

Θέματα Αλγορίθμων

Αλγόριθμοι και Εφαρμογές στον Πραγματικό Κόσμο

CSE.UOI : Μεταπτυχιακό Μάθημα

10η Ενότητα: Χρονικά Εξελισσόμενες Δικτυακές Ροές

Σπύρος Κοντογιάννης

kontog@cse.uoi.gr



Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τετάρτη, 23 Μαΐου 2017

Χρονικά Εξελισσόμενες Ροές;

...περί τίνος πρόκειται...

Οι δικτυακές ροές αφορούν προβλήματα που σχετίζονται με την κίνηση κάποιου αγαθού σε ...

... δίκτυα μεταφορών

... γραμμές παραγωγής

...

... δίκτυα εξόδων

διαφυγής

... δίκτυα επικοινωνίας

Χρονικά Εξελισσόμενες Ροές;

...περί τίνος πρόκειται...

Οι δικτυακές ροές αφορούν προβλήματα που σχετίζονται με την κίνηση κάποιου αγαθού σε ...

... δίκτυα μεταφορών

... γραμμές παραγωγής

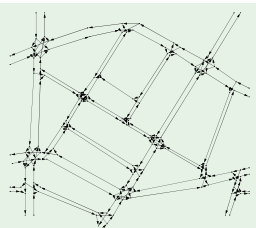
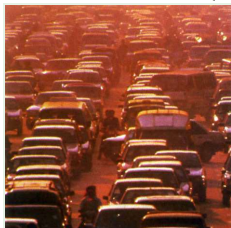
...

... δίκτυα εξόδων

διαφυγής

... δίκτυα επικοινωνίας

- Ο κυκλοφοριακός φόρτος σε ένα οδικό δίκτυο είναι πρόβλημα δρομολόγησης δικτυακής ροής σε κάποιο κατευθυνόμενο γράφημα:

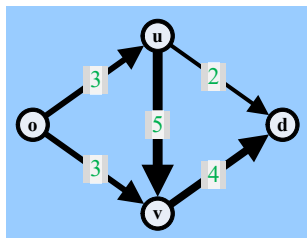


(Στατική) Μέγιστη Ροή Σε Δίκτυα

...υπενθύμιση...

ΕΙΣΟΔΟΣ: Κατευθυνόμενο γράφημα $N = (V, A)$.

- ▶ Χωρητικότητες στις ακμές,
 $u: A \mapsto \mathbb{R}_{>0}$.
- ▶ Κορυφή – αφετηρία $o \in V$.
- ▶ Κορυφή – προορισμό $d \in V$.



ΣΤΟΧΟΣ: Αποστολή μέγιστης (ποσότητας) ροής από την αφετηρία προς τον προορισμό, με σεβασμό:

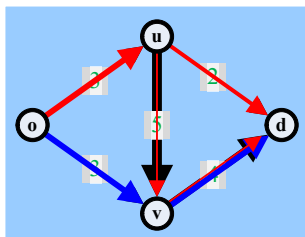
- ▶ στις χωρητικότητες των ακμών, και
- ▶ στους περιορισμούς διατήρησης ροής στους κόμβους μεταγωγής.

(Στατική) Μέγιστη Ροή Σε Δίκτυα

...υπενθύμιση...

ΕΙΣΟΔΟΣ: Κατευθυνόμενο γράφημα $N = (V, A)$.

- ▶ Χωρητικότητες στις ακμές,
 $u : A \mapsto \mathbb{R}_{>0}$.
- ▶ Κορυφή – αφετηρία $o \in V$.
- ▶ Κορυφή – προορισμό $d \in V$.



ΣΤΟΧΟΣ: Αποστολή μέγιστης (ποσότητας) ροής από την αφετηρία προς τον προορισμό, με σεβασμό:

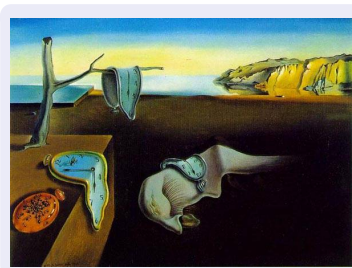
- ▶ στις χωρητικότητες των ακμών, και
- ▶ στους περιορισμούς διατήρησης ροής στους κόμβους μεταγωγής.

Δικτυακές Ροές στον Χρόνο

- Η κλασική προσέγγιση της θεωρίας δικτυακών ροών αφορά καταστάσεις ισορροπίας για τις ροές.

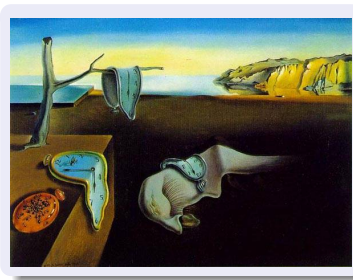
Δικτυακές Ροές στον Χρόνο

- Η κλασική προσέγγιση της θεωρίας δικτυακών ροών αφορά καταστάσεις ισορροπίας για τις ροές.
- Σε πολλά προβλήματα (πχ, στη μελέτη του κυκλοφοριακού φόρτου) ο χρόνος παίζει σημαντικό ρόλο.



Δικτυακές Ροές στον Χρόνο

- Η κλασική προσέγγιση της θεωρίας δικτυακών ροών αφορά καταστάσεις ισορροπίας για τις ροές.
- Σε πολλά προβλήματα (πχ, στη μελέτη του κυκλοφοριακού φόρτου) ο χρόνος παίζει σημαντικό ρόλο.



- Παραδείγματα:

- ▶ Διακύμανση ροής λόγω μεταβαλλόμενων απαιτήσεων ή/και χωρητικότητων.
- ▶ Η ροή του αγαθού κατά μήκος των ακμών γίνεται με συγκεκριμένο ρυθμό, δηλ, και οι ακμές έχουν συγκεκριμένους χρόνους διέλευσης.

Μέγιστη Χρονικά Εξελισσόμενη Ροή

[Ford & Fulkerson 1958]

ΕΙΣΟΔΟΣ: Κατευθυνόμενο γράφημα $D = (V, A)$.

- ▶ Χωρητικότητες στις ακμές $u : A \mapsto \mathbb{R}_{>0}$.
- ▶ Χρόνοι διέλευσης ακμών $t : A \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- ▶ Χρονικός ορίζοντας $T \geq 0$.
- ▶ Κορυφή – αφετηρία $o \in V$ και κορυφή – προορισμός $d \in V$.

ΣΤΟΧΟΣ: Προσδιορισμός μέγιστης ποσότητας αγαθού που μπορεί να μεταφερθεί από την αφετηρία μέχρι τον προορισμό, κατά το χρονικό διάστημα $[0, T]$.

Παροδικές Ροές (I)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Παροδική Ροή

Έστω δίκτυο $D = (V, A)$ με χωρητικότητες $u_e \in \mathbb{R}_{>0}$ και χρόνους διέλευσης $t[e] \geq 0$ στις ακμές. Μια συλλογή από ολοκληρώσιμες συναρτήσεις (μια για κάθε ακμή $e \in A$) $f_e : [0, T] \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι μια **παροδική ροή με χρονικό ορίζοντα** $T > 0$, εφόσον ισχύει ότι:

- $\forall x \in [0, T - t[e]], f_e(x) \in [0, u[e]]$.
- $\forall x \notin [0, T - t[e]], f_e(x) = 0$.

Παροδικές Ροές (II)

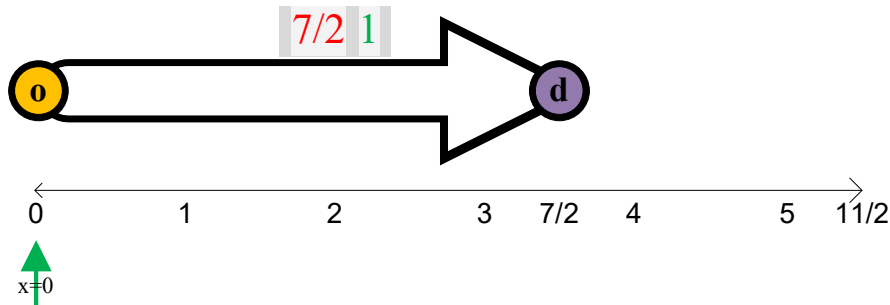
Μερικές Παρατηρήσεις:

- $f_e(x)$ είναι ο **ρυθμός (ροή) εισερχόμενου αγαθού** στην ακμή $e \in A$ τη χρονική στιγμή $x \in \mathbb{R}$.
- Τα σωματίδια του διακινούμενου αγαθού που εισέρχονται τη χρονική στιγμή $x \in [0, T - t[e])$ στην e , εξέρχονται από αυτή (στην κεφαλή της) τη χρονική στιγμή $x + t[e]$.
- Ο **ρυθμός (ροή) εξερχόμενου αγαθού** από την e τη χρονική στιγμή $x \in [t[e], T]$ ισούται με $f_e(x - t[e])$.

Παράδειγμα Παροδικής Ροής σε Ακμή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Παροδική Ροή σε Ακμή.

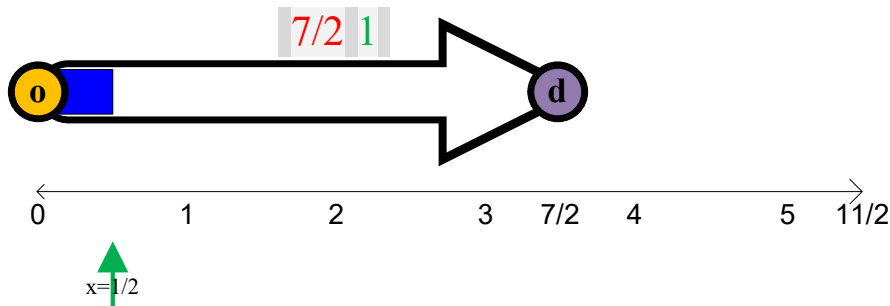
- ▶ $T = 11/2$.
- ▶ $f_e(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



Παράδειγμα Παροδικής Ροής σε Ακμή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Παροδική Ροή σε Ακμή.

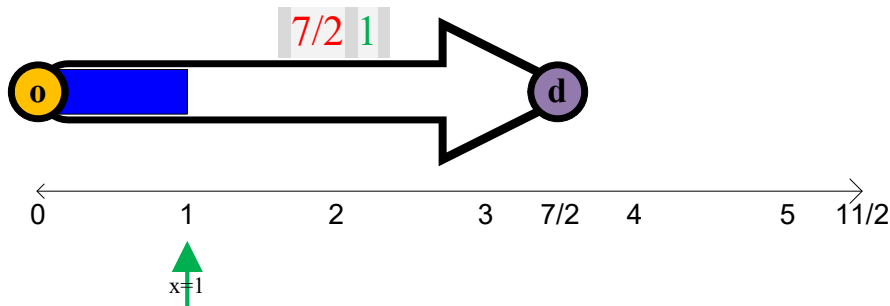
- ▶ $T = 11/2$.
- ▶ $f_e(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



Παράδειγμα Παροδικής Ροής σε Ακμή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Παροδική Ροή σε Ακμή.

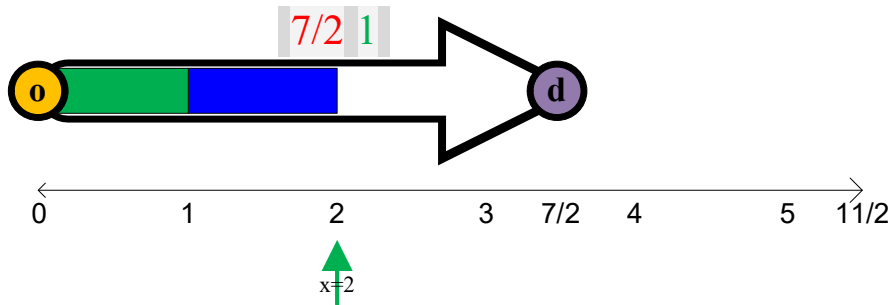
- ▶ $T = 11/2$.
- ▶ $f_e(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



Παράδειγμα Παροδικής Ροής σε Ακμή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Παροδική Ροή σε Ακμή.

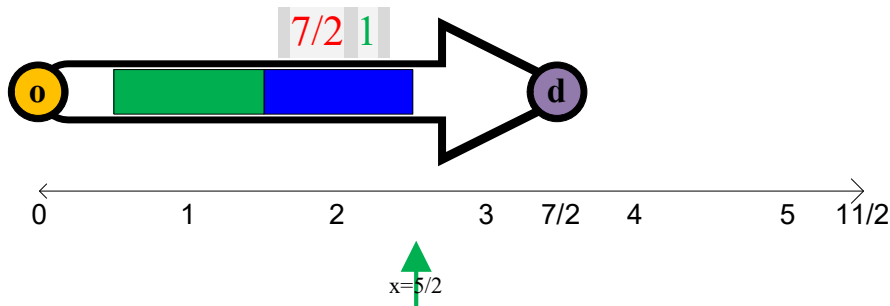
- ▶ $T = 11/2$.
- ▶ $f_e(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



Παράδειγμα Παροδικής Ροής σε Ακμή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Παροδική Ροή σε Ακμή.

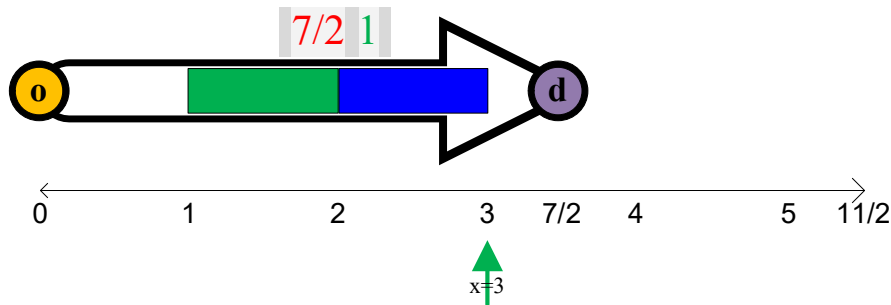
- ▶ $T = 11/2$.
- ▶ $f_e(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



Παράδειγμα Παροδικής Ροής σε Ακμή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Παροδική Ροή σε Ακμή.

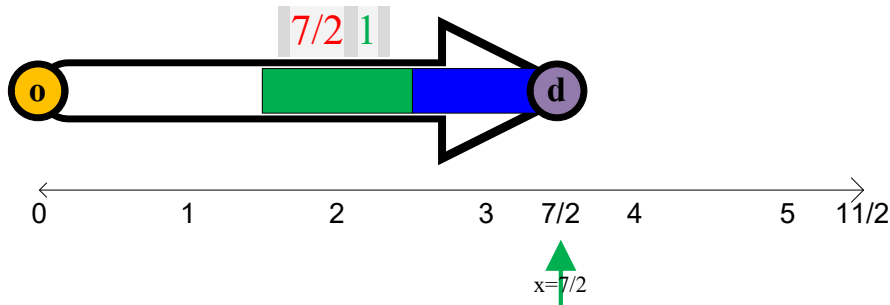
- ▶ $T = 11/2$.
- ▶ $f_e(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



Παράδειγμα Παροδικής Ροής σε Ακμή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Παροδική Ροή σε Ακμή.

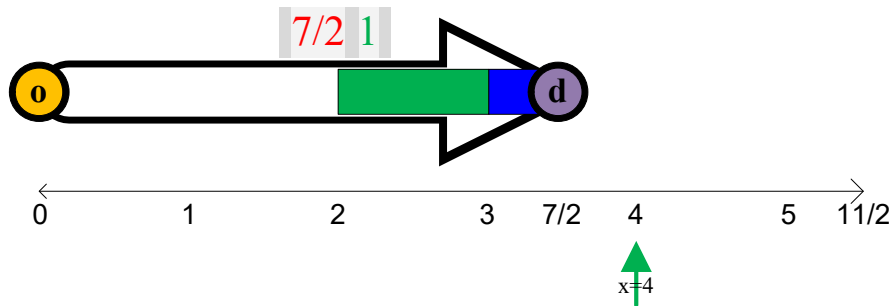
- ▶ $T = 11/2$.
- ▶ $f_e(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



Παράδειγμα Παροδικής Ροής σε Ακμή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Παροδική Ροή σε Ακμή.

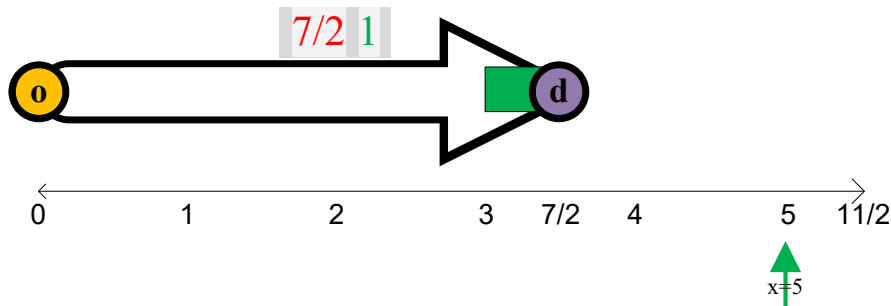
- ▶ $T = 11/2$.
- ▶ $f_e(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



Παράδειγμα Παροδικής Ροής σε Ακμή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Παροδική Ροή σε Ακμή.

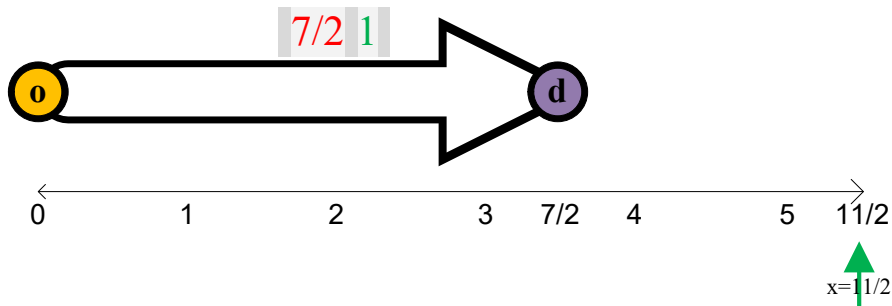
- ▶ $T = 11/2$.
- ▶ $f_e(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



Παράδειγμα Παροδικής Ροής σε Ακμή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Παροδική Ροή σε Ακμή.

- ▶ $T = 11/2$.
- ▶ $f_e(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

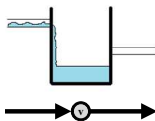


Εφικτότητα Παροδικής Ροής

Περιορισμοί Χωρητικότητας Ακμών:

$$\forall e \in E, \forall x \in [0, T - t[e]], f_e(x) \leq u[e]$$

Περιορισμοί Διατήρησης Φορτίου στις Κορυφές:



- ▶ Περίσσεια (φορτίου) στην κορυφή $v \in V$:

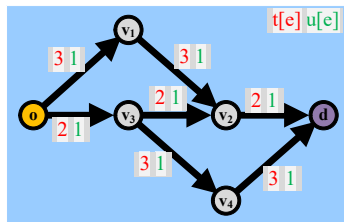
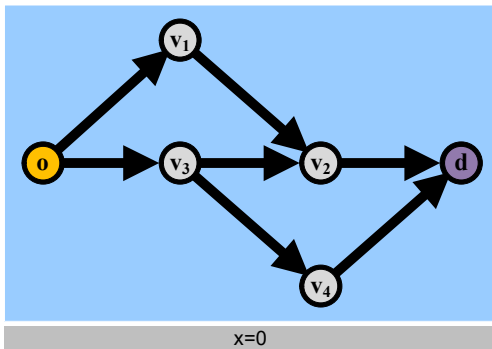
$$ex_f(v, x) = \sum_{uv \in A} \int_0^{x-t[uv]} f_{uv}(z) dz \quad /* \text{συνολικό εισερχόμενο φορτίο} */$$

$$- \sum_{vw \in A} \int_0^x f_{vw}(z) dz \quad /* \text{συνολικό εξερχόμενο φορτίο} */$$

- ▶ Διατήρηση Φορτίου: $\forall v \in V \setminus \{o, d\}, \forall x \in [0, T]$,
 - ★ Ασθενής: $ex_f(v, x) \geq 0$ και $ex_f(v, T) = 0$.
 - ★ Ισχυρή: $ex_f(v, x) = 0$.

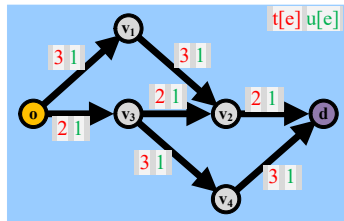
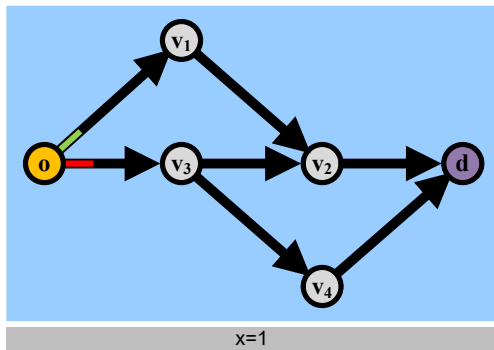
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.



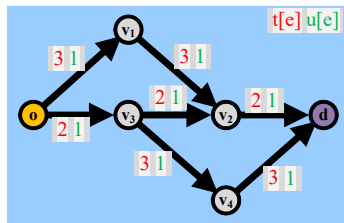
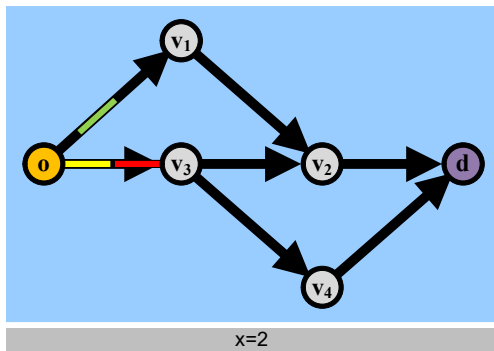
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.



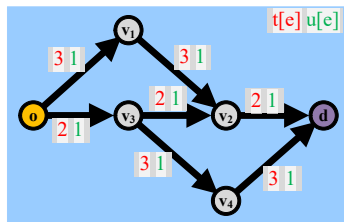
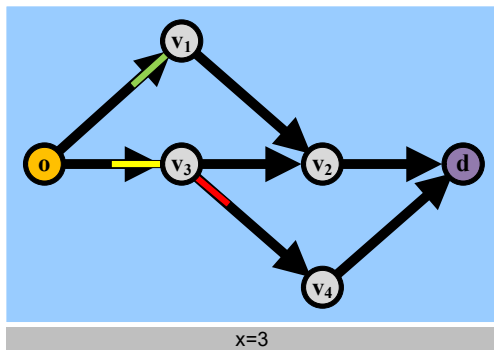
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.



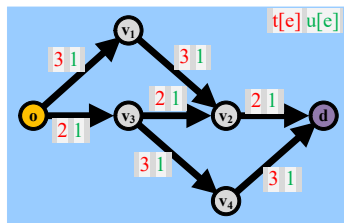
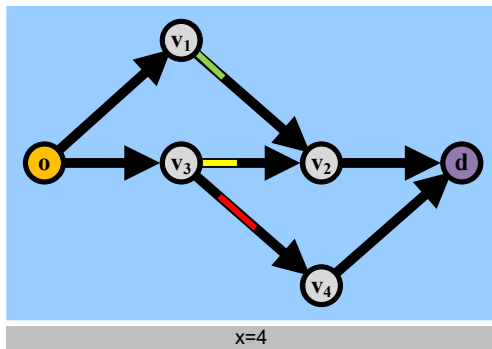
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.



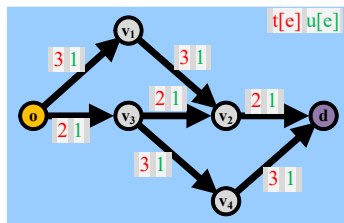
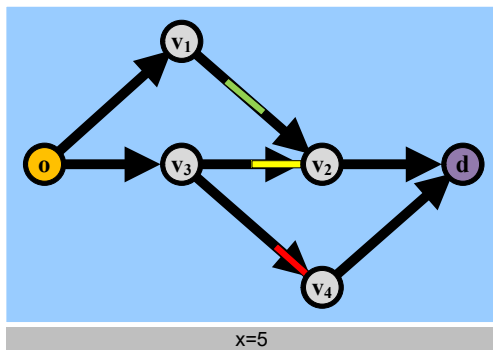
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.



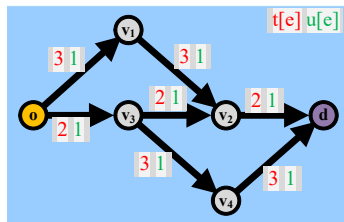
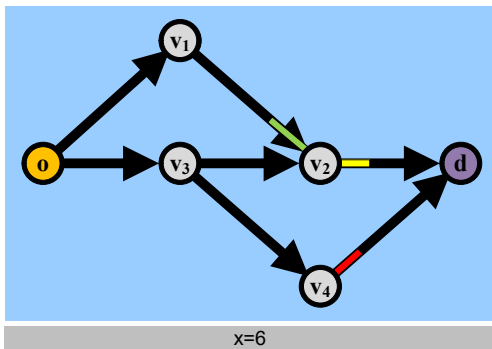
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.



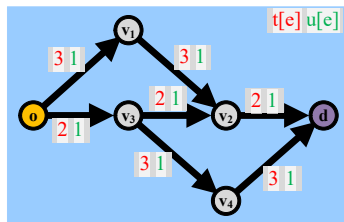
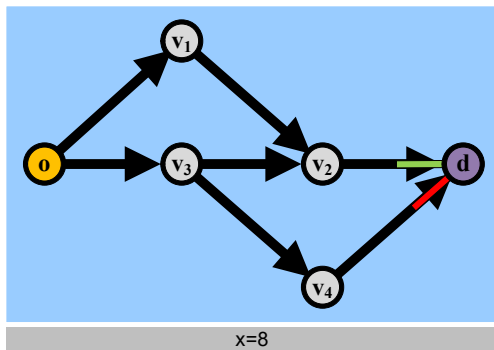
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.



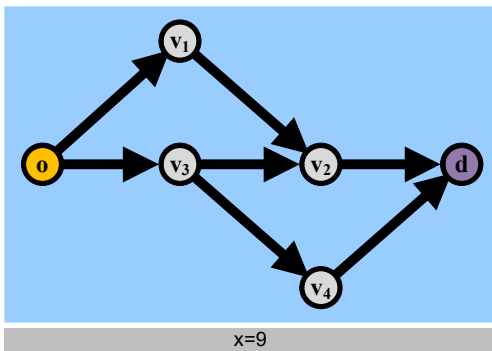
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.

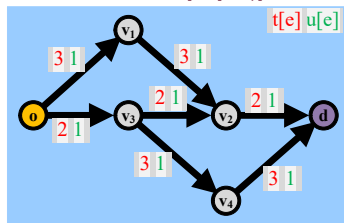


Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.
- Συνολικό φορτίο: 3 μονάδες.

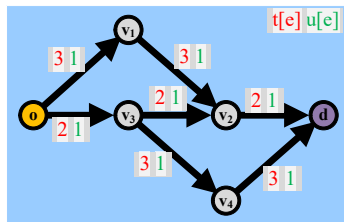
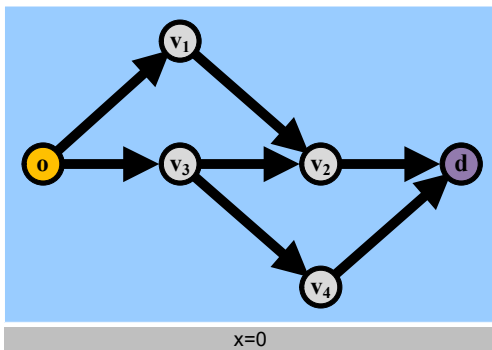


- $f_{ov_1}(x) = \mathbb{I}_{[x \in [0,1])}$
- $f_{ov_3}(x) = \mathbb{I}_{[x \in [0,2])}$
- $f_{v_1v_2}(x) = \mathbb{I}_{[x \in [3,4])}$
- $f_{v_2d}(x) = \mathbb{I}_{[x \in [5,7])}$
- $f_{v_3v_2}(x) = \mathbb{I}_{[x \in [3,4])}$
- $f_{v_3v_4}(x) = \mathbb{I}_{[x \in [2,3])}$
- $f_{v_4d}(x) = \mathbb{I}_{[x \in [5,6])}$



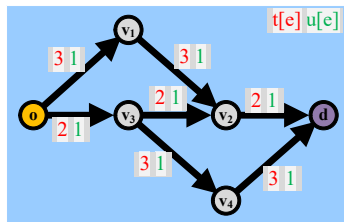
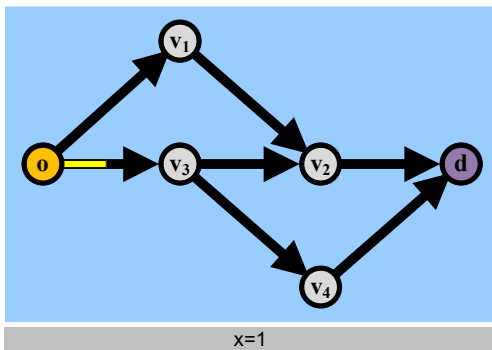
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.
- Συνολικό φορτίο: 3 μονάδες.
- Μπορείτε να βρείτε άλλη παροδική ροή με το ίδιο φορτίο;



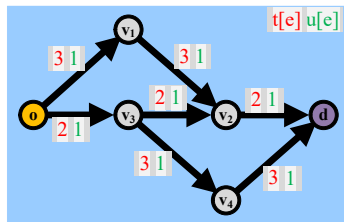
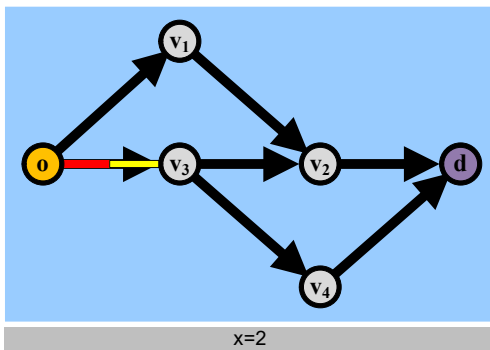
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.
- Συνολικό φορτίο: 3 μονάδες.
- Μπορείτε να βρείτε άλλη παροδική ροή με το ίδιο φορτίο;



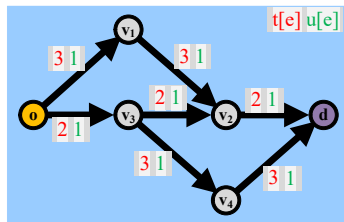
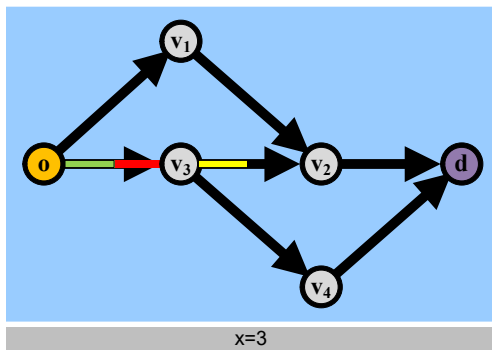
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.
- Συνολικό φορτίο: 3 μονάδες.
- Μπορείτε να βρείτε άλλη παροδική ροή με το ίδιο φορτίο;



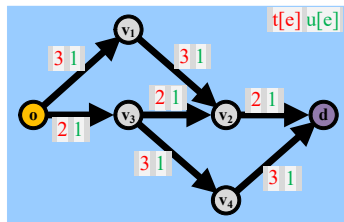
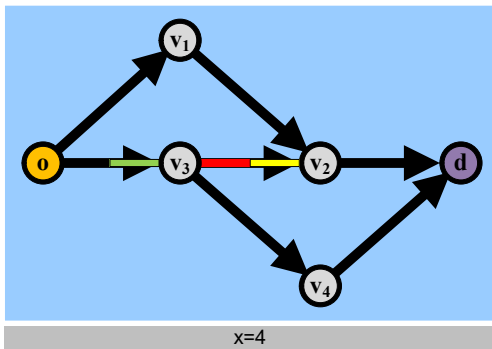
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.
- Συνολικό φορτίο: 3 μονάδες.
- Μπορείτε να βρείτε άλλη παροδική ροή με το ίδιο φορτίο;



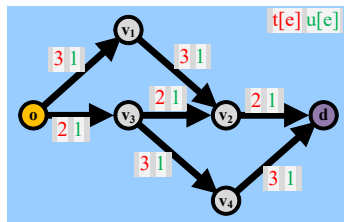
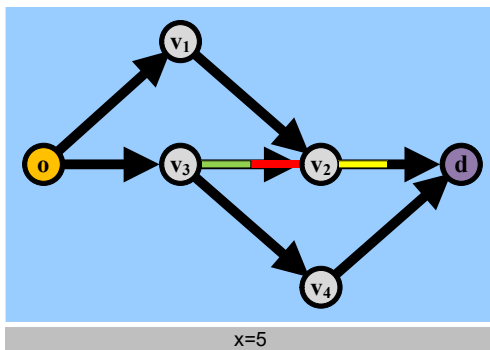
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.
- Συνολικό φορτίο: 3 μονάδες.
- Μπορείτε να βρείτε άλλη παροδική ροή με το ίδιο φορτίο;



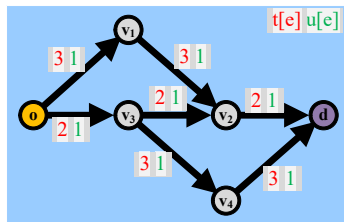
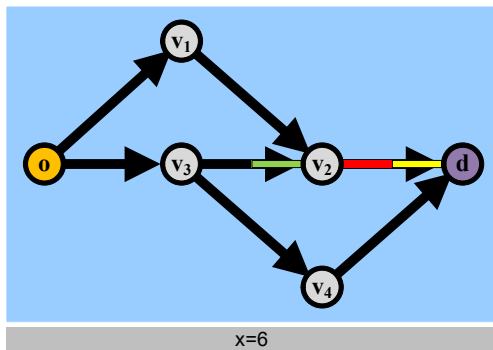
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.
- Συνολικό φορτίο: 3 μονάδες.
- Μπορείτε να βρείτε άλλη παροδική ροή με το ίδιο φορτίο;



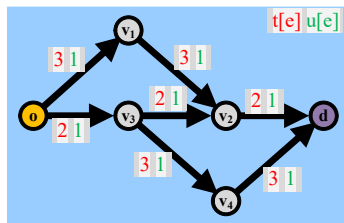
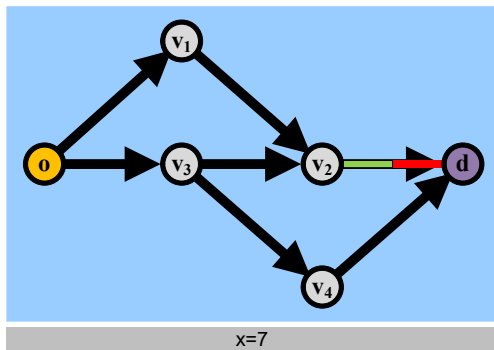
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.
- Συνολικό φορτίο: 3 μονάδες.
- Μπορείτε να βρείτε άλλη παροδική ροή με το ίδιο φορτίο;



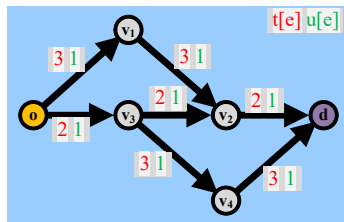
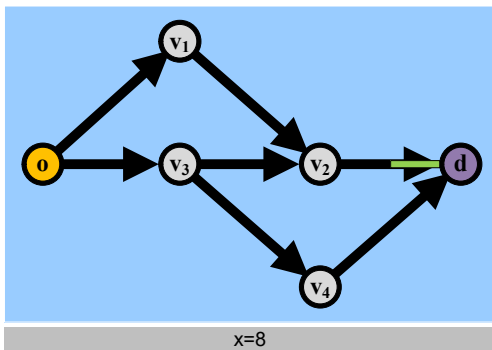
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.
- Συνολικό φορτίο: 3 μονάδες.
- Μπορείτε να βρείτε άλλη παροδική ροή με το ίδιο φορτίο;



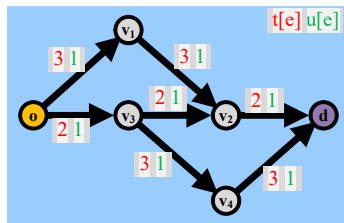
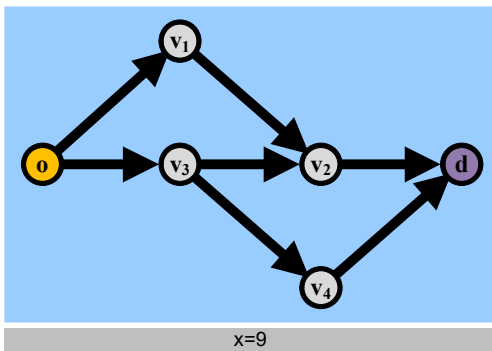
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.
- Συνολικό φορτίο: 3 μονάδες.
- Μπορείτε να βρείτε άλλη παροδική ροή με το ίδιο φορτίο;



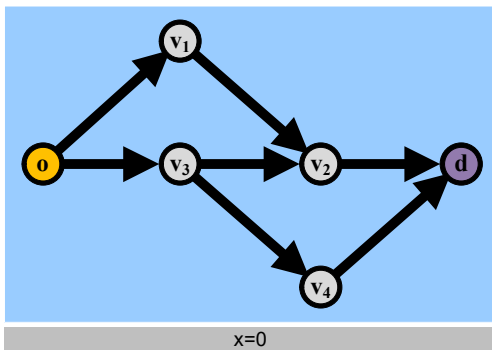
Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.
- Συνολικό φορτίο: 3 μονάδες.
- Μπορείτε να βρείτε άλλη παροδική ροή με το ίδιο φορτίο;

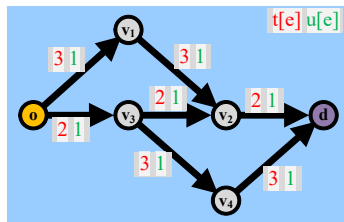


Ένα Πλήρες Παράδειγμα Παροδικής Ροής

- Χρονικός Ορίζοντας: $T = 9$.
- Συνολικό φορτίο: 3 μονάδες.
- Μπορείτε να βρείτε άλλη παροδική ροή με το ίδιο φορτίο;



- $g_{ov_3}(x) = \mathbb{I}_{[x \in [0,3])}$
- $g_{v_2d}(x) = \mathbb{I}_{[x \in [4,7])}$
- $g_{v_3v_2}(x) = \mathbb{I}_{[x \in [2,5])}$




Χρονικά Επαναλαμβανόμενη Παροδική Ροή

ΣΤΟΧΟΣ: Η μεγιστοποίηση του τελικού περισσεύματος φορτίου $|f| = ex_f(d, T)$ στον προορισμό.

Χρονικά Επαναλαμβανόμενη Παροδική Ροή

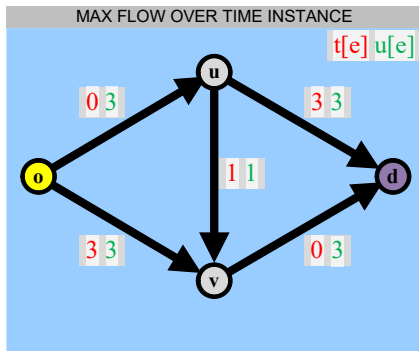
ΣΤΟΧΟΣ: Η μεγιστοποίηση του τελικού περισσεύματος φορτίου $|f| = ex_f(d, T)$ στον προορισμό.

 [Ford & Fulkerson (1958)] Θεωρούμε παροδική ροή προκαλείται από επαναλαμβανόμενες στατικές ροές ως εξής:

- 1 Υπολογίζουμε μια **ελάχιστου κόστους στατική od -ροή** $x : A \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ ως προς τη συνάρτηση $\sum_{e \in A} t[e] \cdot x_e - T \cdot |x|$.
- 2 Παίρνουμε όλα τα μονοπάτια που δημιουργούνται από την **αποσύνθεση-σε-μονοπάτια** μιας στατικής ροής x .
- 3 Συνδυάζουμε παροδικές ροές, μια για κάθε od -μονοπάτι με ρυθμό (κατά μήκος του μονοπατιού) ίσο με τη στατική ροή $x_p > 0$, και για το χρονικό διάστημα $[0, T - t[p])$, όπου $t[p] = \sum_{e \in p} t[e]$ είναι ο συνολικός χρόνος διέλευσης του μονοπατιού p .
- 4 Κάθε ακμή $e \in A$ έχει ως δική της παροδική ροή το άθροισμα (συναρτήσεων) των παροδικών ροών κατά μήκος των od -μονοπατιών στα οποία συμμετέχει.

Παράδειγμα Εύρεσης Επαναλαμβανόμενης Ροής

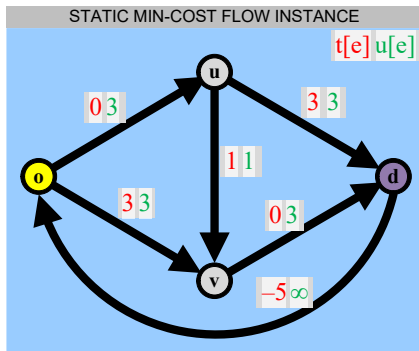
Χρονικός Ορίζοντας: $T = 5$.



Παράδειγμα Εύρεσης Επαναλαμβανόμενης Ροής

Χρονικός Ορίζοντας: $T = 5$.

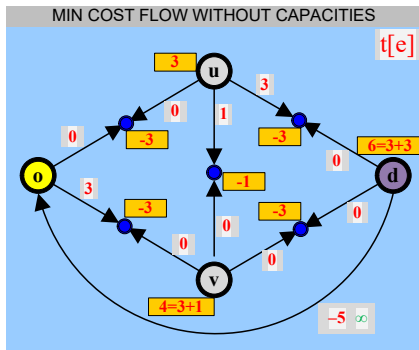
ΒΗΜΑ 1: Εύρεση στατικής ροής x
ελάχιστου κόστους.



Παράδειγμα Εύρεσης Επαναλαμβανόμενης Ροής

Χρονικός Ορίζοντας: $T = 5$.

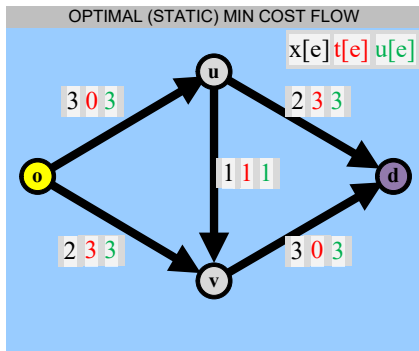
ΒΗΜΑ 1: Εύρεση στατικής ροής x
ελάχιστου κόστους.



Παράδειγμα Εύρεσης Επαναλαμβανόμενης Ροής

Χρονικός Ορίζοντας: $T = 5$.

ΒΗΜΑ 1: Εύρεση στατικής ροής x
ελάχιστου κόστους.

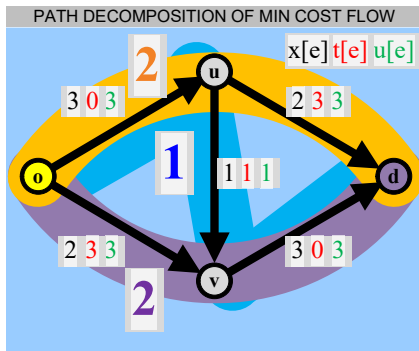


Παράδειγμα Εύρεσης Επαναλαμβανόμενης Ροής

Χρονικός Ορίζοντας: $T = 5$.

ΒΗΜΑ 1: Εύρεση στατικής ροής x
ελάχιστου κόστους.

ΒΗΜΑ 2: Αποσύνθεση σε (στατική)
ροή μονοπατιών.



Παράδειγμα Εύρεσης Επαναλαμβανόμενης Ροής

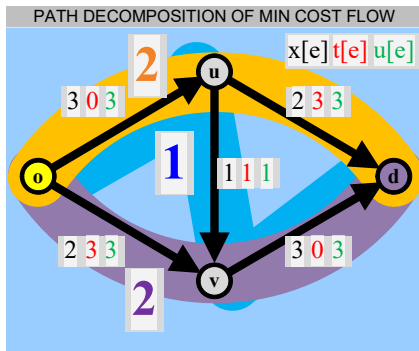
Χρονικός Ορίζοντας: $T = 5$.

ΒΗΜΑ 1: Εύρεση στατικής ροής x ελάχιστου κόστους.

ΒΗΜΑ 2: Αποσύνθεση σε (στατική) ροή μονοπατιών.

ΒΗΜΑ 3: Δημιουργία χρονικά επαναλαμβανόμενης **παροδικής ροής μονοπατιών**:

- ▶ $f_{oud}(x) = f_{ovd}(x) = 2 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [0,2)]}$.
- ▶ $f_{ouv}(x) = 1 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [0,4)]}$.



Παράδειγμα Εύρεσης Επαναλαμβανόμενης Ροής

Χρονικός Ορίζοντας: $T = 5$.

ΒΗΜΑ 1: Εύρεση στατικής ροής x ελάχιστου κόστους.

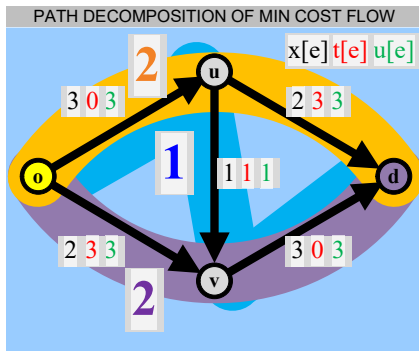
ΒΗΜΑ 2: Αποσύνθεση σε (στατική) ροή μονοπατιών.

ΒΗΜΑ 3: Δημιουργία χρονικά επαναλαμβανόμενης **παροδικής ροής μονοπατιών**:

- ▶ $f_{oud}(x) = f_{ovd}(x) = 2 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [0,2)]}$.
- ▶ $f_{ouv}(x) = 1 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [0,4)]}$.

ΒΗΜΑ 4: Υπολογισμός χρονικά επαναλαμβανόμενης **παροδικής ροής ακμών**:

- ▶ $f_{ou}(x) = 2 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [0,2)]} + 1 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [0,4)]} = 3 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [0,2)]} + 1 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [2,4)]}$.
- ▶ $f_{ov}(x) = 2 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [0,2)]}$.
- ▶ $f_{ud}(x) = 2 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [0,2)]}$.
- ▶ $f_{uv}(x) = 1 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [0,4)]}$.
- ▶ $f_{vd}(x) = 2 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [3,5)]} + 1 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [1,5)]} = 3 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [3,5)]} + 1 \cdot \mathbb{I}_{[x \in [1,3)]}$.



Ευχαριστώ για την προσοχή σας!

Ερωτήσεις / Σχόλια ;