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j & & /* \text{ συνάρτηση − στόχος } */ \\
\text{s.t. :} & \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} \cdot x_j & \geq b_i, \quad i \in [m] & /* \text{ περιορισμοί ανισότητας } */ \\
& x_j & \geq 0, \quad j \in [n] & /* \text{ περιορισμοί προσήμου } */
\end{array}
$$

Μορφές Αναπαράστασης

($\mathrm{LP}_{\geq}$): Μόνο Ανισότητες (και Πρόσημα)

- Πρόβλημα **ελαχιστοποίησης**, μόνο με περιορισμούς **ανισότητας** (ως *κάτω φράγματα* γραμμικών συναρτήσεων) και ΟΛΑ τα πρόσημα:

$$\begin{array}{|lrlll|}\hline \textbf{minimize} & \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j & & & /*\ \text{συνάρτηση} - \text{στόχος}\ */ \\ \text{s.t.}: & \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} \cdot x_j & \geq b_i, & i \in [m] & /*\ \text{περιορισμοί ανισότητας}\ */ \\ & x_j & \geq 0, & j \in [n] & /*\ \text{περιορισμοί προσήμου}\ */ \\ \hline \end{array}$$

- Αναπαράσταση με χρήση μητρώων και διανυσμάτων:

$$\boxed{\textbf{min.}\ \{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{x} : B \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{b};\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$$

- Πρόβλημα **μεγιστοποίησης**, περιορισμούς ισότητας, περιορισμούς ανισότητας ως *άνω/κάτω φράγματα*, και ΚΑΠΟΙΑ **πρόσημα**:

$$
\begin{array}{llllll}
\textbf{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j & & & & /*\ \text{συνάρτηση} - \text{στόχος}\ */ \\
\text{s.t.}: & \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j & = a_i, & i \in [m] & & /*\ \text{ισότητες}\ */ \\
 & \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} \cdot x_j & \geq b_i, & i \in [m'] & & /*\ \text{κάτω φράγματα}\ */ \\
 & \sum_{j=1}^{n} D_{i,j} \cdot x_j & \leq d_i, & i \in [m''] & & /*\ \text{άνω φράγματα}\ */ \\
 & x_j & \geq 0, & j \in I \subseteq [n] & & /*\ \text{(κάποια) πρόσημα}\ */
\end{array}
$$

Ισοδυναμίες Μορφών Αναπαράστασης (I)

Κάθε ΓΠ Ισοδυναμεί με Κάποιο *LPG*

- Πρόβλημα **μεγιστοποίησης**, περιορισμούς ισότητας, περιορισμούς ανισότητας ως *άνω/κάτω φράγματα*, και ΚΑΠΟΙΑ **πρόσημα**:

$$
\begin{array}{llllll}
\textbf{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j & & & & /*\ \text{συνάρτηση} - \text{στόχος}\ */ \\
\text{s.t. :} & \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j & = a_i, & i \in [m] & & /*\ \text{ισότητες}\ */ \\
& \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} \cdot x_j & \geq b_i, & i \in [m'] & & /*\ \text{κάτω φράγματα}\ */ \\
& \sum_{j=1}^{n} D_{i,j} \cdot x_j & \leq d_i, & i \in [m''] & & /*\ \text{άνω φράγματα}\ */ \\
& x_j & \geq 0, & j \in I \subseteq [n] & & /*\ (\text{κάποια})\ \text{πρόσημα}\ */
\end{array}
$$

- Ισοδύναμο ΓΠ σε *LPG*;

Ισοδυναμίες Μορφών Αναπαράστασης (Ι)

Κάθε ΓΠ Ισοδυναμεί με Κάποιο *LPG*

- Πρόβλημα **μεγιστοποίησης**, περιορισμούς ισότητας, περιορισμούς ανισότητας ως *άνω/κάτω φράγματα*, και ΚΑΠΟΙΑ **πρόσημα**:

$$
\begin{array}{llllr}
\textbf{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j & & & /*\ \text{συνάρτηση} - \text{στόχος}\ */ \\
\text{s.t. :} & \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j & = a_i, & i \in [m] & /*\ \text{ισότητες}\ */ \\
& \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} \cdot x_j & \geq b_i, & i \in [m'] & /*\ \text{κάτω φράγματα}\ */ \\
& \sum_{j=1}^{n} D_{i,j} \cdot x_j & \leq d_i, & i \in [m''] & /*\ \text{άνω φράγματα}\ */ \\
& x_j & \geq 0, & j \in I \subseteq [n] & /*\ \text{(κάποια) πρόσημα}\ */
\end{array}
$$

- Ισοδύναμο ΓΠ σε *LPG*;
  1. Διόρθωση συνάρτησης – στοχου...

Ισοδυναμίες Μορφών Αναπαράστασης (I)

Κάθε ΓΠ Ισοδυναμεί με Κάποιο *LPG*

- Πρόβλημα **μεγιστοποίησης**, περιορισμούς ισότητας, περιορισμούς ανισότητας ως *άνω/κάτω φράγματα*, και ΚΑΠΟΙΑ **πρόσημα**:

$$
\begin{array}{llllll}
\textbf{minimize} & \sum_{j=1}^{n} (-c_j)\cdot x_j & & & & /*\ \text{συνάρτηση} - \text{στόχος}\ */ \\
\text{s.t.}: & \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\cdot x_j & = a_i, & i \in [m] & & /*\ \text{ισότητες}\ */ \\
& \sum_{j=1}^{n} B_{i,j}\cdot x_j & \geq b_i, & i \in [m'] & & /*\ \text{κάτω φράγματα}\ */ \\
& \sum_{j=1}^{n} D_{i,j}\cdot x_j & \leq d_i, & i \in [m''] & & /*\ \text{άνω φράγματα}\ */ \\
& x_j & \geq 0, & j \in I \subseteq [n] & & /*\ \text{(κάποια) πρόσημα}\ */
\end{array}
$$

- Ισοδύναμο ΓΠ σε *LPG*;
  1. Διόρθωση συνάρτησης – στοχου...

- Πρόβλημα **μεγιστοποίησης**, περιορισμούς ισότητας, περιορισμούς ανισότητας ως *άνω/κάτω φράγματα*, και ΚΑΠΟΙΑ **πρόσημα**:

$$
\begin{array}{lrcll}
\textbf{minimize} & \sum_{j=1}^{n} (-c_j) \cdot x_j & & & /* \text{ συνάρτηση – στόχος } */\\
\text{s.t. :} & \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j & = a_i, & i \in [m] & /* \text{ ισότητες } */\\
& \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} \cdot x_j & \geq b_i, & i \in [m'] & /* \text{ κάτω φράγματα } */\\
& \sum_{j=1}^{n} D_{i,j} \cdot x_j & \leq d_i, & i \in [m''] & /* \text{ άνω φράγματα } */\\
& x_j & \geq 0, & j \in I \subseteq [n] & /* \text{ (κάποια) πρόσημα } */
\end{array}
$$

- Ισοδύναμο ΓΠ σε *LPG*;
  1. Διόρθωση συνάρτησης – στοχου...
  2. Διόρθωση άνω φραγμάτων...

Ισοδυναμίες Μορφών Αναπαράστασης (Ι)

Κάθε ΓΠ Ισοδυναμεί με Κάποιο *LPG*

- Πρόβλημα **μεγιστοποίησης**, περιορισμούς ισότητας, περιορισμούς ανισότητας ως *άνω/κάτω φράγματα*, και ΚΑΠΟΙΑ **πρόσημα**:

$$
\begin{array}{llllr}
\textbf{minimize} & \sum_{j=1}^{n} (-c_j) \cdot x_j & & & /*\ \text{συνάρτηση} - \text{στόχος}\ */ \\
\text{s.t. :} & \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j & = a_i, & i \in [m] & /*\ \text{ισότητες}\ */ \\
& \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} \cdot x_j & \geq b_i, & i \in [m'] & /*\ \text{κάτω φράγματα}\ */ \\
& \sum_{j=1}^{n} (-D_{i,j}) \cdot x_j & \geq -d_i, & i \in [m''] & /*\ \text{κάτω φράγματα}\ */ \\
& x_j & \geq 0, & j \in I \subseteq [n] & /*\ \text{(κάποια) πρόσημα}\ */
\end{array}
$$

- Ισοδύναμο ΓΠ σε *LPG*;
    1. Διόρθωση συνάρτησης – στοχου...
    2. Διόρθωση άνω φραγμάτων...

Επιλυσιμότητα ΓΠ

(LPG) $\boxed{\textbf{min.}\left\{\ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b};\ \ \mathbf{x_J} \geq 0,\ \ J \subseteq [n]\ \right\}}$

- **Εφικτή Λύση**: Κάθε διάνυσμα τιμών του διανύσματος μεταβλητών $\mathbf{x}$ που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.

Επιλυσιμότητα ΓΠ

(LPG) $\boxed{\mathbf{min.}\left\{\ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b};\ \ \mathbf{x_J} \geq 0,\ \ J \subseteq [n]\ \right\}}$

- **Εφικτή Λύση**: Κάθε διάνυσμα τιμών του διανύσματος μεταβλητών $\mathbf{x}$ που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.
- **Επιλύσιμο ΓΠ**: ΜΗ ΚΕΝΟΣ χώρος των εφικτών λύσεων.

Επιλυσιμότητα ΓΠ

(LPG) $\boxed{\textbf{min.}\ \{\ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b};\ \ \mathbf{x_J} \geq 0,\ \ J \subseteq [n]\ \}}$

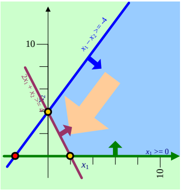
- **Εφικτή Λύση**: Κάθε διάνυσμα τιμών του διανύσματος μεταβλητών $\mathbf{x}$ που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.
- **Επιλύσιμο ΓΠ**: ΜΗ ΚΕΝΟΣ χώρος των εφικτών λύσεων.
  - **Μη Φραγμένο ΓΠ**: Η τιμή της συνάρτησης–στόχου τείνει στο $-\infty$ (για προγράμματα *ελαχιστοποίησης*), ή στο $+\infty$ (για προγράμματα *μεγιστοποίησης*).
  - **Φραγμένο ΓΠ**: Η συνάρτηση – στόχος **φράσσεται κάτω** (για πρόγραμμα *ελαχιστοποίησης*), ή **άνω** (για πρόγραμμα *μεγιστοποίησης*).

Επιλυσιμότητα ΓΠ

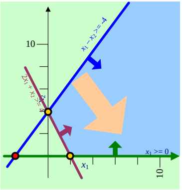
(LPG) $\boxed{\mathbf{min.}\left\{ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b};\ \ \mathbf{x_J} \geq 0,\ \ J \subseteq [n] \ \right\}}$

- **Εφικτή Λύση**: Κάθε διάνυσμα τιμών του διανύσματος μεταβλητών $\mathbf{x}$ που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.
- **Επιλύσιμο ΓΠ**: ΜΗ ΚΕΝΟΣ χώρος των εφικτών λύσεων.
  - **Μη Φραγμένο ΓΠ**: Η τιμή της συνάρτησης–στόχου τείνει στο $-\infty$ (για προγράμματα *ελαχιστοποίησης*), ή στο $+\infty$ (για προγράμματα *μεγιστοποίησης*).
  - **Φραγμένο ΓΠ**: Η συνάρτηση – στόχος **φράσσεται κάτω** (για πρόγραμμα *ελαχιστοποίησης*), ή **άνω** (για πρόγραμμα *μεγιστοποίησης*).
- **Βέλτιστη Λύση**: Μια εφικτή λύση που έχει τη βέλτιστη (ελάχιστη / μέγιστη) τιμή της συνάρτησης –στόχου, μεταξύ όλων των εφικτών λύσεων σε ένα **φραγμένο** ΓΠ.

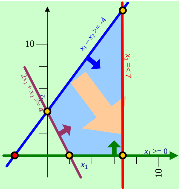
Παραδείγματα (Μη) Επιλύσιμων / (Μη) Φραγμένων ΓΠ



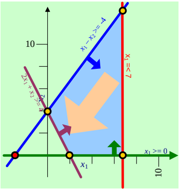
(α)



(β)



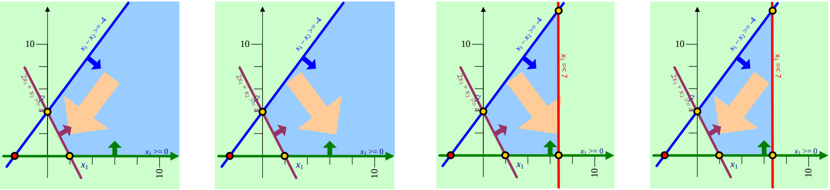
(γ)



(δ)

Τι είδους ΓΠ αντιστοιχούν στα παραπάνω σχήματα;

Παραδείγματα (Μη) Επιλύσιμων / (Μη) Φραγμένων ΓΠ

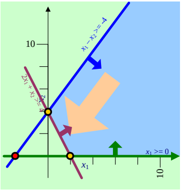


(α) (β) (γ) (δ)

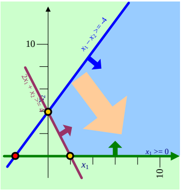
Τι είδους ΓΠ αντιστοιχούν στα παραπάνω σχήματα;

(α) Φραγμένο ΓΠ, με μη φραγμένο χώρο λύσεων.

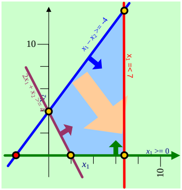
Παραδείγματα (Μη) Επιλύσιμων / (Μη) Φραγμένων ΓΠ



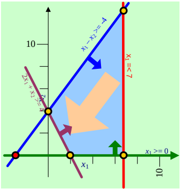
(α)



(β)



(γ)



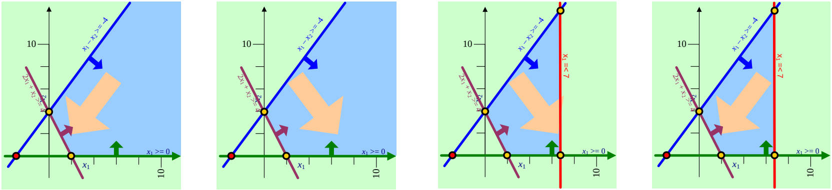
(δ)

Τι είδους ΓΠ αντιστοιχούν στα παραπάνω σχήματα;

(α) Φραγμένο ΓΠ, με μη φραγμένο χώρο λύσεων.

(β) Μη φραγμένο ΓΠ.

Παραδείγματα (Μη) Επιλύσιμων / (Μη) Φραγμένων ΓΠ



(α) (β) (γ) (δ)

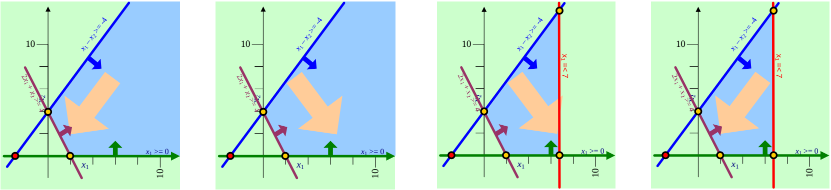
Τι είδους ΓΠ αντιστοιχούν στα παραπάνω σχήματα;

(α) Φραγμένο ΓΠ, με μη φραγμένο χώρο λύσεων.

(β) Μη φραγμένο ΓΠ.

(γ) Φραγμένο ΓΠ με φραγμένο χώρο λύσεων (πολύτοπο).

Παραδείγματα (Μη) Επιλύσιμων / (Μη) Φραγμένων ΓΠ



(α) (β) (γ) (δ)

Τι είδους ΓΠ αντιστοιχούν στα παραπάνω σχήματα;

(α) Φραγμένο ΓΠ, με μη φραγμένο χώρο λύσεων.

(β) Μη φραγμένο ΓΠ.

(γ) Φραγμένο ΓΠ με φραγμένο χώρο λύσεων (πολύτοπο).

(δ) Φραγμένο ΓΠ με φραγμένο χώρο λύσεων (πολύτοπο).

Τι σημαίνει «Ισοδύναμα ΓΠ»;

- **Ισοδυναμία ΓΠ**: Δυο ΓΠ (έστω σε γενική μορφή) $(LPG)_1$ και $(LPG)_2$ είναι ισοδύναμα ανν:
  - Το $(LPG)_1$ είναι επιλύσιμο ανν το $(LPG)_2$ είναι επιλύσιμο.
  - *Δεδομένης της επιλυσιμότητας*, το $(LPG)_1$ είναι φραγμένο ανν το $(LPG)_2$ είναι φραγμένο
  - *Δεδομένου ότι και τα δυο είναι φραγμένα ΓΠ*, οποιαδήποτε βέλτιστη λύση του $(LPG)_1$ υποδεικνύει άμεσα (π.χ., μέσω απλών γραμμικών μετασχηματισμών, αν χρειάζεται) μια βέλτιστη λύση του $(LPG)_2$.

1. Αντιστροφή κατεύθυνσης της συνάρτησης – στόχου: $\mathbf{max}._{\mathbf{x}\in P}\{\mathbf{c}'\mathbf{x}\} \rightsquigarrow -\mathbf{min}._{\mathbf{x}\in P}\{(-\mathbf{c})'\mathbf{x}\}$.
2. Εμφάνιση ανισοτήτων ως κάτω φραγμάτων γραμμικών συναρτήσεων: $D\mathbf{x} \leq \mathbf{d} \rightsquigarrow -D\mathbf{x} \geq -\mathbf{d}$.

Δημιουργία Ισοδύναμων Μορφών (II)

Μετατροπή από (LPG) σε $(LP_=)$ ή $(LP_\geq)$

(LPG) $\boxed{\textbf{min.}\ \{\ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b};\ \ \mathbf{x}_J \geq 0,\ \ J \subseteq [n]\ \ \}}$

1. (LPG) $\rightsquigarrow$ $(LP_\geq)$: Μετατροπή **ισοτήτων σε ανισότητες**.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A\mathbf{x} \geq \mathbf{a} \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{a} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A\mathbf{x} \geq \mathbf{a} \\ -A\mathbf{x} \geq -\mathbf{a} \end{array} \right\}$$

Δημιουργία Ισοδύναμων Μορφών (II)

Μετατροπή από (LPG) σε ($LP_=$) ή ($LP_\geq$)

(LPG) $\boxed{\textbf{min.}\ \{\ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b};\ \ \mathbf{x_J} \geq 0,\ \ J \subseteq [n]\ \}}$

1. (LPG) $\rightsquigarrow$ ($LP_\geq$): Μετατροπή **ισοτήτων σε ανισότητες**.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A\mathbf{x} \geq \mathbf{a} \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{a} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A\mathbf{x} \geq \mathbf{a} \\ -A\mathbf{x} \geq -\mathbf{a} \end{array} \right\}$$

2. (LPG) $\rightsquigarrow$ ($LP_=$): Μετατροπή **ανισοτήτων σε ισότητες**.

$$B\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} \forall i \in [m'],\ \ B[i,*]\mathbf{x} - s_i = b_i \\ \forall i \in [m'],\ \ s_i \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} B\mathbf{x} - \mathbf{s} = \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} (B, -I) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

Δημιουργία Ισοδύναμων Μορφών (II)

Μετατροπή από (LPG) σε (LP$_=$) ή (LP$_\geq$)

(LPG) $\boxed{\mathbf{min.}\ \{\ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b};\ \ \mathbf{x_J} \geq 0,\ \ J \subseteq [n]\ \ \}}$

1. (LPG) $\rightsquigarrow$ (LP$_\geq$): Μετατροπή **ισοτήτων σε ανισότητες**.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A\mathbf{x} \geq \mathbf{a} \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{a} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A\mathbf{x} \geq \mathbf{a} \\ -A\mathbf{x} \geq -\mathbf{a} \end{array} \right\}$$

2. (LPG) $\rightsquigarrow$ (LP$_=$): Μετατροπή **ανισοτήτων σε ισότητες**.

$$B\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} \forall i \in [m'],\ \ B[i,*]\mathbf{x} - s_i = b_i \\ \forall i \in [m'],\ \ s_i \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} B\mathbf{x} - \mathbf{s} = \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} (B, -I)\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

- **Αδιάφορες Μεταβλητές (Slack Variables)**: Βοηθούν στην αποτύπωση της διαφοράς ώστε να μετατραπούν οι *ανισότητες σε ισότητες*.

Δημιουργία Ισοδύναμων Μορφών (ΙΙΙ)

Μετατροπή από (LPG) σε (LP$_=$) ή (LP$_\geq$)

(LPG) $\boxed{\mathbf{min.}\ \{\ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b};\ \ \mathbf{x_J} \geq 0,\ \ J \subseteq [n]\ \ \}}$

3. (LPG) $\rightsquigarrow$ (LP$_=$) ή (LPG) $\rightsquigarrow$ (LP$_\geq$): **Επιβολή προσήμων** σε όλες τις μεταβλητές. Αν η x_j δεν έχει πρόσημο, τότε μπορώ να την απαλείψω εισάγοντας δυο νέες *μη αρνητικές μεταβλητές* x_j^+ και x_j^- στο (LPG) τέτοιες ώστε: $x_j = x_j^+ - x_j^-$: Αντικαθιστω κάθε εμφάνιση της μεταβλητής x_j στο (αρχικό) (LPG), με τη διαφορά $x_j^+ - x_j^-$ (ΠΩΣ;).

Δημιουργία Ισοδύναμων Μορφών (III)
Μετατροπή από (LPG) σε (LP$_=$) ή (LP$_\geq$)

(LPG) $\boxed{\textbf{min.}\ \{\ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b};\ \ \mathbf{x_J} \geq 0,\ \ J \subseteq [n]\ \}}$

3. (LPG) $\rightsquigarrow$ (LP$_=$) ή (LPG) $\rightsquigarrow$ (LP$_\geq$): **Επιβολή προσήμων** σε όλες τις μεταβλητές. Αν η x_j δεν έχει πρόσημο, τότε μπορώ να την απαλείψω εισάγοντας δυο νέες *μη αρνητικές μεταβλητές* x_j^+ και x_j^- στο (LPG) τέτοιες ώστε: $x_j = x_j^+ - x_j^-$: Αντικαθιστω κάθε εμφάνιση της μεταβλητής x_j στο (αρχικό) (LPG), με τη διαφορά $x_j^+ - x_j^-$ (ΠΩΣ;).

   Εκλαμβάνω τις (παλιές, μη προσημασμένες) $n - |J|$ μεταβλητές x_j ως τις νέες (προσημασμένες πλέον) μεταβλητές x_j^+. Προσθέτω ακριβώς $n - |J|$ νέες μεταβλητές $x_{n+1}, \ldots, x_{2n-|J|}$, που εκλαμβάνονται ως οι μεταβλητες x_j^-.

Δημιουργία Ισοδύναμων Μορφών (III)
Μετατροπή από (LPG) σε (LP$_=$) ή (LP$_\geq$)

(LPG) $\boxed{\textbf{min.} \{ \ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b}; \ \ \mathbf{x}_J \geq 0, \ \ J \subseteq [n] \ \ \}}$

3. (LPG) $\rightsquigarrow$ (LP$_=$) ή (LPG) $\rightsquigarrow$ (LP$_\geq$): **Επιβολή προσήμων** σε όλες τις μεταβλητές. Αν η x_j δεν έχει πρόσημο, τότε μπορώ να την απαλείψω εισάγοντας δυο νέες *μη αρνητικές μεταβλητές* x_j^+ και x_j^- στο (LPG) τέτοιες ώστε: $x_j = x_j^+ - x_j^-$: Αντικαθιστω κάθε εμφάνιση της μεταβλητής x_j στο (αρχικό) (LPG), με τη διαφορά $x_j^+ - x_j^-$ (ΠΩΣ;).

   Εκλαμβάνω τις (παλιές, μη προσημασμένες) $n - |J|$ μεταβλητές x_j ως τις νέες (προσημασμένες πλέον) μεταβλητές x_j^+. Προσθέτω ακριβώς $n - |J|$ νέες μεταβλητές $x_{n+1}, \ldots, x_{2n-|J|}$, που εκλαμβάνονται ως οι μεταβλητες x_j^-.

   - $\tilde{A} = (A \ \ , \ \ -A[*, [n] \setminus J])$ και $\tilde{B} = (B \ \ , \ \ -B[*, [n] \setminus J])$.

Δημιουργία Ισοδύναμων Μορφών (III)

Μετατροπή από (LPG) σε ($LP_=$) ή ($LP_\geq$)

(LPG) $\boxed{\textbf{min.}\ \{\ \mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b};\ \ \mathbf{x}_J \geq 0,\ \ J \subseteq [n]\ \ \}}$

3. (LPG) $\rightsquigarrow$ ($LP_=$) ή (LPG) $\rightsquigarrow$ ($LP_\geq$): **Επιβολή προσήμων** σε όλες τις μεταβλητές. Αν η x_j δεν έχει πρόσημο, τότε μπορώ να την απαλείψω εισάγοντας δυο νέες *μη αρνητικές μεταβλητές* x_j^+ και x_j^- στο (LPG) τέτοιες ώστε: $x_j = x_j^+ - x_j^-$: Αντικαθιστω κάθε εμφάνιση της μεταβλητής x_j στο (αρχικό) (LPG), με τη διαφορά $x_j^+ - x_j^-$ (ΠΩΣ;).

   Εκλαμβάνω τις (παλιές, μη προσημασμένες) $n - |J|$ μεταβλητές x_j ως τις νέες (προσημασμένες πλέον) μεταβλητές x_j^+. Προσθέτω ακριβώς $n - |J|$ νέες μεταβλητές $x_{n+1}, \ldots, x_{2n-|J|}$, που εκλαμβάνονται ως οι μεταβλητες x_j^-.

   - $\tilde{A} = (A\ ,\ -A[*, [n] \setminus J])$ και $\tilde{B} = (B\ ,\ -B[*, [n] \setminus J])$.
   - $\tilde{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ -\mathbf{c}_{[n]\setminus J} \end{pmatrix}$

Μοντελοποίηση Προβλημάτων ως ΓΠ

... μετατροπές και ισοδυναμίες

Πρόβλημα Μεταφοράς Αγαθών (Ι)

- Εταιρεία διανομής σιτάλευρων θέλει να μεταφέρει από m αποθήκες της που διαθέτουν $k_1, k_2, \ldots, k_m$ κιλά αλεύρι αντίστοιχα, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ κιλά σε n φούρνους.

- Το κόστος μετακίνησης ανά κιλό αλεύρι από την αποθήκη $i \in [m]$ στον φούρνο $j \in [n]$ είναι $c_{i,j}$.

- Πώς πρέπει να γίνει (αν είναι δυνατή) η προμήθεια των φούρνων από τις αποθήκες, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος της μεταφοράς;

Πρόβλημα Μεταφοράς Αγαθών (Ι)

- Εταιρεία διανομής σιτάλευρων θέλει να μεταφέρει από m αποθήκες της που διαθέτουν $k_1, k_2, \ldots, k_m$ κιλά αλεύρι αντίστοιχα, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ κιλά σε n φούρνους.

- Το κόστος μετακίνησης ανά κιλό αλεύρι από την αποθήκη $i \in [m]$ στον φούρνο $j \in [n]$ είναι $c_{i,j}$.

- Πώς πρέπει να γίνει (αν είναι δυνατή) η προμήθεια των φούρνων από τις αποθήκες, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος της μεταφοράς;

Πρόβλημα Μεταφοράς Αγαθών (I)

- Εταιρεία διανομής σιτάλευρων θέλει να μεταφέρει από m αποθήκες της που διαθέτουν $k_1, k_2, \ldots, k_m$ κιλά αλεύρι αντίστοιχα, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ κιλά σε n φούρνους.

$$\boxed{\forall i \in [m],\ \sum_{j \in [n]} x_{i,j} \leq k_i}$$

$$\boxed{\forall j \in [n],\ \sum_{i \in [m]} x_{i,j} = b_j}$$

➡ Το κόστος μετακίνησης ανά κιλό αλεύρι από την αποθήκη $i \in [m]$ στον φούρνο $j \in [n]$ είναι $c_{i,j}$.

- Πώς πρέπει να γίνει (αν είναι δυνατή) η προμήθεια των φούρνων από τις αποθήκες, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος της μεταφοράς;

Πρόβλημα Μεταφοράς Αγαθών (Ι)

- Εταιρεία διανομής σιτάλευρων θέλει να μεταφέρει από m αποθήκες της που διαθέτουν $k_1, k_2, \ldots, k_m$ κιλά αλεύρι αντίστοιχα, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ κιλά σε n φούρνους.

  $\boxed{\forall i \in [m],\ \sum_{j\in[n]} x_{i,j} \leq k_i}$

  $\boxed{\forall j \in [n],\ \sum_{i\in[m]} x_{i,j} = b_j}$

- Το κόστος μετακίνησης ανά κιλό αλεύρι από την αποθήκη $i \in [m]$ στον φούρνο $j \in [n]$ είναι $c_{i,j}$.

  Αντικειμενική συνάρτηση: $\boxed{\sum_{i\in[m]} \sum_{j\in[n]} c_{i,j} \cdot x_{i,j}}$

➡ Πώς πρέπει να γίνει (αν είναι δυνατή) η προμήθεια των φούρνων από τις αποθήκες, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος της μεταφοράς;

Πρόβλημα Μεταφοράς Αγαθών (I)

- Εταιρεία διανομής σιτάλευρων θέλει να μεταφέρει από m αποθήκες της που διαθέτουν $k_1, k_2, \ldots, k_m$ κιλά αλεύρι αντίστοιχα, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ κιλά σε n φούρνους.

  $\boxed{\forall i \in [m], \ \sum_{j\in[n]} x_{i,j} \leq k_i}$

  $\boxed{\forall j \in [n], \ \sum_{i\in[m]} x_{i,j} = b_j}$

- Το κόστος μετακίνησης ανά κιλό αλεύρι από την αποθήκη $i \in [m]$ στον φούρνο $j \in [n]$ είναι $c_{i,j}$.

  Αντικειμενική συνάρτηση: $\boxed{\max.\{\sum_{i\in[m]} \sum_{j\in[n]} c_{i,j} \cdot x_{i,j}\}}$

- Πώς πρέπει να γίνει (αν είναι δυνατή) η προμήθεια των φούρνων από τις αποθήκες, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος της μεταφοράς;

Πρόβλημα Μεταφοράς Αγαθών (II)

$$
\begin{array}{lrl}
\textbf{maximize} & \sum_{i\in[m]} \sum_{j\in[n]} c_{i,j} \cdot x_{i,j} & \\
\text{subject to :} & \sum_{j\in[n]} x_{i,j} & \leq k_i \\
 & \sum_{i\in[m]} x_{i,j} & = b_j \\
 & \forall (i,j) \in [m] \times [n],\ \ x_{i,j} \geq 0 &
\end{array}
$$

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (I)

- Διαχειριζόμαστε για m ημέρες αποθήκη που διατηρεί στοκ τηλεοράσεων και έχει χωρητικότητα t τεμαχίων.
- Κάθε μέρα είτε **πουλάμε** (αδειάζοντας την αποθήκη) ή **αγοράζουμε** τηλεοράσεις (γεμίζοντας την αποθήκη). Η αξία μιας τηλεόρασης είναι η ίδια (έστω r_i €), *τόσο για πώληση όσο και για αγορά*, για συγκεκριμένη ημέρα $i \in [m]$ (ίσως διαφοροποιείται για διαφορετικές μέρες).
- Υπάρχει κόστος αποθήκευσης ανά ημέρα, έστω c € για κάθε τηλεόραση.
- Αρχικά η αποθήκη είναι **άδεια**, και στο τέλος θέλουμε να είναι και πάλι **άδεια**.
- Πώς πρέπει να διαχειριστούμε την αποθήκη για το διάστημα των m ημερών, ώστε να εξασφαλίσουμε μεγιστοποίηση του κέρδους μας;

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (ΙΙ)

Μεταβλητές απόφασης;

Περιορισμοί;

Συνάρτηση – στόχος;

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (ΙΙ)

Μεταβλητές απόφασης;

- $\forall i \in [m]$, $x_i =$ πλήθος τηλεοράσεων στην αποθήκη *στην αρχή* της ημέρας $i \in [m]$.
- $\forall i \in [m]$, $b_i, s_i =$ πλήθος τηλεοράσεων που αγοράζονται / πωλούνται *κατά τη διάρκεια* της μέρας $i \in [m]$.

Περιορισμοί;

- Άδεια αποθήκη *στην αρχή* της περιόδου:

Συνάρτηση – στόχος;

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (II)

Μεταβλητές απόφασης;

- $\forall i \in [m],\ x_i =$ πλήθος τηλεοράσεων στην αποθήκη *στην αρχή* της ημέρας $i \in [m]$.
- $\forall i \in [m],\ b_i, s_i =$ πλήθος τηλεοράσεων που αγοράζονται / πωλούνται *κατά τη διάρκεια* της μέρας $i \in [m]$.

Περιορισμοί;

- Άδεια αποθήκη *στην αρχή* της περιόδου: $\boxed{x_1 = 0}$
- Σεβασμός χωρητικότητας αποθήκης:

Συνάρτηση – στόχος;

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (II)

Μεταβλητές απόφασης;

- $\forall i \in [m],\ x_i =$ πλήθος τηλεοράσεων στην αποθήκη *στην αρχή* της ημέρας $i \in [m]$.
- $\forall i \in [m],\ b_i, s_i =$ πλήθος τηλεοράσεων που αγοράζονται / πωλούνται *κατά τη διάρκεια* της μέρας $i \in [m]$.

Περιορισμοί;

- Άδεια αποθήκη *στην αρχή* της περιόδου: $\boxed{x_1 = 0}$
- Σεβασμός χωρητικότητας αποθήκης: $\boxed{\forall i \in [m],\ x_i \leq t}$
- Κλειστό σύστημα:

Συνάρτηση – στόχος;

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (II)

Μεταβλητές απόφασης;

- $\forall i \in [m],\ x_i =$ πλήθος τηλεοράσεων στην αποθήκη *στην αρχή* της ημέρας $i \in [m]$.
- $\forall i \in [m],\ b_i, s_i =$ πλήθος τηλεοράσεων που αγοράζονται / πωλούνται *κατά τη διάρκεια* της μέρας $i \in [m]$.

Περιορισμοί;

- Άδεια αποθήκη *στην αρχή* της περιόδου: $\boxed{x_1 = 0}$
- Σεβασμός χωρητικότητας αποθήκης: $\boxed{\forall i \in [m],\ x_i \leq t}$
- Κλειστό σύστημα: $\boxed{\forall i \in \{2, 3, \ldots, m\},\ x_i = x_{i-1} + b_{i-1} - s_{i-1}}$
- Άδεια αποθήκη *στο τέλος* της περιόδου:

Συνάρτηση – στόχος;

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (II)

Μεταβλητές απόφασης;

- $\forall i \in [m],\ x_i =$ πλήθος τηλεοράσεων στην αποθήκη *στην αρχή* της ημέρας $i \in [m]$.
- $\forall i \in [m],\ b_i, s_i =$ πλήθος τηλεοράσεων που αγοράζονται / πωλούνται *κατά τη διάρκεια* της μέρας $i \in [m]$.

Περιορισμοί;

- Άδεια αποθήκη *στην αρχή* της περιόδου: $\boxed{x_1 = 0}$
- Σεβασμός χωρητικότητας αποθήκης: $\boxed{\forall i \in [m],\ x_i \leq t}$
- Κλειστό σύστημα: $\boxed{\forall i \in \{2, 3, \ldots, m\},\ x_i = x_{i-1} + b_{i-1} - s_{i-1}}$
- Άδεια αποθήκη *στο τέλος* της περιόδου: $\boxed{x_m + b_m - s_m = 0}$

Συνάρτηση – στόχος;

- Μεγιστοποίηση συνολικού κέρδους:

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (II)

Μεταβλητές απόφασης;

- $\forall i \in [m]$, $x_i =$ πλήθος τηλεοράσεων στην αποθήκη *στην αρχή* της ημέρας $i \in [m]$.
- $\forall i \in [m]$, $b_i, s_i =$ πλήθος τηλεοράσεων που αγοράζονται / πωλούνται *κατά τη διάρκεια* της μέρας $i \in [m]$.

Περιορισμοί;

- Άδεια αποθήκη *στην αρχή* της περιόδου: $\boxed{x_1 = 0}$
- Σεβασμός χωρητικότητας αποθήκης: $\boxed{\forall i \in [m],\ x_i \leq t}$
- Κλειστό σύστημα: $\boxed{\forall i \in \{2, 3, \ldots, m\},\ x_i = x_{i-1} + b_{i-1} - s_{i-1}}$
- Άδεια αποθήκη *στο τέλος* της περιόδου: $\boxed{x_m + b_m - s_m = 0}$

Συνάρτηση – στόχος;

- Μεγιστοποίηση συνολικού κέρδους:

$$\boxed{\textbf{max}.\ \left\{\sum_{i=1}^{m} \left[(s_i - b_i) \cdot r_i - c \cdot x_i\right]\right\}}$$

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (III)

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\textbf{maximize} & \sum_{i=1}^{m}[\ r_i \cdot s_i & -r_i \cdot b_i & & -c \cdot x_i\ ] & \\
\text{subject to :} & & & & x_1 & = 0 \\
\forall i \in [m] & & & & x_i & \leq t \\
\forall 2 \leq i \leq m & -s_{i-1} & +b_{i-1} & +x_{i-1} & - x_i & = 0 \\
& -s_m & +b_m & & +x_m & = 0 \\
\forall i \in [m] & s_i \in \mathbb{N}, & b_i \in \mathbb{N}, & & x_i \in \mathbb{N} &
\end{array}
$$

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (III)

$$
\boxed{
\begin{array}{rccccl}
\textbf{maximize} & \sum_{i=1}^{m} [\ r_i \cdot s_i & -r_i \cdot b_i & & -c \cdot x_i\ ] & \\
\text{subject to :} & & & & x_1 & = 0 \\
\forall i \in [m] & & & & x_i & \leq t \\
\forall 2 \leq i \leq m & -s_{i-1} & +b_{i-1} & +x_{i-1} & - x_i & = 0 \\
& -s_m & +b_m & & +x_m & = 0 \\
\forall i \in [m] & s_i \in \mathbb{N}, & b_i \in \mathbb{N}, & & x_i \in \mathbb{N} &
\end{array}
}
$$

- ΕΡΩΤΗΣΗ: Βλέπετε κάποιο πρόβλημα;

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (III)

$$
\begin{array}{llllll}
\textbf{maximize} & \sum_{i=1}^{m} [\ r_i \cdot s_i & -r_i \cdot b_i & -c \cdot x_i\ ] & & \\
\text{subject to :} & & & x_1 & = 0 \\
\forall i \in [m] & & & x_i & \leq t \\
\forall 2 \leq i \leq m & -s_{i-1} & +b_{i-1} & +x_{i-1} - x_i & = 0 \\
 & -s_m & +b_m & +x_m & = 0 \\
\forall i \in [m] & s_i \in \mathbb{N}, & b_i \in \mathbb{N}, & x_i \in \mathbb{N} &
\end{array}
$$

- ΕΡΩΤΗΣΗ: Βλέπετε κάποιο πρόβλημα;
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ακεραιότητα!!!

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (III)

$$
\begin{array}{lrrrl}
\textbf{maximize} & \sum_{i=1}^{m}[\ r_i \cdot s_i & -r_i \cdot b_i & -c \cdot x_i\ ] & \\
\text{subject to :} & & & x_1 & = 0 \\
\forall i \in [m] & & & x_i & \leq t \\
\forall 2 \leq i \leq m & -s_{i-1} & +b_{i-1} & +x_{i-1} - x_i & = 0 \\
 & -s_m & +b_m & +x_m & = 0 \\
\forall i \in [m] & s_i \geq 0, & b_i \geq 0, & x_i \geq 0 &
\end{array}
$$

- ΕΡΩΤΗΣΗ: Βλέπετε κάποιο πρόβλημα;
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ακεραιότητα!!!
  Όχι σημαντικό πρόβλημα (εδώ), συνήθως θεωρούμε το **χαλαρωμένο ΓΠ** (με πρόσημα, αντί για ακεραιότητα) θεωρώντας *μεγάλης χωρητικότητας* αποθήκη (όπου έχει νόημα η διαχείριση).

- ΕΡΩΤΗΣΗ: Πώς θα μπορούσαμε να απλοποιήσουμε το συγκεκριμένο ΓΠ;

$$
\begin{array}{lrrrl}
\textbf{maximize} & \multicolumn{4}{l}{\sum_{i=1}^{m} [\ r_i \cdot s_i - r_i \cdot b_i - c \cdot x_i\ ]} \\
\text{subject to :} & & & x_1 & = 0 \\
\forall i \in [m] & & & x_i & \leq t \\
\forall 2 \leq i \leq m & -s_{i-1} & +b_{i-1} & +x_{i-1} - x_i & = 0 \\
 & -s_m & +b_m & +x_m & = 0 \\
\forall i \in [m] & s_i \geq 0, & b_i \geq 0, & x_i \geq 0 &
\end{array}
$$

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (ΙΙΙ)

- ΕΡΩΤΗΣΗ: Πώς θα μπορούσαμε να απλοποιήσουμε το συγκεκριμένο ΓΠ;
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Χρήση μόνο των πραγματικά απαραίτητων μεταβλητών (κυρίως) και περιορισμών!!!

$$
\begin{array}{rlllr}
\textbf{maximize} & \multicolumn{4}{l}{\sum_{i=1}^{m}[\ r_i \cdot s_i - r_i \cdot b_i - c \cdot x_i\ ]} \\
\text{subject to}: & & & x_1 & = 0 \\
\forall i \in [m] & & & x_i & \leq t \\
\forall 2 \leq i \leq m & -s_{i-1} & +b_{i-1} & +x_{i-1} - x_i & = 0 \\
 & -s_m & +b_m & +x_m & = 0 \\
\forall i \in [m] & s_i \geq 0, & b_i \geq 0, & x_i \geq 0 &
\end{array}
$$

Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (III)

- ΕΡΩΤΗΣΗ: Πώς θα μπορούσαμε να απλοποιήσουμε το συγκεκριμένο ΓΠ;
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Χρήση μόνο των πραγματικά απαραίτητων μεταβλητών (κυρίως) και περιορισμών!!!

$$
\begin{array}{lrl}
\textbf{maximize} & \sum_{i=1}^{m} [\ r_i \cdot s_i - r_i \cdot b_i - c \cdot x_i\ ] & \\
\text{subject to}: & x_1 & = 0 \\
\forall i \in [m] & x_i & \leq t \\
\forall 2 \leq i \leq m & x_{i-1} - x_i & = s_{i-1} - b_{i-1} \\
 & x_m & = s_m - b_m \\
\forall i \in [m] & s_i \geq 0, \quad b_i \geq 0, \quad x_i \geq 0 &
\end{array}
$$

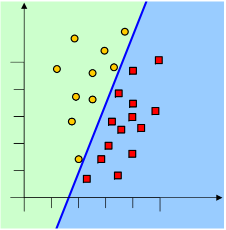
Πρόβλημα Διαχείρισης Αποθήκης (III)

- ΕΡΩΤΗΣΗ: Πώς θα μπορούσαμε *να* απλοποιήσουμε το συγκεκριμένο ΓΠ;
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Χρήση μόνο των πραγματικά απαραίτητων μεταβλητών (κυρίως) και περιορισμών!!!

$$
\begin{array}{lrl}
\textbf{maximize} & \sum_{i=2}^{m}(r_i - r_{i-1} - c)\cdot x_i & \\
\text{subject to}: & x_1 & = 0 \\
\forall i \in [m] & x_i & \leq t \\
\forall 2 \leq i \leq m & x_{i-1} - x_i & = s_{i-1} - b_{i-1} \\
 & x_m & = s_m - b_m \\
\forall i \in [m] & s_i \geq 0, \quad b_i \geq 0, \quad x_i \geq 0 &
\end{array}
$$

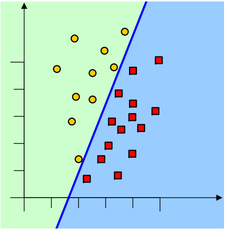
Support Vector Machines (I)

- Έστω δυο συλλογές σημείων $S = \{\mathbf{s_1}, \ldots, \mathbf{s_m}\}$ και $T = \{\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n}\}$ στον χώρο $\mathbb{R}^d$. Να βρεθεί (αν υπάρχει) υπερεπίπεδο $H = H(\mathbf{a}, \beta) \subset \mathbb{R}^d$ που διαχωρίζει τα σημεία του S από αυτά του T, δηλαδή, $H \cap S = H \cap T = \emptyset$, και όλα τα σημεία του S βρίσκονται σε διαφορετικό υποχώρο από όλα τα σημεία του T, ως προς το H.



Support Vector Machines (I)

- Έστω δυο συλλογές σημείων $S = \{\mathbf{s_1}, \ldots, \mathbf{s_m}\}$ και $T = \{\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n}\}$ στον χώρο $\mathbb{R}^d$. Να βρεθεί (αν υπάρχει) υπερεπίπεδο $H = H(\mathbf{a}, \beta) \subset \mathbb{R}^d$ που διαχωρίζει τα σημεία του S από αυτά του T, δηλαδή, $H \cap S = H \cap T = \emptyset$, και όλα τα σημεία του S βρίσκονται σε διαφορετικό υποχώρο από όλα τα σημεία του T, ως προς το H.



ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ:

- Ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^d$ ορίζεται ως προς σημείο $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ και πραγματικό αριθμό $\beta \in \mathbb{R}$:
  $H(\mathbf{a}, \beta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}' \cdot \mathbf{x} - \beta = 0\}$.
- Οι δυο υποχώροι που ορίζει το H:
  - $C_1 = C(\mathbf{a}, \beta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}' \cdot \mathbf{x} - \beta \geq 0\}$, και
  - $C_2 = C(-\mathbf{a}, -\beta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}' \cdot \mathbf{x} - \beta \leq 0\}$.

Support Vector Machines (II)

Περιορισμοί:

1. Κανένα σημείο των S,T δεν πρέπει να ανήκει στο υπερεπίπεδο που αναζητάμε:

Support Vector Machines (II)

Περιορισμοί:

1. Κανένα σημείο των S, T δεν πρέπει να ανήκει στο υπερεπίπεδο που αναζητάμε: $\boxed{\forall \mathbf{x} \in S \cup T,\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{x} - \beta \neq 0}$
2. Όλα τα σημεία του S βρίσκονται «πάνω» από το H, και όλα τα σημεία του T βρίσκονται «κάτω» από το H:

Support Vector Machines (II)

Περιορισμοί:

1. Κανένα σημείο των S, T δεν πρέπει να ανήκει στο υπερεπίπεδο που αναζητάμε: $\boxed{\forall \mathbf{x} \in S \cup T,\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{x} - \beta \neq 0}$
2. Όλα τα σημεία του S βρίσκονται «πάνω» από το H, και όλα τα σημεία του T βρίσκονται «κάτω» από το H: $\exists \varepsilon_1 > 0, \exists \varepsilon_2 > 0$ και $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ τ.ώ.
   - $\forall \mathbf{s} \in S,\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{s} - \beta \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon > 0$
   - $\forall \mathbf{t} \in T,\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{t} - \beta \leq -\varepsilon_2 \leq -\varepsilon < 0$

Support Vector Machines (II)

Περιορισμοί:

1. Κανένα σημείο των S, T δεν πρέπει να ανήκει στο υπερεπίπεδο που αναζητάμε: $\boxed{\forall \mathbf{x} \in S \cup T,\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{x} - \beta \neq 0}$
2. Όλα τα σημεία του S βρίσκονται «πάνω» από το H, και όλα τα σημεία του T βρίσκονται «κάτω» από το H: $\exists \varepsilon_1 > 0, \exists \varepsilon_2 > 0$ και $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ τ.ώ.
   - $\forall \mathbf{s} \in S,\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{s} - \beta \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon > 0$
   - $\forall \mathbf{t} \in T,\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{t} - \beta \leq -\varepsilon_2 \leq -\varepsilon < 0$

$$\boxed{\begin{array}{lrl} \textbf{maximize} & \varepsilon & \\ \text{subject to}: & \mathbf{a}' \cdot \mathbf{s} - \beta - \varepsilon & \geq 0,\ \forall \mathbf{s} \in S \\ & -\mathbf{a}' \cdot \mathbf{t} + \beta - \varepsilon & \geq 0,\ \forall \mathbf{t} \in T \end{array}}$$

Support Vector Machines (II)

Περιορισμοί:

1. Κανένα σημείο των S, T δεν πρέπει να ανήκει στο υπερεπίπεδο που αναζητάμε: $\boxed{\forall \mathbf{x} \in S \cup T, \;\; \mathbf{a}' \cdot \mathbf{x} - \beta \neq 0}$
2. Όλα τα σημεία του S βρίσκονται «πάνω» από το H, και όλα τα σημεία του T βρίσκονται «κάτω» από το H: $\exists \varepsilon_1 > 0, \exists \varepsilon_2 > 0$ και $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ τ.ώ.
    - $\forall \mathbf{s} \in S, \;\; \mathbf{a}' \cdot \mathbf{s} - \beta \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon > 0$
    - $\forall \mathbf{t} \in T, \;\; \mathbf{a}' \cdot \mathbf{t} - \beta \leq -\varepsilon_2 \leq -\varepsilon < 0$

$$\boxed{\begin{array}{lrl} \textbf{maximize} & \varepsilon & \\ \text{subject to :} & \mathbf{a}' \cdot \mathbf{s} - \beta - \varepsilon & \geq 0, \;\; \forall \mathbf{s} \in S \\ & -\mathbf{a}' \cdot \mathbf{t} + \beta - \varepsilon & \geq 0, \;\; \forall \mathbf{t} \in T \end{array}}$$

if η βέλτιστη λύση $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\beta}, \bar{\varepsilon})$ έχει $\bar{\varepsilon} > 0$

Support Vector Machines (II)

Περιορισμοί:

1. Κανένα σημείο των S, T δεν πρέπει να ανήκει στο υπερεπίπεδο που αναζητάμε: $\boxed{\forall \mathbf{x} \in S \cup T,\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{x} - \beta \neq 0}$
2. Όλα τα σημεία του S βρίσκονται «πάνω» από το H, και όλα τα σημεία του T βρίσκονται «κάτω» από το H: $\exists \varepsilon_1 > 0, \exists \varepsilon_2 > 0$ και $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ τ.ώ.
   - $\forall \mathbf{s} \in S,\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{s} - \beta \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon > 0$
   - $\forall \mathbf{t} \in T,\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{t} - \beta \leq -\varepsilon_2 \leq -\varepsilon < 0$

$$\boxed{\begin{array}{lrl} \textbf{maximize} & \varepsilon & \\ \text{subject to :} & \mathbf{a}' \cdot \mathbf{s} - \beta - \varepsilon & \geq 0,\ \forall \mathbf{s} \in S \\ & -\mathbf{a}' \cdot \mathbf{t} + \beta - \varepsilon & \geq 0,\ \forall \mathbf{t} \in T \end{array}}$$

if η βέλτιστη λύση $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\beta}, \bar{\varepsilon})$ έχει $\bar{\varepsilon} > 0$
then το ζητούμενο υπερεπίπεδο είναι το $H(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\beta})$

Support Vector Machines (II)

Περιορισμοί:

1. Κανένα σημείο των S, T δεν πρέπει να ανήκει στο υπερεπίπεδο που αναζητάμε: $\boxed{\forall \mathbf{x} \in S \cup T,\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{x} - \beta \neq 0}$
2. Όλα τα σημεία του S βρίσκονται «πάνω» από το H, και όλα τα σημεία του T βρίσκονται «κάτω» από το H: $\exists \varepsilon_1 > 0, \exists \varepsilon_2 > 0$ και $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ τ.ώ.
   - $\forall \mathbf{s} \in S,\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{s} - \beta \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon > 0$
   - $\forall \mathbf{t} \in T,\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{t} - \beta \leq -\varepsilon_2 \leq -\varepsilon < 0$

$$\boxed{\begin{array}{lrl} \textbf{maximize} & \varepsilon & \\ \text{subject to :} & \mathbf{a}' \cdot \mathbf{s} - \beta - \varepsilon & \geq 0,\ \forall \mathbf{s} \in S \\ & -\mathbf{a}' \cdot \mathbf{t} + \beta - \varepsilon & \geq 0,\ \forall \mathbf{t} \in T \end{array}}$$

if η βέλτιστη λύση $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\beta}, \bar{\varepsilon})$ έχει $\bar{\varepsilon} > 0$
then το ζητούμενο υπερεπίπεδο είναι το $H(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\beta})$
else δεν υπάρχει εφικτή λύση.

Support Vector Machines (III)

ΕΡΩΤΗΣΗ: Πώς λύνεται το πρόβλημα, αν επιτρέπεται *να* διέρχεται το υπερεπίπεδο από *το πολύ ένα σημείο* του $S \cup T$;

Support Vector Machines (III)

ΕΡΩΤΗΣΗ: Πώς λύνεται το πρόβλημα, αν επιτρέπεται να διέρχεται το υπερεπίπεδο από *το πολύ ένα σημείο* του $S \cup T$;

(1) $(\mathbf{a}^*, \beta^*, \varepsilon^*) \in \arg\max\{\varepsilon : \forall \mathbf{s} \in S, \mathbf{a}'\mathbf{s} - \beta \geq \varepsilon; \forall \mathbf{t} \in T, \mathbf{a}'\mathbf{t} - \beta \leq -\varepsilon\}$

(2) **if** $\varepsilon^* > 0$ **then return** $((\mathbf{a}^*, \beta^*))$

(3) **if** το ΓΠ του βήματος (1) έχει λύση (με $\varepsilon^* = 0$) **then** :

(3.1) **for all** $\bar{\mathbf{s}} \in S$ **do** /* $\bar{\mathbf{s}}$: υποψήφιο σημείο πάνω στο υπερεπίπεδο */

(3.1.1) $$(\mathbf{a}^*, \beta^*, \varepsilon^*) \in \arg\max \left\{ \varepsilon : \begin{array}{rr} & \mathbf{a}'\bar{\mathbf{s}} - \beta = 0; \\ \forall \mathbf{s} \in S \setminus \{\bar{\mathbf{s}}\}, & \mathbf{a}'\mathbf{s} - \beta \geq \varepsilon; \\ \forall \mathbf{t} \in T, & \mathbf{a}'\mathbf{t} - \beta \leq -\varepsilon \end{array} \right\}$$

(3.1.2) **if** $\varepsilon^* > 0$ **then return** $((\mathbf{a}^*, \beta^*))$

(3.2) **for all** $\bar{\mathbf{t}} \in T$ **do** /* $\bar{\mathbf{t}}$: υποψήφιο σημείο πάνω στο υπερεπίπεδο */

(3.2.1) $$(\mathbf{a}^*, \beta^*, \varepsilon^*) \in \arg\max \left\{ \varepsilon : \begin{array}{rr} \forall \mathbf{s} \in S, & \mathbf{a}'\mathbf{s} - \beta \geq \varepsilon; \\ & \mathbf{a}'\bar{\mathbf{t}} - \beta = 0; \\ \forall \mathbf{t} \in T \setminus \{\bar{\mathbf{t}}\}, & \mathbf{a}'\mathbf{t} - \beta \leq -\varepsilon \end{array} \right\}$$

(3.2.2) **if** $\varepsilon^* > 0$ **then return** $((\mathbf{a}^*, \beta^*))$

(4) **return** («ΑΔΥΝΑΤΟΝ»)

LP-Feasibility Test

- LP Feasibility Problem: Έλεγχος αν είναι κενό το σύνολο:
$$\boxed{F := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}}$$

LP-Feasibility Test

- LP Feasibility Problem: Έλεγχος αν είναι κενό το σύνολο:

$$\boxed{F := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}}$$

- Απάντηση μέσω επίλυσης κατάλληλου γ.π. (δείτε το Λήμμα του Farkas):

$$\text{(LPF)} \quad \boxed{\begin{array}{lrcl} \text{minimize} & t & & \\ \text{s.t.}: & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\ & \mathbf{1}t + B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ & t \geq 0 & & \end{array}}$$

LP-Feasibility Test

- LP Feasibility Problem: Έλεγχος αν είναι κενό το σύνολο:

$$\boxed{F := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}}$$

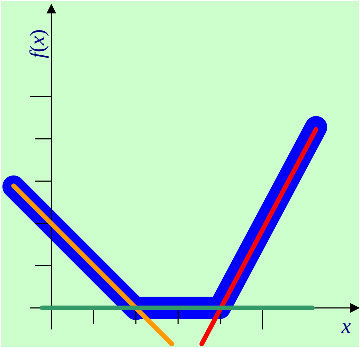
- Απάντηση μέσω επίλυσης κατάλληλου γ.π. (δείτε το Λήμμα του Farkas):

$$(\text{LPF}) \quad \boxed{\begin{array}{lrcl} \text{minimize} & t & & \\ \text{s.t.}: & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\ & \mathbf{1}t + B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ & t \geq 0 & & \end{array}}$$

1. **if** (LPF) ΜΗ ΕΠΙΛΥΣΙΜΟ
2. **then return**($F = \emptyset$)
3. **else** /* (LPF) ΕΠΙΛΥΣΙΜΟ */
4. **if** υπάρχει εφικτή λύση $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$ τ.ώ. $\bar{t} \leq 0$
5. **then return**($\bar{\mathbf{x}} \in F \neq \emptyset$)
6. **else return**($F = \emptyset$)

MIN-MAX Συναρτήσεις

$$\begin{array}{rrcl} \text{minimize} & \max_{i=1,\ldots,k}\{\mathbf{c_i}'\mathbf{x}+d_i\} & & \\ \text{s.t.}: & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\ & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0},\ \ J\subseteq[n] \end{array}$$

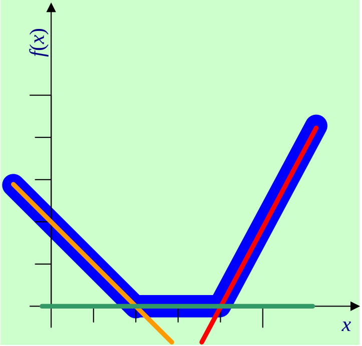


MIN-MAX Συναρτήσεις

$$\begin{array}{|rrcl|}\hline \text{minimize} & \multicolumn{3}{l|}{\max_{i=1,\ldots,k}\{\mathbf{c_i}'\mathbf{x}+d_i\}} \\ \text{s.t.}: & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\ & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0},\ \ J\subseteq[n] \\ \hline \end{array}$$

$$\equiv$$

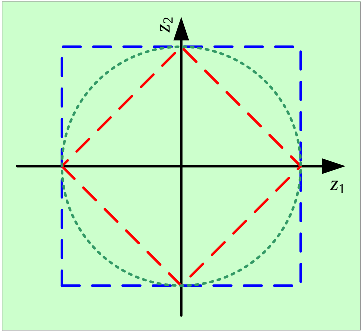
$$\begin{array}{|rrcl|}\hline \text{minimize} & v & & \\ \text{s.t.}: & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\ & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ \forall i\in[k] & v-\mathbf{c_i}'\mathbf{x} & \geq & d_i \\ & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0},\ \ J\subseteq[n] \\ \hline \end{array}$$



ℓ_1-Norm Minimization

$$\begin{array}{lrcl} \text{min.} & \|C\mathbf{x}-\mathbf{d}\|_1 & & \\ \text{s.t.}: & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\ & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0}, \quad J \subseteq [n] \end{array}$$

- ℓ_1 norm: $\|\mathbf{z}\|_1 = \sum_{j\in[n]} |z_j|$
- $\ell_2$norm: $\|\mathbf{z}\|_2 = \left(\sum_{j\in[n]} z_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- ℓ_∞norm: $\|\mathbf{z}\|_\infty = \max_{j\in[n]} |z_j|$
- Σημεία με τιμή νόρμας 1:



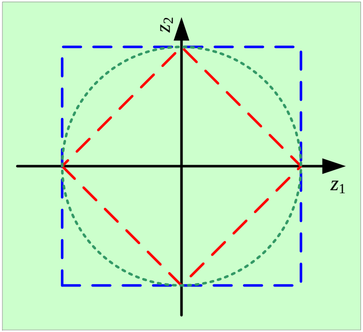
ℓ_1-Norm Minimization

$$\begin{array}{lrcl} \text{min.} & \|C\mathbf{x}-\mathbf{d}\|_1 & & \\ \text{s.t.}: & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\ & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0},\ J\subseteq[n] \end{array}$$

$$\equiv$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{min.} & \mathbf{1}'\mathbf{y} & & \\ \text{s.t.}: & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\ & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{y}+C\mathbf{x} & \geq & \mathbf{d} \\ & \mathbf{y}-C\mathbf{x} & \geq & -\mathbf{d} \\ & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0},\ J\subseteq[n] \end{array}$$

- ℓ_1 norm: $\|\mathbf{z}\|_1 = \sum_{j\in[n]} |z_j|$
- $\ell_2$norm: $\|\mathbf{z}\|_2 = \left(\sum_{j\in[n]} z_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- ℓ_∞norm: $\|\mathbf{z}\|_\infty = \max_{j\in[n]} |z_j|$
- Σημεία με τιμή νόρμας 1:



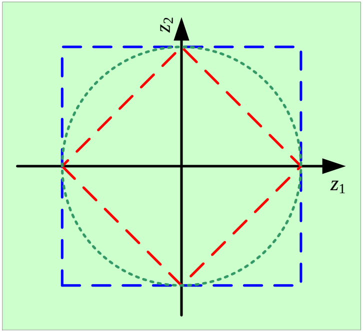
ℓ_2-Norm (aka Least-Squares) Minimization

$$\boxed{\text{min.} \quad ||C\mathbf{x} - \mathbf{d}||_2}$$

- **Κλειστός τύπος** για τη λύση (υποθέτοντας ότι $rank(C) = n$):

$$\boxed{\bar{\mathbf{x}} = (C'C)^{-1}C'\mathbf{d}}$$

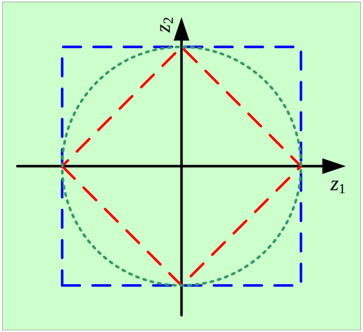
- ℓ_1 norm: $||\mathbf{z}||_1 = \sum_{j\in[n]} |z_j|$
- $\ell_2$norm: $||\mathbf{z}||_2 = \left(\sum_{j\in[n]} z_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- ℓ_∞norm: $||\mathbf{z}||_\infty = \max_{j\in[n]} |z_j|$
- Σημεία με τιμή νόρμας 1:



ℓ_∞-Norm Minimization

$$\begin{array}{lrcl} \text{min.} & \multicolumn{3}{l}{||C\mathbf{x}-\mathbf{d}||_\infty} \\ \text{s.t. :} & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\ & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0}, \; J \subseteq [n] \end{array}$$

- ℓ_1 norm: $||\mathbf{z}||_1 = \sum_{j\in[n]} |z_j|$
- $\ell_2$norm: $||\mathbf{z}||_2 = \left(\sum_{j\in[n]} z_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- ℓ_∞norm: $||\mathbf{z}||_\infty = \max_{j\in[n]} |z_j|$
- Σημεία με τιμή νόρμας 1:



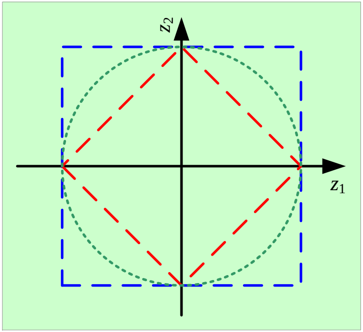
ℓ_∞-Norm Minimization

$$\begin{array}{lrcl} \text{min.} & \|C\mathbf{x}-\mathbf{d}\|_\infty & & \\ \text{s.t.:} & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\ & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0},\ J \subseteq [n] \end{array}$$

$$\equiv$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{min.} & v & & \\ \text{s.t.:} & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\ & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{1}v + C\mathbf{x} & \geq & \mathbf{d} \\ & \mathbf{1}v - C\mathbf{x} & \geq & -\mathbf{d} \\ & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0},\ J \subseteq [n] \end{array}$$

- ℓ_1 norm: $||\mathbf{z}||_1 = \sum_{j\in[n]} |z_j|$
- $\ell_2$norm: $||\mathbf{z}||_2 = \left(\sum_{j\in[n]} z_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- ℓ_∞norm: $||\mathbf{z}||_\infty = \max_{j\in[n]} |z_j|$
- Σημεία με τιμή νόρμας 1:



Linear Fractional Programming (I)

$$
\boxed{
\begin{array}{llcl}
\text{min.} & \frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}+d}{\mathbf{f}'\mathbf{x}+g} & & \\
\text{s.t. :} & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\
 & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\
 & \mathbf{f}'\mathbf{x} & \geq & -g \\
 & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0}, \;\; J \subseteq [n]
\end{array}
}
$$

Linear Fractional Programming (I)

$$\begin{array}{lrcl} \text{min.} & \frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}+d}{\mathbf{f}'\mathbf{x}+g} & & \\ \text{s.t.}: & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\ & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{f}'\mathbf{x} & \geq & -g \\ & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0}, \quad J \subseteq [n] \end{array}$$

- Ισοδύναμο **μη-γραμμικό** πρόγραμμα (για $v \geq \frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}+d}{\mathbf{f}'\mathbf{x}+g}$):

(FLP)

$$\begin{array}{lrcl} \text{min.} & v & & \\ \text{s.t.}: & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\ & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{f}'\mathbf{x} & \geq & -g \\ & v\cdot\mathbf{f}'\mathbf{x} + v\cdot g - \mathbf{c}'\mathbf{x} & \geq & d \\ & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0}, \quad J \subseteq [n] \end{array}$$

Linear Fractional Programming (II)

Επίλυση με Χρήση Μεθόδου Διχοτόμησης

(FLP_FEASIBILITY)(v)

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{min.} & 0 & & \\
\text{s.t. :} & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\
 & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\
 & \mathbf{f}'\mathbf{x} & \geq & -g \\
 & v \cdot \mathbf{f}'\mathbf{x} - \mathbf{c}'\mathbf{x} & \geq & d - v \cdot g \\
 & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0}, \ \ J \subseteq [n]
\end{array}
$$

Linear Fractional Programming (II)

Επίλυση με Χρήση Μεθόδου Διχοτόμησης

(FLP_FEASIBILITY)(v)

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{min.} & 0 & & & \\
\text{s.t.}: & & A\mathbf{x} & = & \mathbf{a} \\
& & B\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\
& & \mathbf{f}'\mathbf{x} & \geq & -g \\
& & v \cdot \mathbf{f}'\mathbf{x} - \mathbf{c}'\mathbf{x} & \geq & d - v \cdot g \\
& & \mathbf{x}_J & \geq & \mathbf{0},\ \ J \subseteq [n]
\end{array}
$$

$FLPBisection(A, \mathbf{a}, B, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d, \mathbf{f}, g, \epsilon)$

ΕΙΣΟΔΟΣ: L, U: Οριοθετούν ένα διάστημα τ.ώ.: $\bar{v} \in [L, U]$.
$\epsilon > 0$: Ανοχή Σφάλματος.

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ:

1. **repeat**
2. Λύσε το (FLP_FEASIBILITY)(v) για $v = \frac{L+U}{2}$.
3. **if** *FEASIBLE*
4. **then** $U := v$
5. **else** /* *INFEASIBLE* */ $L := v$
6. **until** $U - L \leq \epsilon$

Linear Fractional Programming (III)

$FLPBisection(A, \mathbf{a}, B, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d, \mathbf{f}, g, \epsilon)$

ΕΙΣΟΔΟΣ: L, U: Οριοθετούν ένα διάστημα τ.ώ.: $\bar{v} \in [L, U]$.
$\epsilon_0 := U - L > 0$: Αρχική ανοχή σφάλματος.
$\epsilon > 0$: Τελική ανοχή σφάλματος.

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ:

1. **repeat**
2. Λύσε το (FLP_FEASIBILITY)(v) για $v = \frac{L+U}{2}$.
3. **if** *FEASIBLE*
4. **then** $U := v$
5. **else** /* INFEASIBLE */ $L := v$
6. **until** $U - L \leq \epsilon$

- Το ΒΗΜΑ-2 επιλύει ένα γ.π. (η v εκλαμβάνεται πλέον ως σταθερά στο (FLP_FEASIBILITY)(v).

Linear Fractional Programming (III)

$FLPBisection(A, \mathbf{a}, B, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d, \mathbf{f}, g, \epsilon)$

ΕΙΣΟΔΟΣ: L, U: Οριοθετούν ένα διάστημα τ.ώ.: $\bar{v} \in [L, U]$.
$\epsilon_0 := U - L > 0$: Αρχική ανοχή σφάλματος.
$\epsilon > 0$: Τελική ανοχή σφάλματος.

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ:

1. **repeat**
2. Λύσε το (FLP_FEASIBILITY)(v) για $v = \frac{L+U}{2}$.
3. **if** *FEASIBLE*
4. **then** $U := v$
5. **else** /* *INFEASIBLE* */ $L := v$
6. **until** $U - L \leq \epsilon$

- Το ΒΗΜΑ-2 επιλύει ένα γ.π. (η v εκλαμβάνεται πλέον ως σταθερά στο (FLP_FEASIBILITY)(v).
- Η ακρίβεια *«υποδιπλασιάζεται»* σε κάθε επανάληψη.

Linear Fractional Programming (III)

$FLPBisection(A, \mathbf{a}, B, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d, \mathbf{f}, g, \epsilon)$

ΕΙΣΟΔΟΣ: L, U: Οριοθετούν ένα διάστημα τ.ώ.: $\bar{v} \in [L, U]$.
$\epsilon_0 := U - L > 0$: Αρχική ανοχή σφάλματος.
$\epsilon > 0$: Τελική ανοχή σφάλματος.

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ:

1. **repeat**
2. Λύσε το (FLP_FEASIBILITY)(v) για $v = \frac{L+U}{2}$.
3. **if** *FEASIBLE*
4. **then** $U := v$
5. **else** /* *INFEASIBLE* */ $L := v$
6. **until** $U - L \le \epsilon$

- Το ΒΗΜΑ-2 επιλύει ένα γ.π. (η v εκλαμβάνεται πλέον ως σταθερά στο (FLP_FEASIBILITY)(v).
- Η ακρίβεια *«υποδιπλασιάζεται»* σε κάθε επανάληψη.
- Μέγιστο πλήθος επαναλήψεων;

Linear Fractional Programming (III)

$FLPBisection(A, \mathbf{a}, B, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d, \mathbf{f}, g, \epsilon)$

ΕΙΣΟΔΟΣ: L, U: Οριοθετούν ένα διάστημα τ.ώ.: $\bar{v} \in [L, U]$.
$\epsilon_0 := U - L > 0$: Αρχική ανοχή σφάλματος.
$\epsilon > 0$: Τελική ανοχή σφάλματος.

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ:

1. **repeat**
2. Λύσε το (FLP_FEASIBILITY)(v) για $v = \frac{L+U}{2}$.
3. **if** *FEASIBLE*
4. **then** $U := v$
5. **else** /* *INFEASIBLE* */ $L := v$
6. **until** $U - L \leq \epsilon$

- Το ΒΗΜΑ-2 επιλύει ένα γ.π. (η v εκλαμβάνεται πλέον ως σταθερά στο (FLP_FEASIBILITY)(v).
- Η ακρίβεια *«υποδιπλασιάζεται»* σε κάθε επανάληψη.
- Μέγιστο πλήθος επαναλήψεων;
- $k = \left\lceil \log_2 \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) \right\rceil$.

Ο αλγόριθμος SIMPLEX

...pivots, αποφυγή κύκλων, σημείο εκκίνησης...

Αξιοποίηση Κορυφών Πολυέδρου

- Άσκηση 2.2 (σημειώσεις): Αν ένα γραμμικό πρόγραμμα ($LP_=$) είναι **φραγμένο**, τότε υπάρχει *βέλτιστη λύση* που είναι *κορυφή* του χώρου λύσεων.

Αξιοποίηση Κορυφών Πολυέδρου

- Άσκηση 2.2 (σημειώσεις): Αν ένα γραμμικό πρόγραμμα ($LP_=$) είναι **φραγμένο**, τότε υπάρχει *βέλτιστη λύση* που είναι *κορυφή* του χώρου λύσεων.

$\therefore$ Αρκεί να ψάξει κανείς μεταξύ των κορυφών για να βρει τη βέλτιστη λύση (αν υπάρχει).

Αξιοποίηση Κορυφών Πολυέδρου

- Άσκηση 2.2 (σημειώσεις): Αν ένα γραμμικό πρόγραμμα ($LP_=$) είναι **φραγμένο**, τότε υπάρχει *βέλτιστη λύση* που είναι *κορυφή* του χώρου λύσεων.

$\therefore$ Αρκεί να ψάξει κανείς μεταξύ των κορυφών για να βρει τη βέλτιστη λύση (αν υπάρχει).

- ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Εκθετικός ο αριθμός των κορυφών!!!

Αξιοποίηση Κορυφών Πολυέδρου

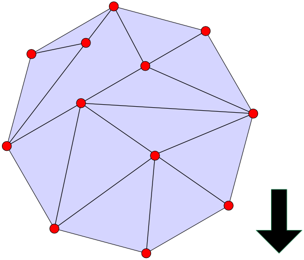
- Άσκηση 2.2 (σημειώσεις): Αν ένα γραμμικό πρόγραμμα ($LP_=$) είναι **φραγμένο**, τότε υπάρχει *βέλτιστη λύση* που είναι *κορυφή* του χώρου λύσεων.

$\therefore$ Αρκεί να ψάξει κανείς μεταξύ των κορυφών για να βρει τη βέλτιστη λύση (αν υπάρχει).

- ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Εκθετικός ο αριθμός των κορυφών!!!
- **SIMPLEX:** Ξεκινά από αυθαιρετη κορυφή και τη συγκρίνει με τις «γειτονικές» της κορυφές. Ενόσω υπάρχει καλύτερη (γειτονική) κορυφή, ο αλγόριθμος μετακινείται σε αυτή και συνεχίζει.

Αλγόριθμοι Simplex [Dantzig (1947)]

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Εκκίνηση από αυθαίρετη κορυφή, κίνηση *προς γειτονική κορυφή* χωρίς να επαναλαμβάνουμε κορυφές, και δίχως να αυξάνουμε το κόστος, μέχρι να καταλήξουμε σε *κορυφή βέλτιστου κόστους* (μεταξύ των γειτονικών της).

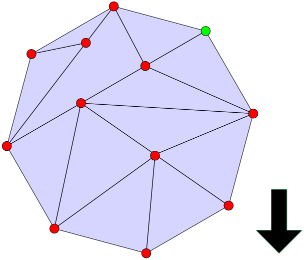


Αλγόριθμοι Simplex [Dantzig (1947)]

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Εκκίνηση από αυθαιρετη κορυφή, κίνηση *προς γειτονική κορυφή* χωρίς να επαναλαμβάνουμε κορυφές, και δίχως να αυξάνουμε το κόστος, μέχρι να καταλήξουμε σε *κορυφή βέλτιστου κόστους* (μεταξύ των γειτονικών της).

Συστατικά:

- Επιλογή Σημείου Εκκίνησης: Αξιοποίηση του ίδιου του Simplex (σε διαφορετικό στιγμιότυπο).
- Αναπαράσταση τρέχουσας κατάστασης: **Ταμπλό**.

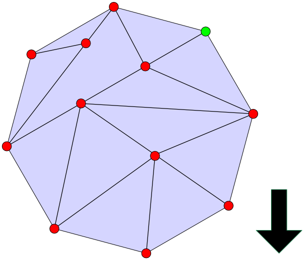


Αλγόριθμοι Simplex [Dantzig (1947)]

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Εκκίνηση από αυθαιρετη κορυφή, κίνηση *προς γειτονική κορυφή* χωρίς να επαναλαμβάνουμε κορυφές, και δίχως να αυξάνουμε το κόστος, μέχρι να καταλήξουμε σε *κορυφή βέλτιστου κόστους* (μεταξύ των γειτονικών της).

Συστατικά:

- Επιλογή Σημείου Εκκίνησης: Αξιοποίηση του ίδιου του Simplex (σε διαφορετικό στιγμιότυπο).
- Αναπαράσταση τρέχουσας κατάστασης: **Ταμπλό**.
- Μετακίνηση μεταξύ γειτονικών κορυφων: **Εναλλαγές στηλών**.

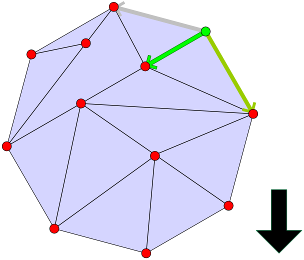


Αλγόριθμοι Simplex [Dantzig (1947)]

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Εκκίνηση από αυθαιρετη κορυφή, κίνηση *προς γειτονική κορυφή* χωρίς να επαναλαμβάνουμε κορυφές, και δίχως να αυξάνουμε το κόστος, μέχρι να καταλήξουμε σε *κορυφή βέλτιστου κόστους* (μεταξύ των γειτονικών της).

Συστατικά:

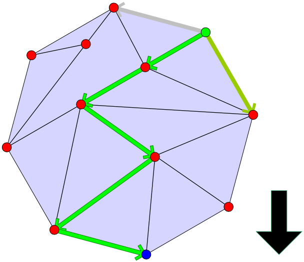
- Επιλογή Σημείου Εκκίνησης: Αξιοποίηση του ίδιου του Simplex (σε διαφορετικό στιγμιότυπο).
- Αναπαράσταση τρέχουσας κατάστασης: **Ταμπλό**.
- Μετακίνηση μεταξύ γειτονικών κορυφων: **Εναλλαγές στηλών**.
- Επιλογή νέας κορυφής: **Μη αύξηση κόστους** και **αποφυγή κύκλων**.



ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Εκκίνηση από αυθαίρετη κορυφή, κίνηση *προς γειτονική κορυφή* χωρίς να επαναλαμβάνουμε κορυφές, και δίχως να αυξάνουμε το κόστος, μέχρι να καταλήξουμε σε *κορυφή βέλτιστου κόστους* (μεταξύ των γειτονικών της).

Συστατικά:

- Επιλογή Σημείου Εκκίνησης: Αξιοποίηση του ίδιου του Simplex (σε διαφορετικό στιγμιότυπο).
- Αναπαράσταση τρέχουσας κατάστασης: **Ταμπλό**.
- Μετακίνηση μεταξύ γειτονικών κορυφων: **Εναλλαγές στηλών**.
- Επιλογή νέας κορυφής: **Μη αύξηση κόστους** και **αποφυγή κύκλων**.



- Έστω το γ.π. $(LP_{=})$ $\boxed{\textbf{min.}\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 34 \\ 38 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα
Υπενθύμιση Βασικών Λύσεων

- Έστω το γ.π. $(\mathrm{LP}_=)$ $\boxed{\min. \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 34 \\ 38 \end{bmatrix}$$

- Μια **βάση** του A είναι η $\beta = (1, 2, 5, 6)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Πώς επαληθεύεται αυτό;

Παράδειγμα
Υπενθύμιση Βασικών Λύσεων

- Έστω το γ.π. $(\mathrm{LP}_=)$ $\boxed{\mathbf{min.}\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 34 \\ 38 \end{bmatrix}$$

- Μια **βάση** του A είναι η $\beta = (1, 2, 5, 6)$.

Q1 Πώς επαληθεύεται αυτό; /* Από γραμμική ανεξαρτησία των στηλών της β... */

Παράδειγμα

Υπενθύμιση Βασικών Λύσεων

- Έστω το γ.π. $(LP_=)$ $\boxed{\mathbf{min.}\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 34 \\ 38 \end{bmatrix}$$

- Μια **βάση** του A είναι η $\beta = (1, 2, 5, 6)$.

Q1 Πώς επαληθεύεται αυτό; /* Από γραμμική ανεξαρτησία των στηλών της β... */

- **bfs λύση** της β: $\bar{\mathbf{x}} = [\ \bar{\mathbf{x}}_\beta = [4; 2; 6; 2];\ \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}\ ] = [\ 4; 2; 0; 0; 6; 2\ ]$

Παράδειγμα

Υπενθύμιση Βασικών Λύσεων

- Έστω το γ.π. $(LP_=)$ $\boxed{\textbf{min.}\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ όπου:

$$
A = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \Downarrow & \Downarrow & & & \Downarrow & \Downarrow \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\
-1 & 2 & 1 & -5 & 5 & 2 \\
0 & 3 & -1 & 1 & 4 & 4
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad
\mathbf{a} = \left[\begin{array}{c} 16 \\ 16 \\ 34 \\ 38 \end{array}\right]
$$

- Μια **βάση** του A είναι η $\beta = (1, 2, 5, 6)$.

Q1 Πώς επαληθεύεται αυτό; /* Από γραμμική ανεξαρτησία των στηλών της β... */

- **bfs λύση** της β: $\bar{\mathbf{x}} = [\ \bar{\mathbf{x}}_\beta = [4; 2; 6; 2];\ \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}\ ] = [\ 4; 2; 0; 0; 6; 2\ ]$

Q2 Πώς *υπολογίζεται* η $\bar{\mathbf{x}}$;

- Έστω το γ.π. $(LP_=)$ $\boxed{\min.\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 34 \\ 38 \end{bmatrix}$$

- Μια **βάση** του A είναι η $\beta = (1, 2, 5, 6)$.

Q1 Πώς επαληθεύεται αυτό; /* Από γραμμική ανεξαρτησία των στηλών της β... */

- **bfs λύση** της β: $\bar{\mathbf{x}} = [\ \bar{\mathbf{x}}_\beta = [4; 2; 6; 2];\ \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}\ ] = [\ 4; 2; 0; 0; 6; 2\ ]$

Q2 Πώς *υπολογίζεται* η $\bar{\mathbf{x}}$; /* $\bar{\mathbf{x}}_\beta = A[*, \beta])^{-1}\mathbf{a}$; $\bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$ */

Q3 Πώς *επαληθεύεται* η bfs $\bar{\mathbf{x}}$ της β, δίχως υπολογισμό;

Παράδειγμα
Υπενθύμιση Βασικών Λύσεων

- Έστω το γ.π. $(LP_=)$ $\boxed{\min.\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 34 \\ 38 \end{bmatrix}$$

- Μια **βάση** του A είναι η $\beta = (1, 2, 5, 6)$.

Q1 Πώς επαληθεύεται αυτό; /* Από γραμμική ανεξαρτησία των στηλών της β... */

- **bfs λύση** της β: $\bar{\mathbf{x}} = [\ \bar{\mathbf{x}}_\beta = [4; 2; 6; 2];\ \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}\ ] = [\ 4; 2; 0; 0; 6; 2\ ]$

Q2 Πώς *υπολογίζεται* η $\bar{\mathbf{x}}$; /* $\bar{\mathbf{x}}_\beta = A[*, \beta])^{-1}\mathbf{a}$; $\bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$ */

Q3 Πώς *επαληθεύεται* η bfs $\bar{\mathbf{x}}$ της β, δίχως υπολογισμό;

/* Μοναδική **εφικτή** λύση με $\mathbf{x}_N = \mathbf{0} \Rightarrow$ Έλεγξε εφικτότητα της $\bar{\mathbf{x}}$! */

Παράδειγμα
Κατασκευή Βασικής Εφικτής Λύσης

```
>> T = totbl(A,a);
           x1       x2       x3       x4       x5       x6        1
      ---------------------------------------------------------------------
y1 = |   2.0000   1.0000   2.0000   2.0000   1.0000   0.0000  -16.0000
y2 = |   1.0000   0.0000   4.0000   0.0000   2.0000   0.0000  -16.0000
y3 = |  -1.0000   2.0000   1.0000  -5.0000   5.0000   2.0000  -34.0000
y4 = |   0.0000   3.0000  -1.0000   1.0000   4.0000   4.0000  -38.0000

>> T = ljx(T,1,1);
           y1       x2       x3       x4       x5       x6        1
      ---------------------------------------------------------------------
x1 = |   0.5000  -0.5000  -1.0000  -1.0000  -0.5000  -0.0000    8.0000
y2 = |   0.5000  -0.5000   3.0000  -1.0000   1.5000   0.0000   -8.0000
y3 = |  -0.5000   2.5000   2.0000  -4.0000   5.5000   2.0000  -42.0000
y4 = |   0.0000   3.0000  -1.0000   1.0000   4.0000   4.0000  -38.0000
```

Παράδειγμα
Κατασκευή Βασικής Εφικτής Λύσης

```
>> T = ljx(T,2,2);
            y1        y2        x3        x4        x5        x6        1
 ------------------------------------------------------------------------------
 x1 = |   0.0000    1.0000   -4.0000    0.0000   -2.0000   -0.0000   16.0000
 x2 = |   1.0000   -2.0000    6.0000   -2.0000    3.0000    0.0000  -16.0000
 y3 = |   2.0000   -5.0000   17.0000   -9.0000   13.0000    2.0000  -82.0000
 y4 = |   3.0000   -6.0000   17.0000   -5.0000   13.0000    4.0000  -86.0000

>> T = ljx(T,3,5);
            y1        y2        x3        x4        y3        x6        1
 ------------------------------------------------------------------------------
 x1 = |   0.3077    0.2308   -1.3846   -1.3846   -0.1538    0.3077    3.3846
 x2 = |   0.5385   -0.8462    2.0769    0.0769    0.2308   -0.4615    2.9231
 x5 = |  -0.1538    0.3846   -1.3077    0.6923    0.0769   -0.1538    6.3077
 y4 = |   1.0000   -1.0000    0.0000    4.0000    1.0000    2.0000   -4.0000

>> T = ljx(T,4,6);
            y1        y2        x3        x4        y3        y4        1
 ------------------------------------------------------------------------------
 x1 = |   0.1538    0.3846   -1.3846   -2.0000   -0.3077    0.1538    4.0000
 x2 = |   0.7692   -1.0769    2.0769    1.0000    0.4615   -0.2308    2.0000
 x5 = |  -0.0769    0.3077   -1.3077    1.0000    0.1538   -0.0769    6.0000
 x6 = |  -0.5000    0.5000   -0.0000   -2.0000   -0.5000    0.5000    2.0000
```

Παράδειγμα

Κατασκευή Βασικής Εφικτής Λύσης

```
>> T = ljx(T,2,2);
            y1        y2        x3        x4        x5        x6        1
 ----------------------------------------------------------------------------
 x1 = |   0.0000    1.0000   -4.0000    0.0000   -2.0000   -0.0000   16.0000
 x2 = |   1.0000   -2.0000    6.0000   -2.0000    3.0000    0.0000  -16.0000
 y3 = |   2.0000   -5.0000   17.0000   -9.0000   13.0000    2.0000  -82.0000
 y4 = |   3.0000   -6.0000   17.0000   -5.0000   13.0000    4.0000  -86.0000

>> T = ljx(T,3,5);
            y1        y2        x3        x4        y3        x6        1
 ----------------------------------------------------------------------------
 x1 = |   0.3077    0.2308   -1.3846   -1.3846   -0.1538    0.3077    3.3846
 x2 = |   0.5385   -0.8462    2.0769    0.0769    0.2308   -0.4615    2.9231
 x5 = |  -0.1538    0.3846   -1.3077    0.6923    0.0769   -0.1538    6.3077
 y4 = |   1.0000   -1.0000    0.0000    4.0000    1.0000    2.0000   -4.0000

>> T = ljx(T,4,6);
            y1        y2        x3        x4        y3        y4        1
 ----------------------------------------------------------------------------
 x1 = |   0.1538    0.3846   -1.3846   -2.0000   -0.3077    0.1538    4.0000
 x2 = |   0.7692   -1.0769    2.0769    1.0000    0.4615   -0.2308    2.0000
 x5 = |  -0.0769    0.3077   -1.3077    1.0000    0.1538   -0.0769    6.0000
 x6 = |  -0.5000    0.5000   -0.0000   -2.0000   -0.5000    0.5000    2.0000
```

«Περιττή» πληροφορία

- Η $\bar{\mathbf{x}} = [4; 2; 0; 0; 6; 2]$ επαληθεύει το γραμμικό σύστημα:

$$A\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{4A[*,1] + 2A[*,2] + 6A[*,5] + 2A[*,6] = \mathbf{a}}$$

Παράδειγμα

«Απελευθέρωση» Μιας Μη Βασικής Μεταβλητής (Ι)

- Η $\bar{\mathbf{x}} = [4; 2; 0; 0; 6; 2]$ επαληθεύει το γραμμικό σύστημα:

$$A\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{4A[*,1] + 2A[*,2] + 6A[*,5] + 2A[*,6] = \mathbf{a}}$$

- ΕΣΤΩ ότι θα θέλαμε να αυξήσουμε μέχρι την τιμή $\theta > 0$ **μόνο μια** μη βασική μεταβλητή x_4 (κρατώντας τις υπόλοιπες μη βασικές μεταβλητές στο 0). Πώς μπορεί να γίνει αυτό;

Παράδειγμα
«Απελευθέρωση» Μιας Μη Βασικής Μεταβλητής (I)

- Η $\bar{\mathbf{x}} = [4;2;0;0;6;2]$ επαληθεύει το γραμμικό σύστημα:

$$A\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{4A[*,1] + 2A[*,2] + 6A[*,5] + 2A[*,6] = \mathbf{a}}$$

- ΕΣΤΩ ότι θα θέλαμε να αυξήσουμε μέχρι την τιμή $\theta > 0$ **μόνο μια** μη βασική μεταβλητή x_4 (κρατώντας τις υπόλοιπες μη βασικές μεταβλητές στο 0). Πώς μπορεί να γίνει αυτό;

- Παρατήρηση: Η στήλη $A[*,4]$ μπορεί να γραφτεί σαν μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των βασικών στηλών. (ΓΙΑΤΙ;)

Παράδειγμα

«Απελευθέρωση» Μιας Μη Βασικής Μεταβλητής (II)

Εξήγηση Παρατήρησης:

- $A\mathbf{x} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{x}_\beta = -(A[*,\beta])^{-1} A[*,N]\mathbf{x}_N + (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a}$

Παράδειγμα

«Απελευθέρωση» Μιας Μη Βασικής Μεταβλητής (II)

Εξήγηση Παρατήρησης:

- $A\mathbf{x} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{x}_\beta = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,N]\mathbf{x}_N + (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a}$
- Το $A[*,\beta]\mathbf{x}_\beta = \mathbf{c}$ έχει **μοναδική λύση**, $\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$. /* Γιατί; Ποια; */

Παράδειγμα

«Απελευθέρωση» Μιας Μη Βασικής Μεταβλητής (II)

Εξήγηση Παρατήρησης:

- $A\mathbf{x} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{x}_\beta = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,N]\mathbf{x}_N + (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a}$
- Το $A[*,\beta]\mathbf{x}_\beta = \mathbf{c}$ έχει **μοναδική λύση**, $\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$. /* Γιατί; Ποια; */

$\therefore$ Η (**μοναδική**) λύση $A[*,\beta])^{-1}A[*,4]$ του $A[*,\beta]\mathbf{x}_\beta = A[*,4]$ δίνει το ζητούμενο γραμμικό συνδυασμό της $A[*,4]$:

$$\boxed{A[*,4] = 2A[*,1] - A[*,2] - A[*,5] + 2A[*,6]}$$

Παράδειγμα

«Απελευθέρωση» Μιας Μη Βασικής Μεταβλητής (II)

Εξήγηση Παρατήρησης:

- $A\mathbf{x} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{x}_\beta = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,N]\mathbf{x}_N + (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a}$
- Το $A[*,\beta]\mathbf{x}_\beta = \mathbf{c}$ έχει **μοναδική λύση**, $\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$. /* Γιατί; Ποια; */

$\therefore$ Η (**μοναδική**) λύση $A[*,\beta])^{-1}A[*,4]$ του $A[*,\beta]\mathbf{x}_\beta = A[*,4]$ δίνει το ζητούμενο γραμμικό συνδυασμό της $A[*,4]$:

$$\boxed{A[*,4] = 2A[*,1] - A[*,2] - A[*,5] + 2A[*,6]}$$

Q Που υπάρχει ΗΔΗ υπολογισμένο το $A[*,\beta])^{-1}A[*,4]$;

Παράδειγμα

«Απελευθέρωση» Μιας Μη Βασικής Μεταβλητής (II)

Εξήγηση Παρατήρησης:

- $A\mathbf{x} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{x}_\beta = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,N]\mathbf{x}_N + (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a}$
- Το $A[*,\beta]\mathbf{x}_\beta = \mathbf{c}$ έχει **μοναδική λύση**, $\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$. /* Γιατί; Ποια; */

$\therefore$ Η (**μοναδική**) λύση $A[*,\beta])^{-1}A[*,4]$ του $A[*,\beta]\mathbf{x}_\beta = A[*,4]$ δίνει το ζητούμενο γραμμικό συνδυασμό της $A[*,4]$:

$$\boxed{A[*,4] = 2A[*,1] - A[*,2] - A[*,5] + 2A[*,6]}$$

Q Που υπάρχει ΗΔΗ υπολογισμένο το $A[*,\beta])^{-1}A[*,4]$;

A Στο ταμπλό (με *αντίθετο* προσημο) της $\beta = (1,2,5,6)$:

	y1	y2	x3	x4	y3	y4	1
x1 = |	0.1538	0.3846	-1.3846	-2.0000	-0.3077	0.1538	4.0000
x2 = |	0.7692	-1.0769	2.0769	1.0000	0.4615	-0.2308	2.0000
x5 = |	-0.0769	0.3077	-1.3077	1.0000	0.1538	-0.0769	6.0000
x6 = |	-0.5000	0.5000	-0.0000	-2.0000	-0.5000	0.5000	2.0000

Παράδειγμα

«Απελευθέρωση» Μιας Μη Βασικής Μεταβλητής (III)

$\boxed{\text{Q}}$ Πόσο μπορούμε *να* αυξήσουμε την (αρχικά μηδενική) τιμή της μη βασικής μεταβλητής x_4;

Παράδειγμα

«Απελευθέρωση» Μιας Μη Βασικής Μεταβλητής (III)

$\boxed{\text{Q}}$ Πόσο μπορούμε να αυξήσουμε την (αρχικά μηδενική) τιμή της μη βασικής μεταβλητής x_4;

$\boxed{\text{A}}$ Πρέπει να εξασφαλίσουμε εφικτότητα της παραγόμενης λύσης $\mathbf{z} = \bar{\mathbf{x}} + [0; 0; 0; \theta; 0; 0]$, δεδομένης της εφικτότητας της $\bar{\mathbf{x}}$:

- *Εξασφάλιση προσήμου* για νεοεισερχόμενη μεταβλητή: $z_4 = \theta > 0$.
- Να ικανοποιούνται οι *μη τετριμμένοι* περιορισμοί: $A\mathbf{z} = \mathbf{a}$.
- Να ικανοποιούνται και οι υπόλοιποι *περιορισμοί προσήμου*: $\mathbf{z} \geq 0$.

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
& & 4A[*,1] + 2A[*,2] + 6A[*,5] + 2A[*,6] &= \mathbf{a} \\
\Leftrightarrow & & 4A[*,1] + 2A[*,2] + 6A[*,5] + 2A[*,6] - \theta A[*,4] + \theta A[*,4] &= \mathbf{a} \\
\Leftrightarrow & & 4A[*,1] + 2A[*,2] + 6A[*,5] + 2A[*,6] & \\
& & -\theta\,(2A[*,1] - A[*,2] - A[*,5] + 2A[*,6]) + \theta A[*,4] &= \mathbf{a} \\
\Leftrightarrow & & (4-2\theta)A[*,1] + (2+\theta)A[*,2] + (6+\theta)A[*,5] & \\
& & +(2-2\theta)A[*,6] + \theta A[*,4] &= \mathbf{a}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα
Ικανοποίηση μη τετριμμένων περιορισμών

$$
\begin{aligned}
& 4A[*,1]+2A[*,2]+6A[*,5]+2A[*,6] &= \mathbf{a}\\
\Leftrightarrow\quad & 4A[*,1]+2A[*,2]+6A[*,5]+2A[*,6]-\theta A[*,4]+\theta A[*,4] &= \mathbf{a}\\
\Leftrightarrow\quad & 4A[*,1]+2A[*,2]+6A[*,5]+2A[*,6] & \\
& -\theta\,(2A[*,1]-A[*,2]-A[*,5]+2A[*,6])+\theta A[*,4] &= \mathbf{a}\\
\Leftrightarrow\quad & (4-2\theta)A[*,1]+(2+\theta)A[*,2]+(6+\theta)A[*,5] & \\
& +(2-2\theta)A[*,6]+\theta A[*,4] &= \mathbf{a}
\end{aligned}
$$

- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: ΟΛΑ τα σημεία του συνόλου: $\{[4-2\theta; 2+\theta; 0; \theta; 6+\theta; 2-2\theta] : \theta \geq 0\}$ ικανοποιούν όλους τους μη τετριμμένους περιορισμούς.

Παράδειγμα

Ικανοποίηση μη τετριμμένων περιορισμών

$$
\begin{aligned}
& 4A[*,1] + 2A[*,2] + 6A[*,5] + 2A[*,6] && = \mathbf{a} \\
\Leftrightarrow \quad & 4A[*,1] + 2A[*,2] + 6A[*,5] + 2A[*,6] - \theta A[*,4] + \theta A[*,4] && = \mathbf{a} \\
\Leftrightarrow \quad & 4A[*,1] + 2A[*,2] + 6A[*,5] + 2A[*,6] && \\
& -\theta\,(2A[*,1] - A[*,2] - A[*,5] + 2A[*,6]) + \theta A[*,4] && = \mathbf{a} \\
\Leftrightarrow \quad & (4-2\theta)A[*,1] + (2+\theta)A[*,2] + (6+\theta)A[*,5] && \\
& +(2-2\theta)A[*,6] + \theta A[*,4] && = \mathbf{a}
\end{aligned}
$$

- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: ΟΛΑ τα σημεία του συνόλου: $\{[4-2\theta; 2+\theta; 0; \theta; 6+\theta; 2-2\theta] : \theta \geq 0\}$ ικανοποιούν όλους τους μη τετριμμένους περιορισμούς.
- ΕΡΩΤΗΣΗ: Πού ανήκουν τα σημεία του συνόλου $\{\mathbf{t}(\theta) = [-2\theta; \theta; 0; \theta; \theta; -2\theta] : \theta \geq 0\}$;

Παράδειγμα

Ικανοποίηση περιορισμών προσήμου

- ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Από ικανοποίηση μη τετριμμένων περιορισμών...

$$\boxed{\{\ \mathbf{z}(\theta) = [4 - 2\theta, 2 + \theta, 0, \theta, 6 + \theta, 2 - 2\theta] : \theta \geq 0\ \}}$$

- ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Από ικανοποίηση μη τετριμμένων περιορισμών...

$$\boxed{\{\ \mathbf{z}(\theta) = [4-2\theta, 2+\theta, 0, \theta, 6+\theta, 2-2\theta] : \theta \geq 0\ \}}$$

$$\begin{aligned} 4-2\theta \geq 0 &\Rightarrow \theta \leq 2 \\ 2+\theta \geq 0 &\Rightarrow \theta \geq -2 \\ 6+\theta \geq 0 &\Rightarrow \theta \geq -6 \\ 2-2\theta \geq 0 &\Rightarrow \theta \leq 1 \\ & \quad\ \theta \geq 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Ικανοποίηση περιορισμών προσήμου

- ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Από ικανοποίηση μη τετριμμένων περιορισμών...

$$\boxed{\{\ \mathbf{z}(\theta) = [4-2\theta, 2+\theta, 0, \theta, 6+\theta, 2-2\theta] : \theta \geq 0\ \}}$$

$$\begin{aligned} 4-2\theta \geq 0 &\quad\Rightarrow\quad \theta \leq 2 \\ 2+\theta \geq 0 &\quad\Rightarrow\quad \theta \geq -2 \\ 6+\theta \geq 0 &\quad\Rightarrow\quad \theta \geq -6 \\ 2-2\theta \geq 0 &\quad\Rightarrow\quad \theta \leq 1 \\ &\quad\quad \theta \geq 0 \end{aligned}$$

- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Κάθε σημείο του συνόλου

$$\boxed{\{\ \mathbf{z}(\theta) = [4-2\theta; 2+\theta; 0; \theta; 6+\theta; 2-2\theta] : 1 \geq \theta > 0\ \}}$$

είναι εφικτή λύση του ($LP_=$) με όλες τις άλλες μη βασικές (εκτός της z_4) μεταβλητές με τιμή 0.

Παράδειγμα

«Μεγιστοποίηση Τιμής» Μη Βασικής Μεταβλητής (Ι)

ΣΤΟΧΟΣ: Κατασκευή **«γειτονικής» bfs λύσης** ως προς την $\bar{\mathbf{x}}$ (της β) που να περιλαμβάνει ως βασική μεταβλητή την x_4.

Παράδειγμα

«Μεγιστοποίηση Τιμής» Μη Βασικής Μεταβλητής (Ι)

ΣΤΟΧΟΣ: Κατασκευή **«γειτονικής» bfs λύσης** ως προς την $\bar{\mathbf{x}}$ (της β) που *να* περιλαμβάνει ως βασική μεταβλητή την x_4.

$\boxed{\text{Q1}}$ Ο υποχώρος εφικτών λύσεων που παράγουμε από τη β *«προς την κατεύθυνση της x_4»* τι είναι ακριβώς;

Παράδειγμα

«Μεγιστοποίηση Τιμής» Μη Βασικής Μεταβλητής (I)

ΣΤΟΧΟΣ: Κατασκευή **«γειτονικής» bfs λύσης** ως προς την $\bar{\mathbf{x}}$ (της β) που να περιλαμβάνει ως βασική μεταβλητή την x_4.

Q1 Ο υποχώρος εφικτών λύσεων που παράγουμε από τη β *«προς την κατεύθυνση της x_4»* τι είναι ακριβώς;

A1 Το $\{\mathbf{z}(\theta) = [4 - 2\theta; 2 + \theta; 0; \theta; 6 + \theta; 2 - 2\theta] : 1 \geq \theta \geq 0\}$ είναι ακμή του πολυέδρου που έχει ως άκρο την $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_\beta; \bar{\mathbf{x}}_N]$.

Q2 Τα σημεία του $\{\mathbf{t}(\theta) = [-2\theta; \theta; 0; \theta; \theta; -2\theta] : 1 \geq \theta \geq 0\}$ που δοκιμάζουμε να προσθέσουμε στην τρέχουσα βασική λύση σε ποιο σύνολο ανήκουν;

Παράδειγμα

«Μεγιστοποίηση Τιμής» Μη Βασικής Μεταβλητής (I)

ΣΤΟΧΟΣ: Κατασκευή **«γειτονικής» bfs λύσης** ως προς την $\bar{\mathbf{x}}$ (της β) που να περιλαμβάνει ως βασική μεταβλητή την x_4.

Q1 Ο υποχώρος εφικτών λύσεων που παράγουμε από τη β *«προς την κατεύθυνση της x_4»* τι είναι ακριβώς;

A1 Το $\{\mathbf{z}(\theta) = [4-2\theta; 2+\theta; 0; \theta; 6+\theta; 2-2\theta] : 1 \geq \theta \geq 0\}$ είναι ακμή του πολυέδρου που έχει ως άκρο την $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_\beta; \bar{\mathbf{x}}_N]$.

Q2 Τα σημεία του $\{\mathbf{t}(\theta) = [-2\theta; \theta; 0; \theta; \theta; -2\theta] : 1 \geq \theta \geq 0\}$ που δοκιμάζουμε να προσθέσουμε στην τρέχουσα βασική λύση σε ποιο σύνολο ανήκουν;

A2 Στον **πυρήνα** $ns(A)$ του A : $A\mathbf{t}(\theta) = A[\mathbf{z}(\theta) - \bar{\mathbf{x}}] = \mathbf{0}$.

Παράδειγμα

«Μεγιστοποίηση Τιμής» Μη Βασικής Μεταβλητής (I)

ΣΤΟΧΟΣ: Κατασκευή **«γειτονικής» bfs λύσης** ως προς την $\bar{\mathbf{x}}$ (της β) που να περιλαμβάνει ως βασική μεταβλητή την x_4.

Q1 Ο υποχώρος εφικτών λύσεων που παράγουμε από τη β *«προς την κατεύθυνση της x_4»* τι είναι ακριβώς;

A1 Το $\{\mathbf{z}(\theta) = [4-2\theta; 2+\theta; 0; \theta; 6+\theta; 2-2\theta] : 1 \geq \theta \geq 0\}$ είναι ακμή του πολυέδρου που έχει ως άκρο την $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_\beta; \bar{\mathbf{x}}_N]$.

Q2 Τα σημεία του $\{\mathbf{t}(\theta) = [-2\theta; \theta; 0; \theta; \theta; -2\theta] : 1 \geq \theta \geq 0\}$ που δοκιμάζουμε να προσθέσουμε στην τρέχουσα βασική λύση σε ποιο σύνολο ανήκουν;

A2 Στον **πυρήνα** $ns(A)$ του A : $A\mathbf{t}(\theta) = A[\mathbf{z}(\theta) - \bar{\mathbf{x}}] = \mathbf{0}$.

$\therefore$ Ο περιορισμός που θα μας κάνει να «σταματήσουμε» την αύξηση της τιμής της x_4 είναι κάποιος *περιορισμός προσήμου βασικής μεταβλητής* που θα γίνει δεσμευτικός.

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για $\theta = 1$ έχουμε την *εφικτή λύση* $\mathbf{z}(1) = [2; 3; 0; 1; 7; 0]$, που είναι η **bfs λύση** της **«γειτονικής» βάσης** $\gamma = (1, 2, 5, 4)$!!! ΤΥΧΑΙΟ;

Παράδειγμα

«Μεγιστοποίηση Τιμής» Μη Βασικής Μεταβλητής (II)

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για $\theta = 1$ έχουμε την *εφικτή λύση* $\mathbf{z}(1) = [2; 3; 0; 1; 7; 0]$, που είναι η **bfs λύση** της **«γειτονικής» βάσης** $\gamma = (1, 2, 5, 4)$!!! ΤΥΧΑΙΟ;

- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Επιλέγοντας $\theta = 1$ **υποχρεώνουμε** και πάλι την ύπαρξη **ακριβώς** $n - m$ μηδενικών.

Παράδειγμα
«Μεγιστοποίηση Τιμής» Μη Βασικής Μεταβλητής (II)

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για $\theta = 1$ έχουμε την *εφικτή λύση* $\mathbf{z}(1) = [2; 3; 0; 1; 7; 0]$, που είναι η **bfs λύση** της **«γειτονικής» βάσης** $\gamma = (1, 2, 5, 4)$!!! ΤΥΧΑΙΟ;

- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Επιλέγοντας $\theta = 1$ **υποχρεώνουμε** και πάλι την ύπαρξη **ακριβώς** $n - m$ μηδενικών.

$\therefore$ Μοναδική bfs λύση (για άλλη μια άλλη βάση, όπου η $A[*, 4]$ αντικαθιστά την $A[*, 6]$).

Παράδειγμα

«Μεγιστοποίηση Τιμής» Μη Βασικής Μεταβλητής (II)

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για $\theta = 1$ έχουμε την *εφικτή λύση* $\mathbf{z}(1) = [2; 3; 0; 1; 7; 0]$, που είναι η **bfs λύση** της **«γειτονικής» βάσης** $\gamma = (1, 2, 5, 4)$!!! ΤΥΧΑΙΟ;

- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Επιλέγοντας $\theta = 1$ **υποχρεώνουμε** και πάλι την ύπαρξη **ακριβώς** $n - m$ μηδενικών.

$\therefore$ Μοναδική bfs λύση (για άλλη μια άλλη βάση, όπου η $A[*,4]$ αντικαθιστά την $A[*,6]$).

- ΠΡΟΣΟΧΗ: Το ίδιο κάνει και το **pivot** της x_6 με την x_4 :

	y1	y2	x3	x4	y3	y4	1
x1 = |	0.1538	0.3846	-1.3846	-2.0000	-0.3077	0.1538	4.0000
x2 = |	0.7692	-1.0769	2.0769	1.0000	0.4615	-0.2308	2.0000
x5 = |	-0.0769	0.3077	-1.3077	1.0000	0.1538	-0.0769	6.0000
x6 = |	-0.5000	0.5000	-0.0000	-2.0000	-0.5000	0.5000	2.0000

```
>> T = ljx(T,4,4);
```

	y1	y2	x3	x6	y3	y4	1
x1 = |	0.6538	-0.1154	-1.3846	1.0000	0.1923	-0.3462	2.0000
x2 = |	0.5192	-0.8269	2.0769	-0.5000	0.2115	0.0192	3.0000
x5 = |	-0.3269	0.5577	-1.3077	-0.5000	-0.0962	0.1731	7.0000
x4 = |	-0.2500	0.2500	-0.0000	-0.5000	-0.2500	0.2500	1.0000

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Δεδομένης μιας βάσης β και της αντίστοιχης βασικής εφικτής λύσης $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_\beta; \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}]$ σε ένα γραμμικό πρόγραμμα σε μορφή ($\mathrm{LP}_=$)...

Παράδειγμα
«Μεγιστοποίηση Τιμής» Μη Βασικής Μεταβλητής (III)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Δεδομένης μιας βάσης β και της αντίστοιχης βασικής εφικτής λύσης $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_\beta; \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}]$ σε ένα γραμμικό πρόγραμμα σε μορφή ($LP_=$)...

... η σταδιακή αύξηση της τιμής μιας **αυθαίρετα επιλεγμένης** μη βασικής μεταβλητής x_s (από μηδέν) στη *μέγιστη δυνατή τιμή της* αναγκάζει τελικά την **απόρριψη από τη βάση** μιας βασικής μεταβλητής x_r και τη δημιουργία μιας νέας (γειτονικής) βάσης $\gamma = \beta - r + s$ του ($LP_=$)...

Παράδειγμα
«Μεγιστοποίηση Τιμής» Μη Βασικής Μεταβλητής (III)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Δεδομένης μιας βάσης β και της αντίστοιχης βασικής εφικτής λύσης $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_\beta; \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}]$ σε ένα γραμμικό πρόγραμμα σε μορφή $(\mathrm{LP}_=)$...

... η σταδιακή αύξηση της τιμής μιας **αυθαίρετα επιλεγμένης** μη βασικής μεταβλητής x_s (από μηδέν) στη *μέγιστη δυνατή τιμή της* αναγκάζει τελικά την **απόρριψη από τη βάση** μιας βασικής μεταβλητής x_r και τη δημιουργία μιας νέας (γειτονικής) βάσης $\gamma = \beta - r + s$ του $(\mathrm{LP}_=)$...

... ισοδυναμεί με μια ανταλλαγή **Jordan (pivot)** ανάμεσα στη μη βασική μεταβλητή που *αυθαίρετα επιλέξαμε* και μια από τις βασικές μεταβλητές (μεταβλητή γραμμής) που *πρώτες οδηγούνται σε μηδενική τιμή*.

Υπενθύμιση των Pivots
Ορισμός

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω ότι θέλουμε την ανταλλαγή $Pivot(r, s)$ στο ακόλουθο σύστημα της βάσης β, όπου $B[r, s] \neq 0$:

$$
\begin{array}{cc|ccccccc|c|}
 & & x_{N(1)} & x_{N(2)} & \dots & x_{N(s)} & \dots & x_{N(n-m)} & & z = 1 \\
\cline{3-10}
x_{\beta(1)} & = & B[1,1] & B[1,2] & \dots & B[1,s] & \dots & B[1,n-m] & & b_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\
x_{\beta(r)} & = & B[r,1] & B[r,2] & \dots & B[r,s] & \dots & B[r,n-m] & & b_r \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\
x_{\beta(m)} & = & B[m,1] & B[m,2] & \dots & B[m,s] & \dots & B[m,n-m] & & b_m \\
\cline{3-10}
\end{array}
$$

Υπενθύμιση των Pivots

Ορισμός

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω ότι θέλουμε την ανταλλαγή $Pivot(r,s)$ στο ακόλουθο σύστημα της βάσης β, όπου $B[r,s] \neq 0$:

$$
\begin{array}{cc|cccccc|c|}
 & & x_{N(1)} & x_{N(2)} & \dots & x_{N(s)} & \dots & x_{N(n-m)} & z=1 \\
\hline
x_{\beta(1)} & = & B[1,1] & B[1,2] & \dots & B[1,s] & \dots & B[1,n-m] & b_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
x_{\beta(r)} & = & B[r,1] & B[r,2] & \dots & B[r,s] & \dots & B[r,n-m] & b_r \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
x_{\beta(m)} & = & B[m,1] & B[m,2] & \dots & B[m,s] & \dots & B[m,n-m] & b_m \\
\hline
\end{array}
$$

1. Λύνουμε ως προς $x_{N(s)}$ την εξίσωση $x_{\beta(r)} = B[r,*]\mathbf{x}_N$:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω ότι θέλουμε την ανταλλαγή $Pivot(r,s)$ στο ακόλουθο σύστημα της βάσης β, όπου $B[r,s] \neq 0$:

$$
\begin{array}{cc|cccccc|c|}
 & & x_{N(1)} & x_{N(2)} & \dots & x_{N(s)} & \dots & x_{N(n-m)} & z=1 \\
\hline
x_{\beta(1)} & = & B[1,1] & B[1,2] & \dots & B[1,s] & \dots & B[1,n-m] & b_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
x_{\beta(r)} & = & B[r,1] & B[r,2] & \dots & B[r,s] & \dots & B[r,n-m] & b_r \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
x_{\beta(m)} & = & B[m,1] & B[m,2] & \dots & B[m,s] & \dots & B[m,n-m] & b_m \\
\hline
\end{array}
$$

1. Λύνουμε ως προς $x_{N(s)}$ την εξίσωση $x_{\beta(r)} = B[r,*]\mathbf{x}_N$:

$$
\boxed{x_{N(s)} = \frac{1}{B[r,s]} x_{\beta(r)} + \sum_{j\in[n-m]\setminus\{s\}} \left(-\frac{B[r,j]}{B[r,s]}\right) x_{N(j)} + \left(-\frac{b_r}{B[r,s]}\right)}
$$

Υπενθύμιση των Pivots
Ορισμός

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω ότι θέλουμε την ανταλλαγή $Pivot(r,s)$ στο ακόλουθο σύστημα της βάσης β, όπου $B[r,s] \neq 0$:

$$
\begin{array}{rc|cccccc|c|}
 & & x_{N(1)} & x_{N(2)} & \dots & x_{N(s)} & \dots & x_{N(n-m)} & z=1 \\
\hline
x_{\beta(1)} & = & B[1,1] & B[1,2] & \dots & B[1,s] & \dots & B[1,n-m] & b_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
x_{\beta(r)} & = & B[r,1] & B[r,2] & \dots & B[r,s] & \dots & B[r,n-m] & b_r \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
x_{\beta(m)} & = & B[m,1] & B[m,2] & \dots & B[m,s] & \dots & B[m,n-m] & b_m \\
\hline
\end{array}
$$

1. Λύνουμε ως προς $x_{N(s)}$ την εξίσωση $x_{\beta(r)} = B[r,*]\mathbf{x}_N$:

$$\boxed{x_{N(s)} = \frac{1}{B[r,s]} x_{\beta(r)} + \sum_{j \in [n-m] \setminus \{s\}} \left(-\frac{B[r,j]}{B[r,s]} \right) x_{N(j)} + \left(-\frac{b_r}{B[r,s]} \right)}$$

2. **Απαλείφουμε** το $x_{N(s)}$ στις υπόλοιπες γραμμές $k \in \beta - r$:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω ότι θέλουμε την ανταλλαγή $Pivot(r,s)$ στο ακόλουθο σύστημα της βάσης β, όπου $B[r,s] \neq 0$:

$$
\begin{array}{rc|cccccc|c|}
 & & x_{N(1)} & x_{N(2)} & \dots & x_{N(s)} & \dots & x_{N(n-m)} & z = 1 \\
\hline
x_{\beta(1)} & = & B[1,1] & B[1,2] & \dots & B[1,s] & \dots & B[1,n-m] & b_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
x_{\beta(r)} & = & B[r,1] & B[r,2] & \dots & B[r,s] & \dots & B[r,n-m] & b_r \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
x_{\beta(m)} & = & B[m,1] & B[m,2] & \dots & B[m,s] & \dots & B[m,n-m] & b_m \\
\hline
\end{array}
$$

1. Λύνουμε ως προς $x_{N(s)}$ την εξίσωση $x_{\beta(r)} = B[r,*]\mathbf{x}_N$:

$$\boxed{x_{N(s)} = \frac{1}{B[r,s]} x_{\beta(r)} + \sum_{j\in[n-m]\setminus\{s\}} \left(-\frac{B[r,j]}{B[r,s]}\right) x_{N(j)} + \left(-\frac{b_r}{B[r,s]}\right)}$$

2. **Απαλείφουμε** το $x_{N(s)}$ στις υπόλοιπες γραμμές $k \in \beta - r$:

$$\boxed{x_{\beta(k)} = \frac{B[k,s]}{B[r,s]} x_{\beta(r)} + \sum_{j\in[n-m]\setminus\{s\}} \left(B[k,j] - \frac{B[r,j]\cdot B[k,s]}{B[r,s]}\right) x_{N(j)} + \left(b_k - \frac{b_r \cdot B[k,s]}{B[r,s]}\right)}$$

Υπενθύμιση των Pivots

Επόμενη Κατάσταση: $\mathbf{x}_\beta = \mathbf{b} + B\mathbf{x}_N \xrightarrow{/*\ Pivot(r,s)\ */} \mathbf{x}_{\beta-\beta(r)+N(s)} = \mathbf{d} + D\mathbf{x}_{N+\beta(r)-N(s)}$

1. $x_{N(s)} = \frac{1}{B[r,s]} x_{\beta(r)} + \sum_{j\in[n-m]\setminus\{s\}} \frac{-B[r,j]}{B[r,s]} x_{N(j)} + \frac{-b_r}{B[r,s]}$

Υπενθύμιση των Pivots

Επόμενη Κατάσταση: $\mathbf{x}_\beta = \mathbf{b} + B\mathbf{x}_N \overset{/* \ Pivot(r,s) \ */}{\longrightarrow} \mathbf{x}_{\beta-\beta(r)+N(s)} = \mathbf{d} + D\mathbf{x}_{N+\beta(r)-N(s)}$

1. $x_{N(s)} = \frac{1}{B[r,s]} x_{\beta(r)} + \sum_{j \in [n-m] \setminus \{s\}} \frac{-B[r,j]}{B[r,s]} x_{N(j)} + \frac{-b_r}{B[r,s]}$

$\therefore \boxed{D[r,s] = \frac{1}{B[r,s]}}$

Υπενθύμιση των Pivots

Επόμενη Κατάσταση: $\mathbf{x}_\beta = \mathbf{b} + B\mathbf{x}_N \xrightarrow{/*\ Pivot(r,s)\ */} \mathbf{x}_{\beta-\beta(r)+N(s)} = \mathbf{d} + D\mathbf{x}_{N+\beta(r)-N(s)}$

1. $x_{N(s)} = \frac{1}{B[r,s]} x_{\beta(r)} + \sum_{j\in[n-m]\setminus\{s\}} \frac{-B[r,j]}{B[r,s]} x_{N(j)} + \frac{-b_r}{B[r,s]}$

$\therefore \boxed{D[r,s] = \frac{1}{B[r,s]}} \quad \forall j \in [n-m] \setminus \{s\}, \boxed{D[r,j] = \frac{-B[r,j]}{B[r,s]}} \quad \boxed{d_r = -\frac{b_r}{B[r,s]}}$

Υπενθύμιση των Pivots

Επόμενη Κατάσταση: $\mathbf{x}_\beta = \mathbf{b} + B\mathbf{x}_N \quad \xrightarrow{\text{/* Pivot(r,s) */}} \quad \mathbf{x}_{\beta-\beta(r)+N(s)} = \mathbf{d} + D\mathbf{x}_{N+\beta(r)-N(s)}$

1. $x_{N(s)} = \frac{1}{B[r,s]} x_{\beta(r)} + \sum_{j\in[n-m]\setminus\{s\}} \frac{-B[r,j]}{B[r,s]} x_{N(j)} + \frac{-b_r}{B[r,s]}$

   $\therefore \boxed{D[r,s] = \frac{1}{B[r,s]}} \quad \forall j \in [n-m]\setminus\{s\},\ \boxed{D[r,j] = \frac{-B[r,j]}{B[r,s]}} \quad \boxed{d_r = -\frac{b_r}{B[r,s]}}$

2. $\forall k \in [m]\setminus\{r\},\ \ x_{\beta(k)} =$

   $\frac{B[k,s]}{B[r,s]} x_{\beta(r)} + \sum_{j\in[n-m]\setminus\{s\}} \left(B[k,j] - \frac{B[r,j]B[k,s]}{B[r,s]}\right) x_{N(j)} + \left(b_k - \frac{b_r B[k,s]}{B[r,s]}\right)$

Υπενθύμιση των Pivots

Επόμενη Κατάσταση: $\mathbf{x}_\beta = \mathbf{b} + B\mathbf{x}_N \overset{/*\ Pivot(r,s)\ */}{\longrightarrow} \mathbf{x}_{\beta-\beta(r)+N(s)} = \mathbf{d} + D\mathbf{x}_{N+\beta(r)-N(s)}$

1. $x_{N(s)} = \frac{1}{B[r,s]} x_{\beta(r)} + \sum_{j\in[n-m]\setminus\{s\}} \frac{-B[r,j]}{B[r,j]} x_{N(j)} + \frac{-b_r}{B[r,s]}$

$\therefore\ \boxed{D[r,s] = \frac{1}{B[r,s]}} \quad \forall j \in [n-m]\setminus\{s\},\ \boxed{D[r,j] = \frac{-B[r,j]}{B[r,s]}} \quad \boxed{d_r = -\frac{b_r}{B[r,s]}}$

2. $\forall k \in [m]\setminus\{r\},\ \ x_{\beta(k)} =$
$\frac{B[k,s]}{B[r,s]} x_{\beta(r)} + \sum_{j\in[n-m]\setminus\{s\}} \left(B[k,j] - \frac{B[r,j]B[k,s]}{B[r,s]}\right) x_{N(j)} + \left(b_k - \frac{b_r B[k,s]}{B[r,s]}\right)$

$\therefore\ \forall k \in [m]\setminus\{r\}, \qquad \boxed{D[k,s] = \frac{B[k,s]}{B[r,s]}}$

Υπενθύμιση των Pivots

Επόμενη Κατάσταση: $\mathbf{x}_\beta = \mathbf{b} + B\mathbf{x}_N \xrightarrow{\text{/* Pivot(r,s) */}} \mathbf{x}_{\beta-\beta(r)+N(s)} = \mathbf{d} + D\mathbf{x}_{N+\beta(r)-N(s)}$

1. $x_{N(s)} = \frac{1}{B[r,s]} x_{\beta(r)} + \sum_{j\in[n-m]\setminus\{s\}} \frac{-B[r,j]}{B[r,s]} x_{N(j)} + \frac{-b_r}{B[r,s]}$

$\therefore \boxed{D[r,s] = \frac{1}{B[r,s]}} \quad \forall j \in [n-m]\setminus\{s\}, \boxed{D[r,j] = \frac{-B[r,j]}{B[r,s]}} \quad \boxed{d_r = -\frac{b_r}{B[r,s]}}$

2. $\forall k \in [m]\setminus\{r\},\ x_{\beta(k)} =$

$\frac{B[k,s]}{B[r,s]} x_{\beta(r)} + \sum_{j\in[n-m]\setminus\{s\}} \left(B[k,j] - \frac{B[r,j]B[k,s]}{B[r,s]}\right) x_{N(j)} + \left(b_k - \frac{b_r B[k,s]}{B[r,s]}\right)$

$\therefore\ \forall k \in [m]\setminus\{r\},\ \forall j \in [n-m]\setminus\{s\}, \boxed{D[k,s] = \frac{B[k,s]}{B[r,s]}} \quad \boxed{D[k,j] = B[k,j] - \frac{B[r,j]B[k,s]}{B[r,s]}}$

$$\begin{array}{cc|cccccc|c|}
 & & x_{N(1)} & x_{N(2)} & \cdots & x_{\beta(r)} & \cdots & x_{N(n-m)} & z=1 \\
\hline
x_{\beta(1)} & = & D[1,1] & D[1,2] & \cdots & D[1,s] & \cdots & D[1,n-m] & d_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
x_{N(s)} & = & D[r,1] & D[r,2] & \cdots & D[r,s] & \cdots & D[r,n-m] & d_r \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
x_{\beta(m)} & = & D[m,1] & D[m,2] & \cdots & D[m,s] & \cdots & D[m,n-m] & d_m \\
\hline
\end{array}$$

Προβλήματα στην Επιλογή Στήλης Εναλλαγής

ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι γίνεται όταν για μια *μη βασική* μεταβλητή $x_{N(s)}$ η στήλη της $B[*,s] = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,s]$ στο ταμπλό είναι...

... το μηδενικό διάνυσμα;

Προβλήματα στην Επιλογή Στήλης Εναλλαγής

ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι γίνεται όταν για μια *μη βασική* μεταβλητή $x_{N(s)}$ η στήλη της $B[*,s] = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,s]$ στο ταμπλό είναι...

... το μηδενικό διάνυσμα;

- **Αδύνατο** να γίνει pivot στην $x_{N(s)}$, αλλά τότε $A[*,s] = 0$.

Προβλήματα στην Επιλογή Στήλης Εναλλαγής

ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι γίνεται όταν για μια *μη βασική* μεταβλητή $x_{N(s)}$ η στήλη της $B[*,s] = -(A[*,\beta])^{-1} A[*,s]$ στο ταμπλό είναι...

... το μηδενικό διάνυσμα;

- **Αδύνατο** να γίνει pivot στην $x_{N(s)}$, αλλά τότε $A[*,s] = 0$.

if $c_{N(s)} = 0$
then διαγραφή της $x_{N(s)}$ από το $(\mathrm{LP}_=)$.
$\therefore$ **else** **if** $c_{N(s)} > 0$
then $\bar{x}_{N(s)} = 0, \ \forall \bar{\mathbf{x}} \in opt\,(\mathrm{LP}_=)$.
else $(\mathrm{LP}_=)$: μη επιλύσιμο ή **μη φραγμένο**.

Προβλήματα στην Επιλογή Στήλης Εναλλαγής

ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι γίνεται όταν για μια *μη βασική* μεταβλητή $x_{N(s)}$ η στήλη της $B[*,s] = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,s]$ στο ταμπλό είναι...

... μη μηδενικό, αλλά **μη αρνητικό** διάνυσμα;

Προβλήματα στην Επιλογή Στήλης Εναλλαγής

ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι γίνεται όταν για μια *μη βασική* μεταβλητή $x_{N(s)}$ η στήλη της $B[*,s] = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,s]$ στο ταμπλό είναι...

... μη μηδενικό, αλλά **μη αρνητικό** διάνυσμα;

- Μπορούμε να *αυξάνουμε συνεχώς* την τιμή του $x_{N(s)}$ *δίχως να μειώνονται* οι τιμές των βασικών μεταβλητών.

$\therefore$ Ανάλογα με την τιμή $c_{N(s)}$, είτε η $x_{N(s)}$ μπορεί να παραλειφθεί ή το πρόγραμμα είναι **ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ**.

Προβλήματα στην Επιλογή Στήλης Εναλλαγής

ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι γίνεται όταν για μια *μη βασική* μεταβλητή $x_{N(s)}$ η στήλη της $B[*,s] = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,s]$ στο ταμπλό είναι...

... το μηδενικό διάνυσμα;

- **Αδύνατο** να γίνει pivot στην $x_{N(s)}$, αλλά τότε $A[*,s] = 0$.

if $c_{N(s)} = 0$
then διαγραφή της $x_{N(s)}$ από το $(LP_=)$.
$\therefore$ **else** **if** $c_{N(s)} > 0$
then $\bar{x}_{N(s)} = 0,\ \forall \bar{\mathbf{x}} \in opt\,(LP_=)$.
else $(LP_=)$: μη επιλύσιμο ή **μη φραγμένο**.

... μη μηδενικό, αλλά **μη αρνητικό** διάνυσμα;

- Μπορούμε να *αυξάνουμε συνεχώς* την τιμή του $x_{N(s)}$ *δίχως να μειώνονται* οι τιμές των βασικών μεταβλητών.

$\therefore$ Ανάλογα με την τιμή $c_{N(s)}$, είτε η $x_{N(s)}$ μπορεί να παραλειφθεί ή το πρόγραμμα είναι **ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ**.

Επιλογή Γραμμής Εναλλαγής από Simplex (I)

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 3.1 (σημειώσεις)]

Έστω (LP$_=$) $\mathbf{min}.\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, και βάση β με bfs λύση:

$$\mathbf{x}_\beta = \sum_{j\in[n-m]} -(A[*,\beta])^{-1} A[*,j] x_{N(j)} + (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a} = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}$$

Έστω μη βασική μεταβλητή $x_{N(s)}$ τ.ώ η στήλη της $B[*,s]$ να έχει και αρνητικές συνιστώσες. Θέτουμε:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \theta(s) & = & \min\{-\frac{b_k}{B[k,s]} : k \in \beta \ \wedge \ B[k,s] < 0\} \\ r(s) & \in & \arg\min\{-\frac{b_k}{B[k,s]} : k \in \beta \ \wedge \ B[k,s] < 0\} \end{array}}$$

Η εναλλαγή $pivot(r,s)$ της $x_{N(s)}$ με την $x_{\beta(r)}$ είναι εφικτή, και επιστρέφει μια καινούργια βάση $\gamma = \beta - \beta(r) + N(s)$, η λύση της οποίας είναι επίσης bfs για το (LP$_=$).

Επιλογή Γραμμής Εναλλαγής από Simplex (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.1 (σημειώσεις)]

Έστω $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{z}(\theta(s))$ η λύση που φτιάχνουμε, θέτοντας $\hat{x}_{N(s)} = \theta(s)$.

Επιλογή Γραμμής Εναλλαγής από Simplex (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.1 (σημειώσεις)]

Έστω $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{z}(\theta(s))$ η λύση που φτιάχνουμε, θέτοντας $\hat{x}_{N(s)} = \theta(s)$.

1. Επιτρεπτό pivot (αφού $B[r,s] < 0$).

Επιλογή Γραμμής Εναλλαγής από Simplex (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.1 (σημειώσεις)]

Έστω $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{z}(\theta(s))$ η λύση που φτιάχνουμε, θέτοντας $\hat{x}_{N(s)} = \theta(s)$.

1. Επιτρεπτό pivot (αφού $B[r,s] < 0$).
2. Εφικτότητα περιορισμών προσήμου της $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\hat{x}_{N(s)} = \theta(s) = -\frac{b_r}{B[r,s]} = -\frac{x_{\beta(r)}}{B[r,s]} \geq 0 \qquad \text{/* νέα βασική μεταβλητή */}$$

$$\hat{x}_{\beta(r)} = 0 \qquad \text{/* νέα μη βασική μεταβλητή */}$$

$$\forall j \in [n-m] \setminus \{s\}, \hat{x}_{N(j)} = 0 \qquad \text{/* υπόλοιπες μη βασικές μεταβλητές */}$$

$$\forall k \in [m] \setminus \{r\}, \qquad \text{/* υπόλοιπες βασικές μεταβλητές */}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\beta(k)} &= \frac{B[k,s]}{B[r,s]}\hat{x}_{\beta(r)} + \sum_{j\neq s}\left(B[k,j] - \frac{B[r,j]B[k,s]}{B[r,s]}\right)\hat{x}_{N(j)} \\ &+ \left(b_k - \frac{b_r B[k,s]}{B[r,s]}\right) \\ &= b_k + \theta(s)\cdot B[k,s] \geq 0 \end{aligned}$$

Επιλογή Γραμμής Εναλλαγής από Simplex (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.1 (σημειώσεις)]

3. Γραμμική ανεξαρτησία των στηλών του $\gamma = \beta - \beta(r) + N(s)$:
   $\forall \mathbf{z}_\beta \in \mathbb{R}^m, A[*, \beta]\mathbf{z}_\beta = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{z}_\beta = \mathbf{0}$ /* γραμ. ανεξαρτησία βάσης β */

Επιλογή Γραμμής Εναλλαγής από Simplex (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.1 (σημειώσεις)]

3. Γραμμική ανεξαρτησία των στηλών του $\gamma = \beta - \beta(r) + N(s)$:

$\forall \mathbf{z}_\beta \in \mathbb{R}^m, A[*,\beta]\mathbf{z}_\beta = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{z}_\beta = \mathbf{0}$ /* γραμ. ανεξαρτησία βάσης β */

if $\exists \hat{\mathbf{z}}_\gamma \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\} : A[*,\gamma]\hat{\mathbf{z}}_\gamma = \mathbf{0}$ /* γραμ.εξάρτηση στο γ */

then $A[*,\beta - \{\beta(r)\}]\hat{\mathbf{z}}_{\beta-\{\beta(r)\}} + A[*,N(s)]\hat{z}_{N(s)} = 0$

  if $\hat{z}_{N(s)} = 0$ **then** **γραμμ. εξάρτηση** στο β (ΑΤΟΠΟ)

Επιλογή Γραμμής Εναλλαγής από Simplex (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.1 (σημειώσεις)]

3. Γραμμική ανεξαρτησία των στηλών του $\gamma = \beta - \beta(r) + N(s)$:

$\forall \mathbf{z}_\beta \in \mathbb{R}^m, A[*,\beta]\mathbf{z}_\beta = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{z}_\beta = \mathbf{0}$ /* γραμ. ανεξαρτησία βάσης β */

if $\exists \hat{\mathbf{z}}_\gamma \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\} : A[*,\gamma]\hat{\mathbf{z}}_\gamma = \mathbf{0}$ /* γραμ.εξάρτηση στο γ */

then $A[*,\beta - \{\beta(r)\}]\hat{\mathbf{z}}_{\beta-\{\beta(r)\}} + A[*,N(s)]\hat{z}_{N(s)} = 0$

if $\hat{z}_{N(s)} = 0$ **then** γραμμ. εξάρτηση στο β (ΑΤΟΠΟ)

$\therefore \quad \hat{z}_{N(s)} \neq 0 \;\wedge\; A[*,N(s)] = A[*,\beta - \{\beta(r)\}]\tilde{z}_{\beta-\{\beta(r)\}} = A[*,\beta]\tilde{\mathbf{z}}_\beta$

/* $\tilde{z}_j = -\frac{\hat{z}_j}{\hat{z}_{N(s)}}$, και *θέτουμε* το $\tilde{z}_{\beta(r)} = 0$ */

Επιλογή Γραμμής Εναλλαγής από Simplex (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.1 (σημειώσεις)]

3. Γραμμική ανεξαρτησία των στηλών του $\gamma = \beta - \beta(r) + N(s)$:

$\forall \mathbf{z}_\beta \in \mathbb{R}^m, A[*,\beta]\mathbf{z}_\beta = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{z}_\beta = \mathbf{0}$ /* γραμ. ανεξαρτησία βάσης β */

if $\exists \hat{\mathbf{z}}_\gamma \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\} : A[*,\gamma]\hat{\mathbf{z}}_\gamma = \mathbf{0}$ /* γραμ.εξάρτηση στο γ */

then $A[*,\beta - \{\beta(r)\}]\hat{\mathbf{z}}_{\beta-\{\beta(r)\}} + A[*,N(s)]\hat{z}_{N(s)} = 0$

if $\hat{z}_{N(s)} = 0$ **then** γραμμ. εξάρτηση στο β (ΑΤΟΠΟ)

$\therefore \quad \hat{z}_{N(s)} \neq 0 \ \wedge \ A[*,N(s)] = A[*,\beta - \{\beta(r)\}]\tilde{z}_{\beta-\{\beta(r)\}} = A[*,\beta]\tilde{\mathbf{z}}_\beta$

/* $\tilde{z}_j = -\frac{\hat{z}_j}{\hat{z}_{N(s)}}$, και *θέτουμε* το $\tilde{z}_{\beta(r)} = 0$ */

$A[*,N(s)] = A[*,\beta] \cdot (-B[*,s])$ /* μοναδικός τρόπος */

Επιλογή Γραμμής Εναλλαγής από Simplex (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.1 (σημειώσεις)]

3. Γραμμική ανεξαρτησία των στηλών του $\gamma = \beta - \beta(r) + N(s)$:

$\forall \mathbf{z}_\beta \in \mathbb{R}^m, A[*,\beta]\mathbf{z}_\beta = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{z}_\beta = \mathbf{0}$ /* γραμ. ανεξαρτησία βάσης β */

if $\exists \hat{\mathbf{z}}_\gamma \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\} : A[*,\gamma]\hat{\mathbf{z}}_\gamma = \mathbf{0}$ /* γραμ.εξάρτηση στο γ */

then $A[*,\beta - \{\beta(r)\}]\hat{\mathbf{z}}_{\beta-\{\beta(r)\}} + A[*,N(s)]\hat{z}_{N(s)} = 0$

if $\hat{z}_{N(s)} = 0$ **then** **γραμμ. εξάρτηση** στο β (ΑΤΟΠΟ)

$\therefore \quad \hat{z}_{N(s)} \neq 0 \;\wedge\; A[*,N(s)] = A[*,\beta - \{\beta(r)\}]\tilde{z}_{\beta-\{\beta(r)\}} = A[*,\beta]\tilde{\mathbf{z}}_\beta$

/* $\tilde{z}_j = -\frac{\hat{z}_j}{\hat{z}_{N(s)}}$, και *θέτουμε* το $\tilde{z}_{\beta(r)} = 0$ */

$A[*,N(s)] = A[*,\beta] \cdot (-B[*,s])$ /* μοναδικός τρόπος */

$\therefore \quad \forall k \in [m] - \{r\}, B[k,s] = \frac{\hat{z}_k}{\hat{z}_s}$, και $B[r,s] = \tilde{z}_{\beta(r)} = 0$ (ΑΤΟΠΟ)

■

Επιλογή Γραμμής Εναλλαγής από Simplex (IV)

ΟΡΙΣΜΟΣ: MIN RATIO TEST

Έστω το γραμμικό πρόγραμμα (LP$_=$) $\min.\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, οποιαδήποτε (εφικτή) βάση $\beta \subseteq [m]$, και το αντίστοιχο λεξικό:

$$\mathbf{x}_\beta = \sum_{j \in [n-m]} -(A[*,\beta])^{-1} A[*,j] x_{N(j)} + (A[*,\beta])^{-1} \mathbf{a} = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}$$

Για οποιαδήποτε **στήλη εναλλαγής** $s \in [n-m]$ (ισοδύναμα, μη βασική μεταβλητη $x_{N(s)}$, η επιλογή μιας **γραμμής εναλλαγής** $r \in [m]$ (ισοδύναμα, βασικής μεταβλητής) $x_{\beta(r)} \in \beta$ που θα δώσει τη θέση της γίνεται ως εξής:

$$\boxed{\begin{aligned} \theta(s) &= \min\left\{-\frac{b_k}{B[k,s]} : k \in \beta \ \wedge \ B[k,s] < 0\right\} \\ r(s) &\in \arg\min\left\{-\frac{b_k}{B[k,s]} : k \in \beta \ \wedge \ B[k,s] < 0\right\} \end{aligned}}$$

Τι Γίνεται με τις «Ισοπαλίες»;

- Έστω βάση β του (LP$_=$) με bfs λύση $\bar{\mathbf{x}}_\beta = \mathbf{b} + B\bar{\mathbf{x}}_N$, και έστω ότι για κάποια μη βασική στήλη (εναλλαγής) $B[*,s] = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,s]$ υπάρχουν *δυο* αρνητικες τιμές $B[r,s], B[t,s]$ τέτοιες ώστε:

$$\theta(s) = \min\left\{-\frac{b_k}{B[k,s]} : k \in \beta \ \wedge \ B[k,s] < 0\right\} = -\frac{b_t}{B[t,s]} = -\frac{b_r}{B[r,s]}$$

Τι Γίνεται με τις «Ισοπαλίες»;

- Έστω βάση β του $(LP_=)$ με bfs λύση $\bar{\mathbf{x}}_\beta = \mathbf{b} + B\bar{\mathbf{x}}_N$, και έστω ότι για κάποια μη βασική στήλη (εναλλαγής) $B[*,s] = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,s]$ υπάρχουν *δυο* αρνητικες τιμές $B[r,s], B[t,s]$ τέτοιες ώστε:

$$\theta(s) = \min\left\{-\frac{b_k}{B[k,s]} : k \in \beta \;\wedge\; B[k,s] < 0\right\} = -\frac{b_t}{B[t,s]} = -\frac{b_r}{B[r,s]}$$

- ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι ισχύει για την παραγόμενη bfs λύση $\mathbf{z}(\theta(s))$, αν υποθέσουμε ότι εφαρμόζεται το **MIN RATIO TEST** για επιλογή στήλης, πχ $r(s) = r$;

Τι Γίνεται με τις «Ισοπαλίες»;

- Έστω βάση β του $(LP_=)$ με bfs λύση $\bar{\mathbf{x}}_\beta = \mathbf{b} + B\bar{\mathbf{x}}_N$, και έστω ότι για κάποια μη βασική στήλη (εναλλαγής) $B[*,s] = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,s]$ υπάρχουν *δυο* αρνητικες τιμές $B[r,s], B[t,s]$ τέτοιες ώστε:

$$\theta(s) = \min\left\{-\frac{b_k}{B[k,s]} : k \in \beta \ \wedge \ B[k,s] < 0\right\} = -\frac{b_t}{B[t,s]} = -\frac{b_r}{B[r,s]}$$

- ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι ισχύει για την παραγόμενη bfs λύση $\mathbf{z}(\theta(s))$, αν υποθέσουμε ότι εφαρμόζεται το **MIN RATIO TEST** για επιλογή στήλης, πχ $r(s) = r$;
  - $\forall k \in [m] - \{t, r\}, \hat{x}_k = b_k + \theta(s)B[k,s] \geq 0$
  - $\hat{x}_t = b_t + \theta(s)B[t,s] = 0, \ \hat{x}r = b_r + \theta(s)B[r,s] = 0$

Τι Γίνεται με τις «Ισοπαλίες»;

- Έστω βάση β του (LP$_=$) με bfs λύση $\bar{\mathbf{x}}_\beta = \mathbf{b} + B\bar{\mathbf{x}}_N$, και έστω ότι για κάποια μη βασική στήλη (εναλλαγής) $B[*,s] = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,s]$ υπάρχουν δυο αρνητικες τιμές $B[r,s], B[t,s]$ τέτοιες ώστε:

$$\theta(s) = \min\left\{-\frac{b_k}{B[k,s]} : k \in \beta \ \wedge \ B[k,s] < 0\right\} = -\frac{b_t}{B[t,s]} = -\frac{b_r}{B[r,s]}$$

- ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι ισχύει για την παραγόμενη bfs λύση $\mathbf{z}(\theta(s))$, αν υποθέσουμε ότι εφαρμόζεται το **MIN RATIO TEST** για επιλογή στήλης, πχ $r(s) = r$;
  - $\forall k \in [m] - \{t,r\}, \hat{x}_k = b_k + \theta(s)B[k,s] \geq 0$
  - $\hat{x}_t = b_t + \theta(s)B[t,s] = 0, \ \ \hat{x}r = b_r + \theta(s)B[r,s] = 0$

$$\boxed{\text{Εκφυλισμένη κορυφή με πολλές bfs λύσεις!!!}}$$

Επιλογή Στήλης Εναλλαγής στον Simplex (I)

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποια (μη βασική) στήλη άραγε μας συμφέρει να εισάγουμε στη βάση μας;

Επιλογή Στήλης Εναλλαγής στον Simplex (I)

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποια (μη βασική) στήλη άραγε μας συμφέρει να εισάγουμε στη βάση μας;

ΛΗΜΜΑ [Λήμμα 3.1 (σημειώσεις)]

Έστω το (LP$_=$) $\mathbf{min}.\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Έστω βάση β με bfs λύση $\bar{\mathbf{x}} = \left[\bar{\mathbf{x}}_\beta = \mathbf{b}; \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}\right]$ και λεξικό:

$$\mathbf{x}_\beta = \sum_{j\in[n-m]} -(A[*,\beta])^{-1} A[*,j] x_{N(j)} + (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a} = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}$$

Αν επιλέξουμε (αυθαίρετα) τη μη βασική μεταβλητή $x_{N(s)}$ (ή, μη βασική στήλη $s \in [n-m]$ για είσοδο στη βάση, και $r(s) \in [m]$ είναι η γραμμή εναλλαγής (άρα, $x_{\beta(r)}$ είναι η βασική μεταβλητή) που επιλέγεται από το MIN RATIO TEST να εκτοπιστεί, τότε ισχύει το εξής για τη βάση $\hat{\beta} = \beta - \beta(r(s)) + N(s)$ με bfs λύση $\hat{\mathbf{x}} = \left[\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\beta}}; \hat{\mathbf{x}}_{\hat{N}}\right]$:

$$\boxed{\mathbf{c}'\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} = \theta(s) \cdot \left(c_{N(s)} + \sum_{k\in[m]} c_{\beta(k)} \cdot B[k,s]\right)}$$

Επιλογή Στήλης Εναλλαγής στον Simplex (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Λήμμα 3.1 (σημειώσεις)]

$pivot(r,s) : \hat{\beta} = \beta - \beta(r(s)) + N(s)$

- $\hat{x}_{\beta(r)} = 0, \ \forall j \in [n-m] \setminus \{s\}, \hat{x}_{N(j)} = 0, \ \hat{x}_{N(s)} = \theta(s) = -\frac{b_r}{B[r,s]}.$
- $\forall k \in [m] \setminus \{r\}, \hat{x}_{\beta(k)} = b_k + B[k,s] \cdot \theta(s) = \bar{x}_k + B[k,s]\theta(s)$ /* $\bar{x}_k = b_k$ */

Επιλογή Στήλης Εναλλαγής στον Simplex (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Λήμμα 3.1 (σημειώσεις)]

$pivot(r,s) : \hat{\beta} = \beta - \beta(r(s)) + N(s)$

- $\hat{x}_{\beta(r)} = 0, \;\; \forall j \in [n-m] \setminus \{s\}, \hat{x}_{N(j)} = 0, \;\; \hat{x}_{N(s)} = \theta(s) = -\frac{b_r}{B[r,s]}.$
- $\forall k \in [m] \setminus \{r\}, \hat{x}_{\beta(k)} = b_k + B[k,s] \cdot \theta(s) = \bar{x}_k + B[k,s]\theta(s)$ /* $\bar{x}_k = b_k$ */

$$\mathbf{c}'\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}}$$

$$= \mathbf{c}'_{\hat{\beta}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\beta}} + \mathbf{c}'_{\hat{N}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{N}} - \mathbf{c}'_{\beta}\bar{\mathbf{x}}_{\beta} - \mathbf{c}'_{N}\bar{\mathbf{x}}_{N}$$

$$= \mathbf{c}'_{\hat{\beta}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\beta}} - \mathbf{c}'_{\beta}\bar{\mathbf{x}}_{\beta}$$ /* $\hat{\mathbf{x}}_{\hat{N}} = \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$ */

Επιλογή Στήλης Εναλλαγής στον Simplex (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Λήμμα 3.1 (σημειώσεις)]

$pivot(r,s) : \hat{\beta} = \beta - \beta(r(s)) + N(s)$

- $\hat{x}_{\beta(r)} = 0, \;\; \forall j \in [n-m] \setminus \{s\}, \hat{x}_{N(j)} = 0, \;\; \hat{x}_{N(s)} = \theta(s) = -\frac{b_r}{B[r,s]}.$
- $\forall k \in [m] \setminus \{r\}, \hat{x}_{\beta(k)} = b_k + B[k,s] \cdot \theta(s) = \bar{x}_k + B[k,s]\theta(s)$ /* $\bar{x}_k = b_k$ */

$$\mathbf{c}'\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}}$$

$$= \mathbf{c}'_{\hat{\beta}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\beta}} + \mathbf{c}'_{\hat{N}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{N}} - \mathbf{c}'_{\beta}\bar{\mathbf{x}}_{\beta} - \mathbf{c}'_{N}\bar{\mathbf{x}}_{N}$$

$$= \mathbf{c}'_{\hat{\beta}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\beta}} - \mathbf{c}'_{\beta}\bar{\mathbf{x}}_{\beta}$$ /* $\hat{\mathbf{x}}_{\hat{N}} = \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$ */

$$= \sum_{k\in[m]\setminus\{r\}} c_{\beta(k)}[\hat{x}_{\beta(k)} - \bar{x}_{\beta(k)}] + c_{N(s)}\hat{x}_{N(s)} - c_{\beta(r)}\bar{x}_{\beta(r)}$$

Επιλογή Στήλης Εναλλαγής στον Simplex (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Λήμμα 3.1 (σημειώσεις)]

$pivot(r,s) : \hat{\beta} = \beta - \beta(r(s)) + N(s)$

- $\hat{x}_{\beta(r)} = 0, \ \forall j \in [n-m] \setminus \{s\}, \hat{x}_{N(j)} = 0, \ \hat{x}_{N(s)} = \theta(s) = -\frac{b_r}{B[r,s]}.$
- $\forall k \in [m] \setminus \{r\}, \hat{x}_{\beta(k)} = b_k + B[k,s] \cdot \theta(s) = \bar{x}_k + B[k,s]\theta(s)$ /* $\bar{x}_k = b_k$ */

$$\begin{aligned}
&\mathbf{c}'\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} \\
&= \mathbf{c}'_{\hat{\beta}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\beta}} + \mathbf{c}'_{\hat{N}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{N}} - \mathbf{c}'_{\beta}\bar{\mathbf{x}}_{\beta} - \mathbf{c}'_{N}\bar{\mathbf{x}}_{N} \\
&= \mathbf{c}'_{\hat{\beta}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\beta}} - \mathbf{c}'_{\beta}\bar{\mathbf{x}}_{\beta} && /*\ \hat{\mathbf{x}}_{\hat{N}} = \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}\ */ \\
&= \textstyle\sum_{k\in[m]\setminus\{r\}} c_{\beta(k)}[\hat{x}_{\beta(k)} - \bar{x}_{\beta(k)}] + c_{N(s)}\hat{x}_{N(s)} - c_{\beta(r)}\bar{x}_{\beta(r)} \\
&= c_{N(s)} \cdot \theta(s) + \textstyle\sum_{k\in[m]} c_{\beta(k)}[\hat{x}_{\beta(k)} - \bar{x}_{\beta(k)}] && /*\ \hat{x}_{N(s)} = \theta(s), \hat{x}_{\beta(r)} = 0\ */ \\
&= c_{N(s)}\theta(s) + \textstyle\sum_{k\in[m]} c_{\beta(k)} \cdot B[k,s]\theta(s) && /*\ \forall k \in [m], \hat{x}_{\beta(k)} - \bar{x}_{\beta(k)} = \theta(s)B[k,s]\ */
\end{aligned}$$

Επιλογή Στήλης Εναλλαγής στον Simplex (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Λήμμα 3.1 (σημειώσεις)]

$pivot(r,s) : \hat{\beta} = \beta - \beta(r(s)) + N(s)$

- $\hat{x}_{\beta(r)} = 0, \ \forall j \in [n-m] \setminus \{s\}, \hat{x}_{N(j)} = 0, \ \hat{x}_{N(s)} = \theta(s) = -\frac{b_r}{B[r,s]}$.
- $\forall k \in [m] \setminus \{r\}, \hat{x}_{\beta(k)} = b_k + B[k,s] \cdot \theta(s) = \bar{x}_k + B[k,s]\theta(s)$ /* $\bar{x}_k = b_k$ */

$$\mathbf{c}'\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}}$$

$$= \mathbf{c}'_{\hat{\beta}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\beta}} + \mathbf{c}'_{\hat{N}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{N}} - \mathbf{c}'_{\beta}\bar{\mathbf{x}}_{\beta} - \mathbf{c}'_{N}\bar{\mathbf{x}}_{N}$$

$$= \mathbf{c}'_{\hat{\beta}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\beta}} - \mathbf{c}'_{\beta}\bar{\mathbf{x}}_{\beta} \qquad \text{/* } \hat{\mathbf{x}}_{\hat{N}} = \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0} \text{ */}$$

$$= \textstyle\sum_{k\in[m]\setminus\{r\}} c_{\beta(k)}[\hat{x}_{\beta(k)} - \bar{x}_{\beta(k)}] + c_{N(s)}\hat{x}_{N(s)} - c_{\beta(r)}\bar{x}_{\beta(r)}$$

$$= c_{N(s)} \cdot \theta(s) + \textstyle\sum_{k\in[m]} c_{\beta(k)}[\hat{x}_{\beta(k)} - \bar{x}_{\beta(k)}] \qquad \text{/* } \hat{x}_{N(s)} = \theta(s), \hat{x}_{\beta(r)} = 0 \text{ */}$$

$$= c_{N(s)}\theta(s) + \textstyle\sum_{k\in[m]} c_{\beta(k)} \cdot B[k,s]\theta(s) \qquad \text{/* } \forall k \in [m], \hat{x}_{\beta(k)} - \bar{x}_{\beta(k)} = \theta(s)B[k,s] \text{ */}$$

$$= \theta(s) \cdot \left(c_{N(s)} + \textstyle\sum_{k\in[m]} c_{\beta(k)} \cdot B[k,s]\right)$$

Επιλογή Στήλης Εναλλαγής στον Simplex (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Λήμμα 3.1 (σημειώσεις)]

$pivot(r,s) : \hat{\beta} = \beta - \beta(r(s)) + N(s)$

- $\hat{x}_{\beta(r)} = 0, \ \forall j \in [n-m] \setminus \{s\}, \hat{x}_{N(j)} = 0, \ \hat{x}_{N(s)} = \theta(s) = -\frac{b_r}{B[r,s]}.$
- $\forall k \in [m] \setminus \{r\}, \hat{x}_{\beta(k)} = b_k + B[k,s] \cdot \theta(s) = \bar{x}_k + B[k,s]\theta(s)$ /* $\bar{x}_k = b_k$ */

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{c}'\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} \\
&= \mathbf{c}'_{\hat{\beta}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\beta}} + \mathbf{c}'_{\hat{N}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{N}} - \mathbf{c}'_{\beta}\bar{\mathbf{x}}_{\beta} - \mathbf{c}'_{N}\bar{\mathbf{x}}_{N} \\
&= \mathbf{c}'_{\hat{\beta}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\beta}} - \mathbf{c}'_{\beta}\bar{\mathbf{x}}_{\beta} && \text{/* } \hat{\mathbf{x}}_{\hat{N}} = \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0} \text{ */} \\
&= \textstyle\sum_{k\in[m]\setminus\{r\}} c_{\beta(k)}[\hat{x}_{\beta(k)} - \bar{x}_{\beta(k)}] + c_{N(s)}\hat{x}_{N(s)} - c_{\beta(r)}\bar{x}_{\beta(r)} \\
&= c_{N(s)} \cdot \theta(s) + \textstyle\sum_{k\in[m]} c_{\beta(k)}[\hat{x}_{\beta(k)} - \bar{x}_{\beta(k)}] && \text{/* } \hat{x}_{N(s)} = \theta(s), \hat{x}_{\beta(r)} = 0 \text{ */} \\
&= c_{N(s)}\theta(s) + \textstyle\sum_{k\in[m]} c_{\beta(k)} \cdot B[k,s]\theta(s) && \text{/* } \forall k \in [m], \hat{x}_{\beta(k)} - \bar{x}_{\beta(k)} = \theta(s)B[k,s] \text{ */} \\
&= \boxed{\theta(s) \cdot \left(c_{N(s)} + \textstyle\sum_{k\in[m]} c_{\beta(k)} \cdot B[k,s]\right)} && \Leftarrow \textbf{Ελαττ. Κόστος N(s)}
\end{aligned}
$$

■

Επιλογή Στήλης Εναλλαγής στον Simplex (III)

- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Για βάση β με bfs λύση $\bar{\mathbf{x}}_\beta$ που ορίζεται από το λεξικό $\mathbf{x}_\beta = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}$, οποιαδήποτε **στήλη εναλλαγής** $s \in N$ (ισοδύναμα, μη βασική μεταβλητή $N(s)$) ορίζει ένα μη ζημιογόνο pivot (δλδ, που *δεν αυξάνει* το κόστος) ως προς τη β, ΑΝΝ:

$$\boxed{\underline{c}_{N(s)} = c_{N(s)} + \sum_{k\in[m]} c_{\beta(k)} \cdot B[k,s] = c_{N(s)} + \mathbf{c}'_\beta \cdot B[*,s] < 0}$$

Επιλογή Στήλης Εναλλαγής στον Simplex (III)

- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Για βάση β με bfs λύση $\bar{\mathbf{x}}_\beta$ που ορίζεται από το λεξικό $\mathbf{x}_\beta = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}$, οποιαδήποτε **στήλη εναλλαγής** $s \in N$ (ισοδύναμα, μη βασική μεταβλητή $N(s)$) ορίζει ένα μη ζημιογόνο pivot (δλδ, που *δεν αυξάνει* το κόστος) ως προς τη β, ANN:

$$\boxed{\underline{c}_{N(s)} = c_{N(s)} + \sum_{k\in[m]} c_{\beta(k)} \cdot B[k,s] = c_{N(s)} + \mathbf{c}'_\beta \cdot B[*,s] < 0}$$

- Αλγόριθμοι Τύπου SIMPLEX: Για κάθε μη βασική στήλη (μεταβλητή) $N(s)$, υπολογίζουμε το **ελαττωμένο (ή ανηγμένο) κόστος** της $\underline{c}_{N(s)}$ και επιλέγουμε για pivot-in κάποια στήλη με **αρνητικό ελαττωμένο κόστος**.

Κριτήριο Τερματισμού (Ι)

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 3.2 (σημειώσεις)]

Αν στο $(\mathrm{LP}_=)$ $\mathbf{min.}\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ μετά από $k \geq 0$ pivots καταλήξουμε σε βάση β με λεξικό:

$$\mathbf{x}_\beta = \sum_{j\in[n-m]} -(A[*,\beta])^{-1} A[*,j] x_{N(j)} + (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a} = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}$$

όπου ΟΛΕΣ οι μη βασικές μεταβλητές έχουν μη αρνητικά ελαττωμένα κόστη, τότε η bfs λύση $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_\beta = \mathbf{b}; \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}]$ είναι **βέλτιστη λύση** του $(\mathrm{LP}_=)$.

Κριτήριο Τερματισμού (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.2 (σημειώσεις)]

- Έστω ότι $\forall s \in [n-m]$, $\underline{c}_{N(s)} = c_{N(s)} + \sum_{k\in[m]} c_{\beta(k)} B[k,s] \geq 0$.
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{y} = \mathbf{a}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$: Εφικτή λύση του $(LP_=)$.

Κριτήριο Τερματισμού (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.2 (σημειώσεις)]

- Έστω ότι $\forall s \in [n-m],\ \underline{c}_{N(s)} = c_{N(s)} + \sum_{k \in [m]} c_{\beta(k)} B[k,s] \geq 0$.
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{y} = \mathbf{a}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$: Εφικτή λύση του (LP$_=$).

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{c}'_\beta \bar{\mathbf{x}}_\beta = \mathbf{c}'_\beta \mathbf{b} = \mathbf{c}'_\beta[(A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a}] = \mathbf{c}'_\beta[(A[*,\beta])^{-1}A\mathbf{y}] \\
&= \mathbf{c}'_\beta(A[*,\beta])^{-1}(A[*,\beta]\mathbf{y}_\beta + A[*,N]\mathbf{y}_N) \\
&= \mathbf{c}'_\beta \mathbf{y}_\beta + \mathbf{c}'_\beta(A[*,\beta])^{-1}A[*,N]\mathbf{y}_N \\
&= \mathbf{c}'_\beta \mathbf{y}_\beta - \mathbf{c}'_\beta B\mathbf{y}_N \qquad /*\ B = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,N]\ */
\end{aligned}$$

Κριτήριο Τερματισμού (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.2 (σημειώσεις)]

- Έστω ότι $\forall s \in [n-m]$, $\underline{c}_{N(s)} = c_{N(s)} + \sum_{k\in[m]} c_{\beta(k)} B[k,s] \geq 0$.
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{y} = \mathbf{a}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$: Εφικτή λύση του ($LP_=$).

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{c}'_\beta \bar{\mathbf{x}}_\beta = \mathbf{c}'_\beta \mathbf{b} = \mathbf{c}'_\beta[(A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a}] = \mathbf{c}'_\beta[(A[*,\beta])^{-1}A\mathbf{y}] \\
&= \mathbf{c}'_\beta(A[*,\beta])^{-1}(A[*,\beta]\mathbf{y}_\beta + A[*,N]\mathbf{y}_N) \\
&= \mathbf{c}'_\beta \mathbf{y}_\beta + \mathbf{c}'_\beta(A[*,\beta])^{-1}A[*,N]\mathbf{y}_N \\
&= \mathbf{c}'_\beta \mathbf{y}_\beta - \mathbf{c}'_\beta B\mathbf{y}_N \qquad /*\ B = -(A[*,\beta])^{-1}A[*,N]\ */ \\
\mathbf{c}'\mathbf{y} &= \mathbf{c}'_\beta \mathbf{y}_\beta + \mathbf{c}'_N \mathbf{y}_N = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}'_\beta B\mathbf{y}_N + \mathbf{c}'_N \mathbf{y}_N \\
&= \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + (\mathbf{c}_N + \mathbf{c}'_\beta B)'\mathbf{y}_N \\
&= \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + \textstyle\sum_{s\in[n-m]}(c_{N(s)} + \mathbf{c}'_\beta B[*,s])y_{N(s)} \\
&= \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}'_N \mathbf{y}_N \\
&\geq \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} \qquad /*\ \{\underline{\mathbf{c}}_N \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}_N \geq \mathbf{0}\} \Rightarrow \underline{\mathbf{c}}'_N \mathbf{y}_N \geq 0\ */ \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Έχουμε **ικανή και αναγκαία** συνθήκη για τον τερματισμό των αλγορίθμων τύπου Simplex:

> *Έστω οποιαδήποτε βάση β που περιγράφεται από το λεξικό: $\mathbf{x}_\beta = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}$. Η αντίστοιχη bfs λύση $\bar{\mathbf{x}} = \left[\bar{\mathbf{x}}_\beta; \bar{\mathbf{x}}_N\right]$ (αν υπάρχει) είναι βέλτιστη λύση του* (LP$_=$) *ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ το* διάνυσμα–γραμμή με τα ελαττωμένα κόστη *των μη βασικών μεταβλητών είναι μη αρνητικό:*
>
> $$\underline{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_N + \mathbf{c}'_\beta \cdot B \geq \mathbf{0}.$$

Ελαττωμένα Κόστη στο Λεξικό / Ταμπλό (Ι)

- Έστω το (αρχικό) σύστημα $\mathbf{y} = A\mathbf{x} - \mathbf{a}$ με m εξισώσεις και $m+n$ μεταβλητές $[\mathbf{x}; \mathbf{y}]$.
- Θεωρούμε ως αρχική βάση $\beta(0)$ αυτή που περιλαμβάνει ΟΛΕΣ τις μεταβλητές του $\mathbf{y}$.
- Θεωρούμε ότι κάθε (βασική) μεβατλητή y_k έχει **μηδενικό συντελεστή κόστους**, αφού δεν εμφανίζεται στη συνάρτηση – στόχο του $(\mathrm{LP}_=)$.
- Τα **αρχικά ελαττωμένα κόστη** για τις **μη βασικές** μεταβλητές $\mathbf{x}$ είναι τα πραγματικά κόστη τους:

$$\underline{\mathbf{c}}(0)_{N(0)} = \mathbf{c}_{N(0)} + \mathbf{c}'_{\beta(0)} B(0) = \mathbf{c}_{N(0)}$$

- Προσθέτουμε μια ακόμη γραμμή στο αρχικό λεξικό, που να διατηρεί τα (πραγματικά) κόστη των μη βασικών μεταβλητών $\mathbf{x}$:

$$\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{x}' & z=1 \\ \hline \mathbf{y} = & A & -\mathbf{a} \\ \hline u = & \mathbf{c}' & 0 \\ \hline \end{array}$$

Ελαττωμένα Κόστη στο Λεξικό / Ταμπλό (ΙΙ)

ΛΗΜΜΑ

Για το (LP$_=$) $\mathbf{min.}\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, έστω ότι ξεκικάμε με το (ίσως μη εφικτό) λεξικό:

$$\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{x}' & z=1 \\ \hline \mathbf{y} = & A & -\mathbf{a} \\ \hline u = & \mathbf{c}' & 0 \\ \hline \end{array}$$

και μετά από $k \geq 0$ pivots καταλήγουμε στη λύση της β:

$$\mathbf{x}_\beta = \sum_{j\in[n-m]} -(A[*,\beta])^{-1}A[*,j]x_{N(j)} + (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a} = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}$$

με λεξικό:

$$\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{x}_N' & z=1 \\ \hline \mathbf{x}_\beta = & B & \mathbf{b} \\ \hline u = & \underline{\mathbf{c}}' & \zeta \\ \hline \end{array}$$

Το διάνυσμα $\underline{\mathbf{c}}$ δίνει τα **ελαττωμένα κόστη** των τρεχουσών μη βασικών μεταβλητών $\mathbf{x}_N$. Το ζ δίνει το **κόστος** της τρέχουσας βασικής (εφικτής ή μη) λύσης. Οι βασικές μεταβλητές $\mathbf{x}_\beta$ έχουν *μηδενικά ελαττωμένα κόστη*.

Ελαττωμένα Κόστη στο Λεξικό / Ταμπλό (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: Απόδειξη Λήμματος

Με επαγωγή στο πλήθος των pivots.

ΒΑΣΗ $k = 0$ pivots. Η τρέχουσα βάση $\beta^{(0)}$ «δείχνει» το διάνυσμα $\mathbf{y}$, με διάνυσμα κόστους (έστω) $\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

- Τρέχουσα (ίσως μη εφικτή) βασική λύση: $[\mathbf{y} = -\mathbf{a}; \mathbf{x} = \mathbf{0}]$.
- $u(0) = \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{d}'\mathbf{y} = 0 = \zeta(0)$.
- $\forall j \in [n-m], \underline{c}_{N^{(0)}(j)} = c_{N^{(0)}(j)} + \sum_{k\in[m]} d_{\beta^{(0)}(k)} B[k,j] = c_{N^{(0)}(j)}$
  /* οι μεταβλητές y_k έχουν κόστος $d_k = 0$. */

ΥΠΟΘΕΣΗ Έστω ότι μετά από $k \geq 0$ pivots για το τρέχον ταμπλό/λεξικό που αντιστοιχεί στη βάση $\bar{\beta} = \beta^{(k)}$ ισχύει:

$$\zeta = \mathbf{c}'_{\bar{\beta}} \bar{\mathbf{x}}_{\beta} \text{ και } \forall j \in [n-m], \underline{c}_{\bar{N}(j)} = c_{\bar{N}(j)} + \mathbf{c}'_{\bar{\beta}} B[*,j]$$

Ελαττωμένα Κόστη στο Λεξικό / Ταμπλό (IV)

ΕΞΗΓΗΣΗ: Απόδειξη Λήμματος

ΒΗΜΑ Θδο ότι αν γίνει το $(k+1)$−στό pivot στο στοιχείο $B[r,s]$ και προκύψει το λεξικό:

$$\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{x}_{\hat{N}} & z=1 \\ \hline \mathbf{x}_{\hat{\beta}} = & \hat{B} & \hat{\mathbf{b}} \\ \hline \hat{u} = & \underline{\hat{\mathbf{c}}}' & \hat{\zeta} \\ \hline \end{array}$$

τότε για $\beta^{(k+1)} = \hat{\beta} = \bar{\beta} - r + s$ ισχύει ότι:

$$\hat{\zeta} = \mathbf{c}'_{\hat{\beta}}\hat{\mathbf{x}}_{\hat{\beta}} \text{ και } \forall j \in [n-m], \underline{\hat{c}}_{\hat{N}(j)} = \hat{c}_{\hat{N}(j)} + \mathbf{c}'_{\hat{\beta}}B[*,j]$$

ΕΞΗΓΗΣΗ: Απόδειξη Λήμματος

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ:

$x'_s = (1/B_{r,s})\, x'_r + \Sigma_{j\in N-\{s\}} (-B_{r,j}/B_{r,s})\, x'_j + (-\, b_r / B_{r,s})$

$\forall k\in\beta-\{r\},\ x'_k = (B_{k,s}/B_{r,s})x'_r + \Sigma_{j\in N-\{s\}}[B_{k,j}-B_{r,j}\, B_{k,s}/B_{r,s}]x'_j + [b_k - b_r\, B_{k,s}/B_{r,s}]$

$z' = \underline{c}_s / B_{r,s}\, x'_r + \Sigma_{j\in N-\{s\}}[\underline{c}_j - \underline{c}_s B_{r,j} / B_{r,s}]\, x'_j + [\zeta - \underline{c}_s\, b_r / B_{r,s}]$

Για χάρη απλότητας, έστω ότι $\beta = (1,2,3,\ldots,m)$.

$\zeta' = \zeta + \theta\, B[m+1,s] = \zeta - \underline{c}_s\, b_r / B_{r,s} = \zeta - [c_s + \Sigma_{k=1\ldots m}\, c_k B_{k,s}]\, b_r / B_{r,s}$

$= \mathbf{c}_\beta^T \mathbf{x}_\beta + c_s x'_s - \Sigma_{k=1\ldots m} [\, c_k\, B_{k,s}\, b_r / B_{r,s}\,]$

$= \Sigma_{k\in\beta-\{r\}}\, c_k x_k + c_r x_r + c_s x'_s - \Sigma_{k\in\beta-\{r\}} [c_k B_{k,s}\, b_r / B_{r,s}] - c_r b_r$

$= \Sigma_{k\in\beta-\{r\}}\, c_k x_k + c_s x'_s - \Sigma_{k\in\beta-\{r\}} [c_k B_{k,s}\, b_r / B_{r,s}]$

$= \Sigma_{k\in\beta-\{r\}}\, c_k [b_k - B_{k,s}\, b_r / B_{r,s}] + c_s x'_s$

$= \Sigma_{k\in\beta-\{r\}}\, c_k x'_k + c_s x'_s = \mathbf{c}_{\beta'}^T \mathbf{x}_{\beta'}$

Ελαττωμένα Κόστη στο Λεξικό / Ταμπλό (V)

ΕΞΗΓΗΣΗ: Απόδειξη Λήμματος

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ:

$x'_s \quad = (1/B_{r,s})\, x'_r + \Sigma_{j\in N-\{s\}} (-B_{r,j}/B_{r,s})\, x'_j + (-\, b_r / B_{r,s})$

$\forall k\in\beta-\{r\},\ x'_k = (B_{k,s}/B_{r,s})x'_r + \Sigma_{j\in N-\{s\}}[B_{k,j}-B_{r,j}\, B_{k,s}/B_{r,s}]x'_j + [b_k - b_r\, B_{k,s}/B_{r,s}]$

$z' \quad = \underline{c}_s / B_{r,s}\, x'_r + \Sigma_{j\in N-\{s\}}[\underline{c}_j - \underline{c}_s B_{r,j} / B_{r,s}]\, x'_j + [\zeta - \underline{c}_s\, b_r / B_{r,s}]$

Για χάρη απλότητας, έστω ότι $\beta = (1,2,3,\ldots,m)$.

$$\begin{aligned}
\underline{c}'_s = \underline{c}'_{x(r)} &= \underline{c}_s(1/B_{r,s}) = [c_s + \Sigma_{k\in\beta}\, c_k B_{k,s}]\,(1/B_{r,s}) \\
&= c_s/B_{r,s} + \Sigma_{k\in\beta}\, c_k B_{k,s}/B_{r,s} = c_s/B_{r,s} + \Sigma_{k\in\beta-\{r\}}\, c_k B_{k,s}/B_{r,s} + c_r \\
&= c_r + c_s(1/B_{r,s}) + \Sigma_{k\in\beta-\{r\}}\, c_k B_{k,s}/B_{r,s} \\
&= c_r + c_s\, B'_{r,s} + \Sigma_{k\in\beta-\{r\}}\, c_k B'_{k,s} = c_r + \mathbf{c}_{\beta'}^{T}\, B'[*,s]
\end{aligned}$$

$\forall j \in N-\{s\}$,

$$\begin{aligned}
\underline{c}'_j &= \underline{c}_j - \underline{c}_s\, B_{r,j} / B_{r,s} = c_j + \Sigma_{k\in\beta}\, c_k B_{k,j} - [c_s + \Sigma_{k\in\beta}\, c_k B_{k,s}]\, B_{r,j} / B_{r,s} \\
&= c_j + \Sigma_{k\in\beta-\{r\}}\, c_k[B_{k,j} - B_{k,s}\, B_{r,j}/B_{r,s}] + c_s[-B_{r,j} / B_{r,s}] \\
&= c_j + \Sigma_{k\in\beta-\{r\}}\, c_k B'_{k,j} + c_s B'_{r,j} \\
&= c_j + \Sigma_{k\in\beta-\{r\}}\, c_k B'_{x'(k),x'(j)} + c_s B'_{x'(s),x'(j)} \\
&= c_j + \mathbf{c}_{\beta'}^{T}\, B'_{*,j}
\end{aligned}$$

QED

Εντοπισμός Μη Φραγμένων Γ.Π.

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 3.3 (σημειώσεις)]

Για το $(\mathrm{LP}_=)$ $\mathbf{min}.\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, αν σε κάποιο pivot προκύψει bfs λύση β με λεξικό / ταμπλό:

$$
\begin{array}{r|c|c|}
 & \mathbf{x}'_N & z = 1 \\
\hline
\mathbf{x}_\beta = & B & \mathbf{b} \\
\hline
u = & \underline{\mathbf{c}}' & \zeta \\
\hline
\end{array}
$$

στο οποίο υπάρχει στήλη $s \in [n-m]$ τ.ώ.

$$\underline{c}_{N(s)} < 0 \;\wedge\; B[*,s] \geq \mathbf{0} \;\wedge\; B[*,s] \neq \mathbf{0}$$

τότε το $(\mathrm{LP}_=)$ είναι **ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ**.

Εντοπισμός Μη Φραγμένων Γ.Π.

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 3.3 (σημειώσεις)]

Για το (LP$_=$) $\min.\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, αν σε κάποιο pivot προκύψει bfs λύση β με λεξικό / ταμπλό:

$$\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{x}'_N & z = 1 \\ \hline \mathbf{x}_\beta = & B & \mathbf{b} \\ \hline u = & \underline{\mathbf{c}}' & \zeta \\ \hline \end{array}$$

στο οποίο υπάρχει στήλη $s \in [n-m]$ τ.ώ.

$$\underline{c}_{N(s)} < 0 \;\wedge\; B[*,s] \geq \mathbf{0} \;\wedge\; B[*,s] \neq \mathbf{0}$$

τότε το (LP$_=$) είναι **ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ**.

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.3 (σημειώσεις)]

Κάνουμε pivot-in τη στήλη s (δλδ, τη μεταβλητή $x_{N(s)}$), με τιμή $\theta(s) \to \infty$: *Δεν υπάρχει άνω φράγμα*. Η μεταβολή (μείωση) στο κόστος είναι ακριβώς: $\underline{c}_{N(s)}\theta(s)$.

Ένα Ολοκληρωμένο Παράδειγμα

$$
\begin{array}{llcll}
\textbf{minimize} & 3X_1 & - & 6X_2 & \\
\text{s.t.} & X_1 & + & X_2 & \geq -1 \\
 & 2X_1 & + & X_2 & \geq 0 \\
 & X_1 & - & X_2 & \geq -1 \\
 & X_1 & - & 4X_2 & \geq -13 \\
 & -4X_1 & + & X_2 & \geq -23 \\
 & X_1 \geq 0, & & X_2 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -13 \\ -23 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}
$$

Ένα Ολοκληρωμένο Παράδειγμα

$$
\begin{array}{llcllcl}
\textbf{minimize} & 3X_1 - 6X_2 & & & & & \\
\text{s.t.} & X_1 + X_2 & \boxed{\geq -1} & +1 & = & X_3 \\
 & 2X_1 + X_2 & \boxed{\geq 0} & & = & X_4 \\
 & X_1 - X_2 & \boxed{\geq -1} & +1 & = & X_5 \\
 & X_1 - 4X_2 & \boxed{\geq -13} & +13 & = & X_6 \\
 & -4X_1 + X_2 & \boxed{\geq -23} & +23 & = & X_7 \\
 & X_1 \geq 0,\ X_2 & \geq 0 & & & X_3,\ldots,X_7 \geq 0
\end{array}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad
\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -13 \\ -23 \end{bmatrix} \qquad
\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}
$$

Ένα Ολοκληρωμένο Παράδειγμα

```
>> % ADD SLACK VARIABLES TO TRANSFORM INTO C-LP...
>> T = totbl(A,b,p);
              x1          x2           1
        ---------------------------------------
 x3 = |     1.0000      2.0000      1.0000
 x4 = |     2.0000      1.0000     -0.0000
 x5 = |     1.0000     -1.0000      1.0000
 x6 = |     1.0000     -4.0000     13.0000
 x7 = |    -4.0000      1.0000     23.0000
        ---------------------------------------
 z  = |     3.0000     -6.0000      0.0000
```

Ένα Ολοκληρωμένο Παράδειγμα

```
>> % ADD SLACK VARIABLES TO TRANSFORM INTO C-LP...
>> T = totbl(A,b,p);
              x1          x2          1
         ----------------------------------------
 x3 = |   1.0000     2.0000     1.0000
 x4 = |   2.0000     1.0000    -0.0000
 x5 = |   1.0000    -1.0000     1.0000
 x6 = |   1.0000    -4.0000    13.0000
 x7 = |  -4.0000     1.0000    23.0000
         ----------------------------------------
 z  = |   3.0000    -6.0000     0.0000
```

Pivot Row

Pivot Column

Ένα Ολοκληρωμένο Παράδειγμα

```
>> % ADD SLACK VARIABLES TO TRANSFORM INTO C-LP...
>> T = totbl(A,b,p);
             x1          x2          1
        ---------------------------------------
 x3 = |    1.0000     2.0000     1.0000
 x4 = |    2.0000     1.0000    -0.0000
 x5 = |    1.0000    -1.0000     1.0000
 x6 = |    1.0000    -4.0000    13.0000
 x7 = |   -4.0000     1.0000    23.0000
        ---------------------------------------
 z  = |    3.0000    -6.0000     0.0000
>>
>> % PIVOT COLUMN: Choose a column of NEGATIVE cost coefficient ➔ Entering var. = ??
>> % PIVOT ROW: Apply min ratio test ➔ Leaving Variable = ??
>> T = ljx(T,3,2);
             x1          x5          1
        ---------------------------------------
 x3 = |    3.0000    -2.0000     3.0000
 x4 = |    3.0000    -1.0000     1.0000
 x2 = |    1.0000    -1.0000     1.0000
 x6 = |   -3.0000     4.0000     9.0000
 x7 = |   -3.0000    -1.0000    24.0000
        ---------------------------------------
 z  = |   -3.0000     6.0000    -6.0000
```

Pivot Row

Pivot Column

Ένα Ολοκληρωμένο Παράδειγμα

```
>> % ADD SLACK VARIABLES TO TRANSFORM INTO C-LP...
>> T = totbl(A,b,p);
             x1          x2          1
        ---------------------------------------
 x3 = |     1.0000      2.0000      1.0000
 x4 = |     2.0000      1.0000     -0.0000
 x5 = |     1.0000     -1.0000      1.0000
 x6 = |     1.0000     -4.0000     13.0000
 x7 = |    -4.0000      1.0000     23.0000
        ---------------------------------------
 z  = |     3.0000     -6.0000      0.0000
>>
>> % PIVOT COLUMN: Choose a column of NEGATIVE cost coefficient ➔ Entering var. = ??
>> % PIVOT ROW: Apply min ratio test ➔ Leaving Variable = ??
>> T = ljx(T,3,2);
             x1          x5          1
        ---------------------------------------
 x3 = |     3.0000     -2.0000      3.0000
 x4 = |     3.0000     -1.0000      1.0000
 x2 = |     1.0000     -1.0000      1.0000
 x6 = |    -3.0000      4.0000      9.0000
 x7 = |    -3.0000     -1.0000     24.0000
        ---------------------------------------
 z  = |    -3.0000      6.0000     -6.0000
```

Pivot Row

Pivot Column

Pivot Row

Pivot Column

Ένα Ολοκληρωμένο Παράδειγμα

```
            x1          x5           1
      ------------------------------------------
x3 = |    3.0000    -2.0000     3.0000
x4 = |    3.0000    -1.0000     1.0000
x2 = |    1.0000    -1.0000     1.0000
x6 = |   -3.0000     4.0000     9.0000
x7 = |   -3.0000    -1.0000    24.0000
      ------------------------------------------
z  = |   -3.0000     6.0000    -6.0000
>>
>> % PIVOT COLUMN: Choose a column of NEGATIVE cost coefficient ➔ Entering var. = ??
>> % PIVOT ROW: Apply min ratio test ➔ Leaving Variable = ??
```

Pivot Column

Pivot Row

Ένα Ολοκληρωμένο Παράδειγμα

```
           x1          x5          1
      ----------------------------------------
x3 = |   3.0000   -2.0000    3.0000
x4 = |   3.0000   -1.0000    1.0000
x2 = |   1.0000   -1.0000    1.0000
x6 = |  -3.0000    4.0000    9.0000
x7 = |  -3.0000   -1.0000   24.0000
      ----------------------------------------
z  = |  -3.0000    6.0000   -6.0000
```

Pivot Column

Pivot Row

>>

>> % PIVOT COLUMN: Choose a column of NEGATIVE cost coefficient ➔ Entering var. = ??

>> % PIVOT ROW: Apply min ratio test ➔ Leaving Variable = ??

>> T = ljx(T,4,1);

```
           x6          x5          1
      ----------------------------------------
x3 = |  -1.0000    2.0000   12.0000
x4 = |  -1.0000    3.0000   10.0000
x2 = |  -0.3333    0.3333    4.0000
x1 = |  -0.3333    1.3333    3.0000
x7 = |   1.0000   -5.0000   15.0000
      ----------------------------------------
z  = |   1.0000    2.0000  -15.0000
```

Ένα Ολοκληρωμένο Παράδειγμα

```
              x1          x5          1
        ----------------------------------------
 x3 = |    3.0000     -2.0000     3.0000
 x4 = |    3.0000     -1.0000     1.0000
 x2 = |    1.0000     -1.0000     1.0000
 x6 = |   -3.0000      4.0000     9.0000
 x7 = |   -3.0000     -1.0000    24.0000
        ----------------------------------------
 z  = |   -3.0000      6.0000    -6.0000
>>
>> % PIVOT COLUMN: Choose a column of NEGATIVE cost coefficient ➔ Entering var. = ??
>> % PIVOT ROW: Apply min ratio test ➔ Leaving Variable = ??
>> T = ljx(T,4,1);
              x6          x5          1
        ----------------------------------------
 x3 = |   -1.0000      2.0000    12.0000
 x4 = |   -1.0000      3.0000    10.0000
 x2 = |   -0.3333      0.3333     4.0000
 x1 = |   -0.3333      1.3333     3.0000
 x7 = |    1.0000     -5.0000    15.0000
        ----------------------------------------
 z  = |    1.0000      2.0000   -15.0000
```

Pivot Column

Pivot Row

Βέλτιστη Λύση

Χειρισμός Ισοπαλιών

$$\boxed{\mathbf{x}_\beta = \sum_{j\in[n-m]} -(A[*,\beta])^{-1}A[*,j]x_j + (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a} = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}}$$

Χειρισμός Ισοπαλιών

$$\boxed{\mathbf{x}_\beta \; = \; \sum_{j\in[n-m]} -(A[*,\beta])^{-1}A[*,j]x_j + (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a} \; = \; B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}}$$

- Μας απασχολούν στο εξής φραγμένα προγράμματα:
  - Κάθε μη βασική στήλη $s \in [n-m]$ με *αρνητικό ελαττωμένο κόστος* έχει **τουλάχιστον έναν αρνητικό όρο** στη $B[*,s]$

    /∗ διαφορετικά, βλ. Θεώρημα 3.3 σημειώσεων ∗/

Χειρισμός Ισοπαλιών

$$\boxed{\mathbf{x}_\beta = \sum_{j\in[n-m]} -(A[*,\beta])^{-1}A[*,j]x_j + (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a} = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}}$$

- Μας απασχολούν στο εξής φραγμένα προγράμματα:
  - Κάθε μη βασική στήλη $s \in [n-m]$ με *αρνητικό ελαττωμένο κόστος* έχει **τουλάχιστον έναν αρνητικό όρο** στη $B[*,s]$

    /∗ διαφορετικά, βλ. Θεώρημα 3.3 σημειώσεων ∗/

- Βασικά Ερωτήματα:
  - Ποια από τις υποψήφιες **μη βασικές** μεταβλητές (στήλες) με *αρνητικό ελαττωμένο κόστος*, πρέπει να επιλέγουμε κάθε φορά ως στήλη εναλλαγής;
  - Ποια από τις **βασικές** μεταβλητές (γραμμές) που η τιμή τους *μηδενίζεται* στην καινούργια κορυφή, θα δώσει τη θέση της στη νεοεισερχόμενη μεταβλητή; Δηλαδή, πώς καθορίζεται η γραμμή εναλλαγής;

Τρόποι Επιλογής Στηλών Εναλλαγής

Pricing Rule: Στήλη εναλλαγης *αρνητικό ελαττωμένου κόστους*.

Τρόποι Επιλογής Στηλών Εναλλαγής

Pricing Rule: Στήλη εναλλαγης *αρνητικό ελαττωμένου κόστους*.

- Δεν υπάρχει τεκμηριωμένα καλύτερη επιλογή.
  Προτεινόμενοι (εμπειρικοί) κανόνες:

Τρόποι Επιλογής Στηλών Εναλλαγής

Pricing Rule: Στήλη εναλλαγης *αρνητικό ελαττωμένου κόστους*.

- Δεν υπάρχει τεκμηριωμένα καλύτερη επιλογή. Προτεινόμενοι (εμπειρικοί) κανόνες:
  - Μέθοδος **μη βασικών παραγώγων** (non-basic gradient)

$$s^* = \min\left(\arg\min_{s:\underline{c}_s<0}\{\underline{c}_s\}\right) \qquad \text{/* Παρόμοια τεχνική με τη Steepest Descent */}$$

Τρόποι Επιλογής Στηλών Εναλλαγής

Pricing Rule: Στήλη εναλλαγης *αρνητικό ελαττωμένου κόστους*.

- Δεν υπάρχει τεκμηριωμένα καλύτερη επιλογή. Προτεινόμενοι (εμπειρικοί) κανόνες:
  - Μέθοδος **μη βασικών παραγώγων** (non-basic gradient)

$$s^* = \min\left(\arg\min_{s:\underline{c}_s<0}\{\underline{c}_s\}\right)$$

/∗ Παρόμοια τεχνική με τη Steepest Descent ∗/

  - Μέθοδος **μέγιστης μεταβολής κόστου**ς (greatest increment)

$$s^* = \min\left(\arg\min_{s\in N:\underline{c}_s<0}\{\theta(s)\cdot\underline{c}_s\}\right)$$

/∗ Άπληστη επιλογή ∗/

Τρόποι Επιλογής Στηλών Εναλλαγής

Pricing Rule: Στήλη εναλλαγης *αρνητικό ελαττωμένου κόστους*.

- Δεν υπάρχει τεκμηριωμένα καλύτερη επιλογή. Προτεινόμενοι (εμπειρικοί) κανόνες:
  - Μέθοδος **μη βασικών παραγώγων** (non-basic gradient)

$$s^* = \min\left(\arg\min_{s:\underline{c}_s<0}\{\underline{c}_s\}\right) \qquad \text{/* Παρόμοια τεχνική με τη Steepest Descent */}$$

  - Μέθοδος **μέγιστης μεταβολής κόστους** (greatest increment)

$$s^* = \min\left(\arg\min_{s\in N:\underline{c}_s<0}\{\theta(s)\cdot\underline{c}_s\}\right) \qquad \text{/* Άπληστη επιλογή */}$$

  - Μέθοδος **όλων των παραγώγων** (all-variable gradient)

$$s^* = \min\left(\arg\min_{s\in N:\underline{c}_s<0}\left\{\frac{\underline{c}_s}{\sqrt{1+\sum_{k\in\beta}B[k,s]^2}}\right\}\right)$$

Τρόποι Επιλογής Γραμμών Εναλλαγής

- Οι αλγόριθμοι τύπου SIMPLEX επιλέγουν πάντα κάποια στήλη εναλλαγής s με *αρνητικό ελαττωμένο κόστος*.

Q1 Τι θα συμβεί αν το Min Ratio Test επιστρέψει $\boxed{\theta(s) = 0}$;

Τρόποι Επιλογής Γραμμών Εναλλαγής

- Οι αλγόριθμοι τύπου SIMPLEX επιλέγουν πάντα κάποια στήλη εναλλαγής s με *αρνητικό ελαττωμένο κόστος*.

Q1 Τι θα συμβεί αν το Min Ratio Test επιστρέψει $\boxed{\theta(s) = 0}$;

A1 ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ η *γραμμή εναλλαγής* $r(s)$ που θα επιλέξουμε θα μας διατηρήσει στην **ίδια κορυφή** (παρότι αλλάξαμε βάση):

$$
\begin{aligned}
& \hat{x}_{\beta(r)} = \bar{x}_{\beta(r)} = \theta(s) = 0, \\
\forall k \in [m] \setminus \{r\}, \quad & \hat{x}_{\beta(k)} = \bar{x}_{\beta(k)} + \theta(s)B[k,s] = \bar{x}_{\beta(k)}, \\
& \hat{x}_{N(s)} = \theta(s) = 0 = \bar{x}_{N(s)}, \\
\forall j \in [n-m] \setminus \{s\}, \quad & \hat{x}_{N(j)} = 0
\end{aligned}
$$

- Οι αλγόριθμοι τύπου SIMPLEX επιλέγουν πάντα κάποια στήλη εναλλαγής s με *αρνητικό ελαττωμένο κόστος*.

Q1 Τι θα συμβεί αν το Min Ratio Test επιστρέψει $\boxed{\theta(s) = 0}$;

A1 ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ η *γραμμή εναλλαγής* $r(s)$ που θα επιλέξουμε θα μας διατηρήσει στην **ίδια κορυφή** (παρότι αλλάξαμε βάση):

$$\begin{aligned}
& \hat{x}_{\beta(r)} = \bar{x}_{\beta(r)} = \theta(s) = 0, \\
\forall k \in [m] \setminus \{r\}, \quad & \hat{x}_{\beta(k)} = \bar{x}_{\beta(k)} + \theta(s) B[k,s] = \bar{x}_{\beta(k)}, \\
& \hat{x}_{N(s)} = \theta(s) = 0 = \bar{x}_{N(s)}, \\
\forall j \in [n-m] \setminus \{s\}, \quad & \hat{x}_{N(j)} = 0
\end{aligned}$$

Q2 Υπάρχει περίπτωση να επιστρέψουμε (μετά από κάποιες εναλλαγές) σε βάση που **έχουμε ήδη επισκεφθεί**;

Τρόποι Επιλογής Γραμμών Εναλλαγής

- Οι αλγόριθμοι τύπου SIMPLEX επιλέγουν πάντα κάποια στήλη εναλλαγής s με *αρνητικό ελαττωμένο κόστος*.

Q1 Τι θα συμβεί αν το Min Ratio Test επιστρέψει $\boxed{\theta(s) = 0}$;

A1 ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ η *γραμμή εναλλαγής* $r(s)$ που θα επιλέξουμε θα μας διατηρήσει στην **ίδια κορυφή** (παρότι αλλάξαμε βάση):

$$\begin{aligned}
& \hat{x}_{\beta(r)} = \bar{x}_{\beta(r)} = \theta(s) = 0, \\
\forall k \in [m] \setminus \{r\}, \quad & \hat{x}_{\beta(k)} = \bar{x}_{\beta(k)} + \theta(s)B[k,s] = \bar{x}_{\beta(k)}, \\
& \hat{x}_{N(s)} = \theta(s) = 0 = \bar{x}_{N(s)}, \\
\forall j \in [n-m] \setminus \{s\}, \quad & \hat{x}_{N(j)} = 0
\end{aligned}$$

Q2 Υπάρχει περίπτωση να επιστρέψουμε (μετά από κάποιες εναλλαγές) σε βάση που **έχουμε ήδη επισκεφθεί**;

A2 ΔΥΣΤΥΧΩΣ ΝΑΙ!!! ➡ Εμφάνιση Κύκλου (cycling).

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (I)

Έστω ότι υιοθετούμε τον εξής αλγόριθμο τύπου Simplex:

- Επιλογή στήλης εναλλαγής
  - Εξειδίκευση του Pricing Rule: Εισέρχεται η μη βασική μεταβλητή (στήλη) με το **ελάχιστο ελαττωμένο κόστος**.
  - Επίλυση ισοπαλιών: Υπέρ της μεταβλητής με το **μικρότερο δείκτη**.

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (Ι)

Έστω ότι υιοθετούμε τον εξής αλγόριθμο τύπου Simplex:

- Επιλογή στήλης εναλλαγής
  - Εξειδίκευση του Pricing Rule: Εισέρχεται η μη βασική μεταβλητή (στήλη) με το **ελάχιστο ελαττωμένο κόστος**.
  - Επίλυση ισοπαλιών: Υπέρ της μεταβλητής με το **μικρότερο δείκτη**.
- Επιλογή γραμμής εναλλαγής
  - Εφαρμόζεται ο κανόνας Min Ratio Test.
  - Επίλυση ισοπαλιών: Φεύγει η βασική μεταβλητή (γραμμή) με **μικρότερο δείκτη**.

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (II)

```
>> T = totbl(A,a,p);
              x1          x2          x3         x4          1
      --------------------------------------------------------
 x5 = |    -0.2500      8.0000     1.0000    -9.0000     0.0000
 x6 = |    -0.5000     12.0000     0.5000    -3.0000     0.0000
 x7 = |     0.0000      0.0000    -1.0000     0.0000     1.0000
      --------------------------------------------------------
  z = |    -0.7500    20.0000    -0.5000     6.0000     0.0000
```

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (II)

```
>> T = totbl(A,a,p);
              x1          x2          x3          x4           1
      ------------------------------------------------------
 x5 = |    -0.2500      8.0000      1.0000     -9.0000      0.0000
 x6 = |    -0.5000     12.0000      0.5000     -3.0000      0.0000
 x7 = |     0.0000      0.0000     -1.0000      0.0000      1.0000
      ------------------------------------------------------
  z = |    -0.7500    20.0000     -0.5000      6.0000     0.0000
```

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (II)

```
>> T = totbl(A,a,p);
              x1          x2          x3          x4           1
      -------------------------------------------------------------
 x5 = |     -0.2500      8.0000      1.0000     -9.0000      0.0000
 x6 = |     -0.5000     12.0000      0.5000     -3.0000      0.0000
 x7 = |      0.0000      0.0000     -1.0000      0.0000      1.0000
      -------------------------------------------------------------
  z = |     -0.7500    20.0000     -0.5000      6.0000      0.0000

>> T = ljx(T,1,1);
              x5          x2          x3          x4           1
      -------------------------------------------------------------
 x1 = |     -4.0000    32.0000      4.0000   -36.0000      0.0000
 x6 = |      2.0000    -4.0000     -1.5000    15.0000      0.0000
 x7 = |      0.0000     0.0000     -1.0000     0.0000      1.0000
      -------------------------------------------------------------
  z = |      3.0000    -4.0000     -3.5000    33.0000      0.0000
```

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (ΙΙ)

```
>> T = totbl(A,a,p);
                x1          x2          x3          x4           1
      --------------------------------------------------------------
 x5 = |    -0.2500      8.0000      1.0000     -9.0000      0.0000
 x6 = |    -0.5000     12.0000      0.5000     -3.0000      0.0000
 x7 = |     0.0000      0.0000     -1.0000      0.0000      1.0000
      --------------------------------------------------------------
  z = |    -0.7500    20.0000    -0.5000      6.0000      0.0000

>> T = ljx(T,1,1);
                x5          x2          x3          x4           1
      --------------------------------------------------------------
 x1 = |    -4.0000    32.0000      4.0000   -36.0000      0.0000
 x6 = |     2.0000    -4.0000    -1.5000    15.0000      0.0000
 x7 = |     0.0000     0.0000    -1.0000     0.0000      1.0000
      --------------------------------------------------------------
  z = |     3.0000    -4.0000    -3.5000    33.0000      0.0000
```

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (ΙΙ)

```
>> T = totbl(A,a,p);
              x1          x2          x3         x4          1
       ---------------------------------------------------------
 x5 = |    -0.2500      8.0000      1.0000    -9.0000     0.0000
 x6 = |    -0.5000     12.0000      0.5000    -3.0000     0.0000
 x7 = |     0.0000      0.0000     -1.0000     0.0000     1.0000
       ---------------------------------------------------------
  z = |    -0.7500    20.0000    -0.5000     6.0000     0.0000

>> T = ljx(T,1,1);
              x5          x2          x3         x4          1
       ---------------------------------------------------------
 x1 = |    -4.0000    32.0000     4.0000   -36.0000     0.0000
 x6 = |     2.0000    -4.0000    -1.5000    15.0000     0.0000
 x7 = |     0.0000     0.0000    -1.0000     0.0000     1.0000
       ---------------------------------------------------------
  z = |     3.0000    -4.0000    -3.5000    33.0000     0.0000

>> T = ljx(T,2,2);
              x5          x6          x3         x4          1
       ---------------------------------------------------------
 x1 = |    12.0000    -8.0000    -8.0000    84.0000     0.0000
 x2 = |     0.5000    -0.2500    -0.3750     3.7500     0.0000
 x7 = |     0.0000     0.0000    -1.0000     0.0000     1.0000
       ---------------------------------------------------------
  z = |     1.0000     1.0000    -2.0000    18.0000     0.0000
```

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (ΙΙ)

```
>> T = totbl(A,a,p);
             x1          x2          x3          x4          1
      -------------------------------------------------------
 x5 = |   -0.2500      8.0000      1.0000     -9.0000     0.0000
 x6 = |   -0.5000     12.0000      0.5000     -3.0000     0.0000
 x7 = |    0.0000      0.0000     -1.0000      0.0000     1.0000
      -------------------------------------------------------
  z = |   -0.7500    20.0000    -0.5000     6.0000     0.0000

>> T = ljx(T,1,1);
             x5          x2          x3          x4          1
      -------------------------------------------------------
 x1 = |   -4.0000    32.0000     4.0000   -36.0000     0.0000
 x6 = |    2.0000    -4.0000    -1.5000    15.0000     0.0000
 x7 = |    0.0000     0.0000    -1.0000     0.0000     1.0000
      -------------------------------------------------------
  z = |    3.0000    -4.0000    -3.5000    33.0000     0.0000

>> T = ljx(T,2,2);
             x5          x6          x3          x4          1
      -------------------------------------------------------
 x1 = |   12.0000    -8.0000    -8.0000    84.0000     0.0000
 x2 = |    0.5000    -0.2500    -0.3750     3.7500     0.0000
 x7 = |    0.0000     0.0000    -1.0000     0.0000     1.0000
      -------------------------------------------------------
  z = |    1.0000     1.0000    -2.0000    18.0000     0.0000
```

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (II)

```
>> T = ljx(T,1,3);
              x5         x6         x1         x4         1
      ----------------------------------------------------
 x3 = |     1.5000    -1.0000    -0.1250    10.5000     0.0000
 x2 = |    -0.0625     0.1250     0.0469    -0.1875     0.0000
 x7 = |    -1.5000     1.0000     0.1250   -10.5000     1.0000
      ----------------------------------------------------
  z = |    -2.0000     3.0000     0.2500    -3.0000     0.0000
```

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (II)

```
>> T = ljx(T,1,3);
              x5         x6         x1         x4          1
      ------------------------------------------------------
 x3 = |     1.5000    -1.0000    -0.1250    10.5000     0.0000
 x2 = |    -0.0625     0.1250     0.0469    -0.1875     0.0000
 x7 = |    -1.5000     1.0000     0.1250   -10.5000     1.0000
      ------------------------------------------------------
  z = |    -2.0000     3.0000     0.2500    -3.0000     0.0000
```

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (II)

```
>> T = ljx(T,1,3);
              x5         x6         x1         x4          1
      -------------------------------------------------------
 x3 = |     1.5000    -1.0000    -0.1250    10.5000     0.0000
 x2 = |    -0.0625     0.1250     0.0469    -0.1875     0.0000
 x7 = |    -1.5000     1.0000     0.1250   -10.5000     1.0000
      -------------------------------------------------------
  z = |    -2.0000     3.0000     0.2500    -3.0000     0.0000
>> T = ljx(T,2,4);
              x5         x6         x1         x2          1
      -------------------------------------------------------
 x3 = |    -2.0000     6.0000     2.5000   -56.0000     0.0000
 x4 = |    -0.3333     0.6667     0.2500    -5.3333     0.0000
 x7 = |     2.0000    -6.0000    -2.5000    56.0000     1.0000
      -------------------------------------------------------
  z = |    -1.0000     1.0000    -0.5000    16.0000     0.0000
```

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (II)

```
>> T = ljx(T,1,3);
               x5         x6         x1         x4         1
      ----------------------------------------------------------
 x3 = |     1.5000    -1.0000    -0.1250    10.5000     0.0000
 x2 = |    -0.0625     0.1250     0.0469    -0.1875     0.0000
 x7 = |    -1.5000     1.0000     0.1250   -10.5000     1.0000
      ----------------------------------------------------------
  z = |    -2.0000     3.0000     0.2500    -3.0000     0.0000
>> T = ljx(T,2,4);
               x5         x6         x1         x2         1
      ----------------------------------------------------------
 x3 = |    -2.0000     6.0000     2.5000   -56.0000     0.0000
 x4 = |    -0.3333     0.6667     0.2500    -5.3333     0.0000
 x7 = |     2.0000    -6.0000    -2.5000    56.0000     1.0000
      ----------------------------------------------------------
  z = |    -1.0000     1.0000    -0.5000    16.0000     0.0000
```

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (ΙΙ)

```
>> T = ljx(T,1,3);
              x5         x6         x1         x4          1
      ------------------------------------------------------
 x3 = |     1.5000    -1.0000    -0.1250    10.5000     0.0000
 x2 = |    -0.0625     0.1250     0.0469    -0.1875     0.0000
 x7 = |    -1.5000     1.0000     0.1250   -10.5000     1.0000
      ------------------------------------------------------
  z = |    -2.0000     3.0000     0.2500    -3.0000     0.0000
>> T = ljx(T,2,4);
              x5         x6         x1         x2          1
      ------------------------------------------------------
 x3 = |    -2.0000     6.0000     2.5000   -56.0000     0.0000
 x4 = |    -0.3333     0.6667     0.2500    -5.3333     0.0000
 x7 = |     2.0000    -6.0000    -2.5000    56.0000     1.0000
      ------------------------------------------------------
  z = |    -1.0000     1.0000    -0.5000    16.0000     0.0000
>> T = ljx(T,1,1);
              x3         x6         x1         x2          1
      ------------------------------------------------------
 x5 = |    -0.5000     3.0000     1.2500   -28.0000     0.0000
 x4 = |     0.1667    -0.3333    -0.1667     4.0000     0.0000
 x7 = |    -1.0000     0.0000     0.0000     0.0000     1.0000
      ------------------------------------------------------
  z = |     0.5000    -2.0000    -1.7500    44.0000     0.0000
```

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (II)

```
>> T = ljx(T,1,3);
            x5        x6        x1        x4        1
      -----------------------------------------------
 x3 = |    1.5000   -1.0000   -0.1250   10.5000    0.0000
 x2 = |   -0.0625    0.1250    0.0469   -0.1875    0.0000
 x7 = |   -1.5000    1.0000    0.1250  -10.5000    1.0000
      -----------------------------------------------
  z = |   -2.0000    3.0000    0.2500   -3.0000    0.0000
>> T = ljx(T,2,4);
            x5        x6        x1        x2        1
      -----------------------------------------------
 x3 = |   -2.0000    6.0000    2.5000  -56.0000    0.0000
 x4 = |   -0.3333    0.6667    0.2500   -5.3333    0.0000
 x7 = |    2.0000   -6.0000   -2.5000   56.0000    1.0000
      -----------------------------------------------
  z = |   -1.0000    1.0000   -0.5000   16.0000    0.0000
>> T = ljx(T,1,1);
            x3        x6        x1        x2        1
      -----------------------------------------------
 x5 = |   -0.5000    3.0000    1.2500  -28.0000    0.0000
 x4 = |    0.1667   -0.3333   -0.1667    4.0000    0.0000
 x7 = |   -1.0000    0.0000    0.0000    0.0000    1.0000
      -----------------------------------------------
  z = |    0.5000   -2.0000   -1.7500   44.0000    0.0000
```

Παράδειγμα Εμφάνισης Κύκλου (II)

```
>> T = ljx(T,2,2);
              x3         x4         x1         x2         1
      --------------------------------------------------------
 x5 = |    1.0000    -9.0000    -0.2500     8.0000    -0.0000
 x6 = |    0.5000    -3.0000    -0.5000    12.0000    -0.0000
 x7 = |   -1.0000    -0.0000     0.0000     0.0000     1.0000
      --------------------------------------------------------
 z  = |   -0.5000     6.0000    -0.7500    20.0000     0.0000
>>
>> %% ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ !!!
```

Εξασφάλιση Αποφυγής Κύκλων

- Απλός τρόπος: **Τυχαία επιλογή** γραμμών εναλλαγής (μεταξύ ισοπαλιών του Min Ratio Test).

Εξασφάλιση Αποφυγής Κύκλων

- Απλός τρόπος: **Τυχαία επιλογή** γραμμών εναλλαγής (μεταξύ ισοπαλιών του Min Ratio Test).

Δεν είναι ελκυστική η χρήση ενός *μη ντετερμινιστικού κανόνα* σε έναν κατά τα άλλα ντετερμινιστικό αλγόριθμο.

Εξασφάλιση Αποφυγής Κύκλων

- Απλός τρόπος: **Τυχαία επιλογή** γραμμών εναλλαγής (μεταξύ ισοπαλιών του Min Ratio Test).

☹ Δεν είναι ελκυστική η χρήση ενός *μη ντετερμινιστικού κανόνα* σε έναν κατά τα άλλα ντετερμινιστικό αλγόριθμο.

- Πιο έξυπνος τρόπος:
  - Χρήση **οποιασδήποτε εξειδίκευσης** του pricing rule για επιλογή στήλης εναλλαγής.
  - Προσεκτική επιλογή γραμμής εναλλαγής έτσι ώστε *αν δεν ελαττώνεται το κόστος*, τότε τουλάχιστον η γραμμή με τα ελαττωμένα κόστη να **αυξάνεται λεξικογραφικά** (βλ. διαφάνεια 101).

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (I)

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (I)

- Επιλογή Στήλης Εναλλαγής: Αντιστοιχεί στη μη βασική μεταβλητή με **αρνητικό ελαττωμένο κόστος** ΚΑΙ (μεταξύ αυτών) το **μικρότερο δείκτη**.

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (Ι)

- Επιλογή Στήλης Εναλλαγής: Αντιστοιχεί στη μη βασική μεταβλητή με **αρνητικό ελαττωμένο κόστος** ΚΑΙ (μεταξύ αυτών) το **μικρότερο δείκτη**.
- Επιλογή Γραμμής Εναλλαγής: Αντιστοιχεί στη βασική μεταβλητή με το **μικρότερο δείκτη** μεταξύ των γραμμών που υποδεικνύει το **Min Ratio Test**.

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (I)

- Επιλογή Στήλης Εναλλαγής: Αντιστοιχεί στη μη βασική μεταβλητή με **αρνητικό ελαττωμένο κόστος** ΚΑΙ (μεταξύ αυτών) το **μικρότερο δείκτη**.
- Επιλογή Γραμμής Εναλλαγής: Αντιστοιχεί στη βασική μεταβλητή με το **μικρότερο δείκτη** μεταξύ των γραμμών που υποδεικνύει το **Min Ratio Test**.

$$\boxed{\begin{aligned} s^* &= \min\{s \in N : \underline{c}_s < 0\} \\ \theta^* &= \theta(s^*) &&= \min_{r\in\beta:B[r,s^*]<0}\left\{-\frac{b_r}{B[r,s^*]}\right\} \\ r^* &= r(s^*) &&= \min\left(\arg\min\left\{r\in\beta : -\frac{b_r}{B[r,s^*]} = \theta^*\right\}\right) \end{aligned}}$$

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (II)

ΛΗΜΜΑ [Λήμμα 3.3 (σημειώσεις)]

Για το (LP$_=$) $\mathbf{min}.\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, έστω ότι κάποια στιγμή προκύπτει η bfs λύση:

$$\boxed{\mathbf{x}_\beta \;=\; \sum_{j\in[n-m]} -(A[*,\beta])^{-1}A[*,j]x_j + (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a} \;=\; B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}}$$

με βασική λύση $\bar{\mathbf{x}} = [\ \bar{\mathbf{x}}_\beta = \mathbf{b}; \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}\ ]$ και λεξικό:

$$\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{x}'_N & z=1 \\ \hline \mathbf{x}_\beta = & B & \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\ \hline u = & \underline{\mathbf{c}}' & \zeta \\ \hline \end{array}$$

Αν για ένα οποιοδήποτε πραγματικό διάνυσμα $\mathbf{y}$ (όχι απαραίτητα μη αρνητικό) ισχύει ότι $A\mathbf{y} = \mathbf{a}$, τότε:

$$\mathbf{c}'\mathbf{y} = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}'\mathbf{y}$$

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: ΛΗΜΜΑ [Λήμμα 3.3 (σημειώσεις)]

- Από απόδειξη *Κριτηρίου Τερματισμού* [Θ3.2 (σημειώσεις)]:

$$\mathbf{c}'\mathbf{y} = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + [\mathbf{c}_N + \mathbf{c}'_\beta B]'\mathbf{y}_N = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}'_N\mathbf{y}_N$$

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: ΛΗΜΜΑ [Λήμμα 3.3 (σημειώσεις)]

- Από απόδειξη *Κριτηρίου Τερματισμού* [Θ3.2 (σημειώσεις)]:

$$\mathbf{c}'\mathbf{y} = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + [\mathbf{c}_N + \mathbf{c}'_\beta B]'\mathbf{y}_N = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}'_N \mathbf{y}_N$$

$\therefore$ Αρκεί νδο: $\underline{\mathbf{c}}'\mathbf{y} = \underline{\mathbf{c}}'_N \mathbf{y}_N \Leftrightarrow \boxed{\underline{\mathbf{c}}_\beta = \mathbf{0}}$

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: ΛΗΜΜΑ [Λήμμα 3.3 (σημειώσεις)]

- Από απόδειξη *Κριτηρίου Τερματισμού* [Θ3.2 (σημειώσεις)]:

$$\mathbf{c}'\mathbf{y} = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + [\mathbf{c}_N + \mathbf{c}'_\beta B]'\mathbf{y}_N = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}'_N\mathbf{y}_N$$

$\therefore$ Αρκεί νδο: $\underline{\mathbf{c}}'\mathbf{y} = \underline{\mathbf{c}}'_N\mathbf{y}_N \Leftrightarrow \boxed{\underline{\mathbf{c}}_\beta = \mathbf{0}}$

- Χρήση αντί του λεξικού $\begin{array}{|c|c|}\hline B & \mathbf{b} \\ \hline \underline{\mathbf{c}}' & \zeta \\ \hline \end{array}$, του **ταμπλό** T:

$$\begin{array}{r|cc|c|} & \mathbf{x}'_\beta & \mathbf{x}'_N & z = 1 \\ \hline \mathbf{0} = & -eye(n) & B & \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\ \hline u = & \mathbf{0}' & \underline{\mathbf{c}}' & \zeta = \mathbf{c}'_\beta\mathbf{b} \\ \hline \end{array}$$

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: ΛΗΜΜΑ [Λήμμα 3.3 (σημειώσεις)]

- Από απόδειξη *Κριτηρίου Τερματισμού* [Θ3.2 (σημειώσεις)]:

$$\mathbf{c}'\mathbf{y} = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + [\mathbf{c}_N + \mathbf{c}'_\beta B]'\mathbf{y}_N = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}'_N\mathbf{y}_N$$

$\therefore$ Αρκεί νδο: $\underline{\mathbf{c}}'\mathbf{y} = \underline{\mathbf{c}}'_N\mathbf{y}_N \Leftrightarrow \boxed{\underline{\mathbf{c}}_\beta = \mathbf{0}}$

- Χρήση αντί του λεξικού $\begin{array}{|c|c|}\hline B & \mathbf{b} \\ \hline \underline{\mathbf{c}}' & \zeta \\ \hline \end{array}$, του **ταμπλό** T:

$$\begin{array}{r|cc|c|} & \mathbf{x}'_\beta & \mathbf{x}'_N & z = 1 \\ \hline \mathbf{0} = & -eye(n) & B & \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\ \hline u = & \mathbf{0}' & \underline{\mathbf{c}}' & \zeta = \mathbf{c}'_\beta\mathbf{b} \\ \hline \end{array}$$

- Παρατηρούμε ότι: $\forall k \in [m], \underline{c}_{\beta(k)} = c_{\beta(k)} + \mathbf{c}'_\beta \cdot T[*, k]$.

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: ΛΗΜΜΑ [Λήμμα 3.3 (σημειώσεις)]

- Από απόδειξη *Κριτηρίου Τερματισμού* [Θ3.2 (σημειώσεις)]:

$$\mathbf{c}'\mathbf{y} = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + [\mathbf{c}_N + \mathbf{c}'_\beta B]'\mathbf{y}_N = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}'_N\mathbf{y}_N$$

∴ Αρκεί νδο: $\underline{\mathbf{c}}'\mathbf{y} = \underline{\mathbf{c}}'_N\mathbf{y}_N \Leftrightarrow \boxed{\underline{\mathbf{c}}_\beta = \mathbf{0}}$

- Χρήση αντί του λεξικού $\begin{array}{|c|c|}\hline B & \mathbf{b} \\ \hline \underline{\mathbf{c}}' & \zeta \\ \hline \end{array}$, του **ταμπλό** T:

$$\begin{array}{r|cc|c|} & \mathbf{x}'_\beta & \mathbf{x}'_N & z=1 \\ \hline \mathbf{0} = & -eye(n) & B & \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\ \hline u = & \mathbf{0}' & \underline{\mathbf{c}}' & \zeta = \mathbf{c}'_\beta \mathbf{b} \\ \hline \end{array}$$

- Παρατηρούμε ότι: $\forall k \in [m], \underline{c}_{\beta(k)} = c_{\beta(k)} + \mathbf{c}'_\beta \cdot T[*,k]$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Σε κάθε *νέο* pivot (στο ταμπλό) εξασφαλίζουμε **ΚΑΙ** τα ελαττωμένα κόστη των εκάστοτε *βασικών μεταβλητών* να παραμένουν **μηδέν**: $\underline{\mathbf{c}}_\beta = \mathbf{0}$.

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: ΛΗΜΜΑ [Λήμμα 3.3 (σημειώσεις)]

- Από απόδειξη *Κριτηρίου Τερματισμού* [Θ3.2 (σημειώσεις)]:

$$\mathbf{c}'\mathbf{y} = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + [\mathbf{c}_N + \mathbf{c}'_\beta B]'\mathbf{y}_N = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}'_N\mathbf{y}_N$$

∴ Αρκεί νδο: $\underline{\mathbf{c}}'\mathbf{y} = \underline{\mathbf{c}}'_N\mathbf{y}_N \Leftrightarrow \boxed{\underline{\mathbf{c}}_\beta = \mathbf{0}}$

- Χρήση αντί του λεξικού $\begin{array}{|c|c|}\hline B & \mathbf{b} \\ \hline \underline{\mathbf{c}}' & \zeta \\ \hline \end{array}$, του **ταμπλό** T:

$$\begin{array}{r|cc|c|} & \mathbf{x}'_\beta & \mathbf{x}'_N & z = 1 \\ \hline \mathbf{0} = & -eye(n) & B & \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\ \hline u = & \mathbf{0}' & \underline{\mathbf{c}}' & \zeta = \mathbf{c}'_\beta\mathbf{b} \\ \hline \end{array}$$

- Παρατηρούμε ότι: $\forall k \in [m], \underline{c}_{\beta(k)} = c_{\beta(k)} + \mathbf{c}'_\beta \cdot T[*,k]$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Σε κάθε νέο pivot (στο ταμπλό) εξασφαλίζουμε **ΚΑΙ** τα ελαττωμένα κόστη των εκάστοτε *βασικών μεταβλητών* να παραμένουν **μηδέν**: $\underline{\mathbf{c}}_\beta = \mathbf{0}$. ∎

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (IV)

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

Η εκδοχή του SIMPLEX που εφαρμόζει τον κανόνα του BLAND για επιλογή γραμμής/στήλης εναλλαγής σε κάθε βήμα, αποφεύγει την εμφάνιση κύκλων και άρα τερματίζει πάντα.

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (IV)

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

Η εκδοχή του SIMPLEX που εφαρμόζει τον κανόνα του BLAND για επιλογή γραμμής/στήλης εναλλαγής σε κάθε βήμα, αποφεύγει την εμφάνιση κύκλων και άρα τερματίζει πάντα.

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (IV)

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

Η εκδοχή του SIMPLEX που εφαρμόζει τον κανόνα του BLAND για επιλογή γραμμής/στήλης εναλλαγής σε κάθε βήμα, αποφεύγει την εμφάνιση κύκλων και άρα τερματίζει πάντα.

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- (LP1) $\boxed{\mathbf{min.}\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$
- Έστω ότι προκύπτει ο (απλός) κύκλος από βάσεις:

$$C = \langle\ \beta(0) \mapsto \beta(1) \mapsto \ldots \mapsto \beta(k-1) \mapsto \beta(k) = \beta(0)\ \rangle$$

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (IV)

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

Η εκδοχή του SIMPLEX που εφαρμόζει τον κανόνα του BLAND για επιλογή γραμμής/στήλης εναλλαγής σε κάθε βήμα, αποφεύγει την εμφάνιση κύκλων και άρα τερματίζει πάντα.

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- (LP1) $\boxed{\mathbf{min}.\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$
- Έστω ότι προκύπτει ο (απλός) κύκλος από βάσεις:

  $$C = \langle\ \beta(0) \mapsto \beta(1) \mapsto \ldots \mapsto \beta(k-1) \mapsto \beta(k) = \beta(0)\ \rangle$$
- $\forall 1 \leq t \leq k$, έστω $(r(t), s(t))$ το σημείο εναλλαγής που επιλέγει ο κανόνας του Bland, και $\theta(t)$ η τιμή της νεοεισερχόμενης μεταβλητής στη νέα βάση.

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (V)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: $\theta(1) = \theta(2) = \ldots = \theta(k) = 0$, άρα $\bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}(1) = \cdots = \bar{\mathbf{x}}(k-1) = \mathbf{v}$. (ΓΙΑΤΙ;)

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (V)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: $\theta(1) = \theta(2) = \ldots = \theta(k) = 0$, άρα $\bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}(1) = \cdots = \bar{\mathbf{x}}(k-1) = \mathbf{v}$. (ΓΙΑΤΙ;)

- Κρατάμε ΜΟΝΟ :

  - Το σύνολο γ *βασικών* μεταβλητών (γραμμών) του $\beta(0)$ (με **μηδενική τιμή**) που στον C επιλέγονται για pivot-out.

  - Το σύνολο δ *μη βασικών* μεταβλητών του $N(0)$ που στον C επιλέγονται για pivot-in (οι υπόλοιπες μη βασικές μεταβλητές έχουν **μικρότερη προτεραιότητα** αυτών που επιλέγονται, βάσει του κανόνα του Bland).

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (V)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: $\theta(1) = \theta(2) = \ldots = \theta(k) = 0$, άρα $\bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}(1) = \cdots = \bar{\mathbf{x}}(k-1) = \mathbf{v}$. (ΓΙΑΤΙ;)
- Κρατάμε ΜΟΝΟ :
  - Το σύνολο γ *βασικών* μεταβλητών (γραμμών) του $\beta(0)$ (με **μηδενική τιμή**) που στον C επιλέγονται για pivot-out.
  - Το σύνολο δ *μη βασικών* μεταβλητών του $N(0)$ που στον C επιλέγονται για pivot-in (οι υπόλοιπες μη βασικές μεταβλητές έχουν **μικρότερη προτεραιότητα** αυτών που επιλέγονται, βάσει του κανόνα του Bland).
- $(LP2) = \mathbf{min.} \{\mathbf{p}'\mathbf{z} : D\mathbf{z} = \mathbf{0}; \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\}$ /* $D = A[\gamma, \delta]$, $\mathbf{p} = \underline{\mathbf{c}}(0)_\delta$, $\mathbf{z} = \mathbf{x}_\delta$ */

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (V)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: $\theta(1) = \theta(2) = \ldots = \theta(k) = 0$, άρα $\bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}(1) = \cdots = \bar{\mathbf{x}}(k-1) = \mathbf{v}$. (ΓΙΑΤΙ;)
- Κρατάμε ΜΟΝΟ :
  - Το σύνολο γ *βασικών* μεταβλητών (γραμμών) του $\beta(0)$ (με **μηδενική τιμή**) που στον C επιλέγονται για pivot-out.
  - Το σύνολο δ *μη βασικών* μεταβλητών του $N(0)$ που στον C επιλέγονται για pivot-in (οι υπόλοιπες μη βασικές μεταβλητές έχουν **μικρότερη προτεραιότητα** αυτών που επιλέγονται, βάσει του κανόνα του Bland).
- $(LP2) = \mathbf{min}.\, \{\mathbf{p}'\mathbf{z} : D\mathbf{z} = \mathbf{0}; \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\}$ /* $D = A[\gamma, \delta]$, $\mathbf{p} = \underline{\mathbf{c}}(0)_\delta$, $\mathbf{z} = \mathbf{x}_\delta$ */

$\therefore$ Ο ίδιος κύκλος C θα εμφανιστεί στο (ομογενές γ.π.) (LP2).

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (VI)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- Όλες οι μεταβλητές του (LP2) σε κάποιο βήμα του C *επιλέγονται για pivot-in*.

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (VI)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- Όλες οι μεταβλητές του (LP2) σε κάποιο βήμα του C *επιλέγονται για pivot-in*.

$\therefore$ Χβτγ: $q = s(1) =$ η μεταβλητή με το μεγαλύτερο δείκτη.

$$\begin{array}{r|c|c|c|}
 & & z_q & 1 \\ \hline
\mathbf{z}_{\beta(0)} = & & & \mathbf{0} \\ \hline
u(0) = & \geq \mathbf{0}' & <0 & 0 \\ \hline
\end{array}$$

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (VI)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- Όλες οι μεταβλητές του (LP2) σε κάποιο βήμα του C *επιλέγονται για pivot-in*.

$\therefore$ Χβτγ: $q = s(1) =$ η μεταβλητή με το μεγαλύτερο δείκτη.

$$\begin{array}{rc|c|c|c|} & & & z_q & 1 \\ \cline{3-5} \mathbf{z}_{\beta(0)} & = & & & \mathbf{0} \\ \cline{3-5} u(0) & = & \geq \mathbf{0}' & < 0 & 0 \\ \cline{3-5} \end{array}$$

- $2 \leq t+1 \leq k$: Το πρώτο βήμα όπου η z_q γίνεται *pivot-out*.

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (VI)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- Όλες οι μεταβλητές του (LP2) σε κάποιο βήμα του C *επιλέγονται για pivot-in*.

$\therefore$ Χβτγ: $q = s(1) =$ η μεταβλητή με το μεγαλύτερο δείκτη.

$$\begin{array}{r|c|c|c|} & & z_q & 1 \\ \cline{2-4} \mathbf{z}_{\beta(0)} = & & & \mathbf{0} \\ \cline{2-4} u(0) = & \geq \mathbf{0}' & < 0 & 0 \\ \cline{2-4} \end{array}$$

- $2 \leq t+1 \leq k$: Το πρώτο βήμα όπου η z_q γίνεται *pivot-out*.

- **Νέο pivot:** $(r, s) = \left(r(t+1) = \text{“}z_q\text{''}\ ,\ s(t+1) = \text{“}z_p\text{''}\right)$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|} & & z_p & & 1 \\ \cline{2-5} \mathbf{z}_{\beta(t)-\{q\}} = & & \geq \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \cline{2-5} z_q = & & < 0 & & 0 \\ \cline{2-5} u(t) = & \geq \mathbf{0}' & < 0 & & 0 \\ \cline{2-5} \end{array}$$

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (VII)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- Έστω το διάνυσμα (όχι απαραίτητα εφικτή λύση):

$$\boxed{y_p = 1, \quad \forall i \in \beta(t), y_{\beta(t)(i)} = B(t)[i,s], \quad \forall j \in N(t) - \{p\}, y_j = 0}$$

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- Έστω το διάνυσμα (όχι απαραίτητα εφικτή λύση):
$$\boxed{y_p = 1, \quad \forall i \in \beta(t), y_{\beta(t)(i)} = B(t)[i,s], \quad \forall j \in N(t) - \{p\}, y_j = 0}$$
- Το $\mathbf{y}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις του (LP2):
$$\mathbf{y}_{\beta(t)} = B(t)[*,s] \cdot y_p \Leftrightarrow B(0) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (VII)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- Έστω το διάνυσμα (όχι απαραίτητα εφικτή λύση):

$$\boxed{y_p = 1, \quad \forall i \in \beta(t), y_{\beta(t)(i)} = B(t)[i,s], \quad \forall j \in N(t) - \{p\}, y_j = 0}$$

- Το $\mathbf{y}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις του (LP2):

$$\mathbf{y}_{\beta(t)} = B(t)[*,s] \cdot y_p \Leftrightarrow B(0) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

- Εφαρμόζουμε το Λ3.3 στο (LP2): /* $\mathbf{c}' \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}' \cdot \bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}' \cdot \mathbf{y}$ */

$$\boxed{0 > \underline{\mathbf{c}}_p(t) = \underline{\mathbf{c}}(t)'\mathbf{y} = \underline{\mathbf{c}}(0)' \cdot \mathbf{y} - \underline{\mathbf{c}}(0)' \cdot \bar{\mathbf{z}}(0) = \underline{\mathbf{c}}(0)' \cdot \mathbf{y}}$$

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- Έστω το διάνυσμα (όχι απαραίτητα εφικτή λύση):

$$\boxed{y_p = 1, \quad \forall i \in \beta(t), y_{\beta(t)(i)} = B(t)[i,s], \quad \forall j \in N(t) - \{p\}, y_j = 0}$$

- Το $\mathbf{y}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις του (LP2):

$$\mathbf{y}_{\beta(t)} = B(t)[*,s] \cdot y_p \Leftrightarrow B(0) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

- Εφαρμόζουμε το Λ3.3 στο (LP2): $/* \ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}' \cdot \bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}' \cdot \mathbf{y} \ */$

$$\boxed{0 \ > \ \underline{\mathbf{c}}_p(t) = \underline{\mathbf{c}}(t)'\mathbf{y} = \underline{\mathbf{c}}(0)' \cdot \mathbf{y} - \underline{\mathbf{c}}(0)' \cdot \bar{\mathbf{z}}(0) = \underline{\mathbf{c}}(0)' \cdot \mathbf{y}}$$

- Το *αρχικό* κόστος της $\mathbf{y}$ στο (LP2) είναι:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{c}}(0)' \cdot \mathbf{y} &= \underline{c}(0)_p + (\underline{\mathbf{c}}(0)_{\beta(t)})' \cdot B(t)[*,s] \\ &= \underline{c}(0)_p + \underbrace{\underline{c}(0)_q \cdot B(t)[r,s]}_{>0} + \underbrace{\sum_{i \in [m-1]} \underline{c}(0)_{\beta(t)(i)} \cdot B(t)[i,s]}_{\geq 0} \\ &> \underline{c}(0)_p \geq 0 \end{aligned}$$

(ΑΤΟΠΟ)

Αποφυγή Κύκλων με **Κανόνα του Bland** (VII)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 3.4 (σημειώσεις)]

- Έστω το διάνυσμα (όχι απαραίτητα εφικτή λύση):

$$\boxed{y_p = 1, \quad \forall i \in \beta(t), y_{\beta(t)(i)} = B(t)[i,s], \quad \forall j \in N(t) - \{p\}, y_j = 0}$$

- Το $\mathbf{y}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις του (LP2):

$$\mathbf{y}_{\beta(t)} = B(t)[*,s] \cdot y_p \Leftrightarrow B(0) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

- Εφαρμόζουμε το Λ3.3 στο (LP2): $/* \ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}' \cdot \bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}' \cdot \mathbf{y} \ */$

$$\boxed{0 \ > \ \underline{\mathbf{c}}_p(t) = \underline{\mathbf{c}}(t)'\mathbf{y} = \underline{\mathbf{c}}(0)' \cdot \mathbf{y} - \underline{\mathbf{c}}(0)' \cdot \bar{\mathbf{z}}(0) = \underline{\mathbf{c}}(0)' \cdot \mathbf{y}}$$

- Το *αρχικό* κόστος της $\mathbf{y}$ στο (LP2) είναι:

$$\underline{\mathbf{c}}(0)' \cdot \mathbf{y} = \underline{c}(0)_p + (\underline{\mathbf{c}}(0)_{\beta(t)})' \cdot B(t)[*,s]$$

$$= \ \underline{c}(0)_p + \underbrace{\underline{c}(0)_q \cdot B(t)[r,s]}_{>0} + \underbrace{\sum_{i \in [m-1]} \underline{c}(0)_{\beta(t)(i)} \cdot B(t)[i,s]}_{\geq 0}$$

$$> \ \underline{c}(0)_p \geq 0$$

(ΑΤΟΠΟ) ∎

Πώς Ξεκινάμε;

$\boxed{\text{Q}}$ Από ποια η αρχική bfs λύση ξεκινά ο SIMPLEX;

Πώς Ξεκινάμε;

Q Από ποια η αρχική bfs λύση ξεκινά ο SIMPLEX;

A Αν γνωρίζουμε *οποιαδήποτε εφικτή λύση* τότε μπορούμε να βρούμε μια bfs λύση (με το πολύ το ίδιο κόστος) βλ. [Θ2.4 (σημειώσεις)].

Πώς Ξεκινάμε;

Q Από ποια η αρχική bfs λύση ξεκινά ο SIMPLEX;

A Αν γνωρίζουμε *οποιαδήποτε εφικτή λύση* τότε μπορούμε να βρούμε μια bfs λύση (με το πολύ το ίδιο κόστος) βλ. [Θ2.4 (σημειώσεις)].

- Σε μερικά γ.π. υπάρχει μια *«προφανής» bfs λύση* που μπορούμε να πάρουμε ως σημείο εκκίνησης.

Πώς Ξεκινάμε;

Q Από ποια η αρχική bfs λύση ξεκινά ο SIMPLEX;

A Αν γνωρίζουμε *οποιαδήποτε εφικτή λύση* τότε μπορούμε να βρούμε μια bfs λύση (με το πολύ το ίδιο κόστος) βλ. [Θ2.4 (σημειώσεις)].

- Σε μερικά γ.π. υπάρχει μια *«προφανής» bfs λύση* που μπορούμε να πάρουμε ως σημείο εκκίνησης.
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ με προφανές σημείο εκκίνησης:

Πώς Ξεκινάμε;

Q Από ποια η αρχική bfs λύση ξεκινά ο SIMPLEX;

A Αν γνωρίζουμε *οποιαδήποτε εφικτή λύση* τότε μπορούμε να βρούμε μια bfs λύση (με το πολύ το ίδιο κόστος) βλ. [Θ2.4 (σημειώσεις)].

- Σε μερικά γ.π. υπάρχει μια *«προφανής» bfs λύση* που μπορούμε να πάρουμε ως σημείο εκκίνησης.
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ με προφανές σημείο εκκίνησης:
  - $(\text{LP}_{\geq})$ $\boxed{\min. \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ όπου $\mathbf{a} \leq \mathbf{0} \Leftrightarrow$

Πώς Ξεκινάμε;

Q Από ποια η αρχική bfs λύση ξεκινά ο SIMPLEX;

A Αν γνωρίζουμε *οποιαδήποτε εφικτή λύση* τότε μπορούμε να βρούμε μια bfs λύση (με το πολύ το ίδιο κόστος) βλ. [Θ2.4 (σημειώσεις)].

- Σε μερικά γ.π. υπάρχει μια *«προφανής» bfs λύση* που μπορούμε να πάρουμε ως σημείο εκκίνησης.
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ με προφανές σημείο εκκίνησης:
  - $(\mathrm{LP}_{\geq})$ $\boxed{\text{min. } \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ όπου $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(\mathrm{LP}_{=})$ $\boxed{\text{min. } \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} - \mathbf{s} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{s} \geq \mathbf{0}\}}$

Πώς Ξεκινάμε;

Q Από ποια η αρχική bfs λύση ξεκινά ο SIMPLEX;

A Αν γνωρίζουμε *οποιαδήποτε εφικτή λύση* τότε μπορούμε να βρούμε μια bfs λύση (με το πολύ το ίδιο κόστος) βλ. [Θ2.4 (σημειώσεις)].

- Σε μερικά γ.π. υπάρχει μια *«προφανής» bfs λύση* που μπορούμε να πάρουμε ως σημείο εκκίνησης.
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ με προφανές σημείο εκκίνησης:
  - $(\mathrm{LP}_{\geq})$ $\boxed{\mathbf{min.}\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a};\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ όπου $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{LP}_{=})$ $\boxed{\mathbf{min.}\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} - \mathbf{s} = \mathbf{a};\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0};\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0}\}}$

  $\therefore$ Προφανές σημείο εκκίνησης (ΠΟΙΟ;)

Πώς Ξεκινάμε;

Q Από ποια η αρχική bfs λύση ξεκινά ο SIMPLEX;

A Αν γνωρίζουμε *οποιαδήποτε εφικτή λύση* τότε μπορούμε να βρούμε μια bfs λύση (με το πολύ το ίδιο κόστος) βλ. [Θ2.4 (σημειώσεις)].

- Σε μερικά γ.π. υπάρχει μια *«προφανής» bfs λύση* που μπορούμε να πάρουμε ως σημείο εκκίνησης.
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ με προφανές σημείο εκκίνησης:
  - $(LP_{\geq})$ $\boxed{\min.\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ όπου $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(LP_{=})$ $\boxed{\min.\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} - \mathbf{s} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{s} \geq \mathbf{0}\}}$

$\therefore$ Προφανές σημείο εκκίνησης (ΠΟΙΟ;)

$$
\begin{array}{r|cc|c|}
 & \mathbf{s}' & \mathbf{x}' & z = 1 \\
\hline
\mathbf{0} = & -eye(n) & A & -\mathbf{a} \geq \mathbf{0} \\
\hline
u = & \mathbf{0}' & \underline{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}' & \zeta = 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Επιλογή Σημείου Εκκίνησης (Ι)

- ΕΙΣΟΔΟΣ: $(\mathrm{LP}_{\geq})$ $\boxed{\mathbf{min.}\{\mathbf{p}'\mathbf{z} : B\mathbf{z} \geq \mathbf{a}; \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\}}$

Επιλογή Σημείου Εκκίνησης (Ι)

- ΕΙΣΟΔΟΣ: $(LP_{\geq})$ $\boxed{\text{min.}\{\mathbf{p}'\mathbf{z} : B\mathbf{z} \geq \mathbf{a}; \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\}}$
- Μετατρέπω σε μορφή $(LP_{=})$, χρησιμοποιώντας slacks:

$$(LP_{=}) \quad \boxed{\begin{array}{ll} \text{min.} & \mathbf{c}'\mathbf{x} = \mathbf{p}'\mathbf{z} + \mathbf{0}'\mathbf{s} \\ & A\mathbf{x} = B\mathbf{z} - eye(m)\mathbf{s} = \mathbf{a} \\ & \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{array}}$$

Επιλογή Σημείου Εκκίνησης (I)

- ΕΙΣΟΔΟΣ: $(LP_{\geq})$ $\boxed{\textbf{min.}\{\mathbf{p}'\mathbf{z} : B\mathbf{z} \geq \mathbf{a}; \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\}}$

- Μετατρέπω σε μορφή $(LP_{=})$, χρησιμοποιώντας slacks:

$$(LP_{=}) \quad \boxed{\begin{array}{ll} \textbf{min.} & \mathbf{c}'\mathbf{x} = \mathbf{p}'\mathbf{z} + \mathbf{0}'\mathbf{s} \\ & A\mathbf{x} = B\mathbf{z} - eye(m)\mathbf{s} = \mathbf{a} \\ & \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{array}}$$

- Δημιουργώ **νέο πρόγραμμα** (AuxLP), με m βοηθητικές μεταβλητές $\mathbf{y} = (y_i)_{i\in[m]}$ (μια ανά μη τετριμμένο περιορισμό), και νέα συνάρτηση – στόχο :

$$(AuxLP) \quad \boxed{\textbf{min.}\ \{\mathbf{1}'\mathbf{y} : A\mathbf{x} + eye(m)\mathbf{y} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}}$$

Επιλογή Σημείου Εκκίνησης (Ι)

- ΕΙΣΟΔΟΣ: $(\mathrm{LP}_{\geq})$ $\boxed{\mathbf{min.}\{\mathbf{p}'\mathbf{z} : B\mathbf{z} \geq \mathbf{a}; \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\}}$

- Μετατρέπω σε μορφή $(\mathrm{LP}_{=})$, χρησιμοποιώντας slacks:

$$(\mathrm{LP}_{=}) \quad \boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{min.} & \mathbf{c}'\mathbf{x} = \mathbf{p}'\mathbf{z} + \mathbf{0}'\mathbf{s} \\ & A\mathbf{x} = B\mathbf{z} - eye(m)\mathbf{s} = \mathbf{a} \\ & \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{array}}$$

- Δημιουργώ **νέο πρόγραμμα** (AuxLP), με m βοηθητικές μεταβλητές $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in [m]}$ (μια ανά μη τετριμμένο περιορισμό), και νέα συνάρτηση – στόχο :

$$(\mathrm{AuxLP}) \quad \boxed{\mathbf{min.}\ \{\mathbf{1}'\mathbf{y} : A\mathbf{x} + eye(m)\mathbf{y} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}}$$

- Προφανής bfs λύση για (AuxLP):

$$\begin{array}{lll} \forall k \in [m] : a_k \geq 0, & y_k = a_k & s_k = 0 \\ \forall k \in [m] : a_k < 0, & s_k = -a_k & y_k = 0 \\ \forall j \in [n], & & x_k = 0 \end{array}$$

Επιλογή Σημείου Εκκίνησης (I)

- ΕΙΣΟΔΟΣ: ($LP_{\geq}$) $\boxed{\textbf{min.}\{\mathbf{p}'\mathbf{z} : B\mathbf{z} \geq \mathbf{a}; \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\}}$
- Μετατρέπω σε μορφή ($LP_{=}$), χρησιμοποιώντας slacks:

$$(LP_{=}) \quad \boxed{\begin{array}{ll} \textbf{min.} & \mathbf{c}'\mathbf{x} = \mathbf{p}'\mathbf{z} + \mathbf{0}'\mathbf{s} \\ & A\mathbf{x} = B\mathbf{z} - eye(m)\mathbf{s} = \mathbf{a} \\ & \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{array}}$$

- Δημιουργώ **νέο πρόγραμμα** (AuxLP), με m βοηθητικές μεταβλητές $\mathbf{y} = (y_i)_{i\in[m]}$ (μια ανά μη τετριμμένο περιορισμό), και νέα συνάρτηση – στόχο :

$$(AuxLP) \quad \boxed{\textbf{min.}\ \{\mathbf{1}'\mathbf{y} : A\mathbf{x} + eye(m)\mathbf{y} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}}$$

- Προφανής bfs λύση για (AuxLP): /* βασικές / μη βασικές μεταβλητές */

$$\begin{array}{lll} \forall k \in [m] : a_k \geq 0, & y_k = a_k & s_k = 0 \\ \forall k \in [m] : a_k < 0, & s_k = -a_k & y_k = 0 \\ \forall j \in [n], & & x_k = 0 \end{array}$$

Επιλογή Σημείου Εκκίνησης (II)

Πρώτη Φάση

- Επίλυση του
  (AuxLP) $\boxed{\mathbf{min.}\ \{\mathbf{1}'\mathbf{y} : A\mathbf{x} + eye(m)\mathbf{y} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}}$
  ξεκινώντας από το σημείο εκκίνησης (για το (AuxLP)):

Σ. Εκκίνησης (AuxLP)	Βασικές	Μη βασικές
$\forall k \in [m] : a_k \geq 0,$	$y_k = a_k$	$s_k = 0$
$\forall k \in [m] : a_k < 0,$	$s_k = -a_k$	$y_k = 0$
$\forall j \in [n],$		$x_k = 0$

Επιλογή Σημείου Εκκίνησης (II)
Πρώτη Φάση

- Επίλυση του

  (AuxLP) $\boxed{\mathbf{min.}\ \{\mathbf{1}'\mathbf{y} : A\mathbf{x} + eye(m)\mathbf{y} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}}$

  ξεκινώντας από το σημείο εκκίνησης (για το (AuxLP)):

Σ. Εκκίνησης (AuxLP)	Βασικές	Μη βασικές
$\forall k \in [m] : a_k \geq 0,$	$y_k = a_k$	$s_k = 0$
$\forall k \in [m] : a_k < 0,$	$s_k = -a_k$	$y_k = 0$
$\forall j \in [n],$		$x_k = 0$

- Έστω $[\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{y}}] = [\bar{\mathbf{z}}; \bar{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{y}}]$ η βέλτιστη λύση του (AuxLP).

Επιλογή Σημείου Εκκίνησης (II)

Πρώτη Φάση

- Επίλυση του

  (AuxLP) $\boxed{\textbf{min.}\ \{\mathbf{1}'\mathbf{y} : A\mathbf{x} + eye(m)\mathbf{y} = \mathbf{a};\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0};\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}}$

  ξεκινώντας από το σημείο εκκίνησης (για το (AuxLP)):

Σ. Εκκίνησης (AuxLP)	Βασικές	Μη βασικές
$\forall k \in [m] : a_k \geq 0,$	$y_k = a_k$	$s_k = 0$
$\forall k \in [m] : a_k < 0,$	$s_k = -a_k$	$y_k = 0$
$\forall j \in [n],$		$x_k = 0$

- Έστω $[\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{y}}] = [\bar{\mathbf{z}}; \bar{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{y}}]$ η βέλτιστη λύση του (AuxLP).

  if $\mathbf{1}\bar{\mathbf{y}} = 0$

  then Το $(LP_=)$ είναι επιλύσιμο και το $\bar{\mathbf{x}}$ είναι *κορυφή* του που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως σημείο εκκίνησής του.

Επιλογή Σημείου Εκκίνησης (II)

Πρώτη Φάση

- Επίλυση του

  (AuxLP) $\boxed{\mathbf{min.}\,\{\mathbf{1}'\mathbf{y} : A\mathbf{x} + eye(m)\mathbf{y} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}}$

  ξεκινώντας από το σημείο εκκίνησης (για το (AuxLP)):

Σ. Εκκίνησης (AuxLP)	Βασικές	Μη βασικές
$\forall k \in [m] : a_k \geq 0,$	$y_k = a_k$	$s_k = 0$
$\forall k \in [m] : a_k < 0,$	$s_k = -a_k$	$y_k = 0$
$\forall j \in [n],$		$x_k = 0$

- Έστω $[\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{y}}] = [\bar{\mathbf{z}}; \bar{\mathbf{s}}; \bar{\mathbf{y}}]$ η βέλτιστη λύση του (AuxLP).

  if $\mathbf{1}\bar{\mathbf{y}} = 0$

  then Το ($LP_=$) είναι επιλύσιμο και το $\bar{\mathbf{x}}$ είναι *κορυφή* του που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως σημείο εκκίνησής του.

  else Το ($LP_=$) είναι μη επιλύσιμο. /* $\mathbf{1}'\bar{\mathbf{y}} > 0$ */

Επιλογή Σημείου Εκκίνησης (III)

Δεύτερη Φάση

1 Ξεκίνα με σημείο εκκίνησης την κορυφή του $(\mathrm{LP}_=)$ που υπέδειξε η ΠΡΩΤΗ ΦΑΣΗ:

2 **while** υπάρχουν μη βασικές μεταβλητές με αρνητικά ελαττωμένα κόστη **do** :

2.1 Διάλεξε Σημείο Εναλλαγής (r, s) με τρόπο που να εξασφαλίζει αποφυγή κύκλων.

2.2 Εκτέλεση την Ανταλλαγή Jordan $Pivot(r, s)$ στο τρέχον ταμπλό.

3 **endwhile**

INPUT: (A,**a**,**c**) encodes the **(LP$_\geq$)** **min**.{ $\mathbf{c}^T\mathbf{z}$: A**z** $\geq$ **a**; **x**$\geq$**0** }
Equiv. **(LP$_=$)**: ([A, -E] **a**,**c**) encodes **min**.{ $\mathbf{c}^T\mathbf{z}$: A**z**–**s** = **a**; **z**$\geq$**0**; **s**$\geq$**0** }

PHASE 1: Εύρεση Σημείου Εκκίνησης…

[1] **IF** **a** $\leq$ **0** **THEN** [$\mathbf{z}^o$ = **0** ; $\mathbf{s}^o$ = –**a**] = feasible starting point for **(LP$_=$)**.
[2] **ELSE** [$\mathbf{z}^o$; $\mathbf{s}^o$; $\mathbf{w}^o$] = SIMPLEX([A, –E, E] , **a** , [**0**;**0**;**1**]) // E = eye(m): Identity matrix…
[3] **IF** $\mathbf{1}^T\mathbf{w}^o$ > 0 **THEN** **return**(«INFEASIBLE»)
[4] **ELSE** [$\mathbf{z}^o$; $\mathbf{s}^o$] is a vertex of (LP$_=$).

PHASE 2: Εκτέλεση του SIMPLEX στο (LP$_=$)…

[5] k = 0 ; **x** = [$\mathbf{z}^o$; $\mathbf{s}^o$]
[6] Description of current vertex: $\mathbf{x}_{\beta(\kappa)}$ = B(k) $\mathbf{x}_{N(\kappa)}$ + **b**(k)
[7] **IF** $\underline{\mathbf{c}}_N(k) \geq \mathbf{0}$ // all non-basic reduced costs non-negative…
[8] **THEN** **return**(« opt_sol = [$\underline{\mathbf{x}}_{\beta(\kappa)}$ = **b**(k) ; $\underline{\mathbf{x}}_{N(\kappa)}$ = **0**], opt_val = ζ(k) »)
[7] **ELSE IF** $\exists s \in N(k)$: $\underline{c}(k)_s$ < 0 **AND** B(k)[*,s] $\geq$ **0**
[8] **THEN** **return**(«UNBOUNDED»)
[9] **ELSE** s(k) = choice of PIVOT COL // eg, Bland, …
[10] (θ(k),r(k)) = (LEX) MIN_RATIO // eg, break ties in favor of smallest index…
[11] Make the pivot on the element (r(k) , s(k)); k = k+1;
[12] **GOTO** step [6].

Ένα Πλήρες Παράδειγμα (I)

ΑΣΚΗΣΗ: Να λυθεί το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα

$$
\boxed{\begin{array}{lrrrl}
\textbf{min.} & 2z_1 & -z_2 & +z_3 & \\
\text{s.t.} & z_1 & -z_2 & +4z_3 & \geq -1 \\
 & z_1 & -z_2 & -z_3 & \geq 2 \\
 & z_1 & +3z_2 & +2z_3 & = 3 \\
 & z_1 \geq 0 & z_2 \geq 0 & &
\end{array}}
$$

Ένα Πλήρες Παράδειγμα (I)

ΑΣΚΗΣΗ: Να λυθεί το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{array}{llllll}
\textbf{min.} & 2z_1 & -z_2 & +z_3 & \\
\text{s.t.} & z_1 & -z_2 & +4z_3 & \geq -1 \\
 & z_1 & -z_2 & -z_3 & \geq 2 \\
 & z_1 & +3z_2 & +2z_3 & = 3 \\
 & z_1 \geq 0 & z_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

1. Μετατροπή σε $(LP_{\geq})$, για να δοθεί ως είσοδος της ΦΑΣΗΣ-1.

Ένα Πλήρες Παράδειγμα (I)

ΑΣΚΗΣΗ: Να λυθεί το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\textbf{min.} & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & \\
\text{s.t.} & x_1 & -x_2 & +4x_3 & -4x_4 & \geq -1 \\
 & x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & \geq 2 \\
 & x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -2x_4 & \geq 3 \\
 & -x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +2x_4 & \geq -3 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

1. Μετατροπή σε $(LP_{\geq})$, για να δοθεί ως είσοδος της ΦΑΣΗΣ-1.

Ένα Πλήρες Παράδειγμα (I)

ΑΣΚΗΣΗ: Να λυθεί το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{array}{lrrrrl}
\textbf{min.} & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & \\
\text{s.t.} & x_1 & -x_2 & +4x_3 & -4x_4 & \geq -1 \\
 & x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & \geq 2 \\
 & x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -2x_4 & \geq 3 \\
 & -x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +2x_4 & \geq -3 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 &
\end{array}$$

1. Μετατροπή σε $(LP_{\geq})$, για να δοθεί ως είσοδος της ΦΑΣΗΣ-1.
2. ΕΙΣΟΔΟΣ ΦΑΣΗΣ-1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ένα Πλήρες Παράδειγμα (I)

```
>> T = totbl(A,a,c);
             x1         x2         x3         x4         1
       -------------------------------------------------------
 x5 = |     1.0000    -1.0000     4.0000    -4.0000     1.0000
 x6 = |     1.0000    -1.0000    -1.0000     1.0000    -2.0000
 x7 = |     1.0000     3.0000     2.0000    -2.0000    -3.0000
 x8 = |    -1.0000    -3.0000    -2.0000     2.0000     3.0000
       -------------------------------------------------------
 z  = |     2.0000    -1.0000     1.0000    -1.0000     0.0000
```

Ένα Πλήρες Παράδειγμα (I)

```
>> T = totbl(A,a,c);
             x1         x2         x3         x4         1
       -------------------------------------------------------
 x5 = |     1.0000    -1.0000     4.0000    -4.0000     1.0000
 x6 = |     1.0000    -1.0000    -1.0000     1.0000    -2.0000
 x7 = |     1.0000     3.0000     2.0000    -2.0000    -3.0000
 x8 = |    -1.0000    -3.0000    -2.0000     2.0000     3.0000
       -------------------------------------------------------
 z  = |     2.0000    -1.0000     1.0000    -1.0000     0.0000

>> T = addcol(T , [0 1 0 0 0]' , 'w2' , 5);
             x1         x2         x3         x4         w2         1
       ------------------------------------------------------------------
 x5 = |     1.0000    -1.0000     4.0000    -4.0000     0.0000     1.0000
 x6 = |     1.0000    -1.0000    -1.0000     1.0000     1.0000    -2.0000
 x7 = |     1.0000     3.0000     2.0000    -2.0000     0.0000    -3.0000
 x8 = |    -1.0000    -3.0000    -2.0000     2.0000     0.0000     3.0000
       ------------------------------------------------------------------
 z  = |     2.0000    -1.0000     1.0000    -1.0000     0.0000     0.0000
```

Ένα Πλήρες Παράδειγμα (Ι)

```
>> T = totbl(A,a,c);
             x1         x2         x3         x4          1
        -----------------------------------------------------
 x5 = |     1.0000    -1.0000     4.0000    -4.0000     1.0000
 x6 = |     1.0000    -1.0000    -1.0000     1.0000    -2.0000
 x7 = |     1.0000     3.0000     2.0000    -2.0000    -3.0000
 x8 = |    -1.0000    -3.0000    -2.0000     2.0000     3.0000
        -----------------------------------------------------
 z  = |     2.0000    -1.0000     1.0000    -1.0000     0.0000

>> T = addcol(T , [0 1 0 0 0]' , 'w2' , 5);
             x1         x2         x3         x4         w2          1
        ----------------------------------------------------------------
 x5 = |     1.0000    -1.0000     4.0000    -4.0000     0.0000     1.0000
 x6 = |     1.0000    -1.0000    -1.0000     1.0000     1.0000    -2.0000
 x7 = |     1.0000     3.0000     2.0000    -2.0000     0.0000    -3.0000
 x8 = |    -1.0000    -3.0000    -2.0000     2.0000     0.0000     3.0000
        ----------------------------------------------------------------
 z  = |     2.0000    -1.0000     1.0000    -1.0000     0.0000     0.0000

>> T = addcol(T , [0 0 1 0 0]' , 'w3' , 6);
             x1         x2         x3         x4         w2         w3          1
        ---------------------------------------------------------------------------
 x5 = |     1.0000    -1.0000     4.0000    -4.0000     0.0000     0.0000     1.0000
 x6 = |     1.0000    -1.0000    -1.0000     1.0000     1.0000     0.0000    -2.0000
 x7 = |     1.0000     3.0000     2.0000    -2.0000     0.0000     1.0000    -3.0000
 x8 = |    -1.0000    -3.0000    -2.0000     2.0000     0.0000     0.0000     3.0000
        ---------------------------------------------------------------------------
 z  = |     2.0000    -1.0000     1.0000    -1.0000     0.0000     0.0000     0.0000
```

Ένα Πλήρες Παράδειγμα (Ι)

```
>> T = addrow(T , [0 0 0 0 1 1 0], 'z0' , 6);
            x1        x2        x3        x4        w2        w3         1
       ---------------------------------------------------------------------
 x5 = |   1.0000   -1.0000    4.0000   -4.0000    0.0000    0.0000    1.0000
 x6 = |   1.0000   -1.0000   -1.0000    1.0000    1.0000    0.0000   -2.0000
 x7 = |   1.0000    3.0000    2.0000   -2.0000    0.0000    1.0000   -3.0000
 x8 = |  -1.0000   -3.0000   -2.0000    2.0000    0.0000    0.0000    3.0000
       ---------------------------------------------------------------------
 z  = |   2.0000   -1.0000    1.0000   -1.0000    0.0000    0.0000    0.0000
 z0 = |   0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    1.0000    1.0000    0.0000
>> T = ljx(T,2,5);          %% Δημιουργούμε το σημείο εκκίνησης της Φάσης Ι...
            x1        x2        x3        x4        x6        w3         1
       ---------------------------------------------------------------------
 x5 = |   1.0000   -1.0000    4.0000   -4.0000    0.0000    0.0000    1.0000
 w2 = |  -1.0000    1.0000    1.0000   -1.0000    1.0000   -0.0000    2.0000
 x7 = |   1.0000    3.0000    2.0000   -2.0000    0.0000    1.0000   -3.0000
 x8 = |  -1.0000   -3.0000   -2.0000    2.0000    0.0000    0.0000    3.0000
       ---------------------------------------------------------------------
 z  = |   2.0000   -1.0000    1.0000   -1.0000    0.0000    0.0000    0.0000
 z0 = |  -1.0000    1.0000    1.0000   -1.0000    1.0000    1.0000    2.0000
>> T = ljx(T,3,6);          %% Δημιουργούμε το σημείο εκκίνησης της Φάσης Ι...
            x1        x2        x3        x4        x6        x7         1
       ---------------------------------------------------------------------
 x5 = |   1.0000   -1.0000    4.0000   -4.0000    0.0000    0.0000    1.0000
 w2 = |  -1.0000    1.0000    1.0000   -1.0000    1.0000   -0.0000    2.0000
 w3 = |  -1.0000   -3.0000   -2.0000    2.0000   -0.0000    1.0000    3.0000
 x8 = |  -1.0000   -3.0000   -2.0000    2.0000    0.0000    0.0000    3.0000
       ---------------------------------------------------------------------
 z  = |   2.0000   -1.0000    1.0000   -1.0000    0.0000    0.0000    0.0000
 z0 = |  -2.0000   -2.0000   -1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    5.0000
```

Ένα Πλήρες Παράδειγμα (I)

```
>> T = ljx(T,2,1); %% Εκτέλεση Φάσης I...
              w2          x2          x3          x4          x6          x7          1
        ---------------------------------------------------------------------------------
 x5 = |    -1.0000      0.0000      5.0000     -5.0000      1.0000      0.0000      3.0000
 x1 = |    -1.0000      1.0000      1.0000     -1.0000      1.0000     -0.0000      2.0000
 w3 = |     1.0000     -4.0000     -3.0000      3.0000     -1.0000      1.0000      1.0000
 x8 = |     1.0000     -4.0000     -3.0000      3.0000     -1.0000      0.0000      1.0000
        ---------------------------------------------------------------------------------
 z  = |    -2.0000      1.0000      3.0000     -3.0000      2.0000      0.0000      4.0000
 z0 = |     2.0000     -4.0000     -3.0000      3.0000     -1.0000      1.0000      1.0000
>> T = ljx(T,3,2);
              w2          w3          x3          x4          x6          x7          1
        ---------------------------------------------------------------------------------
 x5 = |    -1.0000     -0.0000      5.0000     -5.0000      1.0000      0.0000      3.0000
 x1 = |    -0.7500     -0.2500      0.2500     -0.2500      0.7500      0.2500      2.2500
 x2 = |     0.2500     -0.2500     -0.7500      0.7500     -0.2500      0.2500      0.2500
 x8 = |     0.0000      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000     -1.0000      0.0000
        ---------------------------------------------------------------------------------
 z  = |    -1.7500     -0.2500      2.2500     -2.2500      1.7500      0.2500      4.2500
 z0 = |     1.0000      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
>> %% Βρήκαμε σημείο εκκίνησης για Φάση II. ΔΙΑΓΡΑΦΟΥΜΕ την περιττή πληροφορία:
>> T = delcol(T,'w2'); T = delcol(T,'w3'); T = delrow(T,'z0');
 x3         x4          x6          x7          1
        -----------------------------------------------------
 x5 = |     5.0000     -5.0000      1.0000      0.0000      3.0000
 x1 = |     0.2500     -0.2500      0.7500      0.2500      2.2500
 x2 = |    -0.7500      0.7500     -0.2500      0.2500      0.2500
 x8 = |     0.0000      0.0000      0.0000     -1.0000      0.0000
        -----------------------------------------------------
 z  = |     2.2500     -2.2500      1.7500      0.2500      4.2500
```

Ένα Πλήρες Παράδειγμα (Ι)

```
              x3        x4        x6        x7         1
         ---------------------------------------------------
 x5 = |    5.0000   -5.0000    1.0000    0.0000    3.0000
 x1 = |    0.2500   -0.2500    0.7500    0.2500    2.2500
 x2 = |   -0.7500    0.7500   -0.2500    0.2500    0.2500
 x8 = |    0.0000    0.0000    0.0000   -1.0000    0.0000
         ---------------------------------------------------
 z  = |    2.2500   -2.2500    1.7500    0.2500    4.2500
>> T = ljx(T,1,2); %% Εκτέλεση Φάσης ΙΙ...
              x3        x5        x6        x7         1
         ---------------------------------------------------
 x4 = |    1.0000   -0.2000    0.2000    0.0000    0.6000
 x1 = |    0.0000    0.0500    0.7000    0.2500    2.1000
 x2 = |    0.0000   -0.1500   -0.1000    0.2500    0.7000
 x8 = |    0.0000   -0.0000    0.0000   -1.0000    0.0000
         ---------------------------------------------------
 z  = |    0.0000    0.4500    1.3000    0.2500    2.9000
```

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΛΥΣΗ

```
>>
>> %% ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΛΥΣΗ = [ X1 = 2.1, X2 = 0.7, X3 = 0, X4 = 0.6 ]
>> %% ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΛΥΣΗ ΓΙΑ ΑΡΧΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ???
>> %% ΑΠΑΝΤΗΣΗ : [ Z1 = 2.1, Z2 = 0.7, Z3 = -0.6 ] με κόστος 2.9
```

Ο αλγόριθμος SIMPLEX: Λεπτομέρειες Υλοποίησης

...λεξικογραφικό min ratio & ακέραιο pivoting...

Λεξικογραφική Σύγκριση Διανυσμάτων

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΛΕΞΙΚΟΓΡΑΦΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

- Το $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ είναι **λεξικογραφικά-θετικό** (lexico-positive) ANN η **πρώτη** μη μηδενική τιμή του είναι **θετική**.
- Το $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ είναι **λεξικογραφικά-αρνητικό** ANN το $-\mathbf{a}$ είναι λεξικογραφικά-θετικό.
- Το $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ είναι **λεξικογραφικά-μεγαλύτερο** από το $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$, ANN το $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ είναι λεξικογραφικά θετικό.

Λεξικογραφική Σύγκριση Διανυσμάτων

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΛΕΞΙΚΟΓΡΑΦΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

- Το $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ είναι **λεξικογραφικά-θετικό** (lexico-positive) ΑΝΝ η **πρώτη** μη μηδενική τιμή του είναι **θετική**.
- Το $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ είναι **λεξικογραφικά-αρνητικό** ΑΝΝ το $-\mathbf{a}$ είναι λεξικογραφικά-θετικό.
- Το $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ είναι **λεξικογραφικά-μεγαλύτερο** από το $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$, ΑΝΝ το $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ είναι λεξικογραφικά θετικό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Βρείτε τι είναι τα παρακάτω διανύσματα, και για την τελευταία περίπτωση ποιο είναι το **λεξικογραφικά** **μέγιστο** / **ελάχιστο**.

- $[0; 0; 0.001; -1000]$
- $[0; -1; 20000; 5000]$
- $\{[-2; 0; -1; 0], [-2; 0; -1; 1], [-2; 1; -20; -30], [0; -1; -2; -3]\}$

Λεξικογραφική Σύγκριση Διανυσμάτων

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΛΕΞΙΚΟΓΡΑΦΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

- Το $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ είναι **λεξικογραφικά-θετικό** (lexico-positive) ΑΝΝ η **πρώτη** μη μηδενική τιμή του είναι **θετική**.
- Το $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ είναι **λεξικογραφικά-αρνητικό** ΑΝΝ το $-\mathbf{a}$ είναι λεξικογραφικά-θετικό.
- Το $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ είναι **λεξικογραφικά-μεγαλύτερο** από το $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$, ΑΝΝ το $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ είναι λεξικογραφικά θετικό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Βρείτε τι είναι τα παρακάτω διανύσματα, και για την τελευταία περίπτωση ποιο είναι το **λεξικογραφικά** **μέγιστο** / **ελάχιστο**.

- $[0; 0; 0.001; -1000]$ /* λεξικογραφικά θετικό */
- $[0; -1; 20000; 5000]$ /* λεξικογραφικά αρνητικό */
- $\{[-2; 0; -1; 0], [-2; 0; -1; 1], [-2; 1; -20; -30], [0; -1; -2; -3]\}$

Λεξικογραφικά Εφικτές Βάσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΛΕΞΙΚΟΓΡΑΦΙΚΑ ΕΦΙΚΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ Γ.Π.

Για το σύνολο $P = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, μια βάση $\beta \subseteq [n]$ (και η αντίστοιχη βασική λύση $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_\beta; \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}]$) λέγεται **λεξικογραφικά εφικτή** (lexico-feasible) ΑΝΝ υπάρχει $\bar{\varepsilon} > 0$ τ.ώ. ΓΙΑ ΚΑΘΕ $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, η $\bar{\mathbf{x}}$ είναι εφικτή για το *«διαταραγμένο» πολύεδρο*:

$$P(\varepsilon) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a} + [\varepsilon; \varepsilon^2; \varepsilon^3; \ldots; \varepsilon^m]; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Λεξικογραφικά Εφικτές Βάσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΛΕΞΙΚΟΓΡΑΦΙΚΑ ΕΦΙΚΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ Γ.Π.

Για το σύνολο $P = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, μια βάση $\beta \subseteq [n]$ (και η αντίστοιχη βασική λύση $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_\beta; \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}]$) λέγεται **λεξικογραφικά εφικτή** (lexico-feasible) ΑΝΝ υπάρχει $\bar{\varepsilon} > 0$ τ.ώ. ΓΙΑ ΚΑΘΕ $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, η $\bar{\mathbf{x}}$ είναι εφικτή για το *«διαταραγμένο» πολύεδρο*:

$$P(\varepsilon) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a} + [\varepsilon; \varepsilon^2; \varepsilon^3; \ldots; \varepsilon^m]; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1: Το παραπάνω (αποδεικνύεται ότι) ισχύει ΑΝΝ είναι **λεξικο-αρνητική** κάθε γραμμή στο μητρώο:

$$D = \left[\ -\mathbf{b} = -(A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a}\ ,\ \ -(A[*,\beta])^{-1}\ \right]$$

Λεξικογραφικά Εφικτές Βάσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΛΕΞΙΚΟΓΡΑΦΙΚΑ ΕΦΙΚΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ Γ.Π.

Για το σύνολο $P = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, μια βάση $\beta \subseteq [n]$ (και η αντίστοιχη βασική λύση $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_\beta; \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}]$) λέγεται **λεξικογραφικά εφικτή** (lexico-feasible) ΑΝΝ υπάρχει $\bar{\varepsilon} > 0$ τ.ώ. ΓΙΑ ΚΑΘΕ $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, η $\bar{\mathbf{x}}$ είναι εφικτή για το *«διαταραγμένο» πολύεδρο*:

$$P(\varepsilon) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a} + [\varepsilon; \varepsilon^2; \varepsilon^3; \ldots; \varepsilon^m]; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1: Το παραπάνω (αποδεικνύεται ότι) ισχύει ΑΝΝ είναι **λεξικο-αρνητική** κάθε γραμμή στο μητρώο:

$$D = \left[\ -\mathbf{b} = -(A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a}\ ,\ \ -(A[*,\beta])^{-1}\ \right]$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2: Αν το A έχει το μοναδιαίο $m \times m$ μητρώο ως υπομητρώο του, και $\mathbf{a}$ είναι **μη αρνητικό** διάνυσμα, τότε η bfs λύση που υποδεικνύει το μοναδιαίο μητρώο είναι λεξικο-εφικτή.

Λεξικογραφικό Min Ratio Test (I)

Ορισμός

- Έστω βάση β και $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_\beta; \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}]$ του πολυέδρου:

$$
\begin{aligned}
P &= \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \\
&= \{\mathbf{x} : \mathbf{x}_\beta = \underbrace{-(A[*,\beta])^{-1} A[*,N]}_{=:B} \cdot \mathbf{x}_N + \underbrace{(A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a}}_{=:\mathbf{b}}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}
\end{aligned}
$$

- Έστω: $\boxed{D = -(A[*,\beta])^{-1}}$

  Για οποιαδήποτε **στήλη εναλλαγής** $s \in [n-m]$ (ισοδύναμα, μη βασική μεταβλητη $x_{N(s)}$, το **λεξικογραφικό Min Ratio Test (LMR)** για επιλογή **γραμμής εναλλαγής** $r \in [m]$ γίνεται ως εξής:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\theta(s) &= \min\left\{-\frac{b_k}{B[k,s]} : k \in \beta \ \wedge \ B[k,s] < 0\right\} \\
r(s) &= \mathrm{LexMin}\left\{\frac{1}{B[k,s]} \cdot [-b_k, D[k,*]] : k \in \beta \ \wedge \ B[k,s] < 0\right\}
\end{aligned}
}
$$

Λεξικογραφικό Min Ratio Test (II)

Μια χρήσιμη ιδιότητα

if για τη βάση β η bfs λύση της $\bar{\mathbf{x}}$ είναι **λεξικογραφικά εφικτή** ΚΑΙ για οποιαδήποτε στήλη εναλλαγής $s \in [n-m]$, η επιλογή της γραμμής εναλλαγής $r(s)$ γίνει με τον κανόνα LMR:

$$r(s) = \text{LexMin}\left\{ \frac{1}{B[k,s]} \cdot [-b_k, D[k,*]] : k \in \beta \ \wedge \ B[k,s] < 0 \right\}$$

then η λύση $\hat{\mathbf{x}}$ για τη νέα βάση $\gamma = \beta - r(s) + s$ που θα προκύψει από το $Pivot(\beta, r(s), s)$ θα είναι επίσης **λεξικογραφικά-εφικτή**.

Λεξικογραφικό Min Ratio Test (II)

Μια χρήσιμη ιδιότητα

- Έστω ότι επιλέγουμε στήλη εναλλαγής $s \in [n-m]$ σύμφωνα με τον Pricing Rule (ισοπαλίες υπέρ μεταβλητών με **μικρότερο δείκτη**) και γραμμή εναλλαγής $r \in [m]$ σύμφωνα με τον κανόνα LMR.

Λεξικογραφικό Min Ratio Test (II)

Μια χρήσιμη ιδιότητα

- Έστω ότι επιλέγουμε στήλη εναλλαγής $s \in [n-m]$ σύμφωνα με τον Pricing Rule (ισοπαλίες υπέρ μεταβλητών με **μικρότερο δείκτη**) και γραμμή εναλλαγής $r \in [m]$ σύμφωνα με τον κανόνα LMR.

if για βάση β ισχύει $\theta(s) > 0$

Λεξικογραφικό Min Ratio Test (II)

Μια χρήσιμη ιδιότητα

- Έστω ότι επιλέγουμε στήλη εναλλαγής $s \in [n-m]$ σύμφωνα με τον Pricing Rule (ισοπαλίες υπέρ μεταβλητών με **μικρότερο δείκτη**) και γραμμή εναλλαγής $r \in [m]$ σύμφωνα με τον κανόνα LMR.

if για βάση β ισχύει $\theta(s) > 0$

then το $Pivot(\beta, r(s), s)$ προκαλεί *μείωση κόστους*.

Λεξικογραφικό Min Ratio Test (II)

Μια χρήσιμη ιδιότητα

- Έστω ότι επιλέγουμε στήλη εναλλαγής $s \in [n-m]$ σύμφωνα με τον Pricing Rule (ισοπαλίες υπέρ μεταβλητών με **μικρότερο δείκτη**) και γραμμή εναλλαγής $r \in [m]$ σύμφωνα με τον κανόνα LMR.

if για βάση β ισχύει $\theta(s) > 0$

then το $Pivot(\beta, r(s), s)$ προκαλεί *μείωση κόστους*.

else /* $\theta(s) = 0$ */

Το διάνυσμα με τα **σκιώδη ελαττωμένα κόστη** των μεταβλητών που αντιστοιχούν στο μητρώο $D = -A[*, \beta]^{-1}$ *αυξάνεται λεξικογραφικά*.

Λεξικογραφικό Min Ratio Test (II)

Μια χρήσιμη ιδιότητα

- Έστω ότι επιλέγουμε στήλη εναλλαγής $s \in [n-m]$ σύμφωνα με τον Pricing Rule (ισοπαλίες υπέρ μεταβλητών με **μικρότερο δείκτη**) και γραμμή εναλλαγής $r \in [m]$ σύμφωνα με τον κανόνα LMR.

if για βάση β ισχύει $\theta(s) > 0$

then το $Pivot(\beta, r(s), s)$ προκαλεί *μείωση κόστους*.

else $/*\ \theta(s) = 0\ */$

Το διάνυσμα με τα **σκιώδη ελαττωμένα κόστη** των μεταβλητών που αντιστοιχούν στο μητρώο $D = -A[*, \beta]^{-1}$ *αυξάνεται λεξικογραφικά*.

$\therefore$ Αποκλείεται η ύπαρξη κύκλου.

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (I)

$$\begin{array}{lrrrl}
\textbf{min.} & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & \\
\text{s.t.} & -3x_1 & -2x_2 & -3x_3 & \geq -1 \\
 & -3x_1 & -6x_2 & -x_3 & \geq -1 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 &
\end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να επιλυθει με τη μέθοδο SIMPLEX, και ειδικά χρησιμοποιώντας το LMR, το εξής γ.π.

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (I)

$$\begin{array}{llllll}
\textbf{min.} & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & \\
\text{s.t.} & -3x_1 & -2x_2 & -3x_3 & \geq -1 \\
 & -3x_1 & -6x_2 & -x_3 & \geq -1 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 &
\end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να επιλυθει με τη μέθοδο SIMPLEX, και ειδικά χρησιμοποιώντας το LMR, το εξής γ.π.

- Προσθήκη $m = 2$ *βοηθητικών στηλών* (αντιστοιχούν σε μόνιμα μη βασικές μεταβλητές, που εξαιρούνται από τη διαδικασία του πιοτινγ) μεταβλητών x_4, x_5 με μητρώο συντελεστών τον αντίθετο του μοναδιαίου, ώστε ανά πάσα στιγμή οι στήλες τους να διατηρούν το μητρώο $D = -(A[*, \beta])^{-1}$ της τρέχουσας βάσης β.

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (I)

$$\begin{array}{lcccccc}
\textbf{min.} & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & & & \\
\text{s.t.} & -3x_1 & -2x_2 & -3x_3 & -x_4 & & \geq -1 \\
 & -3x_1 & -6x_2 & -x_3 & & -x_5 & \geq -1 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & & &
\end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να επιλυθει με τη μέθοδο SIMPLEX, και ειδικά χρησιμοποιώντας το LMR, το εξής γ.π.

- Προσθήκη $m = 2$ *βοηθητικών στηλών* (αντιστοιχούν σε μόνιμα μη βασικές μεταβλητές, που εξαιρούνται από τη διαδικασία του πιοτινγ) μεταβλητών x_4, x_5 με μητρώο συντελεστών τον αντίθετο του μοναδιαίου, ώστε ανά πάσα στιγμή οι στήλες τους να διατηρούν το μητρώο $D = -(A[*, \beta])^{-1}$ της τρέχουσας βάσης β.

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (I)

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\textbf{min.} & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & & & \\
\text{s.t.} & -3x_1 & -2x_2 & -3x_3 & -x_4 & & \geq -1 \\
 & -3x_1 & -6x_2 & -x_3 & & -x_5 & \geq -1 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & & &
\end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να επιλυθει με τη μέθοδο SIMPLEX, και ειδικά χρησιμοποιώντας το LMR, το εξής γ.π.

- Προσθήκη $m = 2$ *βοηθητικών στηλών* (αντιστοιχούν σε μόνιμα μη βασικές μεταβλητές, που εξαιρούνται από τη διαδικασία του πιοτινγ) μεταβλητών x_4, x_5 με μητρώο συντελεστών τον αντίθετο του μοναδιαίου, ώστε ανά πάσα στιγμή οι στήλες τους να διατηρούν το μητρώο $D = -(A[*,\beta])^{-1}$ της τρέχουσας βάσης β.
- Προσθήκη των απαραίτητων *slack μεταβλητών*, ώστε να προκύψει ισοδύναμο $(LP_=)$.

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (I)

$$\begin{array}{lccccccl}
\textbf{min.} & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & & & & \\
\text{s.t.} & -3x_1 & -2x_2 & -3x_3 & -x_4 & & +1 & = x_6 \\
 & -3x_1 & -6x_2 & -x_3 & & -x_5 & +1 & = x_7 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & & & &
\end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να επιλυθει με τη μέθοδο SIMPLEX, και ειδικά χρησιμοποιώντας το LMR, το εξής γ.π.

- Προσθήκη $m = 2$ *βοηθητικών στηλών* (αντιστοιχούν σε μόνιμα μη βασικές μεταβλητές, που εξαιρούνται από τη διαδικασία του πιοτινγ) μεταβλητών x_4, x_5 με μητρώο συντελεστών τον αντίθετο του μοναδιαίου, ώστε ανά πάσα στιγμή οι στήλες τους να διατηρούν το μητρώο $D = -(A[*, \beta])^{-1}$ της τρέχουσας βάσης β.
- Προσθήκη των απαραίτητων *slack μεταβλητών*, ώστε να προκύψει ισοδύναμο $(LP_=)$.

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (II)

```
>> T = totbl(A,a,p);
             x1         x2         x3         x4         x5         1
       ---------------------------------------------------------------
 x6 = |    -3.0000    -2.0000    -3.0000    -1.0000     0.0000    1.0000
 x7 = |    -3.0000    -6.0000    -1.0000     0.0000    -1.0000    1.0000
       ---------------------------------------------------------------
 z  = |    -1.0000    -2.0000    -1.0000     0.0000     0.0000    0.0000
```

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (II)

```
>> T = totbl(A,a,p);
              x1          x2          x3          x4          x5          1
       ------------------------------------------------------------------
 x6 = |    -3.0000    -2.0000    -3.0000    -1.0000     0.0000     1.0000
 x7 = |    -3.0000    -6.0000    -1.0000     0.0000    -1.0000     1.0000
       ------------------------------------------------------------------
 z  = |    -1.0000    -2.0000    -1.0000     0.0000     0.0000     0.0000

%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x1…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-1/3)*[-1,-1,0] , (-1/3)*[-1,0,-1] }
```

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (II)

```
>> T = totbl(A,a,p);
              x1         x2         x3         x4         x5         1
       ----------------------------------------------------------------
 x6 = |    -3.0000    -2.0000    -3.0000    -1.0000     0.0000    1.0000
 x7 = |    -3.0000    -6.0000    -1.0000     0.0000    -1.0000    1.0000
       ----------------------------------------------------------------
 z  = |    -1.0000    -2.0000    -1.0000     0.0000     0.0000    0.0000

%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x1…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-1/3)*[-1,-1,0] , (-1/3)*[-1,0,-1] } --> x7…
>> T = ljx(T,2,1);
              x7         x2         x3         x4         x5         1
       ----------------------------------------------------------------
 x6 = |     1.0000     4.0000    -2.0000    -1.0000     1.0000    0.0000
 x1 = |    -0.3333    -2.0000    -0.3333    -0.0000    -0.3333    0.3333
       ----------------------------------------------------------------
 z  = |     0.3333     0.0000    -0.6667     0.0000     0.3333   -0.3333
```

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (II)

```
>> T = totbl(A,a,p);
                x1           x2           x3           x4           x5           1
       -----------------------------------------------------------------------------
 x6 = |     -3.0000      -2.0000      -3.0000      -1.0000       0.0000       1.0000
 x7 = |     -3.0000      -6.0000      -1.0000       0.0000      -1.0000       1.0000
       -----------------------------------------------------------------------------
 z  = |     -1.0000      -2.0000      -1.0000       0.0000       0.0000       0.0000

%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x1…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-1/3)*[-1,-1,0] , (-1/3)*[-1,0,-1] } --> x7…
>> T = ljx(T,2,1);
                x7           x2           x3           x4           x5           1
       -----------------------------------------------------------------------------
 x6 = |      1.0000       4.0000      -2.0000      -1.0000       1.0000       0.0000
 x1 = |     -0.3333      -2.0000      -0.3333      -0.0000      -0.3333       0.3333
       -----------------------------------------------------------------------------
 z  = |      0.3333       0.0000      -0.6667       0.0000       0.3333      -0.3333
%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x3…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-1/2)*[0,-1,1] , (-3)*[-1/3,0,-1/3] } --> x6…
```

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (II)

```
>> T = totbl(A,a,p);
                 x1          x2          x3          x4          x5          1
       -------------------------------------------------------------------------
 x6 = |     -3.0000     -2.0000     -3.0000     -1.0000      0.0000      1.0000
 x7 = |     -3.0000     -6.0000     -1.0000      0.0000     -1.0000      1.0000
       -------------------------------------------------------------------------
 z  = |     -1.0000     -2.0000     -1.0000      0.0000      0.0000      0.0000

%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x1…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-1/3)*[-1,-1,0] , (-1/3)*[-1,0,-1] } --> x7…
>> T = ljx(T,2,1);
                 x7          x2          x3          x4          x5          1
       -------------------------------------------------------------------------
 x6 = |      1.0000      4.0000     -2.0000     -1.0000      1.0000      0.0000
 x1 = |     -0.3333     -2.0000     -0.3333     -0.0000     -0.3333      0.3333
       -------------------------------------------------------------------------
 z  = |      0.3333      0.0000     -0.6667      0.0000      0.3333     -0.3333
%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x3…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-1/2)*[0,-1,1] , (-3)*[-1/3,0,-1/3] } --> x6…
>> T = ljx(T,1,3);
                 x7          x2          x6          x4          x5          1
       -------------------------------------------------------------------------
 x3 = |      0.5000      2.0000     -0.5000     -0.5000      0.5000      0.0000
 x1 = |     -0.5000     -2.6667      0.1667      0.1667     -0.5000      0.3333
       -------------------------------------------------------------------------
 z  = |     -0.0000     -1.3333      0.3333      0.3333     -0.0000     -0.3333
```

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (II)

```
>> T = ljx(T,1,3);
                x7          x2          x6          x4          x5          1
       ------------------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.5000      2.0000     -0.5000     -0.5000      0.5000      0.0000
 x1 = |    -0.5000     -2.6667      0.1667      0.1667     -0.5000      0.3333
       ------------------------------------------------------------------------
 z  = |    -0.0000     -1.3333      0.3333      0.3333     -0.0000     -0.3333
```

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (II)

```
>> T = ljx(T,1,3);
              x7         x2         x6         x4         x5          1
       -----------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.5000     2.0000    -0.5000    -0.5000     0.5000     0.0000
 x1 = |    -0.5000    -2.6667     0.1667     0.1667    -0.5000     0.3333
       -----------------------------------------------------------------
 z  = |    -0.0000    -1.3333     0.3333     0.3333    -0.0000    -0.3333

%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x2…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-3/8)*[-1/3,1/6,-1/2] } --> x1…
```

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (II)

```
>> T = ljx(T,1,3);
               x7         x2         x6         x4         x5         1
         ------------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.5000     2.0000    -0.5000    -0.5000     0.5000     0.0000
 x1 = |    -0.5000    -2.6667     0.1667     0.1667    -0.5000     0.3333
         ------------------------------------------------------------------
 z  = |    -0.0000    -1.3333     0.3333     0.3333    -0.0000    -0.3333

%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x2…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-3/8)*[-1/3,1/6,-1/2] } --> x1…
>> T = ljx(T,2,2);
               x7         x1         x6         x4         x5         1
         ------------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.1250    -0.7500    -0.3750    -0.3750     0.1250     0.2500
 x2 = |    -0.1875    -0.3750     0.0625     0.0625    -0.1875     0.1250
         ------------------------------------------------------------------
 z  = |     0.2500     0.5000     0.2500     0.2500     0.2500    -0.5000
```

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (II)

```
>> T = ljx(T,1,3);
              x7          x2          x6          x4          x5          1
          ------------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.5000      2.0000     -0.5000     -0.5000      0.5000      0.0000
 x1 = |    -0.5000     -2.6667      0.1667      0.1667     -0.5000      0.3333
          ------------------------------------------------------------------
 z  = |    -0.0000     -1.3333      0.3333      0.3333     -0.0000     -0.3333

%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x2…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-3/8)*[-1/3,1/6,-1/2] } --> x1…
>> T = ljx(T,2,2);
              x7          x1          x6          x4          x5          1
          ------------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.1250     -0.7500     -0.3750     -0.3750      0.1250      0.2500
 x2 = |    -0.1875     -0.3750      0.0625      0.0625     -0.1875      0.1250
          ------------------------------------------------------------------
 z  = |     0.2500      0.5000      0.2500      0.2500      0.2500     -0.5000
```

Βέλτιστη Λύση!!!

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (II)

```
>> T = ljx(T,1,3);
                x7          x2          x6          x4          x5          1
          -----------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.5000      2.0000     -0.5000     -0.5000      0.5000      0.0000
 x1 = |    -0.5000     -2.6667      0.1667      0.1667     -0.5000      0.3333
          -----------------------------------------------------------------
 z  = |    -0.0000     -1.3333      0.3333      0.3333     -0.0000     -0.3333

%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x2…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-3/8)*[-1/3,1/6,-1/2] } --> x1…
>> T = ljx(T,2,2);
                x7          x1          x6          x4          x5          1
          -----------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.1250     -0.7500     -0.3750     -0.3750      0.1250      0.2500
 x2 = |    -0.1875     -0.3750      0.0625      0.0625     -0.1875      0.1250
          -----------------------------------------------------------------
 z  = |     0.2500      0.5000      0.2500      0.2500      0.2500     -0.5000
```

Βέλτιστη Λύση!!!

Αδιάφορες Τιμές!!!

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (ΙΙ)

```
>> T = ljx(T,1,3);
              x7          x2          x6          x4          x5          1
          ------------------------------------------------------------------
 x3 = |    0.5000      2.0000     -0.5000     -0.5000      0.5000     0.0000
 x1 = |   -0.5000     -2.6667      0.1667      0.1667     -0.5000     0.3333
          ------------------------------------------------------------------
 z  = |   -0.0000     -1.3333      0.3333      0.3333     -0.0000    -0.3333

%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x2…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-3/8)*[-1/3,1/6,-1/2] } --> x1…
>> T = ljx(T,2,2);
              x7          x1          x6          x4          x5          1
          ------------------------------------------------------------------
 x3 = |    0.1250     -0.7500     -0.3750     -0.3750      0.1250     0.2500
 x2 = |   -0.1875     -0.3750      0.0625      0.0625     -0.1875     0.1250
          ------------------------------------------------------------------
 z  = |    0.2500      0.5000      0.2500      0.2500      0.2500    -0.5000
```

Βέλτιστη Λύση!!!

Αδιάφορες Τιμές!!!

- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{8}, x_3 = \frac{1}{4}$. Κόστος $= -\frac{1}{2}$. Μονοτονικότητα σύγκλισης;

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (II)

```
>> T = ljx(T,1,3);
              x7          x2          x6          x4          x5          1
       -----------------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.5000      2.0000     -0.5000     -0.5000      0.5000      0.0000
 x1 = |    -0.5000     -2.6667      0.1667      0.1667     -0.5000      0.3333
       -----------------------------------------------------------------------
 z  = |    -0.0000     -1.3333      0.3333      0.3333     -0.0000     -0.3333

%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x2…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-3/8)*[-1/3,1/6,-1/2] } --> x1…
>> T = ljx(T,2,2);
              x7          x1          x6          x4          x5          1
       -----------------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.1250     -0.7500     -0.3750     -0.3750      0.1250      0.2500
 x2 = |    -0.1875     -0.3750      0.0625      0.0625     -0.1875      0.1250
       -----------------------------------------------------------------------
 z  = |     0.2500      0.5000      0.2500      0.2500      0.2500     -0.5000
```

Βέλτιστη Λύση!!!

Αδιάφορες Τιμές!!!

- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{8}, x_3 = \frac{1}{4}$. Κόστος $= -\frac{1}{2}$. Μονοτονικότητα σύγκλισης;

βάση	σκιώδη ελαττωμένα κόστη (x_4, x_5)	κόστος	επόμενο pivot	$\theta(s)$
$(6,7)$	$(0,0)$	0	$(7,1)$	$1/3$
$(6,1)$	$(0,1/3)$	$-1/3$	$(6,3)$	0
$(3,1)$	$(1/3,0)$	$-1/3$	$(1,2)$	$1/8$
$(3,2)$	$(1/4,1/4)$	$-1/5$		

Αποφυγή Κύκλων με τον Κανόνα LMR (II)

```
>> T = ljx(T,1,3);
              x7          x2          x6          x4          x5          1
        ---------------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.5000      2.0000     -0.5000     -0.5000      0.5000      0.0000
 x1 = |    -0.5000     -2.6667      0.1667      0.1667     -0.5000      0.3333
        ---------------------------------------------------------------------
 z  = |    -0.0000     -1.3333      0.3333      0.3333     -0.0000     -0.3333

%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x2…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-3/8)*[-1/3,1/6,-1/2] } --> x1…
>> T = ljx(T,2,2);
              x7          x1          x6          x4          x5          1
        ---------------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.1250     -0.7500     -0.3750     -0.3750      0.1250      0.2500
 x2 = |    -0.1875     -0.3750      0.0625      0.0625     -0.1875      0.1250
        ---------------------------------------------------------------------
 z  = |     0.2500      0.5000      0.2500      0.2500      0.2500     -0.5000
```

Βέλτιστη Λύση!!!

Αδιάφορες Τιμές!!!

- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{8}, x_3 = \frac{1}{4}$. Κόστος $= -\frac{1}{2}$. Μονοτονικότητα σύγκλισης;

βάση	σκιώδη ελαττωμένα κόστη (x_4, x_5)	κόστος	επόμενο pivot	$\theta(s)$
$(6,7)$	$(0,0)$	0	$(7,1)$	$1/3$
$(6,1)$	$(0,1/3)$	$-1/3$	$(6,3)$	0
$(3,1)$	$(1/3,0)$	$-1/3$	$(1,2)$	$1/8$
$(3,2)$	$(1/4,1/4)$	$-1/5$		

Παρακολούθησε μητρώο και σκιώδη κόστη των slacks (x_6, x_7) αντί για (x_4, x_5)!!!

Τι Γίνεται με την Αριθμητική Αστάθεια;

```
...
>> T = ljx(T,1,3);
                x7          x2          x6          x4          x5          1
          -------------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.5000      2.0000     -0.5000     -0.5000      0.5000      0.0000
 x1 = |    -0.5000     -2.6667      0.1667      0.1667     -0.5000      0.3333
          -------------------------------------------------------------------
 z  = |    -0.0000     -1.3333      0.3333      0.3333     -0.0000     -0.3333
...
```

Q Πώς αποφεύγουμε την αστάθεια των αριθμητικών υπολογισμών κατά την εκτέλεση των pivots;

Τι Γίνεται με την Αριθμητική Αστάθεια;

```
...
>> T = ljx(T,1,3);
              x7          x2          x6          x4          x5          1
        -------------------------------------------------------------------
 x3 = |     0.5000      2.0000     -0.5000     -0.5000      0.5000     0.0000
 x1 = |    -0.5000     -2.6667      0.1667      0.1667     -0.5000     0.3333
        -------------------------------------------------------------------
 z  = |    -0.0000     -1.3333      0.3333      0.3333     -0.0000    -0.3333
...
```

Q Πώς αποφεύγουμε την αστάθεια των αριθμητικών υπολογισμών κατά την εκτέλεση των pivots;

A Προσπάθεια αποφυγής κλασματικών αριθμών (δλδ, διαιρέσεων) κατά την εκτέλεση των pivots.

Εξασφάλιση Ακεραιότητας Pivots (I)

ΜΕΧΡΙ ΤΩΡΑ:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{N(s)} &= \tfrac{1}{B[r,s]}\hat{x}_r + \textstyle\sum_{j\in[n-m]-\{s\}} \tfrac{-B[r,j]}{B[r,s]}\hat{x}_{N(j)} + \tfrac{-b_r}{B[r,s]} \\
\forall k \in [m]\setminus\{r\}, \hat{x}_{\beta(k)} &= \tfrac{B[k,s]}{B[r,s]}\hat{x}_r + \textstyle\sum_{j\in[n-m]-\{s\}} \left(B[k,j] - \tfrac{B[r,j]B[k,s]}{B[r,s]}\right)\hat{x}_{N(j)} \\
&+ \left(b_k - \tfrac{b_r B[k,s]}{B[r,s]}\right) \\
\hat{z} &= \tfrac{c_s}{B[r,s]}\hat{x}_r + \textstyle\sum_{j\in[n-m]-\{s\}} \left(c_j - \tfrac{c_s B[r,j]}{B[r,s]}\right)\hat{x}_{N(j)} \\
&+ \left(\zeta - \tfrac{c_s b_r}{B[r,s]}\right)
\end{aligned}
$$

Εξασφάλιση Ακεραιότητας Pivots (I)

ΜΕΧΡΙ ΤΩΡΑ:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{N(s)} &= \frac{1}{B[r,s]}\hat{x}_r + \sum_{j\in[n-m]-\{s\}} \frac{-B[r,j]}{B[r,s]}\hat{x}_{N(j)} + \frac{-b_r}{B[r,s]} \\
\forall k \in [m] \setminus \{r\}, \hat{x}_{\beta(k)} &= \frac{B[k,s]}{B[r,s]}\hat{x}_r + \sum_{j\in[n-m]-\{s\}} \left(B[k,j] - \frac{B[r,j]B[k,s]}{B[r,s]}\right)\hat{x}_{N(j)} \\
&+ \left(b_k - \frac{b_r B[k,s]}{B[r,s]}\right) \\
\hat{z} &= \frac{\underline{c}_s}{B[r,s]}\hat{x}_r + \sum_{j\in[n-m]-\{s\}} \left(\underline{c}_j - \frac{\underline{c}_s B[r,j]}{B[r,s]}\right)\hat{x}_{N(j)} \\
&+ \left(\zeta - \frac{\underline{c}_s b_r}{B[r,s]}\right)
\end{aligned}
$$

ΑΚΕΡΑΙΟΤΗΤΑ;

$$
\begin{aligned}
B[r,s]\hat{x}_{N(s)} &= \hat{x}_r + \sum_{j\in[n-m]-\{s\}}(-B[r,j])\hat{x}_{N(j)} + -b_r \\
\forall k \neq r, B[r,s]\hat{x}_{\beta(k)} &= B[k,s]\hat{x}_r + \sum_{j\in[n-m]-\{s\}} \left(B[r,s]B[k,j] - B[r,j]B[k,s]\right)\hat{x}_{N(j)} \\
&+ \left(B[r,s]b_k - b_r B[k,s]\right) \\
B[r,s]\hat{z} &= \underline{c}_s\hat{x}_r + \sum_{j\in[n-m]-\{s\}} \left(B[r,s]\underline{c}_j - \underline{c}_s B[r,j]\right)\hat{x}_{N(j)} \\
&+ \left(B[r,s]\zeta - \underline{c}_s b_r\right)
\end{aligned}
$$

Εξασφάλιση Ακεραιότητας Pivots (I)

ΜΕΧΡΙ ΤΩΡΑ:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{N(s)} &= \tfrac{1}{B[r,s]}\hat{x}_r + \textstyle\sum_{j\in[n-m]-\{s\}} \tfrac{-B[r,j]}{B[r,s]}\hat{x}_{N(j)} + \tfrac{-b_r}{B[r,s]} \\
\forall k \in [m]\setminus\{r\}, \hat{x}_{\beta(k)} &= \tfrac{B[k,s]}{B[r,s]}\hat{x}_r + \textstyle\sum_{j\in[n-m]-\{s\}} \left(B[k,j] - \tfrac{B[r,j]B[k,s]}{B[r,s]}\right)\hat{x}_{N(j)} \\
&+ \left(b_k - \tfrac{b_r B[k,s]}{B[r,s]}\right) \\
\hat{z} &= \tfrac{\underline{c}_s}{B[r,s]}\hat{x}_r + \textstyle\sum_{j\in[n-m]-\{s\}} \left(\underline{c}_j - \tfrac{\underline{c}_s B[r,j]}{B[r,s]}\right)\hat{x}_{N(j)} \\
&+ \left(\zeta - \tfrac{\underline{c}_s b_r}{B[r,s]}\right)
\end{aligned}
$$

ΑΚΕΡΑΙΟΤΗΤΑ;

$$
\begin{aligned}
B[r,s]\hat{x}_{N(s)} &= \hat{x}_r + \textstyle\sum_{j\in[n-m]-\{s\}}(-B[r,j])\hat{x}_{N(j)} + -b_r \\
\forall k \neq r, B[r,s]\hat{x}_{\beta(k)} &= B[k,s]\hat{x}_r + \textstyle\sum_{j\in[n-m]-\{s\}} \left(B[r,s]B[k,j] - B[r,j]B[k,s]\right)\hat{x}_{N(j)} \\
&+ \left(B[r,s]b_k - b_r B[k,s]\right) \\
B[r,s]\hat{z} &= \underline{c}_s\hat{x}_r + \textstyle\sum_{j\in[n-m]-\{s\}} \left(B[r,s]\underline{c}_j - \underline{c}_s B[r,j]\right)\hat{x}_{N(j)} \\
&+ \left(B[r,s]\zeta - \underline{c}_s b_r\right)
\end{aligned}
$$

- Μετά από το pivot, **διόρθωσε** την ακεραιότητα (ΠΩΣ;).

Εξασφάλιση Ακεραιότητας Pivots (II)

```
>> T = totbl(A,a,p);
               x1          x2          x3          x4          x5          1
       ---------------------------------------------------------------------
 x6 = |     -3.0000     -2.0000     -3.0000     -1.0000      0.0000     1.0000
 x7 = |     -3.0000     -6.0000     -1.0000      0.0000     -1.0000     1.0000
       ---------------------------------------------------------------------
 z  = |     -1.0000     -2.0000     -1.0000      0.0000      0.0000     0.0000
%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x1…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-1/3)*[-1,-1,0] , (-1/3)*[-1,0,-1] } --> x7…
>> CurrentAbsPivot = (-1)*T.val(2,1);
>> T = ljx(T,2,1);
               x7          x2          x3          x4          x5          1
       ---------------------------------------------------------------------
 x6 = |      1.0000      4.0000     -2.0000     -1.0000      1.0000     0.0000
 x1 = |     -0.3333     -2.0000     -0.3333     -0.0000     -0.3333     0.3333
       ---------------------------------------------------------------------
 z  = |      0.3333      0.0000     -0.6667      0.0000      0.3333    -0.3333
%% Διόρθωση Ακεραιότητας: Πολ/σμός των ΟΛΩΝ των γραμμών με CurrentAbsPivot
>> T.val = CurrentAbsPivot*T.val
               x7          x2          x3          x4          x5          1
         -------------------------------------------------------------------
 3*x6 = |     3.0000     12.0000     -6.0000     -3.0000      3.0000     0.0000
 3*x1 = |    -1.0000     -6.0000     -1.0000     -0.0000     -1.0000     1.0000
         -------------------------------------------------------------------
 3*z  = |     1.0000      0.0000     -2.0000      0.0000      1.0000    -1.0000
```

Εξασφάλιση Ακεραιότητας Pivots (II)

```
%% Διόρθωση Ακεραιότητας: Πολ/σμός των ΟΛΩΝ των γραμμών με CurrentAbsPivot
               x7          x2          x3          x4          x5          1
        --------------------------------------------------------------------
 3*x6 = |     3.0000     12.0000     -6.0000     -3.0000      3.0000      0.0000
 3*x1 = |    -1.0000     -6.0000     -1.0000     -0.0000     -1.0000      1.0000
        --------------------------------------------------------------------
 3*z  = |     1.0000      0.0000     -2.0000      0.0000      1.0000     -1.0000

%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x3…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-1/6)*[0,-3,3] , (-1)*[1,0,-1] } --> 3*x6…

>> CurrentAbsPivot = (-1)*T.val(1,3);
>> T = ljx(T,1,3);
               x7          x2        3*x6          x4          x5          1
        --------------------------------------------------------------------
   x3 = |     0.5000      2.0000     -0.1667     -0.5000      0.5000      0.0000
 3*x1 = |    -1.5000     -8.0000      0.1667      0.5000     -1.5000      1.0000
        --------------------------------------------------------------------
 3*z  = |     0.0000     -4.0000      0.3333      1.0000      0.0000     -1.0000

%% Διόρθωση Ακεραιότητας: Πολ/σμός των ΟΛΩΝ των γραμμών με CurrentAbsPivot
                 x7          x2        3*x6          x4          x5          1
          --------------------------------------------------------------------
   6*x3 = |     3.0000     12.0000     -1.0000     -3.0000      3.0000      0.0000
 3*6*x1 = |    -9.0000    -48.0000      1.0000      3.0000     -9.0000      6.0000
          --------------------------------------------------------------------
 3*6*z  = |     0.0000    -24.0000      2.0000      6.0000      0.0000     -6.0000
```

Εξασφάλιση Ακεραιότητας Pivots (II)

```
                 x7         x2         3*x6        x4         x5         1
           -----------------------------------------------------------------
   6*x3 = |    3.0000    12.0000    -1.0000    -3.0000     3.0000    0.0000
 3*6*x1 = |   -9.0000   -48.0000     1.0000     3.0000    -9.0000    6.0000
           -----------------------------------------------------------------
 3*6*z  = |    0.0000   -24.0000     2.0000     6.0000     0.0000   -6.0000
%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x2…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-1/48)*[-6, 3,-9] } --> 3*6*x1…
>> CurrentAbsPivot = (-1)*T.val(2,2);

>> T = ljx(T,2,2);
                  x7      3*6*x1       3*x6        x4         x5         1
          ------------------------------------------------------------------
  6*x3 = |     0.7500    -0.2500    -0.7500    -2.2500     0.7500    1.5000
    x2 = |    -0.1875    -0.0208     0.0208     0.0625    -0.1875    0.1250
          ------------------------------------------------------------------
3*6*z  = |     4.5000     0.5000     1.5000     4.5000     4.5000   -9.0000
%% Διόρθωση Ακεραιότητας: Πολ/σμός των ΟΛΩΝ των γραμμών με CurrentAbsPivot
>> T.val = T.val*CurrentAbsPivot;
                     x7      3*6*x1       3*x6        x4         x5          1
             --------------------------------------------------------------------
  6*48*x3 = |   36.0000   -12.0000   -36.0000  -108.0000    36.0000    72.0000
    48*x2 = |   -9.0000    -1.0000     1.0000     3.0000    -9.0000     6.0000
             --------------------------------------------------------------------
3*6*48*z  = |  216.0000    24.0000    72.0000   216.0000   216.0000  -432.0000
```

Εξασφάλιση Ακεραιότητας Pivots (II)

```
                x7         x2        3*x6        x4         x5          1
             -----------------------------------------------------------------
   6*x3 = |    3.0000    12.0000    -1.0000    -3.0000     3.0000     0.0000
 3*6*x1 = |   -9.0000   -48.0000     1.0000     3.0000    -9.0000     6.0000
             -----------------------------------------------------------------
 3*6*z  = |    0.0000   -24.0000     2.0000     6.0000     0.0000    -6.0000
%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x2…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-1/48)*[-6, 3,-9] } --> 3*6*x1…
>> CurrentAbsPivot = (-1)*T.val(2,2);

>> T = ljx(T,2,2);
                x7       3*6*x1      3*x6        x4         x5          1
            ------------------------------------------------------------------
  6*x3 = |     0.7500    -0.2500    -0.7500    -2.2500     0.7500     1.5000
    x2 = |    -0.1875    -0.0208     0.0208     0.0625    -0.1875     0.1250
            ------------------------------------------------------------------
3*6*z  = |     4.5000     0.5000     1.5000     4.5000     4.5000    -9.0000
%% Διόρθωση Ακεραιότητας: Πολ/σμός των ΟΛΩΝ των γραμμών με CurrentAbsPivot
>> T.val = T.val*CurrentAbsPivot;
                      x7       3*6*x1      3*x6        x4         x5          1
               ------------------------------------------------------------------
  6*48*x3 = |     36.0000   -12.0000   -36.0000  -108.0000    36.0000    72.0000
    48*x2 = |     -9.0000    -1.0000     1.0000     3.0000    -9.0000     6.0000
               ------------------------------------------------------------------
3*6*48*z  = |    216.0000    24.0000    72.0000   216.0000   216.0000  -432.0000
```

Βέλτιστη Λύση!!! **Αδιάφορες Τιμές!!!**

Εξασφάλιση Ακεραιότητας Pivots (II)

```
                    x7        x2       3*x6        x4        x5         1
                  ------------------------------------------------------------
    6*x3 = |    3.0000   12.0000   -1.0000   -3.0000    3.0000    0.0000
  3*6*x1 = |   -9.0000  -48.0000    1.0000    3.0000   -9.0000    6.0000
                  ------------------------------------------------------------
  3*6*z  = |    0.0000  -24.0000    2.0000    6.0000    0.0000   -6.0000
%% PIVOT COLUMN: Smallest Index of Negative Cost --> x2…
%% PIVOT ROW: LexMinRatio{ (-1/48)*[-6, 3,-9] } --> 3*6*x1…
>> CurrentAbsPivot = (-1)*T.val(2,2);

>> T = ljx(T,2,2);
                     x7    3*6*x1      3*x6        x4        x5         1
                 -------------------------------------------------------------
   6*x3 = |    0.7500   -0.2500   -0.7500   -2.2500    0.7500    1.5000
     x2 = |   -0.1875   -0.0208    0.0208    0.0625   -0.1875    0.1250
                 -------------------------------------------------------------
3*6*z  = |    4.5000    0.5000    1.5000    4.5000    4.5000   -9.0000
%% Διόρθωση Ακεραιότητας: Πολ/σμός των ΟΛΩΝ των γραμμών με CurrentAbsPivot
>> T.val = T.val*CurrentAbsPivot;
                        x7    3*6*x1      3*x6        x4        x5         1
                    -------------------------------------------------------------------
   6*48*x3 = |    36.0000  -12.0000  -36.0000 -108.0000   36.0000   72.0000
     48*x2 = |    -9.0000   -1.0000    1.0000    3.0000   -9.0000    6.0000
                    -------------------------------------------------------------------
3*6*48*z   = |   216.0000   24.0000   72.0000  216.0000  216.0000 -432.0000
```

Βέλτιστη Λύση!!! **Αδιάφορες Τιμές!!!**

- ΑΠ.: $x_1 = 0, x_2 = \frac{6}{3 \cdot 6 \cdot 48} = \frac{1}{8}, x_3 = \frac{72}{6 \cdot 48} = \frac{1}{4}$. $\mathbf{c}'\mathbf{x} = \frac{-432}{3 \cdot 6 \cdot 48} = -\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα με «Απλό Τρόπο» για Ακεραιότητα

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Οι συντελεστές αυξάνουν ΕΚΘΕΤΙΚΑ, και πολύ σύντομα (σε 8-10 pivots) λογικά θα συμβεί υπερχείλιση!!!

Πρόβλημα με «Απλό Τρόπο» για Ακεραιότητα

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Οι συντελεστές αυξάνουν ΕΚΘΕΤΙΚΑ, και πολύ σύντομα (σε 8-10 pivots) λογικά θα συμβεί υπερχείλιση!!!

Q Πώς αντιμετωπίζεται αυτό;

Πρόβλημα με «Απλό Τρόπο» για Ακεραιότητα

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Οι συντελεστές αυξάνουν ΕΚΘΕΤΙΚΑ, και πολύ σύντομα (σε 8-10 pivots) λογικά θα συμβεί υπερχείλιση!!!

Q Πώς αντιμετωπίζεται αυτό;

A Με προσεκτική εκτέλεση ακέραιων pivots στο ΤΑΜΠΛΟ (αντί για το λεξικό) της βάσης β...

Πρόβλημα με «Απλό Τρόπο» για Ακεραιότητα

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Οι συντελεστές αυξάνουν ΕΚΘΕΤΙΚΑ, και πολύ σύντομα (σε 8-10 pivots) λογικά θα συμβεί υπερχείλιση!!!

Q Πώς αντιμετωπίζεται αυτό;

A Με προσεκτική εκτέλεση ακέραιων pivots στο ΤΑΜΠΛΟ (αντί για το λεξικό) της βάσης β...

- ΛΕΞΙΚΟ: $\mathbf{x}_\beta = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}$.

$$\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{x}_N & 1 \\ \cline{2-3} \mathbf{x}_\beta = & B & \mathbf{b} \\ \cline{2-3} z = & \underline{\mathbf{c}}'_N & \zeta \\ \cline{2-3} \end{array}$$

Πρόβλημα με «Απλό Τρόπο» για Ακεραιότητα

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Οι συντελεστές αυξάνουν ΕΚΘΕΤΙΚΑ, και πολύ σύντομα (σε 8-10 pivots) λογικά θα συμβεί υπερχείλιση!!!

Q Πώς αντιμετωπίζεται αυτό;

A Με προσεκτική εκτέλεση ακέραιων pivots στο ΤΑΜΠΛΟ (αντί για το λεξικό) της βάσης β...

- ΛΕΞΙΚΟ: $\mathbf{x}_\beta = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b}$.

$$
\begin{array}{r|c|c|}
 & \mathbf{x}_N & 1 \\
\hline
\mathbf{x}_\beta = & B & \mathbf{b} \\
\hline
z = & \underline{\mathbf{c}}_N' & \zeta \\
\hline
\end{array}
$$

- ΤΑΜΠΛΟ: $-eye(m)\mathbf{x}_\beta + B\mathbf{x}_N + \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

$$
\begin{array}{r|c|c|c|}
 & \mathbf{x}_\beta & \mathbf{x}_N & 1 \\
\hline
\mathbf{x}_\beta = & -eye(m) & B & \mathbf{b} \\
\hline
z = & \mathbf{0}' & \underline{\mathbf{c}}_N' & \zeta \\
\hline
\end{array}
$$

Η Μέθοδος του Ακέραιου Pivoting

(α) Αρχικό (ακέραιο) ταμπλό για ($\mathrm{LP}_{\geq}$):

$$T = [\ A\ ,\ -eye(m)\ ,\ -\mathbf{a}\ ;\ \mathbf{c}'\ ,\ \mathbf{0}'\ ,\ 0\ ]$$

Η Μέθοδος του Ακέραιου Pivoting

(α) Αρχικό (ακέραιο) ταμπλό για $(\mathrm{LP}_{\geq})$:

$$T = [\ A\ ,\ -eye(m)\ ,\ -\mathbf{a}\ ;\ \mathbf{c}'\ ,\ \mathbf{0}'\ ,\ 0\ ]$$

(β) Κάνουμε pivots με «γραμμοπράξεις» στο T ώστε:

1. Να *διατηρείται η ακεραιότητα* δίχως να αυξάνονται σημαντικά οι συντελεστές του ταμπλό.
2. Κάθε φορά η βάση να *υποδεικνύεται* από τις στήλες του $-\delta \cdot eye(m)$ στο τρέχον ταμπλό, για θετικό ακέραιο $\delta > 0$.
3. Οι εκάστοτε βασικές μεταβλητές (φροντίζουμε να) έχουν πάντα *μηδενικά ελαττωμένα κόστη*.
4. Για την εκτέλεση του $Pivot(\beta, r, s)$, με *«ακέραιες γραμμοπράξεις»* εξασφαλίσουμε ότι η στήλη της x_s στο επόμενο ταμπλό έχει **ακριβώς τα ίδια μηδενικά** με τη στήλη της x_r στο τρέχον ταμπλό.

Η Μέθοδος του Ακέραιου Pivoting

(α) Αρχικό (ακέραιο) ταμπλό για ($LP_{\geq}$):

$$T = [\ A\ ,\ -eye(m)\ ,\ -\mathbf{a}\ ;\ \mathbf{c}'\ ,\ \mathbf{0}'\ ,\ 0\ ]$$

(β) Κάνουμε pivots με «γραμμοπράξεις» στο T ώστε:

1. Να *διατηρείται η ακεραιότητα* δίχως να αυξάνονται σημαντικά οι συντελεστές του ταμπλό.
2. Κάθε φορά η βάση να *υποδεικνύεται* από τις στήλες του $-\delta \cdot eye(m)$ στο τρέχον ταμπλό, για θετικό ακέραιο $\delta > 0$.
3. Οι εκάστοτε βασικές μεταβλητές (φροντίζουμε να) έχουν πάντα *μηδενικά ελαττωμένα κόστη*.
4. Για την εκτέλεση του $Pivot(\beta, r, s)$, με *«ακέραιες γραμμοπράξεις»* εξασφαλίσουμε ότι η στήλη της x_s στο επόμενο ταμπλό έχει **ακριβώς τα ίδια μηδενικά** με τη στήλη της x_r στο τρέχον ταμπλό.

$\boxed{\text{Q}}$ Που βρίσκεται ανά πάσα στιγμή ο $-(T([1:m], \beta))^{-1}$;

Η Μέθοδος του Ακέραιου Pivoting

(α) Αρχικό (ακέραιο) ταμπλό για ($LP_{\geq}$):

$$T = [\ A\ ,\ -eye(m)\ ,\ -\mathbf{a}\ ;\ \mathbf{c}'\ ,\ \mathbf{0}'\ ,\ 0\ ]$$

(β) Κάνουμε pivots με «γραμμοπράξεις» στο T ώστε:

1. Να *διατηρείται η ακεραιότητα* δίχως να αυξάνονται σημαντικά οι συντελεστές του ταμπλό.
2. Κάθε φορά η βάση να *υποδεικνύεται* από τις στήλες του $-\delta \cdot eye(m)$ στο τρέχον ταμπλό, για θετικό ακέραιο $\delta > 0$.
3. Οι εκάστοτε βασικές μεταβλητές (φροντίζουμε να) έχουν πάντα *μηδενικά ελαττωμένα κόστη*.
4. Για την εκτέλεση του $Pivot(\beta, r, s)$, με *«ακέραιες γραμμοπράξεις»* εξασφαλίσουμε ότι η στήλη της x_s στο επόμενο ταμπλό έχει **ακριβώς τα ίδια μηδενικά** με τη στήλη της x_r στο τρέχον ταμπλό.

$\boxed{Q}$ Που βρίσκεται ανά πάσα στιγμή ο $-(T([1:m], \beta))^{-1}$;

$\boxed{A}$ Στις τρέχουσες *στήλες των slack variables* (δε χρειάζονται σκιώδεις μεταβλητές του προηγούμενου παραδείγματος).

Ψευδοκώδικας για Integer Pivoting

PRE: $\beta \subset [m+n] =$ η τρέχουσα (διατεταγμένη) βάση

$\mathbf{0} = (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a} - A[*,\beta]^{-1}A\mathbf{x} - A[*,\beta]^{-1}\mathbf{s} = \mathbf{b} + B\mathbf{x} - A[*,\beta]^{-1}\mathbf{s}$

$T = [\ \delta\mathbf{b} \mid \delta B\ \delta D\ ;\ \delta\zeta \mid \delta\underline{\mathbf{c}}'\ ]_{(m+1)\times(n+m+1)}$ /* $d>0$ */

$T[*,\beta] = \delta[-eye(m)\ ;\ \mathbf{0}']$

$D = -A[*,\beta]^{-1} = \frac{T(1:m, m+1:m+n)}{\delta}$ /* στο τέλος στήλες των slacks */

Ψευδοκώδικας για Integer Pivoting

PRE: $\beta \subset [m+n] =$ η τρέχουσα (διατεταγμένη) βάση

$$\mathbf{0} = (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a} - A[*,\beta]^{-1}A\mathbf{x} - A[*,\beta]^{-1}\mathbf{s} = \mathbf{b} + B\mathbf{x} - A[*,\beta]^{-1}\mathbf{s}$$

$T = [\ \delta\mathbf{b} \mid \delta B\ \delta D\ ;\ \delta\zeta \mid \delta\underline{\mathbf{c}}'\ ]_{(m+1)\times(n+m+1)}$ /* $d>0$ */

$T[*,\beta] = \delta[-eye(m)\ ;\ \mathbf{0}']$

$D = -A[*,\beta]^{-1} = \frac{T(1:m, m+1:m+n)}{\delta}$ /* στο τέλος στήλες των slacks */

---

1. $PPE = \begin{cases} -1, & \text{αν 1ο pivot} \\ \text{τιμή προηγούμενου pivot}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Ψευδοκώδικας για Integer Pivoting

PRE: $\beta \subset [m+n] =$ η τρέχουσα (διατεταγμένη) βάση

$$\mathbf{0} = (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a} - A[*,\beta]^{-1}A\mathbf{x} - A[*,\beta]^{-1}\mathbf{s} = \mathbf{b} + B\mathbf{x} - A[*,\beta]^{-1}\mathbf{s}$$

$$T = [\ \delta\mathbf{b} \mid \delta B\ \delta D\ ;\ \delta\zeta \mid \delta\underline{\mathbf{c}}'\ ]_{(m+1)\times(n+m+1)} \quad /*\ d>0\ */$$

$$T[*,\beta] = \delta[-eye(m)\ ;\ \mathbf{0}']$$

$$D = -A[*,\beta]^{-1} = \frac{T(1:m,m+1:m+n)}{\delta} \quad /*\ \text{στο τέλος στήλες των slacks}\ */$$

---

1. $PPE = \begin{cases} -1, & \text{αν 1ο pivot} \\ \text{τιμή προηγούμενου pivot}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

   /∗ Επιλογή Pivot Element (smallest-index tie-breaking) ∗/

2. $s =$ Μεταβλητή με αρνητικό κόστος και μικρότερο δείκτη.

3. $r = LMR\left\{\frac{[-\delta b_k\ ,\ \delta D(k,1)\ ,\ \ldots\ ,\ \delta D(k,m)]}{T(k,s)} : k \in [m]\ \wedge\ T(k,s) < 0\right\}$

Ψευδοκώδικας για Integer Pivoting

PRE: $\beta \subset [m+n] =$ η τρέχουσα (διατεταγμένη) βάση

$\mathbf{0} = (A[*,\beta])^{-1}\mathbf{a} - A[*,\beta]^{-1}A\mathbf{x} - A[*,\beta]^{-1}\mathbf{s} = \mathbf{b} + B\mathbf{x} - A[*,\beta]^{-1}\mathbf{s}$

$T = [\ \delta\mathbf{b}\ |\ \delta B\ \delta D\ ;\ \delta\zeta\ |\ \delta\underline{\mathbf{c}}'\ ]_{(m+1)\times(n+m+1)}$ /* $d > 0$ */

$T[*,\beta] = \delta[-eye(m)\ ;\ \mathbf{0}']$

$D = -A[*,\beta]^{-1} = \frac{T(1:m,m+1:m+n)}{\delta}$ /* στο τέλος στήλες των slacks */

---

1. $PPE = \begin{cases} -1, & \text{αν 1ο pivot} \\ \text{τιμή προηγούμενου pivot}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

/* Επιλογή Pivot Element (smallest-index tie-breaking) */

2. $s =$ Μεταβλητή με αρνητικό κόστος και μικρότερο δείκτη.
3. $r = LMR\left\{\frac{[-\delta b_k\ ,\ \delta D(k,1)\ ,\ \ldots\ ,\ \delta D(k,m)]}{T(k,s)} : k \in [m]\ \wedge\ T(k,s) < 0\right\}$

/* Εκτέλεση του $Pivot(\beta, r, s)$ */

4. **for all** $k \in [m+1] \setminus \{r\}$ **do** $\left\{\ T(k,:) = \frac{-T(r,s)\cdot T(k,:) + T(k,s)\cdot T(r,:)}{|PPE|}\ \right\}$
5. $PPE = T(r,s)$

Διατήρηση Ακεραιότητας: Περίπτωση (I)

PRE: Τα ταμπλό T, T' έχει ακέραιες τιμές.

$$\boxed{T \longrightarrow T' = IntPivot(T, r, s) \longrightarrow T'' = IntPivot(T', r, h)}$$

Διατήρηση Ακεραιότητας: Περίπτωση (Ι)

PRE: Τα ταμπλό T, T' έχει ακέραιες τιμές.

$$\boxed{T \longrightarrow T' = IntPivot(T, r, s) \longrightarrow T'' = IntPivot(T', r, h)}$$

GOAL: Θδο το ταμπλό T'' έχει ακέραιες τιμές.

Διατήρηση Ακεραιότητας: Περίπτωση (Ι)

PRE: Τα ταμπλό T, T' έχει ακέραιες τιμές.

$$\boxed{T \;\longrightarrow\; T' = IntPivot(T, r, s) \;\longrightarrow\; T'' = IntPivot(T', r, h)}$$

GOAL: Θδο το ταμπλό T'' έχει ακέραιες τιμές.

- Χβτγ: $PE = -1$.
- $T''(r,:) = T'(r,:)$ /* Δεν επηρεάζεται η ακεραιότητα της γραμμής pivot. */

Διατήρηση Ακεραιότητας: Περίπτωση (I)

PRE: Τα ταμπλό T, T' έχει ακέραιες τιμές.

$$\boxed{T \quad \longrightarrow \quad T' = IntPivot(T, r, s) \quad \longrightarrow \quad T'' = IntPivot(T', r, h)}$$

GOAL: Θδο το ταμπλό T'' έχει ακέραιες τιμές.

- Χβτγ: $PE = -1$.
- $T''(r,:) = T'(r,:)$ /* Δεν επηρεάζεται η ακεραιότητα της γραμμής pivot. */
- $\forall k \in [m] \setminus \{r\}$,

$$\begin{aligned}
T'[k,*] &= \tfrac{-T(r,s)\cdot T[k,*] + T(k,s)\cdot T[r,*]}{|PE|} = T(r,s)\cdot T[k,*] - T(k,s)\cdot T[r,*] \\
PE' &= -T'(r,s) = -T(r,s) \qquad \text{/* pivot row unchanged. */} \\
-T(r,s)\cdot T''[k,*] &= -T'(r,h)\cdot T'[k,*] + T'(k,h)\cdot T'[r,*] \\
&= -T(r,h)\cdot T'[k,*] + T'(k,h)\cdot T[r,*] \qquad \text{/* pivot row unchanged.} \\
&= -T(r,h)\cdot(-T(r,s)\cdot T[k,*] + T(k,s)\cdot T[r,*]) \\
&\quad +[-T(r,s)\cdot T(k,h) + T(k,s)\cdot T(r,h)]\cdot T[r,*] \\
&= T(r,h)\cdot {\color{red}T(r,s)}\cdot T[k,*] - {\color{blue}T(r,h)\cdot T(k,s)\cdot T[r,*]} \\
&\quad -{\color{red}T(r,s)}\cdot T(k,h)\cdot T[r,*] + {\color{blue}T(k,s)\cdot T(r,h)\cdot T[r,*]} \\
&= {\color{green}-T(r,s)}\cdot(-T(r,h)\cdot T[k,*] + T(k,h)\cdot T[r,*])
\end{aligned}$$

Διατήρηση Ακεραιότητας: Περίπτωση (ΙΙ)

- PRE: Το ταμπλό T έχει ακέραιες τιμές.

$$\boxed{r \neq g, \;\; T \longrightarrow T' = IntPivot(T, r, s) \longrightarrow T'' = IntPivot(T', g, h)}$$

Διατήρηση Ακεραιότητας: Περίπτωση (II)

- PRE: Το ταμπλό T έχει ακέραιες τιμές.

$$\boxed{r \neq g,\ \ T \longrightarrow T' = IntPivot(T, r, s) \longrightarrow T'' = IntPivot(T', g, h)}$$

- GOAL: Θδο το ταμπλό T'' έχει ακέραιες τιμές.

Διατήρηση Ακεραιότητας: Περίπτωση (II)

- PRE: Το ταμπλό T έχει ακέραιες τιμές.

  $\boxed{r \neq g, \;\; T \longrightarrow T' = IntPivot(T, r, s) \longrightarrow T'' = IntPivot(T', g, h)}$

- GOAL: Θδο το ταμπλό T'' έχει ακέραιες τιμές.

- Χβτγ: $PE = -1$.

Διατήρηση Ακεραιότητας: Περίπτωση (ΙΙ)

- PRE: Το ταμπλό T έχει ακέραιες τιμές.

$$\boxed{r \neq g, \ \ T \longrightarrow T' = IntPivot(T, r, s) \longrightarrow T'' = IntPivot(T', g, h)}$$

- GOAL: Θδο το ταμπλό T'' έχει ακέραιες τιμές.
- Χβτγ: $PE = -1$.
- $T''[g, *] = T'[g, *]$ /* Δεν επηρεάζεται η ακεραιότητα της γραμμής pivot. */

Διατήρηση Ακεραιότητας: Περίπτωση (ΙΙ)

- PRE: Το ταμπλό T έχει ακέραιες τιμές.

$$\boxed{r \neq g, \;\; T \longrightarrow T' = IntPivot(T, r, s) \longrightarrow T'' = IntPivot(T', g, h)}$$

- GOAL: Θδο το ταμπλό T'' έχει ακέραιες τιμές.

- Χβτγ: $PE = -1$.

- $T''[g, *] = T'[g, *]$ /* Δεν επηρεάζεται η ακεραιότητα της γραμμής pivot. */

$$\begin{aligned}
-T(r,s) \cdot T''[r,*] \\
&= -T'(g,h) \cdot T'[r,*] + T'(r,h) \cdot T'[g,*] \\
&= (T(r,s) \cdot T(g,h) - T(g,s) \cdot T(r,h)) \cdot T[r,*] \\
&\quad -T(r,h) \cdot (T(r,s) \cdot T[g,*] - T(g,s) \cdot T[r,*]) \\
&= T(r,s) \cdot T(g,h) \cdot T[r,*] - T(g,s) \cdot T(r,h) \cdot T[r,*] \\
&\quad -T(r,h) \cdot T(r,s) \cdot T[g,*] + T(r,h) \cdot T(g,s) \cdot T[r,*] \\
&= -T(r,s) \cdot (-T(g,h) \cdot T[r,*] + T(r,h) \cdot T[g,*])
\end{aligned}$$

Διατήρηση Ακεραιότητας: Περίπτωση (II)

- $\forall k \notin \{r, g\}$,

$$-T(r,s)\cdot T''[k,*] = -T'(g,h)\cdot T'[k,*] + T'(k,h)\cdot T'[g,*]$$

$$\begin{aligned}
= \quad & -(-T(r,s)\cdot T(g,h) + T(g,s)\cdot T(r,h)) \\
& \cdot(-T(r,s)\cdot T[k,*] + T(k,s)\cdot T[r,*]) \\
& +(-T(r,s)\cdot T(k,h) + T(k,s)\cdot T(r,h)) \\
& \cdot(-T(r,s)\cdot T[g,*] + T(g,s)\cdot T[r,*])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & -T(r,s)\cdot T(g,h)\cdot T(r,s)\cdot T[k,*] + T(r,s)\cdot T(g,h)\cdot T(k,s)\cdot T[r,*] \\
& +T(g,s)\cdot T(r,h)\cdot T(r,s)\cdot T[k,*] - T(g,s)\cdot T(r,h)\cdot T(k,s)\cdot T[r,*] \\
& +T(r,s)\cdot T(k,h)\cdot T(r,s)\cdot T[g,*] - T(r,s)\cdot T(k,h)\cdot T(g,s)\cdot T[r,*] \\
& -T(k,s)\cdot T(r,h)\cdot T(r,s)\cdot T[g,*] + T(k,s)\cdot T(r,h)\cdot T(g,s)\cdot T[r,*]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & -T(r,s)\cdot(T(g,h)\cdot T(r,s)\cdot T[k,*] - T(g,h)\cdot T(k,s)\cdot T[r,*] \\
& -T(g,s)\cdot T(r,h)\cdot T[k,*] - T(k,h)\cdot T(r,s)\cdot T[g,*] \\
& +T(k,h)\cdot T(g,s)\cdot T[r,*] + T(k,s)\cdot T(r,h)\cdot T[g,*])
\end{aligned}$$

Παράδειγμα για Integer Pivoting

```
%% SYSTEM:        y = A*x -I*s - a = 0
%% TABLEAU:    [  <----- A -----> <-- -I -->   -a  ; p' 0' 0 ]
%%                X1    X2    X3    X4    X5     1
>> T =
```

X1	X2	X3	X4	X5	1
-3	-2	-3	-1	0	1
-3	-6	-1	0	-1	1
-1	-2	-1	0	0	0

```
%% PIVOT SELECTION:
%% -- Pivot-in  (col):  'X1' (col 1)
%% -- Pivot-out (row): LexMinRatio{[-1 -1 0 ; -1 0 -1]/(-3)} = 'X5'(row 2)

%% EXECUTING INTEGER PIVOT AT (2,1):
%% -- FORALL k<>2, pivot-row 2, multiplied by T(k,1) and added to non-
pivot row k, divided by Previous Pivot.

>> PrevPivot = -1;
>> CurPivot  = -3;

>> Tnext(1,:)  = ( - T(r,s)*T(1,:) + T(1,s)*T(r,:) ) / abs(PreviousPivot)
>> Tnext(3,:)  = ( - T(r,s)*T(3,:) + T(3,s)*T(r,:) ) / abs(PreviousPivot)
%%                X1    X2    X3    X4    X5     1
>> T = Tnext
```

X1	X2	X3	X4	X5	1
0	12	-6	-3	3	0
-3	-6	-1	0	-1	1
0	0	-2	0	1	-1

Παράδειγμα για Integer Pivoting

```
%%                    x1    x2    x3    x4    x5    1
                       0    12    -6    -3     3    0
                      -3    -6    -1     0    -1    1
                       0     0    -2     0     1    1

%% PIVOT SELECTION:
%% -- Pivot-in (col) : 'X3' (col 3)
%% -- Pivot-out (row): LexMinRatio{[0 -3 3 ; -1 0 -1]/(-6)} = 'X4' (row 1)

%% EXECUTING INTEGER PIVOT AT (1,3).
%% FORALL k<>1, Pivot-row 1, multiplied by T(k,3) and added to non-pivot
row k, divided by -PrevPivot.

>> PreviousPivot = -3;
>> CurrentPivot  = -6;

>> Tnext(2,:)  = ( - T(r,s)*T(2,:) + T(2,s)*T(r,:) ) / abs(PreviousPivot)
>> Tnext(3,:)  = ( - T(r,s)*T(3,:) + T(3,s)*T(r,:) ) / abs(PreviousPivot)

%%                    x1    x2    x3    x4    x5    1
>> T = Tnext =         0    12    -6    -3     3    0
                      -6   -16     0     1    -3    2
                       0    -8     0     2     0   -2
```

Παράδειγμα για Integer Pivoting

%%

x1	x2	x3	x4	x5	1
0	12	-6	-3	3	0
-6	-16	0	1	-3	2
0	-8	0	2	0	2

```
%% PIVOT SELECTION:
%% -- Pivot-in (col) : 'X2' (col 2)
%% -- Pivot-out (row): LexMinRatio{ [-2 1 -3] / (-16) } = 'X1' (row 2)

%% EXECUTING INTEGER PIVOT AT (2,2).

%% -- FORALL k<>2, Pivot-row 2, multiplied by T(k,2) and added to non-
pivot row k. Then row k is divided by -PrevPivot.

>> PreviousPivot = -6;
>> CurrentPivot  = -16;

>> Tnext(2,:)  = ( - T(r,s)*T(2,:) + T(2,s)*T(r,:) ) / abs(PreviousPivot)
>> Tnext(3,:)  = ( - T(r,s)*T(3,:) + T(3,s)*T(r,:) ) / abs(PreviousPivot)

%%
>> T = Tnext =
```

x1	x2	x3	x4	x5	1
-12	0	-16	-6	2	4
-6	-16	0	1	-3	2
8	0	0	4	4	-8

Παράδειγμα για Integer Pivoting: Σχόλια

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το κάτω-δεξιά στοιχείο του ταμπλό ΔΕΝ υπολογίζει πλέον το κόστος $\zeta(k)$ της τρέχουσας λύσης που αντιστοιχεί στη βάση $\beta(k)$, αλλά ένα ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ $\delta \cdot \zeta(k)$.

Παράδειγμα για Integer Pivoting: Σχόλια

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το κάτω-δεξιά στοιχείο του ταμπλό ΔΕΝ υπολογίζει πλέον το κόστος $\zeta(k)$ της τρέχουσας λύσης που αντιστοιχεί στη βάση $\beta(k)$, αλλά ένα ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ $\delta \cdot \zeta(k)$.

$\boxed{\text{Q}}$ Που μπορούμε να βρούμε την ακριβή τιμή του δ στο αντίστοιχο ταμπλό $T(k)$;

Παράδειγμα για Integer Pivoting: Σχόλια

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το κάτω-δεξιά στοιχείο του ταμπλό ΔΕΝ υπολογίζει πλέον το κόστος $\zeta(k)$ της τρέχουσας λύσης που αντιστοιχεί στη βάση $\beta(k)$, αλλά ένα ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ $\delta \cdot \zeta(k)$.

Q Που μπορούμε να βρούμε την ακριβή τιμή του δ στο αντίστοιχο ταμπλό $T(k)$;

A Είναι ο πολλαπλασιαστής του μοναδιαίου πίνακα που δίνει τον $-eye(m)$ ως πίνακα συντελεστών της τρέχουσας βάσης.

Παράδειγμα για Integer Pivoting: Σχόλια

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το κάτω-δεξιά στοιχείο του ταμπλό ΔΕΝ υπολογίζει πλέον το κόστος $\zeta(k)$ της τρέχουσας λύσης που αντιστοιχεί στη βάση $\beta(k)$, αλλά ένα ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ $\delta \cdot \zeta(k)$.

Q Που μπορούμε να βρούμε την ακριβή τιμή του δ στο αντίστοιχο ταμπλό $T(k)$;

A Είναι ο πολλαπλασιαστής του μοναδιαίου πίνακα που δίνει τον $-eye(m)$ ως πίνακα συντελεστών της τρέχουσας βάσης.

- $x_3 = 4/16 = 0.25, x_2 = 2/16 = 1/8, x_1 = 0$. Κόστος βέλτιστης λύσης: $-1/2$.

Αλγόριθμοι Εσωτερικών Σημείων

...ελλειψοειδές, αναλυτικό κέντρο, δυναμικό...

Πολυπλοκότητα Αλγορίθμων

- Έστω πρόβλημα Π με *σύνολο στιγμιοτύπων* μεγέθους n $I_n(\Pi)$ και *σύνολο λύσεων* $S(\Pi, x)$ για $x \in I_n(\Pi)$.
- Η πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου A για την επίλυση του Π υπολογίζεται από τους πόρους που χρειάζεται για την ολοκλήρωση ενός υπολογισμού.
- Κρίσιμες παράμετροι για αξιολόγηση του A:
  - **Μέγεθος της εισόδου:** Πχ, πλήθος αριθμών κινητής υποδιαστολής πεπερασμένης ακρίβειας, ή μήκος δυαδικής συμβολοσειράς για αναπαράσταση.
  - **Βασικές λειτουργίες:** Θεωρούνται ως μοναδιαίου κόστους. Πχ, $\{ + , - , / , \times , \leq \}$.
  - **Μοντέλο Κόστους:** $C_A(x) =$ κόστος επίλυσης του $x \in I_n(\Pi)$ από τον A.
  - **Πολυπλοκότητα Χειρότερης / Μέσης Περίπτωσης:**
    $\boxed{T_A^w(n) = \sup_{x \in I_n(\Pi)} \{C_A(x)\}}$, $\boxed{T_A^a(n) = \mathbb{E}_{x \in_{\mathbf{uar}} I_n(\Pi)} [C_A(x)]}$

Πολυπλοκότητα του Simplex

- Η βασική λειτουργία (pivot) κοστίζει πολυωνυμικό χρόνο.
- Το απαιτούμενο πλήθος pivots είναι:
  - **Στην πράξη:** Ένα μικρό πολλαπλάσιο του m (συνήθως μεταξύ $2m$ και $3m$).
  - **Στη θεωρία:** Ενδέχεται να απαιτούνται και εκθετικό πλήθος από pivots. Πχ, τα παραδείγματα ΓΠ των Klee-Minty απαιτούν $2^n - 1$ pivots όταν χρησιμοποιείται η **άπληστη εκδοχή** του pricing rule:

$$\boxed{\begin{array}{lrl} \text{max.} & \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j & \\ \text{s.t.} & 2 \cdot \sum_{k=1}^{j-1} 10^{j-k} x_k + x_j & \leq 100^{j-1},\ j \in [n] \\ & x_j & \geq 0,\ j \in [n] \end{array}}$$

Για $n = 50$, ένας υπολογιστής που εκτελεί 10^6 pivots / sec θα χρειαζόταν $\frac{2^{50}-1 \approx 10^{15}}{3.1536 \cdot 10^7 \cdot 10^6} > 31.7$ χρόνια αδιάλειπτης λειτουργίας για να βρει τη βέλτιστη λύση!!!

Τι είναι τελικά τα ΓΠ;

- Ειδική περίπτωση της **συνδυαστικής βελτιστοποίησης**: Επιλογή κορυφής πολυέδρου με βέλτιστη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης. Πχ, για προβλήματα δικτυακών ροών οι βασικές λύσεις αντιστοιχούν σε γεννητικά δένδρα του υποκείμενου γραφήματος.

Τι είναι τελικά τα ΓΠ;

- Ειδική περίπτωση της **συνδυαστικής βελτιστοποίησης**: Επιλογή κορυφής πολυέδρου με βέλτιστη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης. Πχ, για προβλήματα δικτυακών ροών οι βασικές λύσεις αντιστοιχούν σε γεννητικά δένδρα του υποκείμενου γραφήματος.
  - ☹ Υπάρχουν παραδείγματα ΓΠ με $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ κορυφές.

Τι είναι τελικά τα ΓΠ;

- Ειδική περίπτωση της **συνδυαστικής βελτιστοποίησης**: Επιλογή κορυφής πολυέδρου με βέλτιστη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης. Πχ, για προβλήματα δικτυακών ροών οι βασικές λύσεις αντιστοιχούν σε γεννητικά δένδρα του υποκείμενου γραφήματος.
  - Υπάρχουν παραδείγματα ΓΠ με $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ κορυφές.
  - Μέθοδοι απαρίθμησης κορυφών μη αποδοτικές, ακόμη και για μικρά στιγμιότυπα.

Τι είναι τελικά τα ΓΠ;

- Ειδική περίπτωση της **συνδυαστικής βελτιστοποίησης**: Επιλογή κορυφής πολυέδρου με βέλτιστη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης. Πχ, για προβλήματα δικτυακών ροών οι βασικές λύσεις αντιστοιχούν σε γεννητικά δένδρα του υποκείμενου γραφήματος.
  - Υπάρχουν παραδείγματα ΓΠ με $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ κορυφές.
  - Μέθοδοι απαρίθμησης κορυφών μη αποδοτικές, ακόμη και για μικρά στιγμιότυπα.
  - Simplex: Συνδυαστικός αλγόριθμος που ακολουθεί ένα μονοπάτι κορυφών, στο περιθώριο του χώρου λύσεων.

Τι είναι τελικά τα ΓΠ;

- Ειδική περίπτωση της **συνδυαστικής βελτιστοποίησης**: Επιλογή κορυφής πολυέδρου με βέλτιστη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης. Πχ, για προβλήματα δικτυακών ροών οι βασικές λύσεις αντιστοιχούν σε γεννητικά δένδρα του υποκείμενου γραφήματος.
  - Υπάρχουν παραδείγματα ΓΠ με $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ κορυφές.
  - Μέθοδοι απαρίθμησης κορυφών μη αποδοτικές, ακόμη και για μικρά στιγμιότυπα.
  - Simplex: Συνδυαστικός αλγόριθμος που ακολουθεί ένα μονοπάτι κορυφών, στο περιθώριο του χώρου λύσεων.
  - Klee-Minty παραδείγματα ΓΠ: Αναγκάζουν τον Simplex να εκτελέσει εκθετικό πλήθος από pivots.

Τι είναι τελικά τα ΓΠ;

- Ειδική περίπτωση της **συνδυαστικής βελτιστοποίησης**: Επιλογή κορυφής πολυέδρου με βέλτιστη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης. Πχ, για προβλήματα δικτυακών ροών οι βασικές λύσεις αντιστοιχούν σε γεννητικά δένδρα του υποκείμενου γραφήματος.
  - ☹ Υπάρχουν παραδείγματα ΓΠ με $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ κορυφές.
  - ☹ Μέθοδοι απαρίθμησης κορυφών μη αποδοτικές, ακόμη και για μικρά στιγμιότυπα.
  - ☺ Simplex: Συνδυαστικός αλγόριθμος που ακολουθεί ένα μονοπάτι κορυφών, στο περιθώριο του χώρου λύσεων.
  - ☹ Klee-Minty παραδείγματα ΓΠ: Αναγκάζουν τον Simplex να εκτελέσει εκθετικό πλήθος από pivots.
- Αλλά και ειδική περίπτωση της **βελτιστοποίησης συνεχών συναρτήσεων** σε κυρτούς χώρους λύσεων.

Αξιοποίηση Τεχνικών Βελτιστοποίησης

- Έχοντας ένα ΓΠ (*LP*), μετασχημάτισέ το σε (κυρτό) μη γραμμικό (*CNLP*).
- Εφάρμοσε πολυωνυμικής πολυπλοκότητας μεθόδους για την επίλυση του (μη γραμμικού πλέον) προβλήματος (*CNLP*).
- Προσέγγισε τη βέλτιστη λύση του (*LP*) με μεγάλη ακρίβεια.
- Παραδείγματα μεθόδων συνεχούς βελτιστοποίησης σε Κυρτούς χώρους λύσεων:
  - Ελλειψοειδές (Ellipsoid Method)
  - Κεντρικό Μονοπάτι (Central Path)
  - Λογαριθμικού Ορίου (Log Barrier)
  - Μέθοδος Newton

Μέθοδοι Εσωτερικών Σημείων

- Οι **Μέθοδοι Εσωτερικών Σημείων** (ΑΕΣ) είναι μια συγκεκριμένη ομάδα αλγορίθμων για *βελτιστοποίηση μη γραμμικών συναρτήσεων σε συνεχείς και κυρτούς χώρους λύσεων*. Η φιλοσοφία τους είναι η εξής:
  - Είτε επιλύονται διαδοχικά υποπροβλήματα (μικρότερου μεγέθους), εξασφαλίζοντας σαφή **μείωση του χώρου λύσεων** (όπου πάντα περιλαμβάνεται και μια βέλτιστη λύση του αρχικού).
  - Ή ακολουθούν (συνεχή) μονοπάτια εντός του χώρου λύσεων, έχοντας πάντα περιορισμούς για την κατεύθυνση και το εύρος των μετακινήσεων πάνω σε αυτά.
- Οι ΑΕΣ δίνουν τελικά μια πολύ καλή **προσέγγιση** της βέλτιστης λύσης. Η εύρεση μιας βέλτιστης λύσης εξαρτάται από τις συνθήκες αρχικοποίησης και τερματισμού, αλλά δεν είναι πάντοτε εξασφαλισμένη.

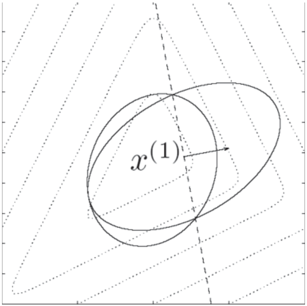
- Το 1969 στην Ρωσία (Σοβιετική Ένωση τότε) ο Leonid Khachiyan πρότεινε την εξής (ήδη γνωστή) ιδέα για επίλυση του ΓΠ $\min .\{ \ \mathbf{c}'\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P = \{\mathbf{z} : A\mathbf{z} \geq \mathbf{a}\} \ \}$:
  - Να εγκλειστεί ο χώρος εφικτών λύσεων P από μια έλλειψη. Να προσδιοριστεί επίσης μια (μικρότερη) έλλειψη που περιλαμβάνει (και) τη βέλτιστη λύση στο P.
  - Η επιλογή της έλλειψης δεν είναι τυχαία (μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα μητρώο E κι ένα σταθερό διάνυσμα $\mathbf{e}$).
- Πρόκειται για τον πρώτο αλγόριθμο επίλυσης ΓΠ, με **αποδεδειγμένα** πολυωνυμική χρονική πολυπλοκότητα.

Η μέθοδος του Ελλειψοειδούς
Βασικά χαρακτηριστικά του αλγορίθμου

- Κάθε βήμα εφαρμόζει ένα cutting plane, ή ένα subgradient.
- Απαιτείται $O(n^2)$ χώρος αποθήκευσης.
- Απαιτείται $O(n^2)$ υπολογιστική ισχύς για κάθε βήμα (μέσω αναλυτικού τύπου).
- Απαιτεί συνολικό υπολογιστικό κόστος $O(n^7)$, είναι **πολύ αργή** στην πράξη, αλλά και **πολύ σταθερή** μέθοδος!
- Fun Fact: Η μέθοδος subgradient μπορεί να λύσει οποιοδήποτε ΓΠ, και ο αλγόριθμος περιγράφεται σε περίπου έξι γραμμές και απλός.

Η μέθοδος του Ελλειψοειδούς

Περιγραφή αλγορίθμου



- Δεδομένου του κέντρου της έλλειψης, διαίρεσέ την σε δυο υποσύνολα και διατήρησε ΜΟΝΟ το υποσύνολο που αποδεδειγμενα περιλαμβάνει τη βέλτιστη λύση.
- Δημιούργησε ένα *νέο* ελλειψοειδές που *να* καλύπτει το υποσύνολο που κρατήσαμε, έχοντας (η έλλειψη) τον μικρότερο δυνατό όγκο.

- Βρες το κέντρο του καινούριου ελλειψοειδούς.
- Επανάλαβε, μέχρις ότου η διαφορά του κόστους της *νέας* έλλειψης από την παλιά *να* είναι μικρότερη ενός ορίου τερματισμού (threshold).

Η μέθοδος του Ελλειψοειδούς

Επιλογή Νέου Ελλειψοειδούς

- New Center & New Ellipsoid

$$\tau = \frac{1}{m+1}, \quad \delta = \frac{m^2}{m^2-1}, \quad \sigma = 2\tau.$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k - \frac{\tau}{(\mathbf{a}_j^T \mathbf{B}_k \mathbf{a}_j)^{1/2}} \mathbf{B}_k \mathbf{a}_j$$

$$\mathbf{B}_{k+1} = \delta \left(\mathbf{B}_k - \sigma \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^T \mathbf{B}_k}{\mathbf{a}_j^T \mathbf{B}_k \mathbf{a}_j} \right)$$

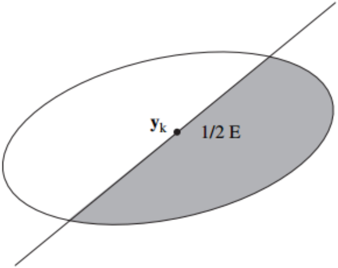
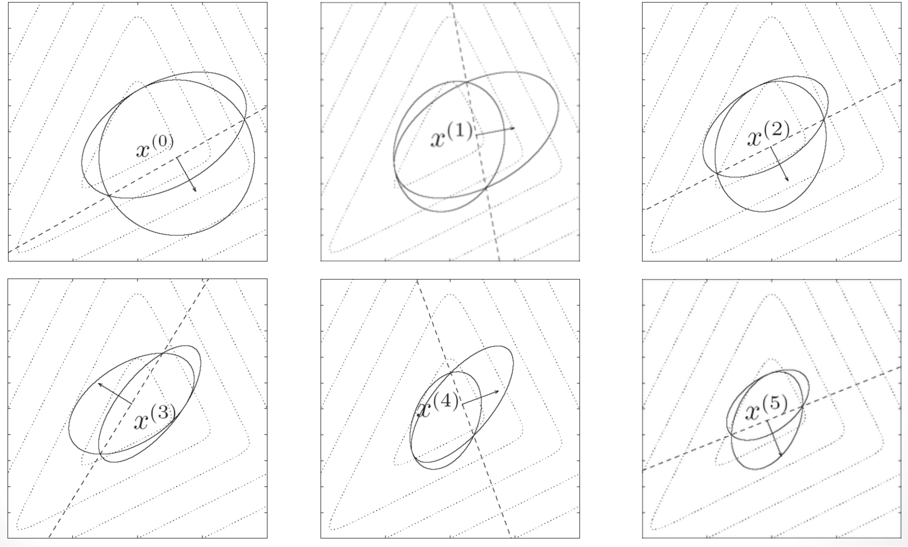


Fig. 5.1 A half-ellipsoid

The ellipsoid $E_{k+1} = \mathrm{ell}(\mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{B}_{k+1}^{-1})$

Η μέθοδος του Ελλειψοειδούς

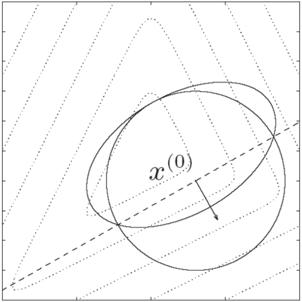
Παράδειγμα Επαναλήψεων



Η μέθοδος του Ελλειψοειδούς

Σχόλια...

- Η *νέα* (μικρότερη) έλλειψη συνήθως δεν έχει τον μισό όγκο από την προηγούμενη.
- Με αυτή τη μέθοδο αναγκαζόμαστε να συμπεριλάβουμε και σημεία του χώρου λύσεων τα οποία είχαμε ήδη απορρίψει!!!



- Σε κάθε επανάληψη ο όγκος της έλλειψης μειώνεται λιγότερο από τον όγκο μιας σφαίρας με ακτίνα r, σε $O\left(m^2 \log(R/r)\right)$ επαναλήψεις.
- Γενικά μια επανάληψη απαιτεί $O\left(m^2\right)$ πράξεις, άρα ολόκληρη η διαδικασία απαιτεί $O\left(m^4 \log(R/r)\right)$ πράξεις.

Αναλυτικό Κέντρο (I)

- Έστω σύνολο $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \ \forall i \in [m]\}$, για συνεχείς συναρτήσεις $g_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.
- $int(S) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) > 0, \ \forall i \in [m]\}$.
- Συνάρτηση Δυναμικού (potential function):

$$\psi(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \log(g_i(\mathbf{x}))$$

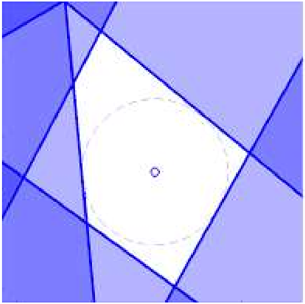
- Το **αναλυτικό κέντρο** (analytic center) του S είναι ένα διάνυσμα που ελαχιστοποιεί το δυναμικό:

$$\mathbf{ac}(S) \in \arg\min\{\psi(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in int(S)\}$$

Αναλυτικό Κέντρο (ΙΙ)

- Έστω **πολύτοπο** $P = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{c} - \mathbf{y}'A \geq \mathbf{0}'\}$.
- Δυναμικό:

$$\psi_P(\mathbf{y}) = -\sum_{j=1}^{n} \log(c_j = \mathbf{y}A(*,j)) = -\sum_{j=1}^{n} s_j$$

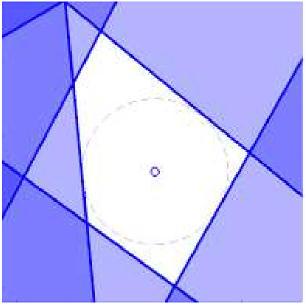


$\therefore$ Το δυναμικό ως προς το πολύτοπο ισούται με το αρνητικό άθροισμα λογαρίθμων των **αδιάφορων** μεταβλητών.

Αναλυτικό Κέντρο (III)

- Μηδενίζουμε τις πρώτες παραγώγους:

$$\forall i \in [m], \; \sum_{j=1}^{n} \frac{A(i,j)}{c_j - \mathbf{y}' A(*,j)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A(i,j)}{s_j} = 0$$



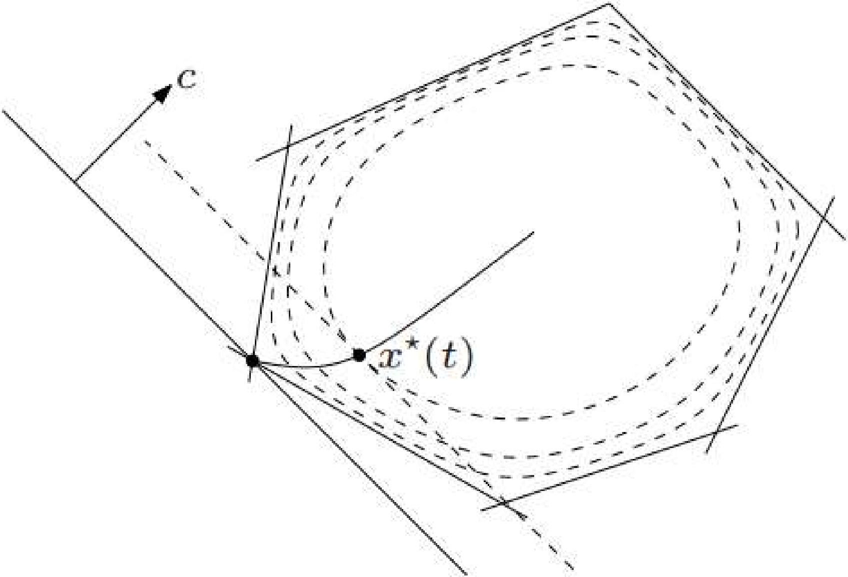
- Ορίζουμε $x_j = \frac{1}{s_j}$. Τότε:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{s} \equiv (x_1 s_1; x_2 s_2; \cdots; x_n s_n)$$

- Το αναλυτικό κέντρο ορίζεται με τις παρακάτω συνθήκες:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \circ \mathbf{s} &= \mathbf{1} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ A'\mathbf{y} + \mathbf{s} &= \mathbf{c} \end{aligned}$$

Αναλυτικό Κέντρο (IV)



Αλγόριθμος Κεντρικού Μονοπατιού (I)

$$(LP)\quad \boxed{\begin{array}{rl} \min. & \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \text{s.t.} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}} \quad (BP)\quad \boxed{\begin{array}{rl} \min. & \mathbf{c}'\mathbf{x} - \mu \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) \\ \text{s.t.} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} > \mathbf{0} \end{array}}$$

- $\mu = 0 \Rightarrow$ αρχικό ΓΠ.
- $\mu \to \infty \Rightarrow$ Αναλυτικό κέντρο του χώρου λύσεων.
- $\mu \in (0, \infty) \Rightarrow$ **Πρωτεύον Κεντρικό Μονοπάτι** $path(\mu)$, που ξεκινά από το αναλυτικό κέντρο και καταλήγει στη βέλτιστη λύση του ΓΠ.

Αλγόριθμος Κεντρικού Μονοπατιού (II)

Αλγόριθμος Κεντρικού Μονοπατιού (III)

Αλγόριθμος Κεντρικού Μονοπατιού (IV)

Αλγόριθμος Κεντρικού Μονοπατιού (V)

Δυϊκότητα ΓΠ

...ασθενής/ισχυρή δυϊκότητα...
...συμπληρωματική χαλαρότητα, Farkas...

Δυϊκότητα Γ.Π. σε Μορφή ($LP_=$) (I)

Παράδειγμα:

$$(P1)\quad \boxed{\begin{array}{rrcl} \textbf{minimize} & x_1 + 2x_2 - 7x_3 & & \\ & & & \\ \text{s.t.}: & 3x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 6 \\ & 2x_1 + 0x_2 - x_3 & = & 12 \\ & & & \\ & \forall j \in [3],\ \ x_j \geq 0 & & \end{array}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Δυϊκότητα Γ.Π. σε Μορφή ($LP_=$) (I)

Παράδειγμα:

$$
(P1) \quad \boxed{\begin{array}{lrcr}
\textbf{minimize} & x_1 + 2x_2 - 7x_3 & & \\
& & & \\
\text{s.t. :} & 3x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 6 \\
& 2x_1 + 0x_2 - x_3 & = & 12 \\
& & & \\
& \forall j \in [3],\ x_j \geq 0 & &
\end{array}}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}
$$

Στόχος: Εύρεση του καλύτερου δυνατού κάτω φράγματος ως προς το κόστος της βέλτιστης λύσης, **χωρίς** να χρειαστεί να λύσουμε το γραμμικό πρόγραμμα!!!

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LP$_=$) (I)

ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: Αναζητάμε διάνυσμα $\mathbf{y} : \mathbf{a}'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}'\mathbf{x}$, για *οποιαδήποτε εφικτή λύση* $\mathbf{x}$ για το $(P1)$.

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LP$_=$) (I)

ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: Αναζητάμε διάνυσμα $\mathbf{y} : \mathbf{a}'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}'\mathbf{x}$, για *οποιαδήποτε εφικτή λύση* $\mathbf{x}$ για το $(P1)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $\forall \mathbf{x} \in F = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \forall \mathbf{y} = [y_1; y_2] \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_3 &= 12 \end{aligned}$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LP$_=$) (I)

ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: Αναζητάμε διάνυσμα $\mathbf{y} : \mathbf{a}'\mathbf{y} \le \mathbf{c}'\mathbf{x}$, για *οποιαδήποτε εφικτή λύση* $\mathbf{x}$ για το $(P1)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $\forall \mathbf{x} \in F = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}, \forall \mathbf{y} = [y_1; y_2] \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{aligned} y_1 \cdot [\ \ 3x_1 - x_2 + 5x_3\ \ ] &= \ \ 6\ \ y_1 \\ y_2 \cdot [\ \ 2x_1 - x_3\ \ ] &= 12\ \ y_2 \end{aligned}$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LP$_=$) (I)

ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: Αναζητάμε διάνυσμα $\mathbf{y} : \mathbf{a}'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}'\mathbf{x}$, για *οποιαδήποτε εφικτή λύση* $\mathbf{x}$ για το $(P1)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $\forall \mathbf{x} \in F = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \forall \mathbf{y} = [y_1 ; y_2] \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{array}{rcl} y_1 \cdot [\ \ 3x_1 - x_2 + 5x_3\ \ ] & = & 6\ \ y_1 \\ y_2 \cdot [\ \ 2x_1 - x_3\ \ ] & = & 12\ \ y_2 \end{array}$$

$\boxed{\text{Q}}$ Πότε η $f(\mathbf{y}) = \mathbf{a}'\mathbf{y} = 6y_1 + 12y_2$ είναι (καλό;) κάτω φράγμα για **οποιαδήποτε** εφικτή λύση $\mathbf{x} \in F$;

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LP$_=$) (I)

ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: Αναζητάμε διάνυσμα $\mathbf{y} : \mathbf{a}'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}'\mathbf{x}$, για *οποιαδήποτε εφικτή λύση* $\mathbf{x}$ για το $(P1)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $\forall \mathbf{x} \in F = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \forall \mathbf{y} = [y_1; y_2] \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcl} y_1 \cdot [\ \ 3x_1 - x_2 + 5x_3\ \ ] & = & 6\ \ y_1 \\ y_2 \cdot [\ \ 2x_1 - x_3\ \ ] & = & 12\ \ y_2 \end{array}$$

Q Πότε η $f(\mathbf{y}) = \mathbf{a}'\mathbf{y} = 6y_1 + 12y_2$ είναι (καλό;) κάτω φράγμα για **οποιαδήποτε** εφικτή λύση $\mathbf{x} \in F$;

A Θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\mathbf{a}'\mathbf{y} = 6y_1 + 12y_2 \ \leq\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LP$_=$) (I)

ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: Αναζητάμε διάνυσμα $\mathbf{y} : \mathbf{a}'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}'\mathbf{x}$, για *οποιαδήποτε εφικτή λύση* $\mathbf{x}$ για το $(P1)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $\forall \mathbf{x} \in F = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \forall \mathbf{y} = [y_1; y_2] \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcl} y_1 \cdot [\ 3x_1 - x_2 + 5x_3\ ] & = & 6\ y_1 \\ y_2 \cdot [\ 2x_1 - x_3\ ] & = & 12\ y_2 \end{array}$$

Q: Πότε η $f(\mathbf{y}) = \mathbf{a}'\mathbf{y} = 6y_1 + 12y_2$ είναι (καλό;) κάτω φράγμα για **οποιαδήποτε** εφικτή λύση $\mathbf{x} \in F$;

A: Θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\mathbf{a}'\mathbf{y} = 6y_1 + 12y_2 \leq x_1 + 2x_2 - 7x_3 = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

$$\Leftrightarrow\ y_1 \cdot [3x_1 - x_2 + 5x_3] + y_2 \cdot [2x_1 - x_3] \leq x_1 + 2x_2 - 7x_3$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για ($LP_=$) (I)

ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: Αναζητάμε διάνυσμα $\mathbf{y} : \mathbf{a}'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}'\mathbf{x}$, για *οποιαδήποτε εφικτή λύση* $\mathbf{x}$ για το $(P1)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $\forall \mathbf{x} \in F = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \forall \mathbf{y} = [y_1 ; y_2] \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcl} y_1 \cdot [\ \ 3x_1 - x_2 + 5x_3\ \ ] & = & 6\ \ y_1 \\ y_2 \cdot [\ \ \ \ 2x_1 - x_3\ \ \ \ ] & = & 12\ \ y_2 \end{array}$$

Q Πότε η $f(\mathbf{y}) = \mathbf{a}'\mathbf{y} = 6y_1 + 12y_2$ είναι (καλό;) κάτω φράγμα για **οποιαδήποτε** εφικτή λύση $\mathbf{x} \in F$;

A Θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\mathbf{a}'\mathbf{y} = 6y_1 + 12y_2 \ \leq\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

$$\Leftrightarrow\ \ y_1 \cdot [3x_1 - x_2 + 5x_3] + y_2 \cdot [2x_1 - x_3] \ \leq\ x_1 + 2x_2 - 7x_3$$

$$\Leftrightarrow\ \ 0 \leq [1 - 3y_1 - 2y_2] \cdot x_1 + [2 + y_1] \cdot x_2 + [-7 - 5y_1 + y_2] \cdot x_3$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LP$_=$) (II)

$\therefore$ Ικανή συνθήκη για $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$, $\forall \mathbf{x} \in F$ και αυθαίρετο $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$:

$$\{3y_1 + 2y_2 \leq 1,\ -y_1 \leq 2,\ 5y_1 - y_2 \leq -7\}$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LP$_=$) (II)

$\therefore$ Ικανή συνθήκη για $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$, $\forall \mathbf{x} \in F$ και αυθαίρετο $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$:

$$\{3y_1 + 2y_2 \leq 1,\ -y_1 \leq 2,\ 5y_1 - y_2 \leq -7\}$$

$\boxed{\text{Q}}$ Ποιο το **καλύτερο δυνατό** κάτω φράγμα $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$;

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LP$_=$) (II)

$\therefore$ Ικανή συνθήκη για $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$, $\forall \mathbf{x} \in F$ και αυθαίρετο $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$:

$$\{3y_1 + 2y_2 \leq 1, \;\; -y_1 \leq 2, \;\; 5y_1 - y_2 \leq -7\}$$

Q Ποιο το **καλύτερο δυνατό** κάτω φράγμα $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$;

A Δίνεται από τη *βέλτιστη λύση* του εξής Γ.Π.:

(D1)

$$\begin{array}{rl} \textbf{maximize} & \mathbf{a}^T\mathbf{y} = 6y_1 + 12y_2 \\ \text{s.t.}: & \\ A[1,*]y_1 + A[2,*]y_2 \leq \mathbf{c}' \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1 = c_1 \\ -y_1 & + & 0y_2 & \leq & 2 = c_2 \\ 5y_1 & - & y_2 & \leq & -7 = c_3 \end{array} \right. \end{array}$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για ($LP_=$) (II)

$\therefore$ Ικανή συνθήκη για $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$, $\forall \mathbf{x} \in F$ και αυθαίρετο $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$:

$$\{3y_1 + 2y_2 \leq 1,\ \ -y_1 \leq 2,\ \ 5y_1 - y_2 \leq -7\}$$

Q Ποιο το **καλύτερο δυνατό** κάτω φράγμα $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$;

A Δίνεται από τη *βέλτιστη λύση* του εξής Γ.Π.:

$$\text{(D1)} \quad \boxed{\begin{array}{rl} \textbf{maximize} & \mathbf{a}^T\mathbf{y} = 6y_1 + 12y_2 \\ \text{s.t. :} & \\ A[1,*]y_1 + A[2,*]y_2 \leq \mathbf{c}' \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1 = c_1 \\ -y_1 & + & 0y_2 & \leq & 2 = c_2 \\ 5y_1 & - & y_2 & \leq & -7 = c_3 \end{array} \right. \end{array}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Κανένας περιορισμός ως προς το *πρόσημο* των y_1, y_2.

$\therefore$ Ικανή συνθήκη για $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$, $\forall \mathbf{x} \in F$ και αυθαίρετο $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$:

$$\{3y_1 + 2y_2 \leq 1,\ \ -y_1 \leq 2,\ \ 5y_1 - y_2 \leq -7\}$$

$\boxed{\text{Q}}$ Ποιο το **καλύτερο δυνατό** κάτω φράγμα $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$;

$\boxed{\text{A}}$ Δίνεται από τη *βέλτιστη λύση* του εξής Γ.Π.:

$$\text{(D1)}\quad \boxed{\begin{array}{rl} \textbf{maximize} & \mathbf{a}^T\mathbf{y} = 6y_1 + 12y_2 \\ \text{s.t. :} & \\ A[1,*]y_1 + A[2,*]y_2 \leq \mathbf{c}' \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} 3y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1 = c_1 \\ -y_1 & + & 0y_2 & \leq & 2 = c_2 \\ 5y_1 & - & y_2 & \leq & -7 = c_3 \end{array}\right. \end{array}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Κανένας περιορισμός ως προς το *πρόσημο* των y_1, y_2.
2. Χώρος εφικτών λύσεων του (D1): $G = \{\mathbf{y} : \mathbf{y}'A \leq \mathbf{c}'\}$.

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LP$_=$) (III)

- Έστω το **πρωτεύον (primal)** γ.π. σε μορφή (LP$_=$):

$$(\mathrm{P}) \quad \boxed{\textbf{minimize}\left\{\ \mathbf{c}'\mathbf{x} :\ \ A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\ \right\}}$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για ($LP_=$) (III)

- Έστω το **πρωτεύον (primal)** γ.π. σε μορφή ($LP_=$):

$$(P) \quad \boxed{\textbf{minimize}\left\{\ \mathbf{c}'\mathbf{x} :\ \ A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\ \right\}}$$

- Ένα **βέλτιστο κάτω φράγμα** (χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα προσέγγιση) στο κόστος της βέλτιστης λύσης του (P) δίνεται από το **δυϊκό (dual)** του γ.π. (D):

$$(D) \quad \boxed{\textbf{maximize}\left\{\ \mathbf{a}'\mathbf{y} :\ \ A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\ \right\}}$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για ($LP_=$) (III)

- Έστω το **πρωτεύον (primal)** γ.π. σε μορφή ($LP_=$):

$$(P) \quad \boxed{\textbf{minimize}\left\{\ \mathbf{c}'\mathbf{x} : \ \ A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\ \right\}}$$

- Ένα **βέλτιστο κάτω φράγμα** (χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα προσέγγιση) στο κόστος της βέλτιστης λύσης του (P) δίνεται από το **δυϊκό (dual)** του γ.π. (D):

$$(D) \quad \boxed{\textbf{maximize}\left\{\ \mathbf{a}'\mathbf{y} : \ \ A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\ \right\}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. *Ανταλλαγή ρόλων* για διανύσματα συντελεστών κόστους και σταθερών όρων.

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για ($LP_=$) (III)

- Έστω το **πρωτεύον (primal)** γ.π. σε μορφή ($LP_=$):

$$(P) \quad \boxed{\text{minimize}\, \{\ \mathbf{c}'\mathbf{x} :\ \ A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\ \}}$$

- Ένα **βέλτιστο κάτω φράγμα** (χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα προσέγγιση) στο κόστος της βέλτιστης λύσης του (P) δίνεται από το **δυϊκό (dual)** του γ.π. (D):

$$(D) \quad \boxed{\text{maximize}\, \{\ \mathbf{a}'\mathbf{y} :\ \ A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\ \}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. *Ανταλλαγή ρόλων* για διανύσματα συντελεστών κόστους και σταθερών όρων.
2. *Αναστροφή* μητρώου συντελεστών των μεταβλητών.

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για ($LP_=$) (III)

- Έστω το **πρωτεύον (primal)** γ.π. σε μορφή ($LP_=$):

$$(P) \quad \boxed{\textbf{minimize}\left\{ \ \mathbf{c}'\mathbf{x} : \ \ A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \ \right\}}$$

- Ένα **βέλτιστο κάτω φράγμα** (χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα προσέγγιση) στο κόστος της βέλτιστης λύσης του (P) δίνεται από το **δυϊκό (dual)** του γ.π. (D):

$$(D) \quad \boxed{\textbf{maximize}\left\{ \ \mathbf{a}'\mathbf{y} : \ \ A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \ \right\}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. *Ανταλλαγή ρόλων* για διανύσματα συντελεστών κόστους και σταθερών όρων.
2. *Αναστροφή* μητρώου συντελεστών των μεταβλητών.
3. *Απουσία περιορισμών προσήμου* για τις δυϊκές μεταβλητές (αντιστοιχούν σε πρωτεύουσες εξισώσεις).

Ανισότητες & Μη Προσημασμένες Μεταβλητές

ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι γίνεται αν έχουμε και *περιορισμούς ανισότητας*;
Αν *λείπουν* περιορισμοί προσήμου;

Ανισότητες & Μη Προσημασμένες Μεταβλητές

ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι γίνεται αν έχουμε και *περιορισμούς ανισότητας*; Αν *λείπουν* περιορισμοί προσήμου;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω ότι αναζητάμε κάτω φράγματα για το κόστος οποιασδήποτε εφικτής λύσης στο εξής γ.π.:

$$
(\mathrm{P2})\quad \boxed{\begin{array}{rrcr}
\textbf{minimize} & 3x_1 - x_2 - 4x_3 & & \\
\text{s.t.}: & 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 & = & 9 \\
 & 6x_1 - 9x_2 - 2x_3 & \geq & -7 \\
 & x_1 \geq 0 & &
\end{array}}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 6 & -9 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}
$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (I)

- $\forall \mathbf{x} \in F_2 = feasible(P_2), \ \forall \mathbf{y} = [y_1; y_2] \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{aligned} 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= 9 \\ 6x_1 - 9x_2 - 2x_3 &\geq -7 \end{aligned}$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (I)

- $\forall \mathbf{x} \in F_2 = feasible(P_2), \ \forall \mathbf{y} = [y_1; y_2] \in \mathbb{R}^2,$

$$y_1 \cdot [\ \ 5x_1 - 6x_2 + 7x_3\ \ ] \ = 9 \cdot y_1$$

$$y_2 \cdot [\ \ 6x_1 - 9x_2 - 2x_3\ \ ] \ \geq -7 \cdot y_2 \qquad (???)$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (I)

- $\forall \mathbf{x} \in F_2 = feasible(P_2), \ \forall \mathbf{y} = [y_1; y_2] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$y_1 \cdot [\ 5x_1 - 6x_2 + 7x_3\ ] = 9 \cdot y_1$$

$$y_2 \cdot [\ 6x_1 - 9x_2 - 2x_3\ ] \geq -7 \cdot y_2$$

$\therefore$ Οι **πρωτεύουσες ανισότητες** επιβάλλουν **περιορισμό προσήμου** στις αντίστοιχες δυϊκές μεταβλητές!!!

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (I)

- $\forall \mathbf{x} \in F_2 = feasible(P_2),\ \ \forall \mathbf{y} = [y_1; y_2] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$y_1 \cdot [\ \ 5x_1 - 6x_2 + 7x_3\ \ ] \ \ = 9 \cdot y_1$$

$$y_2 \cdot [\ \ 6x_1 - 9x_2 - 2x_3\ \ ] \ \ \geq -7 \cdot y_2$$

$\therefore$ Οι **πρωτεύουσες ανισότητες** επιβάλλουν **περιορισμό προσήμου** στις αντίστοιχες δυϊκές μεταβλητές!!!

$\boxed{\text{Q}}$ Πότε η $f(\mathbf{y}) = \mathbf{a}'\mathbf{y} = 9y_1 - 7y_2$ είναι (καλό;) κάτω φράγμα για οποιαδήποτε εφικτή λύση $\mathbf{x} \in F_2$;

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (I)

- $\forall \mathbf{x} \in F_2 = feasible(P_2)$, $\forall \mathbf{y} = [y_1; y_2] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$y_1 \cdot [\ 5x_1 - 6x_2 + 7x_3\ ] = 9 \cdot y_1$$

$$y_2 \cdot [\ 6x_1 - 9x_2 - 2x_3\ ] \geq -7 \cdot y_2$$

$\therefore$ Οι **πρωτεύουσες ανισότητες** επιβάλλουν **περιορισμό προσήμου** στις αντίστοιχες δυϊκές μεταβλητές!!!

Q Πότε η $f(\mathbf{y}) = \mathbf{a}'\mathbf{y} = 9y_1 - 7y_2$ είναι (καλό;) κάτω φράγμα για οποιαδήποτε εφικτή λύση $\mathbf{x} \in F_2$;

A $$\boxed{\mathbf{a}'\mathbf{y} = 9y_1 - 7y_2 \leq 3x_1 - x_2 - 4x_3 = \mathbf{c}'\mathbf{x}}$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (II)

- Αρκεί να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}'\mathbf{y} &= 9y_1 - 7y_2\\ &\leq y_1 \cdot [5x_1 - 6x_2 + 7x_3] + y_2 \cdot [6x_1 - 9x_2 - 2x_3]\\ &\leq 3x_1 - x_2 - 4x_3 = \mathbf{c}'\mathbf{x}\end{aligned}$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (II)

- Αρκεί να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'\mathbf{y} &= 9y_1 - 7y_2 \\ &\leq y_1 \cdot [5x_1 - 6x_2 + 7x_3] + y_2 \cdot [6x_1 - 9x_2 - 2x_3] \\ &\leq 3x_1 - x_2 - 4x_3 = \mathbf{c}'\mathbf{x} \end{aligned}$$

- Κόκκινη ανισότητα OK (εφόσον απαιτήσουμε να ισχύει $y_2 \geq 0$)! Πώς εξασφαλίζουμε τη μπλε ανισότητα;

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (II)

- Αρκεί να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}'\mathbf{y} &= 9y_1 - 7y_2 \\
&\leq y_1 \cdot [5x_1 - 6x_2 + 7x_3] + y_2 \cdot [6x_1 - 9x_2 - 2x_3] \\
&\leq 3x_1 - x_2 - 4x_3 = \mathbf{c}'\mathbf{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 0 &\leq [3 - 5y_1 - 6y_2] \cdot x_1 + [-1 + 6y_1 + 9y_2] \cdot x_2 \\
&+ [-4 - 7y_1 + 2y_2] \cdot x_3
\end{aligned}$$

- Κόκκινη ανισότητα OK (εφόσον απαιτήσουμε να ισχύει $y_2 \geq 0$)! Πώς εξασφαλίζουμε τη μπλε ανισότητα;

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (II)

- Αρκεί να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}'\mathbf{y} &= 9y_1 - 7y_2 \\ &\le y_1 \cdot [5x_1 - 6x_2 + 7x_3] + y_2 \cdot [6x_1 - 9x_2 - 2x_3] \\ &\le 3x_1 - x_2 - 4x_3 = \mathbf{c}'\mathbf{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad 0 &\le [3 - 5y_1 - 6y_2] \cdot x_1 + [-1 + 6y_1 + 9y_2] \cdot x_2 \\ &+ [-4 - 7y_1 + 2y_2] \cdot x_3\end{aligned}$$

- Κόκκινη ανισότητα OK (εφόσον απαιτήσουμε να ισχύει $y_2 \geq 0$)! Πώς εξασφαλίζουμε τη μπλε ανισότητα;
- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:
  - $x_1 \geq 0$, άρα αρκεί η απαίτηση:

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (II)

- Αρκεί να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}'\mathbf{y} &= 9y_1 - 7y_2 \\ &\leq y_1 \cdot [5x_1 - 6x_2 + 7x_3] + y_2 \cdot [6x_1 - 9x_2 - 2x_3] \\ &\leq 3x_1 - x_2 - 4x_3 = \mathbf{c}'\mathbf{x}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq [3 - 5y_1 - 6y_2] \cdot x_1 + [-1 + 6y_1 + 9y_2] \cdot x_2 + [-4 - 7y_1 + 2y_2] \cdot x_3$$

- Κόκκινη ανισότητα OK (εφόσον απαιτήσουμε να ισχύει $y_2 \geq 0$)! Πώς εξασφαλίζουμε τη μπλε ανισότητα;

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:
  - $x_1 \geq 0$, άρα αρκεί η απαίτηση: $\boxed{3 - 5y_1 - 6y_2 \geq 0}$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (II)

- Αρκεί να ισχύει ότι:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{a}'\mathbf{y} & = & 9y_1 - 7y_2 \\ & \leq & y_1 \cdot [5x_1 - 6x_2 + 7x_3] + y_2 \cdot [6x_1 - 9x_2 - 2x_3] \\ & \leq & 3x_1 - x_2 - 4x_3 = \mathbf{c}'\mathbf{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow \quad 0 & \leq & [3 - 5y_1 - 6y_2] \cdot x_1 + [-1 + 6y_1 + 9y_2] \cdot x_2 \\ & + & [-4 - 7y_1 + 2y_2] \cdot x_3 \end{array}$$

- Κόκκινη ανισότητα ΟΚ (εφόσον απαιτήσουμε να ισχύει $y_2 \geq 0$)! Πώς εξασφαλίζουμε τη μπλε ανισότητα;

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:
  - $x_1 \geq 0$, άρα αρκεί η απαίτηση: $\boxed{3 - 5y_1 - 6y_2 \geq 0}$
  - $x_2 \in \mathbb{R}$, άρα αρκεί η απαίτηση:

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (II)

- Αρκεί να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'\mathbf{y} &= 9y_1 - 7y_2 \\ &\leq y_1 \cdot [5x_1 - 6x_2 + 7x_3] + y_2 \cdot [6x_1 - 9x_2 - 2x_3] \\ &\leq 3x_1 - x_2 - 4x_3 = \mathbf{c}'\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 0 &\leq [3 - 5y_1 - 6y_2] \cdot x_1 + [-1 + 6y_1 + 9y_2] \cdot x_2 \\ &+ [-4 - 7y_1 + 2y_2] \cdot x_3 \end{aligned}$$

- Κόκκινη ανισότητα OK (εφόσον απαιτήσουμε να ισχύει $y_2 \geq 0$)! Πώς εξασφαλίζουμε τη μπλε ανισότητα;

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:
  - $x_1 \geq 0$, άρα αρκεί η απαίτηση: $\boxed{3 - 5y_1 - 6y_2 \geq 0}$
  - $x_2 \in \mathbb{R}$, άρα αρκεί η απαίτηση: $\boxed{-1 + 6y_1 + 9y_2 = 0}$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (II)

- Αρκεί να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'\mathbf{y} &= 9y_1 - 7y_2 \\ &\le y_1 \cdot [5x_1 - 6x_2 + 7x_3] + y_2 \cdot [6x_1 - 9x_2 - 2x_3] \\ &\le 3x_1 - x_2 - 4x_3 = \mathbf{c}'\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le [3 - 5y_1 - 6y_2] \cdot x_1 + [-1 + 6y_1 + 9y_2] \cdot x_2 + [-4 - 7y_1 + 2y_2] \cdot x_3$$

- Κόκκινη ανισότητα OK (εφόσον απαιτήσουμε να ισχύει $y_2 \ge 0$)! Πώς εξασφαλίζουμε τη μπλε ανισότητα;

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:
  - $x_1 \ge 0$, άρα αρκεί η απαίτηση: $\boxed{3 - 5y_1 - 6y_2 \ge 0}$
  - $x_2 \in \mathbb{R}$, άρα αρκεί η απαίτηση: $\boxed{-1 + 6y_1 + 9y_2 = 0}$
  - $x_3 \in \mathbb{R}$, άρα αρκεί η απαίτηση:

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (II)

- Αρκεί να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'\mathbf{y} &= 9y_1 - 7y_2 \\ &\leq y_1 \cdot [5x_1 - 6x_2 + 7x_3] + y_2 \cdot [6x_1 - 9x_2 - 2x_3] \\ &\leq 3x_1 - x_2 - 4x_3 = \mathbf{c}'\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 0 &\leq [3 - 5y_1 - 6y_2] \cdot x_1 + [-1 + 6y_1 + 9y_2] \cdot x_2 \\ &+ [-4 - 7y_1 + 2y_2] \cdot x_3 \end{aligned}$$

- Κόκκινη ανισότητα OK (εφόσον απαιτήσουμε να ισχύει $y_2 \geq 0$)! Πώς εξασφαλίζουμε τη μπλε ανισότητα;
- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:
  - $x_1 \geq 0$, άρα αρκεί η απαίτηση: $\boxed{3 - 5y_1 - 6y_2 \geq 0}$
  - $x_2 \in \mathbb{R}$, άρα αρκεί η απαίτηση: $\boxed{-1 + 6y_1 + 9y_2 = 0}$
  - $x_3 \in \mathbb{R}$, άρα αρκεί η απαίτηση: $\boxed{-4 - 7y_1 + 2y_2 = 0}$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (III)

$\therefore$ Ικανή συνθήκη για $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$:

$$y_2 \geq 0,\ \ 5y_1 + 6y_2 \leq 3,\ \ -6y_1 - 9y_2 = -1,\ \ 7y_1 - 2y_2 = -4$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (III)

$\therefore$ Ικανή συνθήκη για $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$:

$$y_2 \geq 0,\ \ 5y_1 + 6y_2 \leq 3,\ \ -6y_1 - 9y_2 = -1,\ \ 7y_1 - 2y_2 = -4$$

$\boxed{\text{Q}}$ Ποιο το καλύτερο δυνατό κάτω φράγμα $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$;

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (III)

∴ Ικανή συνθήκη για $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$:

$$y_2 \geq 0,\;\; 5y_1 + 6y_2 \leq 3,\;\; -6y_1 - 9y_2 = -1,\;\; 7y_1 - 2y_2 = -4$$

$\boxed{\text{Q}}$ Ποιο το καλύτερο δυνατό κάτω φράγμα $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \mathbf{a}'\mathbf{y}$;

$\boxed{\text{A}}$ (D2)

$$\boxed{\begin{array}{lrcr} \textbf{maximize} & \mathbf{a}'\mathbf{y} = 9y_1 - 7y_2 & & \\ \text{s.t.}: & 5y_1 + 6y_2 & \leq & 3 \\ & -6y_1 - 9y_2 & = & -1 \\ & 7y_1 - 2y_2 & = & -4 \\ & y_2 \geq 0 & & \end{array}}$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (IV)

(P) $\boxed{\textbf{minimize}\left\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : \ A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b};\ \forall j \in J,\ x_j \geq 0\right\}}$

(D)
$$
\begin{array}{lrcl}
\textbf{maximize} & \mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z} & & \\
\quad \text{s.t. :} & & & \\
& \forall j \in J,\ (A'\mathbf{y} + B'\mathbf{z})_j & \leq & c_j \\
& \forall j \notin J,\ (A'\mathbf{y} + B'\mathbf{z})_j & = & c_j \\
& \mathbf{z} \geq \mathbf{0} & &
\end{array}
$$

Αναζήτηση Κάτω Φραγμάτων για (LPG) (IV)

(P) $\boxed{\textbf{minimize}\left\{\mathbf{c}'\mathbf{x}: \quad A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ B\mathbf{x} \geq \mathbf{b};\ \ \forall j \in J,\ \ x_j \geq 0\right\}}$

(D)
$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & \mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z} & & \\ \quad \text{s.t.}: & & & \\ & \forall j \in J,\ \ (A'\mathbf{y} + B'\mathbf{z})_j & \leq & c_j \\ & \forall j \notin J,\ \ (A'\mathbf{y} + B'\mathbf{z})_j & = & c_j \\ & \mathbf{z} \geq \mathbf{0} & & \end{array}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Κάθε *πρωτεύουσα ισότητα* (γραμμή) αντιστοιχεί σε μια δευτερεύουσα μεταβλητή χωρίς περιορισμό προσήμου.
2. Κάθε *πρωτεύουσα ανισότητα* (γραμμή) αντιστοιχεί σε μια δευτερεύουσα μεταβλητή με περιορισμό προσήμου.
3. Κάθε *πρωτεύουσα μεταβλητή* (στήλη) με πρόσημο αντιστοιχεί σε δυϊκή ανισότητα.
4. Κάθε *πρωτεύουσα μεταβλητή* (στήλη) χωρίς πρόσημο αντιστοιχεί σε δυϊκή ισότητα.

Συστηματική Κατασκευή Δυϊκού του (LPG) (I)

Primal			Dual
	min. $\mathbf{c}'\mathbf{x}$	$\leftrightarrow$	**max.** $[\ \mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}\ ]$
$\forall i \in [m_1]$	$A[i,*]\mathbf{x} = a_i$	$\leftrightarrow$	$y_i \in \mathbb{R}$
$\forall i \in [m_2]$	$B[i,*]\mathbf{x} \geq b_i$	$\leftrightarrow$	$z_i \geq 0$
$\forall j \in [n_1]$	$x_j \geq 0$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{y}'A[*,j] + \mathbf{z}'B[*,j] \leq c_j$
$\forall j \in [n_2]$	$x_j \in \mathbb{R}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{y}'A[*,j] + \mathbf{z}'B[*,j] = c_j$

Συστηματική Κατασκευής Δυϊκού του (LPG) (I)

Primal			Dual
	$\mathbf{min.}\ \mathbf{c}'\mathbf{x}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{max.}\ [\ \mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}\ ]$
$\forall i \in [m_1]$	$A[i,*]\mathbf{x} = a_i$	$\leftrightarrow$	$y_i \in \mathbb{R}$
$\forall i \in [m_2]$	$B[i,*]\mathbf{x} \geq b_i$	$\leftrightarrow$	$z_i \geq 0$
$\forall j \in [n_1]$	$x_j \geq 0$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{y}'A[*,j] + \mathbf{z}'B[*,j] \leq c_j$
$\forall j \in [n_2]$	$x_j \in \mathbb{R}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{y}'A[*,j] + \mathbf{z}'B[*,j] = c_j$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να υπολιστεί το δυϊκό πρόγραμμα του ακόλουθου γραμμικού προγράμματος.

$$
(P3)\quad
\begin{array}{llcr}
\textbf{maximize} & -3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 & & \\
\text{s.t. :} & 2x_1 - 16x_2 + 12x_3 + 0x_4 & \geq & 12 \\
 & 5x_1 + 5x_2 + 0x_3 - 13x_4 & \leq & 23 \\
 & -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 & = & 28 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Συστηματική Κατασκευής Δυϊκού του (LPG) (II)

$$
(P3)\quad
\boxed{
\begin{array}{lrcr}
\textbf{maximize} & -3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 & & \\
\text{s.t. :} & 2x_1 - 16x_2 + 12x_3 + 0x_4 & \geq & 12 \\
 & 5x_1 + 5x_2 + 0x_3 - 13x_4 & \leq & 23 \\
 & -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 & = & 28 \\
 & \multicolumn{3}{c}{x_1 \geq 0,\ \ x_2 \in \mathbb{R},\ \ x_3 \in \mathbb{R},\ \ x_4 \geq 0}
\end{array}
}
$$

Συστηματική Κατασκευής Δυϊκού του (LPG) (II)

$$
(P3)\quad \boxed{\begin{array}{lrcr}
\textbf{minimize} & 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 & & \\
\text{s.t. :} & 2x_1 - 16x_2 + 12x_3 + 0x_4 & \geq & 12 \\
 & -5x_1 - 5x_2 - 0x_3 + 13x_4 & \geq & -23 \\
 & -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 & = & 28 \\
 & x_1 \geq 0,\ \ x_2 \in \mathbb{R},\ \ x_3 \in \mathbb{R},\ \ x_4 \geq 0 & &
\end{array}}
$$

1ο Βήμα: Μετατροπή σε (LPG) (ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ!!!)

Συστηματική Κατασκευής Δυϊκού του (LPG) (II)

$$
(P3)\quad \begin{array}{|lrcrl|}
\hline
\textbf{minimize} & 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 & & & \\
\text{s.t. :} & 2x_1 - 16x_2 + 12x_3 + 0x_4 & \geq & 12 & \\
 & -5x_1 - 5x_2 - 0x_3 + 13x_4 & \geq & -23 & \\
 & -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 & = & 28 & \\
 & \multicolumn{4}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \geq 0} \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{l} \\ : z_1 \\ : z_2 \\ : y \\ \\ \end{array}
$$

1ο Βήμα: Μετατροπή σε (LPG) (ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ!!!)

2ο Βήμα: Ανάθεση δυϊκών μεταβλητών σε πρωτεύοντες περιορισμούς.

Συστηματική Κατασκευή Δυϊκού του (LPG) (II)

$$(P3)\quad \begin{array}{llrcr} \textbf{minimize} & & 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 & & \\ \text{s.t. :} & & 2x_1 - 16x_2 + 12x_3 + 0x_4 & \geq & 12 \quad : z_1 \\ & & -5x_1 - 5x_2 - 0x_3 + 13x_4 & \geq & -23 \quad : z_2 \\ & & -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 & = & 28 \quad : y \\ & & x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \geq 0 & & \end{array}$$

1ο Βήμα: Μετατροπή σε (LPG) (ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ!!!)

2ο Βήμα: Ανάθεση δυϊκών μεταβλητών σε πρωτεύοντες περιορισμούς.

3ο Βήμα: Δημιουργία Δυϊκού Προγράμματος.

$$(P3)\quad \begin{array}{llrcrl}
\textbf{minimize} & 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 & & & & \\
\text{s.t. :} & 2x_1 - 16x_2 + 12x_3 + 0x_4 & \geq & 12 & : z_1 \\
& -5x_1 - 5x_2 - 0x_3 + 13x_4 & \geq & -23 & : z_2 \\
& -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 & = & 28 & : y \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \geq 0 & & &
\end{array}$$

1ο Βήμα: Μετατροπή σε (LPG) (ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ!!!)

2ο Βήμα: Ανάθεση δυϊκών μεταβλητών σε πρωτεύοντες περιορισμούς.

3ο Βήμα: Δημιουργία Δυϊκού Προγράμματος.

$$(D3)\quad \begin{array}{llrcrl}
\textbf{maximize} & 12z_1 - 23z_2 + 28y & & & & \\
\text{s.t. :} & 2z_1 - 5z_2 - 4y & \leq & 3 & : x_1 \\
& -16z_1 - 5z_2 - 3y & = & -6 & : x_2 \\
& 12z_1 + 0z_2 - y & = & -1 & : x_3 \\
& 0z_1 + 13z_2 - 7y & \leq & 2 & : x_4 \\
& z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0,\ y \in \mathbb{R} & & &
\end{array}$$

Συμμετρικότητα Δυϊκότητας Γ.Π.

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 4.1 (σημειώσεις)]

Αν (D) είναι δυϊκό του (P) τότε το (P) είναι δυϊκό του (D).

Συμμετρικότητα Δυϊκότητας Γ.Π.

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 4.1 (σημειώσεις)]

Αν (D) είναι δυϊκό του (P) τότε το (P) είναι δυϊκό του (D).

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.1 (σημειώσεις)]

Primal		Dual
$\min\ [\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}]$	$\leftrightarrow$	$\max\ [\mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}]$
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$	$\overset{\mathbf{y}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$	$\overset{\mathbf{z}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$	$\leftrightarrow$	$D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}$

Συμμετρικότητα Δυϊκότητας Γ.Π.

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 4.1 (σημειώσεις)]

Αν (D) είναι δυϊκό του (P) τότε το (P) είναι δυϊκό του (D).

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.1 (σημειώσεις)]

Primal		Dual
$\min\ [\mathbf{k}'\mathbf{u}+\mathbf{s}'\mathbf{v}]$	$\leftrightarrow$	$\max\ [\mathbf{a}'\mathbf{y}+\mathbf{b}'\mathbf{z}]$
$C\mathbf{u}+D\mathbf{v}=\mathbf{a}$	$\overset{\mathbf{y}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{m_1}$
$E\mathbf{u}+F\mathbf{v}\geq\mathbf{b}$	$\overset{\mathbf{z}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{z}\in\mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$
$\mathbf{u}\in\mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$C'\mathbf{y}+E'\mathbf{z}\leq\mathbf{k}$
$\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n_2}$	$\leftrightarrow$	$D'\mathbf{y}+F'\mathbf{z}=\mathbf{s}$

Dual		Dual of Dual
$\min\ [(-\mathbf{a})'\mathbf{y}+(-\mathbf{b})'\mathbf{z}]$	$\leftrightarrow$	$\max\ [(-\mathbf{k})'\mathbf{u}+(-\mathbf{s})'\mathbf{v}]$
$(-C)'\mathbf{y}+(-E)'\mathbf{z}\geq-\mathbf{k}$	$\overset{\mathbf{u}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{u}\in\mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$
$(-D)'\mathbf{y}+(-F)'\mathbf{z}=-\mathbf{s}$	$\overset{\mathbf{v}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n_2}$
$\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{m_1}$	$\leftrightarrow$	$(-C)\mathbf{u}+(-D)\mathbf{v}=-\mathbf{a}$
$\mathbf{z}\in\mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$(-E)\mathbf{u}+(-F)\mathbf{v}\leq-\mathbf{b}$

Ασθενής Δυϊκότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 4.2 (σημειώσεις)]

Έστω (P) γραμμικό πρόγραμμα και (D) το δυϊκό του πρόγραμμα. Για οποιοδήποτε ζεύγος εφικτών λύσεων για τα δυο προγράμματα, ισχύει ότι η τιμή της δυϊκής λύσης είναι κάτω φράγμα στην τιμή της πρωτεύουσας λύσης.

Ασθενής Δυϊκότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 4.2 (σημειώσεις)]

Έστω (P) γραμμικό πρόγραμμα και (D) το δυϊκό του πρόγραμμα. Για οποιοδήποτε ζεύγος εφικτών λύσεων για τα δυο προγράμματα, ισχύει ότι η τιμή της δυϊκής λύσης είναι κάτω φράγμα στην τιμή της πρωτεύουσας λύσης.

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.2 (σημειώσεις)]

$\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}$

Primal		Dual
$\min\ [\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}]$	$\leftrightarrow$	$\max\ [\mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}]$
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$	$\overset{\mathbf{y}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$	$\overset{\mathbf{z}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$	$\leftrightarrow$	$D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}$

Ασθενής Δυϊκότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 4.2 (σημειώσεις)]

Έστω (P) γραμμικό πρόγραμμα και (D) το δυϊκό του πρόγραμμα. Για οποιοδήποτε ζεύγος εφικτών λύσεων για τα δυο προγράμματα, ισχύει ότι η τιμή της δυϊκής λύσης είναι κάτω φράγμα στην τιμή της πρωτεύουσας λύσης.

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.2 (σημειώσεις)]

$$\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}$$

$$\geq \quad [C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z}]'\mathbf{u} + [D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z}]'\mathbf{v}$$

$/*\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}\ */$

Primal		Dual
$\min\ [\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}]$	$\leftrightarrow$	$\max\ [\mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}]$
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$	$\overset{\mathbf{y}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$	$\overset{\mathbf{z}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$	$\leftrightarrow$	$D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}$

Ασθενής Δυϊκότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 4.2 (σημειώσεις)]

Έστω (P) γραμμικό πρόγραμμα και (D) το δυϊκό του πρόγραμμα. Για οποιοδήποτε ζεύγος εφικτών λύσεων για τα δυο προγράμματα, ισχύει ότι η τιμή της δυϊκής λύσης είναι κάτω φράγμα στην τιμή της πρωτεύουσας λύσης.

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.2 (σημειώσεις)]

$$\begin{aligned} &\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v} \\ \geq\ & [C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z}]'\mathbf{u} + [D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z}]'\mathbf{v} \\ & /*\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}\ */ \\ =\ & \mathbf{y}'[C\mathbf{u} + D\mathbf{v}] + \mathbf{z}'[E\mathbf{u} + F\mathbf{v}] \end{aligned}$$

Primal		Dual
$\min\ [\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}]$	$\leftrightarrow$	$\max\ [\mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}]$
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$	$\overset{\mathbf{y}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$	$\overset{\mathbf{z}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$	$\leftrightarrow$	$D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}$

Ασθενής Δυϊκότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 4.2 (σημειώσεις)]

Έστω (P) γραμμικό πρόγραμμα και (D) το δυϊκό του πρόγραμμα. Για οποιοδήποτε ζεύγος εφικτών λύσεων για τα δυο προγράμματα, ισχύει ότι η τιμή της δυϊκής λύσης είναι κάτω φράγμα στην τιμή της πρωτεύουσας λύσης.

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.2 (σημειώσεις)]

$$\begin{aligned}
&\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v} \\
&\geq [C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z}]'\mathbf{u} + [D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z}]'\mathbf{v} \\
&\quad /*\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}\ */ \\
&= \mathbf{y}'[C\mathbf{u} + D\mathbf{v}] + \mathbf{z}'[E\mathbf{u} + F\mathbf{v}] \\
&\geq \mathbf{y}'\mathbf{a} + \mathbf{z}'\mathbf{b} \\
&\quad /*\ \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}\ */
\end{aligned}$$

Primal		Dual
$\min\ [\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}]$	$\leftrightarrow$	$\max\ [\mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}]$
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$	$\overset{\mathbf{y}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$	$\overset{\mathbf{z}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$	$\leftrightarrow$	$D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}$

Ασθενής Δυϊκότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 4.2 (σημειώσεις)]

Έστω (P) γραμμικό πρόγραμμα και (D) το δυϊκό του πρόγραμμα. Για οποιοδήποτε ζεύγος εφικτών λύσεων για τα δυο προγράμματα, ισχύει ότι η τιμή της δυϊκής λύσης είναι κάτω φράγμα στην τιμή της πρωτεύουσας λύσης.

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.2 (σημειώσεις)]

$$\begin{aligned}
&\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v} \\
&\geq [C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z}]'\mathbf{u} + [D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z}]'\mathbf{v} \\
&\qquad /*\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}\ */ \\
&= \mathbf{y}'[C\mathbf{u} + D\mathbf{v}] + \mathbf{z}'[E\mathbf{u} + F\mathbf{v}] \\
&\geq \mathbf{y}'\mathbf{a} + \mathbf{z}'\mathbf{b} \\
&\qquad /*\ \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}\ */
\end{aligned}$$

Primal		Dual
$\min\ [\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}]$	$\leftrightarrow$	$\max\ [\mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}]$
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$	$\overset{\mathbf{y}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$	$\overset{\mathbf{z}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$	$\leftrightarrow$	$D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}$

■

Ισχυρή Δυϊκότητα (I)

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 4.3 (σημειώσεις)]

Έστω (P) γραμμικό πρόγραμμα και (D) το δυϊκό του πρόγραμμα. Για οποιοδήποτε ζεύγος **βέλτιστων εφικτών λύσεων** για τα δυο προγράμματα, ισχύει ότι η τιμή της δυϊκής λύσης ισούται με την τιμή της πρωτεύουσας λύσης.

Ισχυρή Δυϊκότητα (ΙΙ)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.3 (σημειώσεις)]

- Αρκεί απόδειξη για (P) σε μορφή ($LP_=$):

(P) $\boxed{\mathbf{min.}\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : \ A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ (D) $\boxed{\mathbf{max.}\ \{\mathbf{a}'\mathbf{y} : \ A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}}$

Ισχυρή Δυϊκότητα (ΙΙ)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.3 (σημειώσεις)]

- Αρκεί απόδειξη για (P) σε μορφή ($LP_=$):

  (P) $\boxed{\mathbf{min.}\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : \ A\mathbf{x} = \mathbf{a}; \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ (D) $\boxed{\mathbf{max.}\ \{\mathbf{a}'\mathbf{y} : \ A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}}$

- SIMPLEX: $$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}_\beta & = & (-A[*,\beta])^{-1}A[*,N]\mathbf{x}_N + A[*,\beta]^{-1}\mathbf{a} = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b} \\ z & = & \underline{\mathbf{c}}'_N\mathbf{x}_N + \zeta = [\mathbf{c}'_N + \mathbf{c}'_\beta B]\mathbf{x}_N + \zeta \end{array}$$

Ισχυρή Δυϊκότητα (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.3 (σημειώσεις)]

- Αρκεί απόδειξη για (P) σε μορφή ($LP_=$):

  (P) $\boxed{\textbf{min.}\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x}:\ A\mathbf{x}=\mathbf{a};\ \ \mathbf{x}\geq\mathbf{0}\}}$ (D) $\boxed{\textbf{max.}\ \{\mathbf{a}'\mathbf{y}:\ A'\mathbf{y}\leq\mathbf{c}\}}$

- SIMPLEX:
$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\beta &= (-A[*,\beta])^{-1}A[*,N]\mathbf{x}_N + A[*,\beta]^{-1}\mathbf{a} = B\mathbf{x}_N+\mathbf{b}\\ z &= \underline{\mathbf{c}}'_N\mathbf{x}_N+\zeta = [\mathbf{c}'_N+\mathbf{c}'_\beta B]\mathbf{x}_N+\zeta\end{aligned}$$

- P-OPT:
$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &= [\bar{\mathbf{x}}_\beta=\mathbf{b},\bar{\mathbf{x}}_N=\mathbf{0}]\in opt(P)\\ \underline{\mathbf{c}}_N &\geq \mathbf{0}\Leftrightarrow \mathbf{c}_N+B'\mathbf{c}_\beta\geq\mathbf{0}\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{c}_N\geq(A[*,\beta]^{-1}A[*,N])'\mathbf{c}_\beta}\end{aligned}$$

Ισχυρή Δυϊκότητα (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.3 (σημειώσεις)]

- Αρκεί απόδειξη για (P) σε μορφή ($LP_=$):

  (P) $\boxed{\textbf{min.}\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} :\ A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ (D) $\boxed{\textbf{max.}\ \{\mathbf{a}'\mathbf{y} :\ A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}}$

- SIMPLEX:
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\beta &= (-A[*,\beta])^{-1}A[*,N]\mathbf{x}_N + A[*,\beta]^{-1}\mathbf{a} = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b} \\ z &= \underline{\mathbf{c}}'_N\mathbf{x}_N + \zeta = [\mathbf{c}'_N + \mathbf{c}'_\beta B]\mathbf{x}_N + \zeta \end{aligned}$$

- P-OPT:
$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= [\bar{\mathbf{x}}_\beta = \mathbf{b}, \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}] \in opt(P) \\ \underline{\mathbf{c}}_N &\geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c}_N + B'\mathbf{c}_\beta \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{c}_N \geq (A[*,\beta]^{-1}A[*,N])'\mathbf{c}_\beta} \end{aligned}$$

- D-FEASIBILITY: Έστω $\boxed{\bar{\mathbf{y}} = (A[*,\beta]^{-1})'\mathbf{c}_\beta}$. Τότε $\bar{\mathbf{y}} \in feasible(D)$:
$$\begin{aligned} A[*,\beta]'\bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{c}_\beta \\ A[*,N]'\bar{\mathbf{y}} = A[*,N]'(A[*,\beta]^{-1})'\mathbf{c}_\beta = (A[*,\beta]^{-1}A[*,N])'\mathbf{c}_\beta &\leq \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

Ισχυρή Δυϊκότητα (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.3 (σημειώσεις)]

- Αρκεί απόδειξη για (P) σε μορφή ($LP_=$):

  (P) $\boxed{\textbf{min.}\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} :\ A\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$ (D) $\boxed{\textbf{max.}\ \{\mathbf{a}'\mathbf{y} :\ A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}}$

- SIMPLEX:
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\beta &= (-A[*,\beta])^{-1}A[*,N]\mathbf{x}_N + A[*,\beta]^{-1}\mathbf{a} = B\mathbf{x}_N + \mathbf{b} \\ z &= \underline{\mathbf{c}}_N'\mathbf{x}_N + \zeta = [\mathbf{c}_N' + \mathbf{c}_\beta' B]\mathbf{x}_N + \zeta \end{aligned}$$

- P-OPT:
$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= [\bar{\mathbf{x}}_\beta = \mathbf{b}, \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}] \in opt(P) \\ \underline{\mathbf{c}}_N &\geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c}_N + B'\mathbf{c}_\beta \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{c}_N \geq (A[*,\beta]^{-1}A[*,N])'\mathbf{c}_\beta} \end{aligned}$$

- D-FEASIBILITY: Έστω $\boxed{\bar{\mathbf{y}} = (A[*,\beta]^{-1})'\mathbf{c}_\beta}$. Τότε $\bar{\mathbf{y}} \in feasible(D)$:
$$\begin{aligned} A[*,\beta]'\bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{c}_\beta \\ A[*,N]'\bar{\mathbf{y}} = A[*,N]'(A[*,\beta]^{-1})'\mathbf{c}_\beta = (A[*,\beta]^{-1}A[*,N])'\mathbf{c}_\beta &\leq \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

- D-OPT: $\bar{\mathbf{y}}'\mathbf{a} = \mathbf{c}_\beta' A[*,\beta]^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{c}_\beta'\mathbf{b} = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{y}'\mathbf{a},\ \ \forall \mathbf{y} \in feasible(D)$

Άμεσες Συνέπειες Δυϊκότητας (Ι)

1. Ο SIMPLEX, εκτός από μια βέλτιστη (πρωτεύουσα) λύση για το (P) (όταν αρχικά είναι σε μορφή ($LP_=$)),

$$\bar{\mathbf{x}} = \left[\ \bar{\mathbf{x}}_\beta = A[*,\beta]^{-1}\mathbf{a};\ \ \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}\ \right]$$

παρέχει (έμμεσα) και μια *βέλτιστη δυϊκή λύση* για το (D):

$$\bar{\mathbf{y}} = \left(A[*,\beta]^{-1}\right)' \mathbf{c}_\beta$$

Άμεσες Συνέπειες Δυϊκότητας (Ι)

1. Ο SIMPLEX, εκτός από μια βέλτιστη (πρωτεύουσα) λύση για το (P) (όταν αρχικά είναι σε μορφή ($LP_=$)),

$$\bar{\mathbf{x}} = \left[\ \bar{\mathbf{x}}_\beta = A[*,\beta]^{-1}\mathbf{a};\ \ \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}\ \right]$$

παρέχει (έμμεσα) και μια *βέλτιστη δυϊκή λύση* για το (D):

$$\bar{\mathbf{y}} = \left(A[*,\beta]^{-1}\right)'\mathbf{c}_\beta$$

2. Για οποιοδήποτε ζεύγος δυϊκών γ.π. $\{(P),(D)\}$, οπωσδήποτε θα ισχύει κάποια από τις εξής επιτρεπτές (σημειωμένες με $\surd$) περιπτώσεις:

(P) \ (D)	Φραγμένο	Μη Φραγμένο	Μη Επιλύσιμο
Φραγμένο	?	?	?
Μη Φραγμένο	?	?	?
Μη Επιλύσιμο	?	?	?

Άμεσες Συνέπειες Δυϊκότητας (Ι)

1. Ο SIMPLEX, εκτός από μια βέλτιστη (πρωτεύουσα) λύση για το (P) (όταν αρχικά είναι σε μορφή $(LP_=)$),

$$\bar{\mathbf{x}} = \left[\ \bar{\mathbf{x}}_\beta = A[*,\beta]^{-1}\mathbf{a};\ \ \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}\ \right]$$

παρέχει (έμμεσα) και μια *βέλτιστη δυϊκή λύση* για το (D):

$$\bar{\mathbf{y}} = \left(A[*,\beta]^{-1}\right)' \mathbf{c}_\beta$$

2. Για οποιοδήποτε ζεύγος δυϊκών γ.π. $\{(P),(D)\}$, οπωσδήποτε θα ισχύει κάποια από τις εξής επιτρεπτές (σημειωμένες με $\surd$) περιπτώσεις:

(P) \ (D)	**Φραγμένο**	**Μη Φραγμένο**	**Μη Επιλύσιμο**
Φραγμένο	$\surd$	ΑΔΥΝ.	ΑΔΥΝ.
Μη Φραγμένο	ΑΔΥΝ.	ΑΔΥΝ.	$\surd$
Μη Επιλύσιμο	ΑΔΥΝ.	$\surd$	$\surd$

Άμεσες Συνέπειες Δυϊκότητας (ΙΙ)

ΑΣΚΗΣΗ:

(α) Έστω το γραμμικό πρόγραμμα (P1) και (D1) το δυϊκό του. Σε ποια περίπτωση ανήκει το ζεύγος $\{(P1),(D1)\}$;

(P1) $\boxed{\textbf{min.}\{-x_1 : x_1 + x_2 = 1;\ \ x_1 \in \mathbb{R},\ \ x_2 \in \mathbb{R}\}}$

Άμεσες Συνέπειες Δυϊκότητας (ΙΙ)

ΑΣΚΗΣΗ:

(α) Έστω το γραμμικό πρόγραμμα (P1) και (D1) το δυϊκό του. Σε ποια περίπτωση ανήκει το ζεύγος $\{(P1),(D1)\}$;

(P1) $\boxed{\textbf{min.}\{-x_1 : x_1 + x_2 = 1;\ \ x_1 \in \mathbb{R},\ \ x_2 \in \mathbb{R}\}}$

(D1) $\boxed{\textbf{max.}\{y : y = -1; y = 0; y \in \mathbb{R}\}}$

Άμεσες Συνέπειες Δυϊκότητας (II)

ΑΣΚΗΣΗ:

(α) Έστω το γραμμικό πρόγραμμα (P1) και (D1) το δυϊκό του. Σε ποια περίπτωση ανήκει το ζεύγος $\{(P1),(D1)\}$;

(P1) $\boxed{\mathbf{min}.\{-x_1 : x_1 + x_2 = 1;\ \ x_1 \in \mathbb{R},\ \ x_2 \in \mathbb{R}\}}$ /∗ (ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ) ∗/

(D1) $\boxed{\mathbf{max}.\{y : y = -1; y = 0; y \in \mathbb{R}\}}$ /∗ (ΜΗ ΕΠΙΛΥΣΙΜΟ) ∗/

Άμεσες Συνέπειες Δυϊκότητας (II)

ΑΣΚΗΣΗ:

(α) Έστω το γραμμικό πρόγραμμα (P1) και (D1) το δυϊκό του. Σε ποια περίπτωση ανήκει το ζεύγος $\{(P1),(D1)\}$;

(P1) $\boxed{\mathbf{min}.\{-x_1 : x_1 + x_2 = 1;\ \ x_1 \in \mathbb{R},\ \ x_2 \in \mathbb{R}\}}$ /* (ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ) */

(D1) $\boxed{\mathbf{max}.\{y : y = -1; y = 0; y \in \mathbb{R}\}}$ /* (ΜΗ ΕΠΙΛΥΣΙΜΟ) */

(β) Έστω (P2) το πρόγραμμα που προκύπτει προσθέτοντας στο (P1) περιορισμό προσήμου για τη x_2. Έστω (D2) το δυϊκό του πρόγραμμα. Σε ποια περίπτωση ανήκει τώρα το ζευγάρι $\{(P2),(D2)\}$;

(P2) $\boxed{\mathbf{min}.\{-x_1 : x_1 + x_2 = 1; x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0\}}$

Άμεσες Συνέπειες Δυϊκότητας (ΙΙ)

ΑΣΚΗΣΗ:

(α) Έστω το γραμμικό πρόγραμμα (P1) και (D1) το δυϊκό του. Σε ποια περίπτωση ανήκει το ζεύγος $\{(P1),(D1)\}$;

(P1) $\boxed{\mathbf{min}.\{-x_1 : x_1 + x_2 = 1;\ \ x_1 \in \mathbb{R},\ \ x_2 \in \mathbb{R}\}}$ /* (ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ) */

(D1) $\boxed{\mathbf{max}.\{y : y = -1; y = 0; y \in \mathbb{R}\}}$ /* (ΜΗ ΕΠΙΛΥΣΙΜΟ) */

(β) Έστω (P2) το πρόγραμμα που προκύπτει προσθέτοντας στο (P1) περιορισμό προσήμου για τη x_2. Έστω (D2) το δυϊκό του πρόγραμμα. Σε ποια περίπτωση ανήκει τώρα το ζευγάρι $\{(P2),(D2)\}$;

(P2) $\boxed{\mathbf{min}.\{-x_1 : x_1 + x_2 = 1; x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0\}}$

(D2) $\boxed{\mathbf{max}.\{y : y = -1; y \leq 0; y \in \mathbb{R}\}}$

Άμεσες Συνέπειες Δυϊκότητας (ΙΙ)

ΑΣΚΗΣΗ:

(α) Έστω το γραμμικό πρόγραμμα (P1) και (D1) το δυϊκό του. Σε ποια περίπτωση ανήκει το ζεύγος $\{(P1),(D1)\}$;

(P1) $\boxed{\textbf{min.}\{-x_1 : x_1 + x_2 = 1;\ \ x_1 \in \mathbb{R},\ \ x_2 \in \mathbb{R}\}}$ /* (ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ) */

(D1) $\boxed{\textbf{max.}\{y : y = -1; y = 0; y \in \mathbb{R}\}}$ /* (ΜΗ ΕΠΙΛΥΣΙΜΟ) */

(β) Έστω (P2) το πρόγραμμα που προκύπτει προσθέτοντας στο (P1) περιορισμό προσήμου για τη x_2. Έστω (D2) το δυϊκό του πρόγραμμα. Σε ποια περίπτωση ανήκει τώρα το ζευγάρι $\{(P2),(D2)\}$;

(P2) $\boxed{\textbf{min.}\{-x_1 : x_1 + x_2 = 1; x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0\}}$ /* (ΦΡΑΓΜΕΝΟ) */

(D2) $\boxed{\textbf{max.}\{y : y = -1; y \leq 0; y \in \mathbb{R}\}}$ /* (ΦΡΑΓΜΕΝΟ) */

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (I)

Primal		Dual
$\min\ [\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}]$	$\leftrightarrow$	$\max\ [\mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}]$
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$	$\overset{\mathbf{y}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$	$\overset{\mathbf{z}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$	$\leftrightarrow$	$D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}$

- Έστω τυχόν ζεύγος διανυσμάτων:

$$(\mathbf{p} = [\mathbf{u}; \mathbf{v}], \mathbf{d} = [\mathbf{y}; \mathbf{z}])$$

- Από Ισχυρή Δυϊκότητα:
  Για το ζεύγος οποιοδήποτε ζεύγος *εφικτών* λύσεων $(\mathbf{p}, \mathbf{d}) \in feasible(P) \times feasible(D)$ που *γνωρίζουμε εκ των προτέρων*, το $(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ είναι ταυτόχρονα **ζεύγος βέλτιστων λύσεων** ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ **το πρωτεύον κόστος ισούται με τη δυϊκή ωφέλεια**:

$$\boxed{\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v} = \mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}}$$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (I)

Primal		Dual
$\min\ [\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}]$	$\leftrightarrow$	$\max\ [\mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}]$
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$	$\overset{\mathbf{y}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$	$\overset{\mathbf{z}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$	$\leftrightarrow$	$D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}$

- Έστω τυχόν ζεύγος διανυσμάτων:

$$(\mathbf{p} = [\mathbf{u}; \mathbf{v}], \mathbf{d} = [\mathbf{y}; \mathbf{z}])$$

- Από Ισχυρή Δυϊκότητα:
Για το ζεύγος οποιοδήποτε ζεύγος *εφικτών* λύσεων $(\mathbf{p}, \mathbf{d}) \in \mathit{feasible}(P) \times \mathit{feasible}(D)$ που *γνωρίζουμε εκ των προτέρων*, το $(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ είναι ταυτόχρονα **ζεύγος βέλτιστων λύσεων** ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ **το πρωτεύον κόστος ισούται με τη δυϊκή ωφέλεια**:

$$\boxed{\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v} = \mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}}$$

Q Πώς μπορούμε *να ανιχνεύσουμε την βελτιστότητα* της λύσης $\mathbf{p} \in \mathit{feasible}(P)$ (που ξέρουμε) από την *ενδεχόμενη ύπαρξη δυϊκής λύσης* $\mathbf{d} \in \mathit{feasible}(D)$ (που δεν ξέρουμε), **χωρίς να λύσουμε** τα δυο προγράμματα;

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (ΙΙ)

ΘΕΩΡΗΜΑ [Θεώρημα 4.4 (σημειώσεις)]

Για το ζεύγος δυϊκών προγραμμάτων (R, D)

Primal		Dual
$\min\ [\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}]$	$\leftrightarrow$	$\max\ [\mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}]$
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$	$\overset{\mathbf{y}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$	$\overset{\mathbf{z}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$	$\leftrightarrow$	$D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}$

το $(\mathbf{p} = [\mathbf{u}; \mathbf{v}], \mathbf{d} = [\mathbf{y}; \mathbf{z}]) \in feas(P) \times feas(D)$ είναι ζεύγος **βέλτιστων λύσεων** ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ:

1. $\forall r \in [m_2], (\ E[r,*]\mathbf{u} + F[r,*]\mathbf{v} - b_r\ ) \cdot z_r = 0$ /* (primal slackness) */
2. $\forall t \in [n_1], (\ k_t - C[*,t]'\mathbf{y} - E[*,t]'\mathbf{z}\ ) \cdot u_k = 0$ /* (dual slackness) */

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.4 (σημειώσεις)]

Από εφικτότητα πρωτεύουσας & δυϊκής λύσης ισχύει:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}'[C\mathbf{u} + D\mathbf{v} - \mathbf{a}] &= 0 \\
\mathbf{z}'[E\mathbf{u} + F\mathbf{v} - \mathbf{b}] &\geq 0 \\
\mathbf{u}'[\mathbf{k} - C'\mathbf{y} - E'\mathbf{z}] &\geq 0 \\
\mathbf{v}'[\mathbf{s} - D'\mathbf{y} - F'\mathbf{z}] &= 0
\end{aligned}$$

Primal		Dual
min $[\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}]$	$\leftrightarrow$	**max** $[\mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}]$
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$	$\overset{\mathbf{y}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$	$\overset{\mathbf{z}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$	$\leftrightarrow$	$D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.4 (σημειώσεις)]

Από εφικτότητα πρωτεύουσας & δυϊκής λύσης ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'[C\mathbf{u} + D\mathbf{v} - \mathbf{a}] &= 0 \\ \mathbf{z}'[E\mathbf{u} + F\mathbf{v} - \mathbf{b}] &\geq 0 \\ \mathbf{u}'[\mathbf{k} - C'\mathbf{y} - E'\mathbf{z}] &\geq 0 \\ \mathbf{v}'[\mathbf{s} - D'\mathbf{y} - F'\mathbf{z}] &= 0 \end{aligned}$$

Primal		Dual
$\min\ [\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}]$	$\leftrightarrow$	$\max\ [\mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}]$
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$	$\overset{\mathbf{y}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$	$\overset{\mathbf{z}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$	$\leftrightarrow$	$D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}$

$$\begin{aligned} gap(\mathbf{p},\mathbf{d}) &= \mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v} - \mathbf{a}'\mathbf{y} - \mathbf{b}'\mathbf{z} \\ &\geq [\mathbf{u}'C'\mathbf{y} + \mathbf{u}'E'\mathbf{z}] + [\mathbf{v}'D'\mathbf{y} + \mathbf{v}'F'\mathbf{z}] \\ &\quad -[\mathbf{y}'C\mathbf{u} + \mathbf{y}'D\mathbf{v}] - [\mathbf{z}'E\mathbf{u} + \mathbf{z}'F\mathbf{v}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

DUALITY GAP

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (III)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [Θεώρημα 4.4 (σημειώσεις)]

Από εφικτότητα πρωτεύουσας & δυϊκής λύσης ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'[C\mathbf{u} + D\mathbf{v} - \mathbf{a}] &= 0 \\ \mathbf{z}'[E\mathbf{u} + F\mathbf{v} - \mathbf{b}] &\geq 0 \\ \mathbf{u}'[\mathbf{k} - C'\mathbf{y} - E'\mathbf{z}] &\geq 0 \\ \mathbf{v}'[\mathbf{s} - D'\mathbf{y} - F'\mathbf{z}] &= 0 \end{aligned}$$

Primal		Dual
$\min\ [\mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v}]$	$\leftrightarrow$	$\max\ [\mathbf{a}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{z}]$
$C\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{a}$	$\overset{\mathbf{y}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m_1}$
$E\mathbf{u} + F\mathbf{v} \geq \mathbf{b}$	$\overset{\mathbf{z}}{\leftrightarrow}$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}$	$\leftrightarrow$	$C'\mathbf{y} + E'\mathbf{z} \leq \mathbf{k}$
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_2}$	$\leftrightarrow$	$D'\mathbf{y} + F'\mathbf{z} = \mathbf{s}$

DUALITY GAP

$$\begin{aligned} gap(\mathbf{p}, \mathbf{d}) &= \mathbf{k}'\mathbf{u} + \mathbf{s}'\mathbf{v} - \mathbf{a}'\mathbf{y} - \mathbf{b}'\mathbf{z} \\ &\geq [\mathbf{u}'C'\mathbf{y} + \mathbf{u}'E'\mathbf{z}] + [\mathbf{v}'D'\mathbf{y} + \mathbf{v}'F'\mathbf{z}] \\ &\quad -[\mathbf{y}'C\mathbf{u} + \mathbf{y}'D\mathbf{v}] - [\mathbf{z}'E\mathbf{u} + \mathbf{z}'F\mathbf{v}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad gap(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathbf{z}' \cdot (E\mathbf{u} + F\mathbf{v} - \mathbf{b}) &= 0 \\ \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{k} - C'\mathbf{y} - E'\mathbf{z}) &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad \blacksquare$$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (IV)

ΑΣΚΗΣΗ: Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα

$$
(P4)\quad
\begin{array}{|llrcr|}
\hline
\textbf{minimize} & & -4x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 4x_4 & & \\
& \text{s.t.:} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 6 \\
& & x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 & \geq & 4 \\
& & 4x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 & \geq & -8 \\
& \multicolumn{2}{r}{x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \in \mathbb{R}} & & \\
\hline
\end{array}
$$

και ελέγξτε αν το διάνυσμα $\bar{\mathbf{x}} = [1; -1; 2; 0; -3]$ είναι βέλτιστη λύση του (P4), χωρίς να το λύσετε το ή να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο τερματισμού του SIMPLEX.

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (V)

$$(P4)$$

$$\begin{array}{lrcrl}
\textbf{minimize} & -4x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 4x_4 & & & \\
\text{s.t.}: & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 6 & : y \\
 & x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 & \geq & 4 & : z_1 \\
 & 4x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 & \geq & -8 & : z_2 \\
 & \multicolumn{4}{c}{x_1 \geq 0,\ \ x_2 \in \mathbb{R},\ \ x_3 \geq 0,\ \ x_4 \geq 0,\ \ x_5 \in \mathbb{R}}
\end{array}$$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (V)

$$(P4)$$

$$
\begin{array}{llcrl}
\textbf{minimize} & -4x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 4x_4 & & & \\
\text{s.t. :} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 6 & : y \\
 & x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 & \geq & 4 & : z_1 \\
 & 4x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 & \geq & -8 & : z_2 \\
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \in \mathbb{R}, \;\; x_3 \geq 0, \;\; x_4 \geq 0, \;\; x_5 \in \mathbb{R}$$

$$(D4)$$

$$
\begin{array}{llcrl}
\textbf{maximize} & 6y + 4z_1 - 8z_2 & & & \\
\text{s.t. :} & 2y + z_1 + 4z_2 & \leq & -4 & : x_1 \\
 & -y + 4z_1 + 6z_2 & = & 2 & : x_2 \\
 & 3y - z_1 - z_2 & \leq & -11 & : x_3 \\
 & -2y - z_1 - z_2 & \leq & 4 & : x_4 \\
 & y - 3z_1 + z_2 & = & 0 & : x_5 \\
\end{array}
$$

$$y \in \mathbb{R}, \;\; z_1 \geq 0, \;\; z_2 \geq 0$$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (VI)

- Εστω ότι η $\bar{\mathbf{x}} = [1; -1; 2; 0; -3]$ είναι βέλτιστη για το (P4).

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (VI)

- Εστω ότι η $\bar{\mathbf{x}} = [1; -1; 2; 0; -3]$ είναι βέλτιστη για το (P4).

  [ΒΗΜΑ 1] Έλεγχος συνθηκών *συμπληρωματικής χαλαρότητας* για το $[\bar{y}; \bar{z}_1; \bar{z}_2]$:
  - $z_1 \cdot [x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 - 4] = 0 \Rightarrow \bar{z}_1[1 - 4 - 2 + 9 - 4] = 0$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (VI)

- Εστω ότι η $\bar{\mathbf{x}} = [1; -1; 2; 0; -3]$ είναι βέλτιστη για το (P4).

  [BHMA 1] Έλεγχος συνθηκών *συμπληρωματικής χαλαρότητας* για το $[\bar{y}; \bar{z}_1; \bar{z}_2]$:
  - $z_1 \cdot [x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 - 4] = 0 \Rightarrow \bar{z}_1[1 - 4 - 2 + 9 - 4] = 0$
  - $z_2[4x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 + 8] = 0 \Rightarrow \bar{z}_2[4 - 6 - 2 - 3 + 8] = 0$
    $\Rightarrow \boxed{\bar{z}_2 = 0}$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (VI)

- Εστω ότι η $\bar{\mathbf{x}} = [1; -1; 2; 0; -3]$ είναι βέλτιστη για το (P4).

  [BHMA 1] Έλεγχος συνθηκών *συμπληρωματικής χαλαρότητας* για το $[\bar{y}; \bar{z}_1; \bar{z}_2]$:
  - $z_1 \cdot [x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 - 4] = 0 \Rightarrow \bar{z}_1[1 - 4 - 2 + 9 - 4] = 0$
  - $z_2[4x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 + 8] = 0 \Rightarrow \bar{z}_2[4 - 6 - 2 - 3 + 8] = 0$
    $\Rightarrow \boxed{\bar{z}_2 = 0}$
  - $\left.\begin{array}{rcl} x_1[-4 - 2y - z_1 - 4z_2] = 0 \Rightarrow 2\bar{y} + \bar{z}_1 & = & -4 \\ x_3[-11 - 3y + z_1 + z_2] = 0 \Rightarrow 3\bar{y} - \bar{z}_1 & = & -11 \end{array}\right\}$
    $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{\bar{z}_1 = 2} \\ \boxed{\bar{y} = -3} \end{array}\right.$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (VI)

- Εστω ότι η $\bar{\mathbf{x}} = [1; -1; 2; 0; -3]$ είναι βέλτιστη για το (P4).

  [ΒΗΜΑ 1] Έλεγχος συνθηκών *συμπληρωματικής χαλαρότητας* για το $[\bar{y}; \bar{z}_1; \bar{z}_2]$:
  - $z_1 \cdot [x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 - 4] = 0 \Rightarrow \bar{z}_1[1 - 4 - 2 + 9 - 4] = 0$
  - $z_2[4x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 + 8] = 0 \Rightarrow \bar{z}_2[4 - 6 - 2 - 3 + 8] = 0$
    $\Rightarrow \boxed{\bar{z}_2 = 0}$
  - $\left.\begin{array}{lcr} x_1[-4 - 2y - z_1 - 4z_2] = 0 \Rightarrow 2\bar{y} + \bar{z}_1 & = & -4 \\ x_3[-11 - 3y + z_1 + z_2] = 0 \Rightarrow 3\bar{y} - \bar{z}_1 & = & -11 \end{array}\right\}$
    $\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\bar{z}_1 = 2} \\ \boxed{\bar{y} = -3} \end{cases}$

  [ΒΗΜΑ 2] Έλεγχος *εφικτότητας* της $[\bar{y}; \bar{z}_1; \bar{z}_2] = [-3; 2; 0]$:
  $-\bar{y} + 4\bar{z}_1 + 6\bar{z}_2 = 2 \Rightarrow 3 + 8 = 2$ (ΑΤΟΠΟ)

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (VI)

- Εστω ότι η $\bar{\mathbf{x}} = [1; -1; 2; 0; -3]$ είναι βέλτιστη για το (P4).

  [BHMA 1] Έλεγχος συνθηκών *συμπληρωματικής χαλαρότητας* για το $[\bar{y}; \bar{z}_1; \bar{z}_2]$:
  - $z_1 \cdot [x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 - 4] = 0 \Rightarrow \bar{z}_1[1 - 4 - 2 + 9 - 4] = 0$
  - $z_2[4x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 + 8] = 0 \Rightarrow \bar{z}_2[4 - 6 - 2 - 3 + 8] = 0$ $\Rightarrow \boxed{\bar{z}_2 = 0}$
  - $\left.\begin{array}{rcl} x_1[-4 - 2y - z_1 - 4z_2] = 0 \Rightarrow 2\bar{y} + \bar{z}_1 & = & -4 \\ x_3[-11 - 3y + z_1 + z_2] = 0 \Rightarrow 3\bar{y} - \bar{z}_1 & = & -11 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{\bar{z}_1 = 2} \\ \boxed{\bar{y} = -3} \end{array}\right.$

  [BHMA 2] Έλεγχος *εφικτότητας* της $[\bar{y}; \bar{z}_1; \bar{z}_2] = [-3; 2; 0]$:
  $-\bar{y} + 4\bar{z}_1 + 6\bar{z}_2 = 2 \Rightarrow 3 + 8 = 2$ (ΑΤΟΠΟ)

$\therefore$ Η εφικτή πρωτεύουσα λύση $\bar{\mathbf{x}} = [1; -1; 2; 0; -3]$ **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ** βέλτιστη για το (P4).

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (VII)

ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε το δυϊκό του (P5), και εξετάστε αν η λύση $[2/3; 0; 14/3]$ είναι βέλτιστη λύση. Αν ναι, βρείτε και μια βέλτιστη λύση για το δυϊκό του πρόγραμμα.

$$(P5)\quad \begin{array}{lrrrcl} \text{minimize} & y_1 & +2y_2 & +y_3 & & \\ \text{s.t.}: & y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & 2 \\ & -y_1 & +y_2 & +y_3 & \geq & 4 \\ & 2y_1 & & +y_3 & \geq & 6 \\ & y_1 & +y_2 & +y_3 & \geq & 2 \\ & \multicolumn{3}{c}{y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0} & & \end{array}$$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (VII)

ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε το δυϊκό του (P5), και εξετάστε αν η λύση $[2/3; 0; 14/3]$ είναι βέλτιστη λύση. Αν ναι, βρείτε και μια βέλτιστη λύση για το δυϊκό του πρόγραμμα.

$$(P5)\quad \begin{array}{|lrrrcrl|}
\hline
\text{minimize} & y_1 & +2y_2 & +y_3 & & & \\
\text{s.t.}: & y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & 2 & : z_1 \\
 & -y_1 & +y_2 & +y_3 & \geq & 4 & : z_2 \\
 & 2y_1 & & +y_3 & \geq & 6 & : z_3 \\
 & y_1 & +y_2 & +y_3 & \geq & 2 & : z_4 \\
 & \multicolumn{4}{c}{y_1 \geq 0,\quad y_2 \geq 0,\quad y_3 \geq 0} & & \\
\hline
\end{array}$$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (VII)

ΑΣΚΣΗΣΗ: Βρείτε το δυϊκό του (P5), και εξετάστε αν η λύση $[2/3; 0; 14/3]$ είναι βέλτιστη λύση. Αν ναι, βρείτε και μια βέλτιστη λύση για το δυϊκό του πρόγραμμα.

(P5)

$$
\begin{array}{lrrrcrl}
\text{minimize} & y_1 & +2y_2 & +y_3 & & & \\
\text{s.t. :} & y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & 2 & : z_1 \\
 & -y_1 & +y_2 & +y_3 & \geq & 4 & : z_2 \\
 & 2y_1 & & +y_3 & \geq & 6 & : z_3 \\
 & y_1 & +y_2 & +y_3 & \geq & 2 & : z_4 \\
 & \multicolumn{6}{c}{y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0}
\end{array}
$$

(D5)

$$
\begin{array}{lrcrl}
\text{maximize} & 2z_1 + 4z_2 + 6z_3 + 2z_4 & & & \\
\text{s.t. :} & z_1 - z_2 + 2z_3 + z_4 & \leq & 1 & : y_1 \\
 & -2z_1 + z_2 + z_4 & \leq & 2 & : y_2 \\
 & z_1 + z_2 + z_3 + z_4 & \leq & 1 & : y_3 \\
 & \multicolumn{4}{c}{z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq 0, \quad z_3 \geq 0, \quad z_4 \geq 0}
\end{array}
$$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (VIII)

- Έστω ζεύβος βέλτιστων λύσεων $(\bar{\mathbf{y}} = [2/3; 0; 14/3], \bar{\mathbf{z}})$.

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (VIII)

- Έστω ζεύβος βέλτιστων λύσεων $(\bar{\mathbf{y}} = [2/3; 0; 14/3], \bar{\mathbf{z}})$.
- [BHMA 1] Από συνθήκες συμπληρ. χαλαρότητας:
  - $z_1[y_1 - 2y_2 + y_3 - 2] = 0 \Rightarrow \bar{z}_1[2/3 + 14/3 - 2] = 0$ $\boxed{\bar{z}_1 = 0}$
  - $z_2[-y_1 + y_2 + y_3 - 4] = 0 \Rightarrow \bar{z}_2[-2/3 + 14/3 - 4] = 0$
  - $z_3[2y_1 + y_3 - 6] = 0 \Rightarrow \bar{z}_3[4/3 + 14/3 - 6] = 0$
  - $z_4[y_1 + y_2 + y_3 - 2] = 0 \Rightarrow \bar{z}_4[2/3 + 14/3 - 2] = 0$ $\boxed{\bar{z}_4 = 0}$
  - $y_1[1 - z_1 + z_2 - 2z_3 - z_4] = 0 \Rightarrow 2/3[1 + \bar{z}_2 - 2\bar{z}_3] = 0$
    $\boxed{-\bar{z}_2 + 2\bar{z}_3 = 1}$
  - $y_3[1 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4] = 0 \Rightarrow 14/3[1 - \bar{z}_2 - \bar{z}_3] = 0$
    $\boxed{\bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 1}$
  - Από επίλυση του 2×2 συστήματος: $\boxed{\bar{z}_2 = 1/3, \bar{z}_3 = 2/3}$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (VIII)

- Έστω ζεύβος βέλτιστων λύσεων $(\bar{\mathbf{y}} = [2/3; 0; 14/3], \bar{\mathbf{z}})$.
- [ΒΗΜΑ 1] Από συνθήκες συμπληρ. χαλαρότητας:
  - $z_1[y_1 - 2y_2 + y_3 - 2] = 0 \Rightarrow \bar{z}_1[2/3 + 14/3 - 2] = 0$ $\quad\boxed{\bar{z}_1 = 0}$
  - $z_2[-y_1 + y_2 + y_3 - 4] = 0 \Rightarrow \bar{z}_2[-2/3 + 14/3 - 4] = 0$
  - $z_3[2y_1 + y_3 - 6] = 0 \Rightarrow \bar{z}_3[4/3 + 14/3 - 6] = 0$
  - $z_4[y_1 + y_2 + y_3 - 2] = 0 \Rightarrow \bar{z}_4[2/3 + 14/3 - 2] = 0$ $\quad\boxed{\bar{z}_4 = 0}$
  - $y_1[1 - z_1 + z_2 - 2z_3 - z_4] = 0 \Rightarrow 2/3[1 + \bar{z}_2 - 2\bar{z}_3] = 0$
    $\boxed{-\bar{z}_2 + 2\bar{z}_3 = 1}$
  - $y_3[1 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4] = 0 \Rightarrow 14/3[1 - \bar{z}_2 - \bar{z}_3] = 0$
    $\boxed{\bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 1}$
  - Από επίλυση του 2×2 συστήματος: $\quad\boxed{\bar{z}_2 = 1/3, \bar{z}_3 = 2/3}$
- [ΒΗΜΑ 2] (εφικτότητα;) Το $\bar{\mathbf{z}} = [0; 1/3; 2/3; 0]$ είναι εφικτή δυϊκή λύση.

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (VIII)

- Έστω ζεύβος βέλτιστων λύσεων ($\bar{\mathbf{y}} = [2/3; 0; 14/3], \bar{\mathbf{z}}$).
- [ΒΗΜΑ 1] Από συνθήκες συμπληρ. χαλαρότητας:
  - $z_1[y_1 - 2y_2 + y_3 - 2] = 0 \Rightarrow \bar{z}_1[2/3 + 14/3 - 2] = 0$ $\boxed{\bar{z}_1 = 0}$
  - $z_2[-y_1 + y_2 + y_3 - 4] = 0 \Rightarrow \bar{z}_2[-2/3 + 14/3 - 4] = 0$
  - $z_3[2y_1 + y_3 - 6] = 0 \Rightarrow \bar{z}_3[4/3 + 14/3 - 6] = 0$
  - $z_4[y_1 + y_2 + y_3 - 2] = 0 \Rightarrow \bar{z}_4[2/3 + 14/3 - 2] = 0$ $\boxed{\bar{z}_4 = 0}$
  - $y_1[1 - z_1 + z_2 - 2z_3 - z_4] = 0 \Rightarrow 2/3[1 + \bar{z}_2 - 2\bar{z}_3] = 0$
    $\boxed{-\bar{z}_2 + 2\bar{z}_3 = 1}$
  - $y_3[1 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4] = 0 \Rightarrow 14/3[1 - \bar{z}_2 - \bar{z}_3] = 0$
    $\boxed{\bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 1}$
  - Από επίλυση του 2×2 συστήματος: $\boxed{\bar{z}_2 = 1/3, \bar{z}_3 = 2/3}$
- [ΒΗΜΑ 2] (εφικτότητα;) Το $\bar{\mathbf{z}} = [0; 1/3; 2/3; 0]$ είναι εφικτή δυϊκή λύση.

$\therefore$ Το ζεύγος $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})$ είναι και βέλτιστο για τα (P5), (D5).

Λήμμα του Farkas

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ FARKAS [Θεώρημα 4.5 (σημειώσεις)]

Το σύστημα γραμμικών *ανισοτήτων* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{a}$ είναι **μη επιλύσιμο** ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ το (*πάντα επιλύσιμο*) γραμ. πρόγραμμα $\min.\{\mathbf{a}'\mathbf{y} : A'\mathbf{y} = \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$ έχει λύσεις με **αρνητικό κόστος**.

Λήμμα του Farkas

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ FARKAS [Θεώρημα 4.5 (σημειώσεις)]

Το σύστημα γραμμικών *ανισοτήτων* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{a}$ είναι **μη επιλύσιμο** ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ το (*πάντα επιλύσιμο*) γραμ. πρόγραμμα $\min.\{\mathbf{a}'\mathbf{y} : A'\mathbf{y} = \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$ έχει λύσεις με **αρνητικό κόστος**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

(P) $\boxed{\min.\{\mathbf{a}'\mathbf{y} : A'\mathbf{y} = \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}}$ (D) $\boxed{\max.\{\mathbf{0}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{a}\}}$

Λήμμα του Farkas

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ FARKAS [Θεώρημα 4.5 (σημειώσεις)]

Το σύστημα γραμμικών *ανισοτήτων* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{a}$ είναι **μη επιλύσιμο** ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ το (*πάντα επιλύσιμο*) γραμ. πρόγραμμα $\min.\{\mathbf{a}'\mathbf{y} : A'\mathbf{y} = \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$ έχει λύσεις με **αρνητικό κόστος**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

(P) $\boxed{\min.\{\mathbf{a}'\mathbf{y} : A'\mathbf{y} = \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}}$ (D) $\boxed{\max.\{\mathbf{0}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{a}\}}$

(D) : **Ποτέ** μη φραγμένο.

Λήμμα του Farkas

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ FARKAS [Θεώρημα 4.5 (σημειώσεις)]

Το σύστημα γραμμικών *ανισοτήτων* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{a}$ είναι **μη επιλύσιμο** ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ το (*πάντα επιλύσιμο*) γραμ. πρόγραμμα $\min.\{\mathbf{a}'\mathbf{y} : A'\mathbf{y} = \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$ έχει λύσεις με **αρνητικό κόστος**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

(P) $\boxed{\min.\{\mathbf{a}'\mathbf{y} : A'\mathbf{y} = \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}}$ (D) $\boxed{\max.\{\mathbf{0}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{a}\}}$

(D) : **Ποτέ** μη φραγμένο.

(P) : **Πάντα** επιλύσιμο.

Λήμμα του Farkas

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ FARKAS [Θεώρημα 4.5 (σημειώσεις)]

Το σύστημα γραμμικών *ανισοτήτων* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{a}$ είναι **μη επιλύσιμο** ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ το (*πάντα επιλύσιμο*) γραμ. πρόγραμμα $\min.\{\mathbf{a}'\mathbf{y} : A'\mathbf{y} = \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$ έχει λύσεις με **αρνητικό κόστος**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

(P) $\boxed{\min.\{\mathbf{a}'\mathbf{y} : A'\mathbf{y} = \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}}$ (D) $\boxed{\max.\{\mathbf{0}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{a}\}}$

(D) : **Ποτέ** μη φραγμένο.

(P) : **Πάντα** επιλύσιμο.

(P) \ (D)	Φραγμένο	Μη Φραγμένο	Μη Επιλύσιμο
Φραγμένο	√	ΑΔΥΝ.	ΑΔΥΝ.
Μη Φραγμένο	ΑΔΥΝ.	ΑΔΥΝ.	√
Μη Επιλύσιμο	ΑΔΥΝ.	√	√

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ FARKAS [Θεώρημα 4.5 (σημειώσεις)]

Το σύστημα γραμμικών *ανισοτήτων* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{a}$ είναι **μη επιλύσιμο** ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ το (*πάντα επιλύσιμο*) γραμ. πρόγραμμα $\min.\{\mathbf{a}'\mathbf{y} : A'\mathbf{y} = \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$ έχει λύσεις με **αρνητικό κόστος**.

ΕΞΗΓΗΣΗ:

(P) $\boxed{\min.\{\mathbf{a}'\mathbf{y} : A'\mathbf{y} = \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}}$ (D) $\boxed{\max.\{\mathbf{0}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{a}\}}$

(D) : **Ποτέ** μη φραγμένο.

(P) : **Πάντα** επιλύσιμο.

(P) \ (D)	Φραγμένο	Μη Φραγμένο	Μη Επιλύσιμο
Φραγμένο	√	ΑΔΥΝ.	ΑΔΥΝ.
Μη Φραγμένο	ΑΔΥΝ.	ΑΔΥΝ.	√
Μη Επιλύσιμο	ΑΔΥΝ.	√	√

∴

(P) μη φραγμένο ΚΑΙ (D) μη επιλύσιμο
Ή
(P), (D) φραγμένα ΚΑΙ κάθε πρωτεύουσα λύση έχει μη αρνητικό κόστος

Δυϊκότητα & SIMPLEX (I)

(P) $\boxed{\text{minimize}\,\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$

(D) $\boxed{\text{maximize}\,\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\ \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}}$

Δυϊκότητα & SIMPLEX (I)

$$\text{(P)} \quad \boxed{\text{minimize}\left\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\right\}}$$

$$\text{(D)} \quad \boxed{\text{maximize}\left\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\ \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\right\}}$$

$$\equiv \quad \boxed{\text{minimize}\left\{-\mathbf{a}'\mathbf{u} : -A'\mathbf{u} \geq -\mathbf{c};\ \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\right\}}$$

Δυϊκότητα & SIMPLEX (I)

$$\text{(P)} \quad \boxed{\text{minimize}\,\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$$

$$\text{(D)} \quad \boxed{\text{maximize}\,\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\ \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}}$$

$$\equiv \quad \boxed{\text{minimize}\,\{-\mathbf{a}'\mathbf{u} : -A'\mathbf{u} \geq -\mathbf{c};\ \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}}$$

- Λεξικά του SIMPLEX;
- (P):

$$\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{x} & 1 \\ \cline{2-3} \mathbf{s} = & A & -\mathbf{a} \\ \cline{2-3} z = & \mathbf{c}' & 0 \\ \cline{2-3} \end{array}$$

Δυϊκότητα & SIMPLEX (I)

$$\text{(P)} \quad \boxed{\text{minimize}\,\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a};\;\; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$$

$$\text{(D)} \quad \boxed{\text{maximize}\,\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\;\; \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}}$$

$$\equiv \quad \boxed{\text{minimize}\,\{-\mathbf{a}'\mathbf{u} : -A'\mathbf{u} \geq -\mathbf{c};\;\; \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}}$$

- Λεξικά του SIMPLEX;
- (P): $$\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{x} & 1 \\ \cline{2-3} \mathbf{s} = & A & -\mathbf{a} \\ \cline{2-3} z = & \mathbf{c}' & 0 \\ \cline{2-3} \end{array}$$
- (D): $$\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{u} & 1 \\ \cline{2-3} \mathbf{t} = & -A' & \mathbf{c} \\ \cline{2-3} w = & -\mathbf{a}' & 0 \\ \cline{2-3} \end{array}$$

Δυϊκότητα & SIMPLEX (I)

(P) $\boxed{\text{minimize}\ \{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$

(D) $\boxed{\text{maximize}\ \{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\ \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}}$

$\equiv$ $\boxed{\text{minimize}\ \{-\mathbf{a}'\mathbf{u} : -A'\mathbf{u} \geq -\mathbf{c};\ \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}}$

- Λεξικά του SIMPLEX;

- (P):

$$\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{x} & 1 \\ \hline \mathbf{s} = & A & -\mathbf{a} \\ \hline z = & \mathbf{c}' & 0 \\ \hline \end{array}$$

- (D):

$$\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{u} & 1 \\ \hline \mathbf{t} = & -A' & \mathbf{c} \\ \hline w = & -\mathbf{a}' & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|c|c|} & -\mathbf{u} & 1 \\ \hline \mathbf{t} = & A' & \mathbf{c} \\ \hline w = & -\mathbf{a}' & 0 \\ \hline \end{array}$$

Δυϊκότητα & SIMPLEX (I)

$$\text{(P)} \qquad \boxed{\text{minimize}\,\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a};\;\; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$$

$$\text{(D)} \qquad \boxed{\text{maximize}\,\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\;\; \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}}$$

$$\equiv \qquad \boxed{\text{minimize}\,\{-\mathbf{a}'\mathbf{u} : -A'\mathbf{u} \geq -\mathbf{c};\;\; \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}}$$

- Λεξικά του SIMPLEX;

- (P): $\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{x} & 1 \\ \hline \mathbf{s} = & A & -\mathbf{a} \\ \hline z = & \mathbf{c}' & 0 \\ \hline \end{array}$

- (D): $\begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{u} & 1 \\ \hline \mathbf{t} = & -A' & \mathbf{c} \\ \hline w = & -\mathbf{a}' & 0 \\ \hline \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{r|c|c|} & -\mathbf{u} & 1 \\ \hline \mathbf{t} = & A' & \mathbf{c} \\ \hline w = & -\mathbf{a}' & 0 \\ \hline \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{r|c|c|} & \mathbf{t}' = & w = \\ \hline -\mathbf{u} & A & -\mathbf{a} \\ \hline 1 & \mathbf{c}' & 0 \\ \hline \end{array}$

Δυϊκότητα & SIMPLEX (II)

Κοινό Λεξικό για (P), (D)

$$
\begin{array}{rrc|c|c|}
 & & & \mathbf{u}'_{[n]} = & w = \\
 & & & \mathbf{x}_{[n]} & 1 \\
\cline{4-5}
-\mathbf{u}_{[n+m]\setminus[n]} & \mathbf{x}_{[n+m]\setminus[n]} & = & A & -\mathbf{a} \\
\cline{4-5}
1 & z & = & \mathbf{c}' & 0 \\
\cline{4-5}
\end{array}
$$

Δυϊκότητα & SIMPLEX (II)

Κοινό Λεξικό για (P), (D)

$$
\begin{array}{rr|c|c|}
 & & \mathbf{u}'_{[n]} = & w = \\
 & & \mathbf{x}_{[n]} & 1 \\
\hline
-\mathbf{u}_{[n+m]\setminus[n]} & \mathbf{x}_{[n+m]\setminus[n]} = & A & -\mathbf{a} \\
\hline
1 & z = & \mathbf{c}' & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

➡ ...primal pivots... ➡

$$
\begin{array}{rr|c|c|}
 & & \mathbf{u}'_{\gamma} = \mathbf{u}'_{[n+m]\setminus\beta} & w = \\
 & & \mathbf{x}_{[n+m]\setminus\beta} & 1 \\
\hline
-\mathbf{u}_{[n+m]\setminus\gamma} = -\mathbf{u}_{\beta} & \mathbf{x}_{\beta} = & B & \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\
\hline
1 & z = & \underline{\mathbf{c}}'_{[n+m]\setminus\beta} \geq \mathbf{0}' & \text{primal cost} = \text{dual profit} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr|c|c|}
 & & & \mathbf{u}'_{[n]} = & w = \\
 & & & \mathbf{x}_{[n]} & 1 \\
\hline
-\mathbf{u}_{[n+m]\setminus[n]} & & \mathbf{x}_{[n+m]\setminus[n]} = & A & -\mathbf{a} \\
\hline
1 & & z = & \mathbf{c}' & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ ...primal pivots... $\Rightarrow$

$$
\begin{array}{rr|c|c|}
 & & \mathbf{u}'_{\gamma} = \mathbf{u}'_{[n+m]\setminus\beta} & w = \\
 & & \mathbf{x}_{[n+m]\setminus\beta} & 1 \\
\hline
-\mathbf{u}_{[n+m]\setminus\gamma} = -\mathbf{u}_{\beta} & \mathbf{x}_{\beta} = & B & \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\
\hline
1 & z = & \underline{\mathbf{c}}'_{[n+m]\setminus\beta} \geq \mathbf{0}' & \text{primal cost} = \text{dual profit} \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ Ο **PRIMAL SIMPLEX** λύνει ταυτόχρονα τόσο το πρωτεύον ΓΠ όσο και αντίστοιχο το δυϊκό ΓΠ.

Δυϊκότητα & SIMPLEX (II)

Κοινό Λεξικό για (P), (D)

$$
\begin{array}{rr|c|c|}
 & & \mathbf{u}'_{[n]} = & w = \\
 & & \mathbf{x}_{[n]} & 1 \\
\hline
-\mathbf{u}_{[n+m]\setminus[n]} & \mathbf{x}_{[n+m]\setminus[n]} = & A & -\mathbf{a} \\
\hline
1 & z = & \mathbf{c}' & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

➡ ...primal pivots... ➡

$$
\begin{array}{rr|c|c|}
 & & \mathbf{u}'_{\gamma} = \mathbf{u}'_{[n+m]\setminus\beta} & w = \\
 & & \mathbf{x}_{[n+m]\setminus\beta} & 1 \\
\hline
-\mathbf{u}_{[n+m]\setminus\gamma} = -\mathbf{u}_{\beta} & \mathbf{x}_{\beta} = & B & \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\
\hline
1 & z = & \underline{\mathbf{c}}'_{[n+m]\setminus\beta} \geq \mathbf{0}' & \text{primal cost} = \text{dual profit} \\
\hline
\end{array}
$$

∴ Ο **PRIMAL SIMPLEX** λύνει ταυτόχρονα τόσο το πρωτεύον ΓΠ όσο και αντίστοιχο το δυϊκό ΓΠ.

Q Ποια είναι στο τελικό ταμπλό η **βέλτιστη δυϊκή λύση**;

Δυϊκότητα & SIMPLEX (II)

Κοινό Λεξικό για (P),(D)

$$
\begin{array}{rr|c|c|}
 & & \mathbf{u}'_{[n]} = & w = \\
 & & \mathbf{x}_{[n]} & 1 \\
\hline
-\mathbf{u}_{[n+m]\setminus[n]} & \mathbf{x}_{[n+m]\setminus[n]} = & A & -\mathbf{a} \\
\hline
1 & z = & \mathbf{c}' & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ …primal pivots… $\Rightarrow$

$$
\begin{array}{rr|c|c|}
 & & \mathbf{u}'_{\gamma} = \mathbf{u}'_{[n+m]\setminus\beta} & w = \\
 & & \mathbf{x}_{[n+m]\setminus\beta} & 1 \\
\hline
-\mathbf{u}_{[n+m]\setminus\gamma} = -\mathbf{u}_{\beta} & \mathbf{x}_{\beta} = & B & \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\
\hline
1 & z = & \underline{\mathbf{c}}'_{[n+m]\setminus\beta} \geq \mathbf{0}' & \text{primal cost} = \text{dual profit} \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ Ο **PRIMAL SIMPLEX** λύνει ταυτόχρονα τόσο το πρωτεύον ΓΠ όσο και αντίστοιχο το δυϊκό ΓΠ.

$\boxed{\text{Q}}$ Ποια είναι στο τελικό ταμπλό η **βέλτιστη δυϊκή λύση**;

$\boxed{\text{A}}$ $\left[\ \bar{\mathbf{u}}_{[n+m]\setminus\beta} = \underline{\mathbf{c}}_{[n+m]\setminus\beta} = \mathbf{c}_{[n+m]\setminus\beta} + (A[*,\beta]^{-1})'\mathbf{c}_{\beta}\ ;\ \bar{\mathbf{u}}_{\beta} = \mathbf{0}\ \right]$

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (I)

- Κοινό Λεξικό:

$$
\begin{array}{rr|c|c|}
 & & \mathbf{u}'_\gamma = \mathbf{u}'_{[n+m]\setminus\beta} & w = \\
 & & \mathbf{x}_{[n+m]\setminus\beta} & 1 \\
\hline
-\mathbf{u}_{[n+m]\setminus\gamma} = -\mathbf{u}_\beta & \mathbf{x}_\beta = & B & \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\
\hline
1 & z = & \underline{\mathbf{c}}'_{[n+m]\setminus\beta} \geq \mathbf{0}' & \text{cost / profit} \\
\hline
\end{array}
$$

$\boxed{\text{Q}}$ Έστω ότι για κάποιο $k, a_k > 0$, και $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$. Πώς θα βρίσκατε βέλτιστη λύση για το (P), ή/και το (D);

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (I)

- Κοινό Λεξικό:

$$\begin{array}{rr|c|c|} & & \mathbf{u}'_\gamma = \mathbf{u}'_{[n+m]\setminus\beta} & w = \\ & & \mathbf{x}_{[n+m]\setminus\beta} & 1 \\ \hline -\mathbf{u}_{[n+m]\setminus\gamma} = -\mathbf{u}_\beta & \mathbf{x}_\beta = & B & \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\ \hline 1 & z = & \underline{\mathbf{c}}'_{[n+m]\setminus\beta} \geq \mathbf{0}' & \text{cost / profit} \\ \hline \end{array}$$

Q Έστω ότι για κάποιο $k, a_k > 0$, και $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$. Πώς θα βρίσκατε βέλτιστη λύση για το (P), ή/και το (D);

A Κλασσική προσέγγιση: Χρήση **PRIMAL-SIMPLEX** (ΦΑΣΗ-1 και ΦΑΣΗ-2) για το (P).

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (I)

- Κοινό Λεξικό:

$$
\begin{array}{rrc|c|c|}
 & & \mathbf{u}'_{\gamma} = \mathbf{u}'_{[n+m]\setminus\beta} & w = \\
 & & \mathbf{x}_{[n+m]\setminus\beta} & 1 \\
\cline{3-4}
-\mathbf{u}_{[n+m]\setminus\gamma} = -\mathbf{u}_{\beta} & \mathbf{x}_{\beta} = & B & \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\
\cline{3-4}
1 & z = & \underline{\mathbf{c}}'_{[n+m]\setminus\beta} \geq \mathbf{0}' & \text{cost / profit} \\
\cline{3-4}
\end{array}
$$

Q Έστω ότι για κάποιο $k, a_k > 0$, και $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$. Πώς θα βρίσκατε βέλτιστη λύση για το (P), ή/και το (D);

A Κλασσική προσέγγιση: Χρήση **PRIMAL-SIMPLEX** (ΦΑΣΗ-1 και ΦΑΣΗ-2) για το (P).

Εναλλακτική προσέγγιση: Χρήση **DUAL SIMPLEX** (μάλιστα, μόνο τη ΦΑΣΗ-2) για το (D).

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (I)

- Κοινό Λεξικό:

$$
\begin{array}{rr|c|c|}
 & & \mathbf{u}'_\gamma = \mathbf{u}'_{[n+m]\setminus\beta} & w = \\
 & & \mathbf{x}_{[n+m]\setminus\beta} & 1 \\
\hline
-\mathbf{u}_{[n+m]\setminus\gamma} = -\mathbf{u}_\beta & \mathbf{x}_\beta = & B & \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\
\hline
1 & z = & \underline{\mathbf{c}}'_{[n+m]\setminus\beta} \geq \mathbf{0}' & \text{cost / profit} \\
\hline
\end{array}
$$

Q Έστω ότι για κάποιο $k, a_k > 0$, και $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$. Πώς θα βρίσκατε βέλτιστη λύση για το (P), ή/και το (D);

A Κλασσική προσέγγιση: Χρήση **PRIMAL-SIMPLEX** (ΦΑΣΗ-1 και ΦΑΣΗ-2) για το (P).

Εναλλακτική προσέγγιση: Χρήση **DUAL SIMPLEX** (μάλιστα, μόνο τη ΦΑΣΗ-2) για το (D).

- **DUAL-PIVOT-IN ROW:** Γραμμή r με $a_r < 0$ (Pricing Rule).
- **DUAL-PIVOT-OUT COL:** Στήλη s με
  $\frac{c_s}{B[r,s]} = \min\left\{\frac{c_t}{B[r,t]} : B[r,t] > 0\right\}$ (Min Ratio Test)

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
>> A = [ 3     1 ; 3     4 ; 4     2 ];
>> c′ = [ 1     1 ];
>> a′ = [ 2     5     8];
%% Creation of tableau for min.{ c′x: Ax >= a; x >= 0 }
>> T = totbl(A,a,c);
              x1          x2          1
       --------------------------------
 x3 = |     3.0000     1.0000    -2.0000
 x4 = |     3.0000     4.0000    -5.0000
 x5 = |     4.0000     2.0000    -8.0000
       --------------------------------
 z  = |     1.0000     1.0000     0.0000
```

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
>> A = [ 3     1 ; 3     4 ; 4     2 ];
>> c' = [ 1     1 ];
>> a' = [ 2     5     8];
%% Creation of tableau for min.{ c'x: Ax >= a; x >= 0 }
>> T = totbl(A,a,c);
              x1          x2          1
       --------------------------------
 x3 = |     3.0000     1.0000    -2.0000
 x4 = |     3.0000     4.0000    -5.0000
 x5 = |     4.0000     2.0000    -8.0000
       --------------------------------
 z  = |     1.0000     1.0000     0.0000
%% Addition of dual information to the tableau, for the dual program
%% (D) = max.{ a'u: A'u =< c; u >= 0 } = min.{ (-a)'u: (-A)'u >= -c; u >= 0 }
>> T = dualbl(T);
```

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
>> A = [ 3     1 ; 3     4 ; 4     2 ];
>> c' = [ 1     1 ];
>> a' = [ 2     5     8];
%% Creation of tableau for min.{ c′x: Ax >= a; x >= 0 }
>> T = totbl(A,a,c);
              x1          x2          1

       ---------------------------------
 x3 = |     3.0000     1.0000    -2.0000
 x4 = |     3.0000     4.0000    -5.0000
 x5 = |     4.0000     2.0000    -8.0000
       ---------------------------------
 z  = |     1.0000     1.0000     0.0000
%% Addition of dual information to the tableau, for the dual program
%% (D) = max.{ a′u: A′u =< c; u >= 0 } = min.{ (-a)′u: (-A)′u >= -c; u >= 0 }
>> T = dualbl(T);
                  u4 =        u5 =        w  =
                   x1          x2          1

           ---------------------------------
-u1  x3 = |     3.0000     1.0000    -2.0000
-u2  x4 = |     3.0000     4.0000    -5.0000
-u3  x5 = |     4.0000     2.0000    -8.0000
           ---------------------------------
 1   z  = |     1.0000     1.0000     0.0000
```

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
                   u4 =        u5 =        w   =
                    x1          x2          1
               --------------------------------
-u1  x3 = |      3.0000      1.0000     -2.0000
-u2  x4 = |      3.0000      4.0000     -5.0000
-u3  x5 = |      4.0000      2.0000     -8.0000
               --------------------------------
 1   z  = |      1.0000      1.0000      0.0000
%% Obvious (?) dual-feasible starting point for (D):
```

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
                     u4 =        u5 =        w   =
                      x1          x2          1
               ---------------------------------
-u1   x3 = |     3.0000      1.0000     -2.0000
-u2   x4 = |     3.0000      4.0000     -5.0000
-u3   x5 = |     4.0000      2.0000     -8.0000
               ---------------------------------
 1    z  = |     1.0000      1.0000      0.0000
%% Obvious (?) dual-feasible starting point for (D):
%% → u1=0, u2=0, u3=0, u4=1, u5=1
```

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
                   u4 =       u5 =       w   =
                    x1         x2          1
              --------------------------------
-u1  x3 = |      3.0000     1.0000    -2.0000
-u2  x4 = |      3.0000     4.0000    -5.0000
-u3  x5 = |      4.0000     2.0000    -8.0000
              --------------------------------
 1   z  = |      1.0000     1.0000     0.0000
%% Obvious (?) dual-feasible starting point for (D):
%% → u1=0, u2=0, u3=0, u4=1, u5=1
%%
%% PIVOT OF DUAL-SIMPLEX?
```

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
                     u4 =        u5 =        w  =
                      x1          x2          1
               ----------------------------------
-u1   x3 = |      3.0000      1.0000     -2.0000
-u2   x4 = |      3.0000      4.0000     -5.0000
-u3   x5 = |      4.0000      2.0000     -8.0000
               ----------------------------------
 1    z  = |      1.0000      1.0000      0.0000
%% Obvious (?) dual-feasible starting point for (D):
%% → u1=0, u2=0, u3=0, u4=1, u5=1
%%
%% PIVOT OF DUAL-SIMPLEX?
%% → r = row "u1", s IN arg min{ 1/3 , 1/1 } = col "u4"
>> T = ljx(T,1,1);
                     u1 =        u5 =        w  =
                      x3          x2          1
               ----------------------------------
-u4   x1 = |      0.3333     -0.3333      0.6667
-u2   x4 = |      1.0000      3.0000     -3.0000
-u3   x5 = |      1.3333      0.6667     -5.3333
               ----------------------------------
 1    z  = |      0.3333      0.6667      0.6667
%% NEXT PIVOT OF DUAL-SIMPLEX?
```

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
                        u4 =        u5 =        w  =
                         x1          x2         1
                 -----------------------------------
-u1  x3 = |          3.0000      1.0000    -2.0000
-u2  x4 = |          3.0000      4.0000    -5.0000
-u3  x5 = |          4.0000      2.0000    -8.0000
                 -----------------------------------
 1   z  = |          1.0000      1.0000     0.0000
%% Obvious (?) dual-feasible starting point for (D):
%% → u1=0, u2=0, u3=0, u4=1, u5=1
%%
%% PIVOT OF DUAL-SIMPLEX?
%% → r = row "u1", s IN arg min{ 1/3 , 1/1 } = col "u4"
>> T = ljx(T,1,1);
                        u1 =        u5 =        w  =
                         x3          x2         1
                 -----------------------------------
-u4  x1 = |          0.3333     -0.3333     0.6667
-u2  x4 = |          1.0000      3.0000    -3.0000
-u3  x5 = |          1.3333      0.6667    -5.3333
                 -----------------------------------
 1   z  = |          0.3333      0.6667     0.6667
%% NEXT PIVOT OF DUAL-SIMPLEX?
%% → r = row "u2", s IN arg min{(1/3)/1,(2/3)/3} = col "u5"
```

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
>> T = ljx(T,2,2);
                     u1 =        u2 =        w  =
                      x3          x4          1
               ----------------------------------
-u4  x1 = |     0.4444     -0.1111      0.3333
-u5  x2 = |    -0.3333      0.3333      1.0000
-u3  x5 = |     1.1111      0.2222     -4.6667
               ----------------------------------
 1   z  = |     0.1111      0.2222      1.3333
%% NEXT PIVOT OF DUAL-SIMPLEX?
```

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
>> T = ljx(T,2,2);
                     u1 =       u2 =       w  =
                      x3         x4         1
               --------------------------------
-u4  x1 = |      0.4444    -0.1111     0.3333
-u5  x2 = |     -0.3333     0.3333     1.0000
-u3  x5 = |      1.1111     0.2222    -4.6667
               --------------------------------
 1    z = |      0.1111     0.2222     1.3333
%% NEXT PIVOT OF DUAL-SIMPLEX?
%% → r = row "u3", s IN arg min{0,0999,1} = col "u1"
>> T = ljx(T,3,1);
                     u3 =       u2 =       w  =
                      x5         x4         1
               --------------------------------
-u4  x1 = |      0.4000    -0.2000     2.2000
-u5  x2 = |     -0.3000     0.4000    -0.4000
-u1  x3 = |      0.9000    -0.2000     4.2000
               --------------------------------
 1    z = |      0.1000     0.2000     1.8000
%% NEXT PIVOT OF DUAL-SIMPLEX?
```

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
>> T = ljx(T,2,2);
                       u1 =         u2 =         w  =
                        x3           x4           1
               ---------------------------------
-u4  x1 = |       0.4444     -0.1111       0.3333
-u5  x2 = |      -0.3333      0.3333       1.0000
-u3  x5 = |       1.1111      0.2222      -4.6667
               ---------------------------------
 1   z  = |       0.1111      0.2222       1.3333
%% NEXT PIVOT OF DUAL-SIMPLEX?
%% → r = row "u3", s IN arg min{0,0999,1} = col "u1"
>> T = ljx(T,3,1);
                       u3 =         u2 =         w  =
                        x5           x4           1
               ---------------------------------
-u4  x1 = |       0.4000     -0.2000       2.2000
-u5  x2 = |      -0.3000      0.4000      -0.4000
-u1  x3 = |       0.9000     -0.2000       4.2000
               ---------------------------------
 1   z  = |       0.1000      0.2000       1.8000
%% NEXT PIVOT OF DUAL-SIMPLEX?
%% → r = row "u5", s = col "u2"
```

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
>> T = ljx(T,2,2);
                      u3 =        u5 =        w  =
                       x5          x2          1
              ---------------------------------
-u4  x1 = |      0.2500     -0.5000      2.0000
-u2  x4 = |      0.7500      2.5000      1.0000
-u1  x3 = |      0.7500     -0.5000      4.0000
              ---------------------------------
 1   z  = |      0.2500      0.5000      2.0000
>>
%% NEXT PIVOT OF DUAL SIMPLEX?
```

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
>> T = ljx(T,2,2);
                        u3 =        u5 =        w   =
                         x5          x2          1
                ----------------------------------
-u4  x1 = |     0.2500     -0.5000      2.0000
-u2  x4 = |     0.7500      2.5000      1.0000
-u1  x3 = |     0.7500     -0.5000      4.0000
                ----------------------------------
 1   z  = |     0.2500      0.5000      2.0000
>>
%% NEXT PIVOT OF DUAL SIMPLEX?
%% NOT NEEDED
```

PRIMAL / DUAL OPT SOLUTION

%% DUAL-OPT???

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
>> T = ljx(T,2,2);
                     u3 =         u5 =         w  =
                      x5           x2           1
               ---------------------------------
-u4  x1 = |     0.2500     -0.5000      2.0000
-u2  x4 = |     0.7500      2.5000      1.0000
-u1  x3 = |     0.7500     -0.5000      4.0000
               ---------------------------------
 1   z  = |     0.2500      0.5000      2.0000
>>
%% NEXT PIVOT OF DUAL SIMPLEX?
%% NOT NEEDED
```

PRIMAL / DUAL OPT SOLUTION

```
%% DUAL-OPT???
%% u1 = u2 = u4 = 0, u3 = 1/4, u5 = ½

%% PRIMAL-OPT???
```

Μέθοδος του DUAL-SIMPLEX (II)

```
>> T = ljx(T,2,2);
                     u3 =        u5 =        w  =
                      x5          x2          1
               ---------------------------------
-u4  x1 = |      0.2500     -0.5000      2.0000
-u2  x4 = |      0.7500      2.5000      1.0000
-u1  x3 = |      0.7500     -0.5000      4.0000
               ---------------------------------
 1   z  = |      0.2500      0.5000      2.0000
>>
%% NEXT PIVOT OF DUAL SIMPLEX?
%% NOT NEEDED

%% DUAL-OPT???
%% u1 = u2 = u4 = 0, u3 = 1/4, u5 = ½

%% PRIMAL-OPT???
%% x1 = 2, x2 = 0, x3 = 4, x4 = 1, x5 = 0
```

PRIMAL / DUAL OPT SOLUTION

Μέθοδος του «Big-M» (I)

(P) $\boxed{\text{minimize}\left\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\right\}}$

(D) $\boxed{\text{maximize}\left\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\ \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\right\}}$

Μέθοδος του «Big-M» (I)

(P) $\boxed{\text{minimize}\left\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\right\}}$

(D) $\boxed{\text{maximize}\left\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\ \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\right\}}$

(MP) $\boxed{\text{minimize}\left\{\mathbf{c}'\mathbf{x}+M\xi : A\mathbf{x}+\mathbf{1}\xi \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \xi \geq 0\right\}}$

(MD) $\boxed{\text{maximize}\left\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\ \ \mathbf{1}'\mathbf{u} \leq M;\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\right\}}$

Μέθοδος του «Big-M» (I)

$$\text{(P)} \quad \boxed{\text{minimize}\,\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}}$$

$$\text{(D)} \quad \boxed{\text{maximize}\,\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\ \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}}$$

$$\text{(MP)} \quad \boxed{\text{minimize}\,\{\mathbf{c}'\mathbf{x}+M\xi : A\mathbf{x}+\mathbf{1}\xi \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \xi \geq 0\}}$$

$$\text{(MD)} \quad \boxed{\text{maximize}\,\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\ \ \mathbf{1}'\mathbf{u} \leq M;\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ [FMW2007 – THM4.8.1]

Αν το $\bar{\mathbf{x}}$ είναι βέλτιστη λύση του (P), τότε υπάρχει (αρκούντως μεγάλο) $\bar{M} \geq 0$ τ.ώ. το $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\xi} = 0)$ είναι βέλτιστη λύση του (MP), για κάθε $M \geq \bar{M}$. Αντίστροφα, αν το $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\xi} = 0)$ είναι βέλτιστη λύση του (MP) για κάποιο $\bar{M} \geq 0$, τότε το $\bar{\mathbf{x}}$, είναι βέλτιστη λύση του (P).

Μέθοδος του «Big-M» (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [FMW2007 – THM4.8.1]

$$\text{(MP)} \quad \boxed{\text{minimize}\left\{\mathbf{c}'\mathbf{x}+M\xi : A\mathbf{x}+\mathbf{1}\xi \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x}\geq\mathbf{0}; \xi\geq 0\right\}}$$

$$\text{(MD)} \quad \boxed{\text{maximize}\left\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u}\leq\mathbf{c};\ \ \mathbf{1}'\mathbf{u}\leq M;\ \ \mathbf{u}\geq\mathbf{0}\right\}}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Έστω $\bar{\mathbf{x}} \in opt(P)$, $\bar{\mathbf{u}} \in opt(D)$, και $\bar{\xi} = 0$.

Μέθοδος του «Big-M» (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [FMW2007 – THM4.8.1]

$$(MP) \quad \boxed{\text{minimize}\,\{\mathbf{c}'\mathbf{x}+M\xi : A\mathbf{x}+\mathbf{1}\xi \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x}\geq \mathbf{0}; \xi \geq 0\}}$$

$$(MD) \quad \boxed{\text{maximize}\,\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\ \ \mathbf{1}'\mathbf{u} \leq M;\ \ \mathbf{u}\geq \mathbf{0}\}}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Έστω $\bar{\mathbf{x}} \in opt(P)$, $\bar{\mathbf{u}} \in opt(D)$, και $\bar{\xi} = 0$.

- Για $\bar{M} = \mathbf{1}'\bar{\mathbf{u}}$ ισχύει: $\forall M \geq \bar{M}$, $\bar{\mathbf{u}} \in feas(MD)$.

Μέθοδος του «Big-M» (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [FMW2007 – THM4.8.1]

(MP) $\boxed{\text{minimize}\,\{\mathbf{c}'\mathbf{x}+M\xi : A\mathbf{x}+\mathbf{1}\xi \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x}\geq \mathbf{0}; \xi \geq 0\}}$

(MD) $\boxed{\text{maximize}\,\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\ \ \mathbf{1}'\mathbf{u} \leq M;\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Έστω $\bar{\mathbf{x}} \in opt(P)$, $\bar{\mathbf{u}} \in opt(D)$, και $\bar{\xi} = 0$.

- Για $\bar{M} = \mathbf{1}'\bar{\mathbf{u}}$ ισχύει: $\forall M \geq \bar{M},\ \bar{\mathbf{u}} \in feas(MD)$.
- $\bar{\mathbf{u}}'(A\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{1}\bar{\xi} - \mathbf{a}) = \bar{\mathbf{u}}'(A\bar{\mathbf{x}} - a) = 0$ /∗ συμπληρ. χαλαρότητα $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ στο (P, D) ∗/
- $\bar{\mathbf{x}}'(\mathbf{c} - A'\bar{\mathbf{u}}) = 0$ /∗ συμπληρ. χαλαρότητα $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ στο (P, D) ∗/

Μέθοδος του «Big-M» (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [FMW2007 – THM4.8.1]

(MP) $\boxed{\text{minimize}\,\{\mathbf{c}'\mathbf{x}+M\xi : A\mathbf{x}+\mathbf{1}\xi \geq \mathbf{a};\;\; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \xi \geq 0\}}$

(MD) $\boxed{\text{maximize}\,\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c};\;\; \mathbf{1}'\mathbf{u} \leq M;\;\; \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Έστω $\bar{\mathbf{x}} \in opt(P)$, $\bar{\mathbf{u}} \in opt(D)$, και $\bar{\xi} = 0$.

- Για $\bar{M} = \mathbf{1}'\bar{\mathbf{u}}$ ισχύει: $\forall M \geq \bar{M}$, $\bar{\mathbf{u}} \in feas(MD)$.
- $\bar{\mathbf{u}}'(A\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{1}\bar{\xi} - \mathbf{a}) = \bar{\mathbf{u}}'(A\bar{\mathbf{x}} - a) = 0$ /∗ συμπληρ. χαλαρότητα $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ στο (P, D) ∗/
- $\bar{\mathbf{x}}'(\mathbf{c} - A'\bar{\mathbf{u}}) = 0$ /∗ συμπληρ. χαλαρότητα $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ στο (P, D) ∗/
- $\bar{\xi}(M - \mathbf{1}'\bar{\mathbf{u}}) = 0$ /∗ $\bar{\xi} = 0$ ∗/

Μέθοδος του «Big-M» (ΙΙ)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [FMW2007 – THM4.8.1]

(MP) $\boxed{\text{minimize}\,\{\mathbf{c}'\mathbf{x}+M\xi : A\mathbf{x}+\mathbf{1}\xi \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x}\geq\mathbf{0}; \xi\geq 0\}}$

(MD) $\boxed{\text{maximize}\,\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u}\leq\mathbf{c};\ \ \mathbf{1}'\mathbf{u}\leq M;\ \mathbf{u}\geq\mathbf{0}\}}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Έστω $\bar{\mathbf{x}} \in opt(P)$, $\bar{\mathbf{u}} \in opt(D)$, και $\bar{\xi} = 0$.

- Για $\bar{M} = \mathbf{1}'\bar{\mathbf{u}}$ ισχύει: $\forall M \geq \bar{M}$, $\bar{\mathbf{u}} \in feas(MD)$.
- $\bar{\mathbf{u}}'(A\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{1}\bar{\xi} - \mathbf{a}) = \bar{\mathbf{u}}'(A\bar{\mathbf{x}} - a) = 0$ /* συμπληρ. χαλαρότητα $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})$ στο (P,D) */
- $\bar{\mathbf{x}}'(\mathbf{c} - A'\bar{\mathbf{u}}) = 0$ /* συμπληρ. χαλαρότητα $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})$ στο (P,D) */
- $\bar{\xi}(M - \mathbf{1}'\bar{\mathbf{u}}) = 0$ /* $\bar{\xi} = 0$ */

$\therefore$ $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\xi} = 0) \in opt(MP)$ /* συμπληρ. χαλαρότητα $((\bar{\mathbf{x}},\bar{\xi}),\bar{\mathbf{u}})$ στο (MP,MD) για $M = \mathbf{1}'\bar{\mathbf{u}}$ */

Μέθοδος του «Big-M» (II)

ΕΞΗΓΗΣΗ: [FMW2007 – THM4.8.1]

(MP) $\boxed{\text{minimize}\left\{\mathbf{c}'\mathbf{x}+M\xi : A\mathbf{x}+\mathbf{1}\xi \geq \mathbf{a};\ \ \mathbf{x}\geq\mathbf{0}; \xi\geq 0\right\}}$

(MD) $\boxed{\text{maximize}\left\{\mathbf{a}'\mathbf{u} : A'\mathbf{u}\leq\mathbf{c};\ \ \mathbf{1}'\mathbf{u}\leq M;\ \mathbf{u}\geq\mathbf{0}\right\}}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Έστω $\bar{\mathbf{x}} \in opt(P)$, $\bar{\mathbf{u}} \in opt(D)$, και $\bar{\xi} = 0$.

- Για $\bar{M} = \mathbf{1}'\bar{\mathbf{u}}$ ισχύει: $\forall M \geq \bar{M}$, $\bar{\mathbf{u}} \in feas(MD)$.
- $\bar{\mathbf{u}}'(A\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{1}\bar{\xi} - \mathbf{a}) = \bar{\mathbf{u}}'(A\bar{\mathbf{x}} - a) = 0$ /* συμπληρ. χαλαρότητα $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ στο (P, D) */
- $\bar{\mathbf{x}}'(\mathbf{c} - A'\bar{\mathbf{u}}) = 0$ /* συμπληρ. χαλαρότητα $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ στο (P, D) */
- $\bar{\xi}(M - \mathbf{1}'\bar{\mathbf{u}}) = 0$ /* $\bar{\xi} = 0$ */

$\therefore$ $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\xi} = 0) \in opt(MP)$ /* συμπληρ. χαλαρότητα $((\bar{\mathbf{x}}, \bar{\xi}), \bar{\mathbf{u}})$ στο (MP, MD) για $M = \mathbf{1}'\bar{\mathbf{u}}$ */

$\boxed{\Leftarrow}$ Ανάλογη εξήγηση...

Μέθοδος του «Big-M» (III)

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

$BIGM(A, \mathbf{a}, \mathbf{c})$	
1.	«Μάντεψε» μια αρχική τιμή για το $M \geq 0$.
2.	Λύσε το (MP) για την τρέχουσα τιμή του M.
3.	**if** $\bar{\xi} = 0$ **then return** $(\bar{\mathbf{x}})$
4.	**else** /* $\bar{\xi} \neq 0$ */
4.1.	$M := 2M$
4.2.	$goto(2)$

Μέθοδος του «Big-M» (III)

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

$BIGM(A, \mathbf{a}, \mathbf{c})$	
1.	«Μάντεψε» μια αρχική τιμή για το $M \geq 0$.
2.	Λύσε το (MP) για την τρέχουσα τιμή του M.
3.	**if** $\bar{\xi} = 0$ **then return** $(\bar{\mathbf{x}})$
4.	**else** /* $\bar{\xi} \neq 0$ */
4.1.	$M := 2M$
4.2.	$goto(2)$

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η μέθοδος ΔΕΝ τερματίζει εφόσον το αρχικό ΓΠ (P) είναι μη επιλύσιμο.

Ακέραιος ΓΠ

...χαλάρωση, φράγματα, branch & bound...

Δρομολόγια Πτήσεων Αεροπλάνων (I)

- ΔΕΔΟΜΕΝΑ:
  - Σύνολο $M = [m]$ απευθείας πτήσεων – legs (πχ, Αθήνα - Φρανκφούρτη).
  - Σύνολο $N = [n]$ διαδρομών – routes. $\forall j \in [n]$:
    - $A[*,j] \in \{0,1\}^n$ είναι το **χαρακτηριστικό διάνυσμα** της διαδρομής j.
    - $c_j \in \mathbb{R}$ είναι το **κόστος** της διαδρομής j.
- ΕΦΙΚΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ: Κάθε leg αξιοποιείται ακριβώς σε μια διαδρομή.
- ΣΤΟΧΟΣ: Επιλογή συλλογής δρομολογίων ελάχιστου κόστους.

Δρομολόγια Πτήσεων Αεροπλάνων (II)

- Μεταβλητές απόφασης:

$$\forall j \in [n],\ \ x_j = \begin{cases} 1, & \text{επιλέγεται η διαδρομή } j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Δρομολόγια Πτήσεων Αεροπλάνων (II)

- Μεταβλητές απόφασης:

$$\forall j \in [n], \quad x_j = \begin{cases} 1, & \text{επιλέγεται η διαδρομή } j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Μοντελοποίηση ως **ακέραιο** γραμμικό πρόγραμμα:

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} \text{minimize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{s.t. :} & \sum_{j=1}^{n} A[i,j] x_j & = & 1, \; i \in [m] \\ & x_j & \in & \{0,1\}, \; j \in [n] \end{array}}$$

Δρομολόγια Πτήσεων Αεροπλάνων (ΙΙ)

- Μεταβλητές απόφασης:

$$\forall j \in [n], \;\; x_j = \begin{cases} 1, & \text{επιλέγεται η διαδρομή } j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Μοντελοποίηση ως **ακέραιο** γραμμικό πρόγραμμα:

$$\boxed{\begin{array}{rrcl} \text{minimize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{s.t.}: & \sum_{j=1}^{n} A[i,j] x_j & = & 1, \;\; i \in [m] \\ & x_j & \in & \{0,1\}, \;\; j \in [n] \end{array}}$$

- Πρόκειται για παράδειγμα **προβλήματος διαμέρισης** (set-partitioning problem).

Χαλάρωση Ακέραιου Γ.Π. (I)

Παράδειγμα ακέραιου γ.π. :

$$
(\mathrm{IP})\quad
\boxed{
\begin{array}{lrcrcr}
\text{maximize} \quad \zeta = & 17x_1 & + & 12x_2 & & \\
\text{s.t. :} & 10x_1 & + & 7x_2 & \leq & 40 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 \in \mathbb{N} & & x_2 \in \mathbb{N} & &
\end{array}
}
$$

Χαλάρωση Ακέραιου Γ.Π. (Ι)

Παράδειγμα ακέραιου γ.π. και της **χαλαρωμένης μορφής** του:

$$
(P)\quad
\boxed{
\begin{array}{lrcrcr}
\text{maximize} \quad \zeta = & 17x_1 & + & 12x_2 & & \\
\text{s.t.}: & 10x_1 & + & 7x_2 & \leq & 40 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 & &
\end{array}
}
$$

Χαλάρωση Ακέραιου Γ.Π. (I)

Παράδειγμα ακέραιου γ.π. και της **χαλαρωμένης μορφής** του:

$$
(P)\quad \boxed{\begin{array}{lrcrcr}
\text{maximize} \quad \zeta = & 17x_1 & + & 12x_2 & & \\
\text{s.t. :} & 10x_1 & + & 7x_2 & \leq & 40 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 & &
\end{array}}
$$

Q Πώς αξιοποιείται το χαλαρωμένο γ.π. (P) ως προς το (ακέραιο) γ.π. (IP);

Χαλάρωση Ακέραιου Γ.Π. (Ι)

Παράδειγμα ακέραιου γ.π. και της **χαλαρωμένης μορφής** του:

$$
(P)\quad
\boxed{
\begin{array}{llrcrcr}
\text{maximize} & \zeta = & 17x_1 & + & 12x_2 & & \\
\text{s.t. :} & & 10x_1 & + & 7x_2 & \leq & 40 \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 & &
\end{array}
}
$$

$\boxed{\text{Q}}$ Πώς αξιοποιείται το χαλαρωμένο γ.π. (P) ως προς το (ακέραιο) γ.π. (IP);

$\boxed{\text{A1}}$ Παρέχει (**άνω**, αν είναι γ.π. μεγιστοποίησης / **κάτω**, αν είναι γ.π. ελαχιστοποίησης) **φράγμα** στην αξία της βέλτιστης (ακέραιας) λύσης του το (IP).

Χαλάρωση Ακέραιου Γ.Π. (Ι)

Παράδειγμα ακέραιου γ.π. και της **χαλαρωμένης μορφής** του:

$$
(P)\quad \boxed{\begin{array}{llrcrcr}
\text{maximize} & \zeta = & 17x_1 & + & 12x_2 & & \\
\text{s.t. :} & & 10x_1 & + & 7x_2 & \leq & 40 \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 & &
\end{array}}
$$

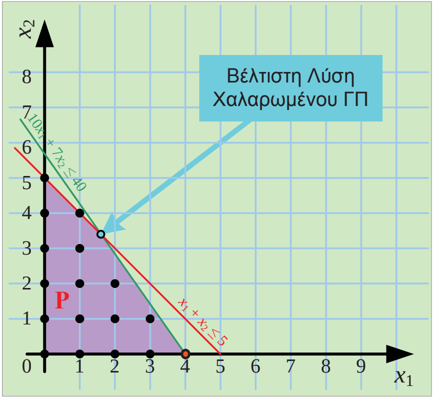
Q Πώς αξιοποιείται το χαλαρωμένο γ.π. (P) ως προς το (ακέραιο) γ.π. (IP);

A1 Παρέχει (**άνω**, αν είναι γ.π. μεγιστοποίησης / **κάτω**, αν είναι γ.π. ελαχιστοποίησης) **φράγμα** στην αξία της βέλτιστης (ακέραιας) λύσης του το (IP).

A2 Χρησιοποιείται ως υπορουτίνα για εύρεση της **βέλτιστης ακέραιας λύσης** του το (IP) (πχ, με την τεχνική **Branch & Bound** – βλ. επόμενες διαφανειες).

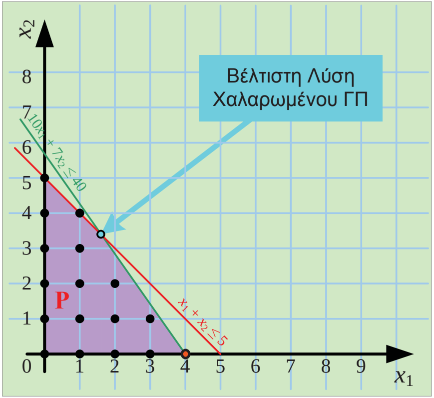
Χαλάρωση Ακέραιου Γ.Π. (ΙΙ)

- **Βέλτιστη λύση** για το (χαλαρωμένο) (P): $[x_1; x_2; \zeta] = [1.67; 3.33; 68.33]$.



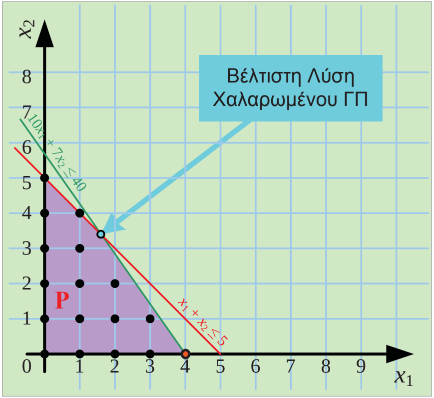
Χαλάρωση Ακέραιου Γ.Π. (ΙΙ)

- **Βέλτιστη λύση** για το (χαλαρωμένο) (P): $[x_1; x_2; \zeta] = [1.67; 3.33; 68.33]$.
- Στρογγυλοποίηση στην **πλησιέστερη ακέραια λύση** $[2; 3] \Rightarrow$ μη εφικτή λύση.

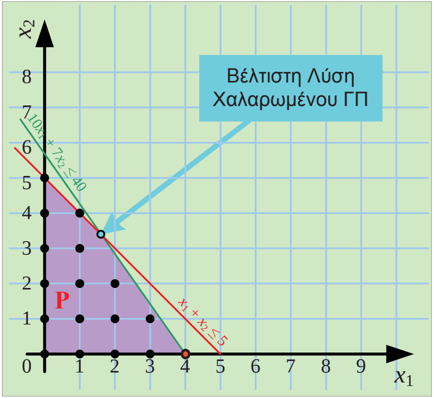


Χαλάρωση Ακέραιου Γ.Π. (ΙΙ)

- **Βέλτιστη λύση** για το (χαλαρωμένο) (P): $[x_1; x_2; \zeta] = [1.67; 3.33; 68.33]$.
- Στρογγυλοποίηση στην **πλησιέστερη ακέραια λύση** $[2; 3] \Rightarrow$ μη εφικτή λύση.
- **Γεωμετρικά πλησιέστερη** εφικτή ακέραια λύση: $[1; 3]$ $\Rightarrow$ μη βέλτιστη ακέραια λύση.



- **Βέλτιστη λύση** για το (χαλαρωμένο) (P): $[x_1; x_2; \zeta] = [1.67; 3.33; 68.33]$.
- Στρογγυλοποίηση στην **πλησιέστερη ακέραια λύση** $[2; 3]$ $\Rightarrow$ μη εφικτή λύση.
- **Γεωμετρικά πλησιέστερη** εφικτή ακέραια λύση: $[1; 3]$ $\Rightarrow$ μη βέλτιστη ακέραια λύση.



- **Βέλτιστη ακέραια λύση** για το (ακέραιο) (IP): $[[4; 0]; 68]$ (όπως θα δούμε αργότερα) $\Rightarrow$ πολύ μακριά από τη βέλτιστη λύση του χαλαρωμένου γ.π.

Μέθοδος Branch & Bound (I)

$\boxed{\text{Q}}$ Στο (P), $\bar{x}_1 = 1.67$. Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε αυτή την πληροφορία, για εύρεση *βέλτιστης (ακέραιας) λυσης* του (IP);

Μέθοδος Branch & Bound (I)

Q Στο (P), $\bar{x}_1 = 1.67$. Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε αυτή την πληροφορία, για εύρεση *βέλτιστης (ακέραιας) λυσης* του (IP);

A Υπάρχουν δυο *αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις* για τη **βέλτιστη ακέραια λύση** $\mathbf{x}^*$: $x_1^* \leq 1$, ή $x_1^* \geq 2$.

Μέθοδος Branch & Bound (I)

Q Στο (P), $\bar{x}_1 = 1.67$. Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε αυτή την πληροφορία, για εύρεση *βέλτιστης (ακέραιας) λυσης* του (IP);

A Υπάρχουν δυο *αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις* για τη **βέλτιστη ακέραια λύση** $\mathbf{x}^*$: $x_1^* \leq 1$, ή $x_1^* \geq 2$.

$\therefore$ **BRANCH & BOUND:** Λύνουμε δυο διαφορετικά χαλαρωμένα γ.π. (P1), (P2) ως υποπεριπτώσεις του (P), όπου η $\bar{x}_1 = 1.67$ ορίζει ένα επιπλέον υπερεπίπεδο:

- Το (P1) θεωρεί ότι $x_1 \leq 1.67 \overset{\text{/* ακεραιότητα */}}{\Rightarrow} \boxed{x_1 \leq 1}$.
- Το (P2) θεωρεί ότι $x_1 > 1.67 \overset{\text{/* ακεραιότητα */}}{\Rightarrow} \boxed{x_1 \geq 2}$.

Μέθοδος Branch & Bound (I)

Q Στο (P), $\bar{x}_1 = 1.67$. Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε αυτή την πληροφορία, για εύρεση *βέλτιστης (ακέραιας) λυσης* του (IP);

A Υπάρχουν δυο *αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις* για τη **βέλτιστη ακέραια λύση** $\mathbf{x}^*$: $x_1^* \leq 1$, ή $x_1^* \geq 2$.

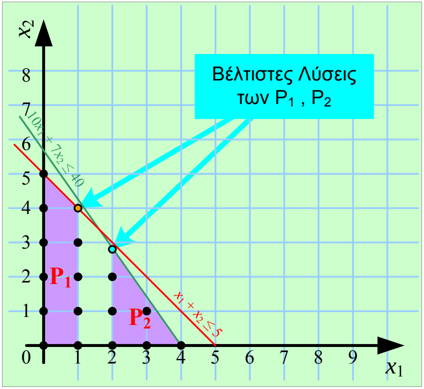
∴ **BRANCH & BOUND:** Λύνουμε δυο διαφορετικά χαλαρωμένα γ.π. (P1), (P2) ως υποπεριπτώσεις του (P), όπου η $\bar{x}_1 = 1.67$ ορίζει ένα επιπλέον υπερεπίπεδο:

- Το (P1) θεωρεί ότι $x_1 \leq 1.67 \overset{\text{/* ακεραιότητα */}}{\Rightarrow} \boxed{x_1 \leq 1}$.
- Το (P2) θεωρεί ότι $x_1 > 1.67 \overset{\text{/* ακεραιότητα */}}{\Rightarrow} \boxed{x_1 \geq 2}$.
- ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $(P) \mapsto \begin{cases} (P1): & x_1 \leq 1 \\ (P2): & x_1 \geq 2 \end{cases}$

Μέθοδος Branch & Bound (II)

- Λύση του (P1): [[1; 4]; 65].
  - Βέλτιστη λύση **κατά σύμπτωση** ακέραια!

  ∴ STOP

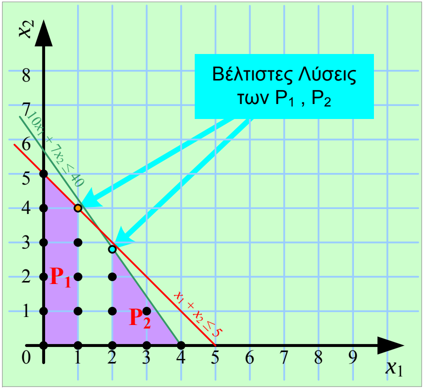


Μέθοδος Branch & Bound (II)

- Λύση του (P1): [[1; 4]; 65].
  - Βέλτιστη λύση **κατά σύμπτωση** ακέραια!

  ∴ STOP

- Λύση του (P2): [[2; 2.86]; 68.29].
  - **Μεγαλύτερο** (χαλαρωμένο) κέρδος από αυτό της *καλύτερης ακέραιας λύσης ως τώρα*, από το (P1).



Μέθοδος Branch & Bound (II)

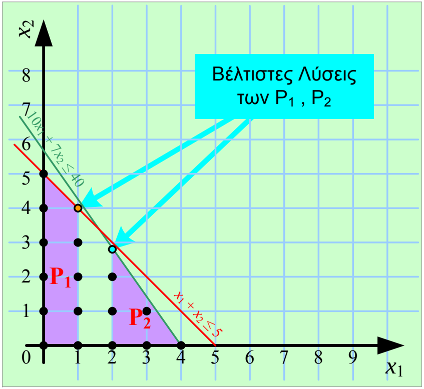
- Λύση του (P1): [[1; 4]; 65].
  - Βέλτιστη λύση **κατά σύμπτωση** ακέραια!

  ∴ STOP

- Λύση του (P2): [[2; 2.86]; 68.29].
  - **Μεγαλύτερο** (χαλαρωμένο) κέρδος από αυτό της *καλύτερης ακέραιας λύσης ως τώρα*, από το (P1).

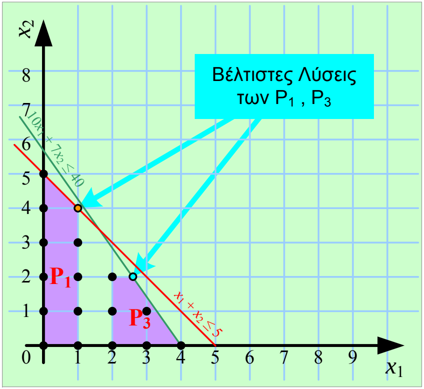
  ∴ **BRANCH & BOUND:**

$$(P2) \mapsto \begin{cases} (P3): & x_1 \geq 2 \;\wedge\; x_2 \leq 2 \\ \text{Μη επιλύσιμο}: & x_1 \geq 2 \;\wedge\; x_2 \geq 3 \end{cases}$$



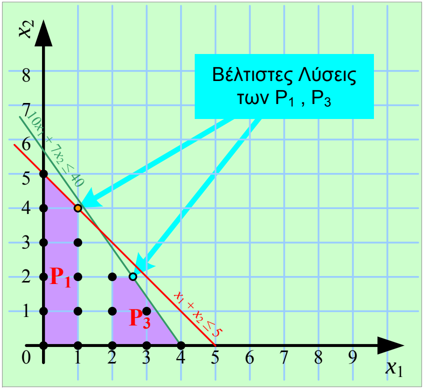
Μέθοδος Branch & Bound (III)

- Λύση του (P3): [[2.6; 2]; 68.2]
  - **Μεγαλύτερο** (χαλαρωμένο) κέρδος από αυτό της *καλύτερης ακέραιας λύσης ως τώρα*, από το (P1).



Μέθοδος Branch & Bound (III)

- Λύση του (P3): [[2.6; 2]; 68.2]
  - **Μεγαλύτερο** (χαλαρωμένο) κέρδος από αυτό της *καλύτερης ακέραιας λύσης ως τώρα*, από το (P1).

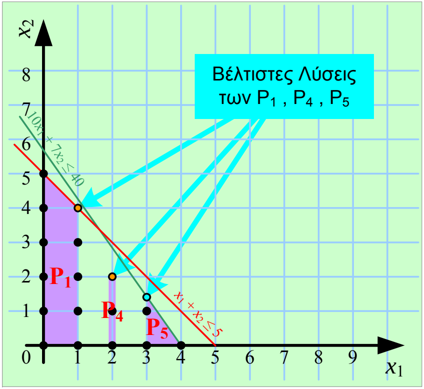


$\therefore$ **BRANCH & BOUND:** $(P3) \mapsto \begin{cases} (P4): & x_1 = 2 \;\wedge\; x_2 \leq 2 \\ (P5): & x_1 \geq 3 \;\wedge\; x_2 \leq 2 \end{cases}$

Μέθοδος Branch & Bound (IV)

- Λύση του (P4): $[[2; 2]; 58]$.
    - Βέλτιστη λύση **κατά σύμπτωση** ακέραια!

  ∴ STOP

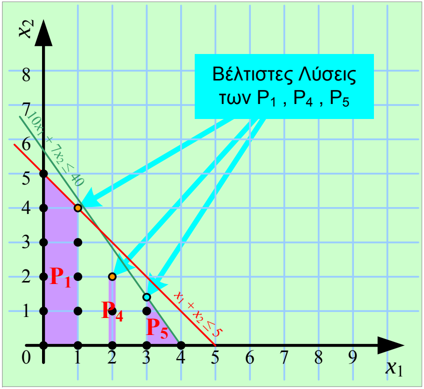


Μέθοδος Branch & Bound (IV)

- Λύση του (P4): [[2; 2]; 58].
  - Βέλτιστη λύση **κατά σύμπτωση** ακέραια!

  ∴ STOP

- Λύση του (P5): [[3; 1.43]; 68.14].
  - **Μεγαλύτερο** (χαλαρωμένο) κέρδος από αυτό της *καλύτερης ακέραιας λύσης ως τώρα*, από το (P1).

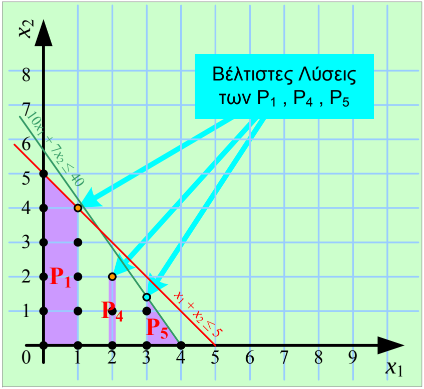


Μέθοδος Branch & Bound (IV)

- Λύση του (P4): [[2; 2]; 58].
  - Βέλτιστη λύση **κατά σύμπτωση** ακέραια!

  ∴ STOP

- Λύση του (P5): [[3; 1.43]; 68.14].
  - **Μεγαλύτερο** (χαλαρωμένο) κέρδος από αυτό της *καλύτερης ακέραιας λύσης ως τώρα*, από το (P1).

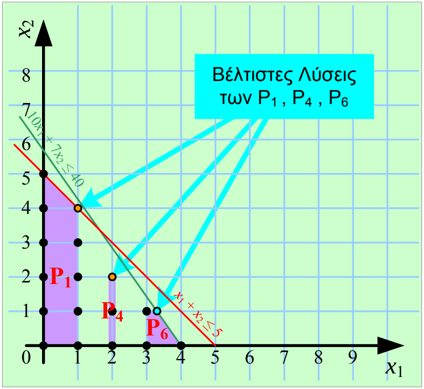


∴ **BRANCH & BOUND:**

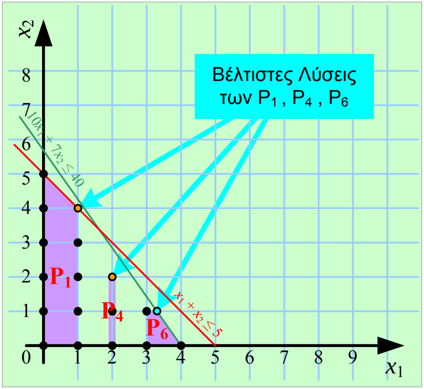
$$(P5) \mapsto \begin{cases} (P6): & x_1 \geq 3 \ \wedge \ x_2 \leq 1 \\ \text{Μη επιλύσιμο}: & x_1 \geq 3 \ \wedge \ x_2 \geq 2 \end{cases}$$

Μέθοδος Branch & Bound (V)

- Λύση του (P6): [[3.3; 1]; 68.1].
  - **Μεγαλύτερο** (χαλαρωμένο) κέρδος από αυτό της *καλύτερης ακέραιας λύσης ως τώρα*, από το (P1).



- Λύση του (P6): [[3.3; 1]; 68.1].
  - **Μεγαλύτερο** (χαλαρωμένο) κέρδος από αυτό της *καλύτερης ακέραιας λύσης ως τώρα*, από το (P1).



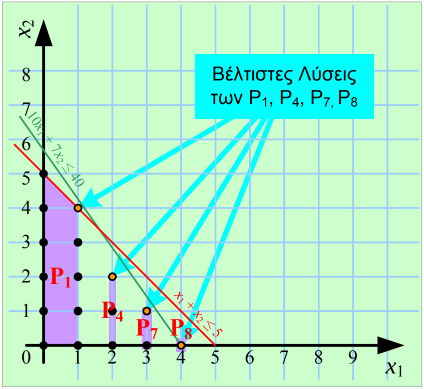
$\therefore$ **BRANCH & BOUND:** (P6) $\mapsto \begin{cases} (P7): & x_1 = 3 \;\wedge\; x_2 = 1 \\ (P8): & x_1 = 4 \;\wedge\; x_2 = 1 \end{cases}$

Μέθοδος Branch & Bound (VI)

- Λύση του (P7): [[3; 1]; 63].
  - Βέλτιστη λύση **ακέραια**!

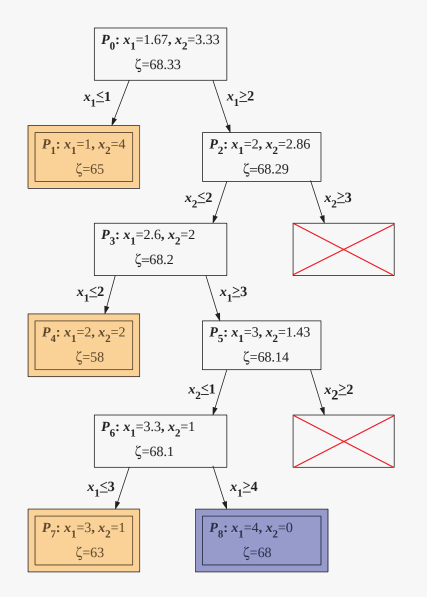
  ∴ STOP
- Λύση του (P8): [[4; 0]; 68].
  - Βέλτιστη λύση **ακέραια**!

  ∴ STOP



Μέθοδος Branch & Bound (VII)

Q Βέλτιστη ακέραια λύση *αρχικού ακέραιου γραμμικού προγράμματος*;

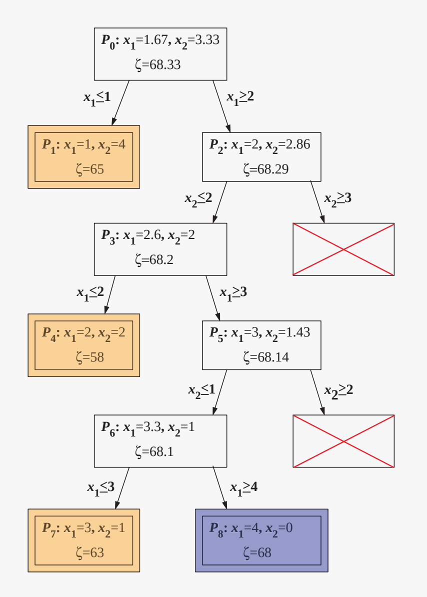


Μέθοδος Branch & Bound (VII)

Q Βέλτιστη ακέραια λύση *αρχικού ακέραιου γραμμικού προγράμματος*;

A Η ακέραια λύση με τη βέλτιστη τιμή, μεταξύ αυτών που ανακάλυψε η **BRANCH & BOUND** τεχνική:

$$[\mathbf{x}^*; \zeta^*] = [[4; 0]; 68]$$



Ευχαριστώ για την προσοχή σας!

Ερωτήσεις / Σχόλια ;