6º Κεφάλαιο. 20/5/13

Αριθμητική Ολοκλήρωση

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχής

Ζητείται: $\int_a^b f(x)dx$

F παράγουσα της f $(F'=f)$

Τότε $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Δυσκολίες

1) Κατά κανόνα δε γνωρίζουμε την F
2) Είναι δυνατόν η f να έχει "απλή" μορφή ενώ η F πολύπλοκη.

$f(x) = \frac{1}{1+x^4}$. Η F έχει $\ln$, $\arctan$

Αριθμητική ολοκλήρωση.

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + \ldots + w_n f(x_n)$$

$x_0, \ldots, x_n$ κόμβοι $(x_0, \ldots, x_n \in [a,b])$

$w_0, \ldots, w_n$ βάρη

Το πόσο καλή είναι η προσέγγιση εξαρτάται από την επιλογή των $x_0, \ldots, x_n$ και των $w_0, \ldots, w_n$

Τύποι των Newton-Cotes

Ιδιαιτερότητα: Τα $x_0, \ldots, x_n$ ισαπέχουν (ομοιόμορφος διαμερισμός)

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{n}$, $x_i := a+ih$, $i=0,\ldots,n$

Έστω $p_n \in \mathbb{N}$ το πολυώνυμο παρεμβολής μιας συνάρτησης f στα $x_0, \dots, x_n$.
Ορίζουμε τότε:

$$Q_{n+1}(f) = \int_a^b p_n(x)\,dx.$$

Ιδιότητα του Q_{n+1}

$$\forall p \in \mathbb{P}_n \qquad \int_a^b p(x)\,dx = Q_{n+1}(p)$$

ο Q_{n+1} ολοκληρώνει πολυώνυμα βαθμού έως και n <u>ακριβώς</u>. (Σε αυτή την περίπτωση η f (δηλαδή τοp) και το p_n συμπίπτουν)
<u>Στόχος</u>: Να γράψουμε τον $Q_{n+1}(f) = \int_a^b p_n(x)\,dx$

στη μορφή $Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_n f(x_n)$ με κατάλληλα βάρη $w_0, \dots, w_n$ (ανεξάρτητα της f)
Έστω $L_0, \dots, L_n$ τα πολυώνυμα Lagrange ως προς $x_0, \dots, x_n$,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \dots, n$$

Τότε

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

Άρα

$$Q_{n+1}(f) = \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \int_a^b f(x_i) L_i(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b L_i(x)\,dx\right)}_{= w_i} \cdot f(x_i)$$

Να γράψουμε τα w_i σε καταλληλότερη μορφή.

Έχουμε

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx$$

$$\underset{x=a+hs}{=} h\int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a+hs-(a+jh)}{a+ih-(a+jh)}\,ds = h\int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{hs-jh}{ih-jh}\,ds$$

$$= h\int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{s-j}{i-j}\,ds = w_i^* \text{ (ανεξάρτητο του } [a,b]$$

$$w_i = h\, w_i^*$$

Έστω $f \in C[a,b]$.

<u>Ερώτημα</u>: Ισχύει $Q_{n+1}(f) \to \int_a^b f(x)\,dx,\ n\to\infty$;

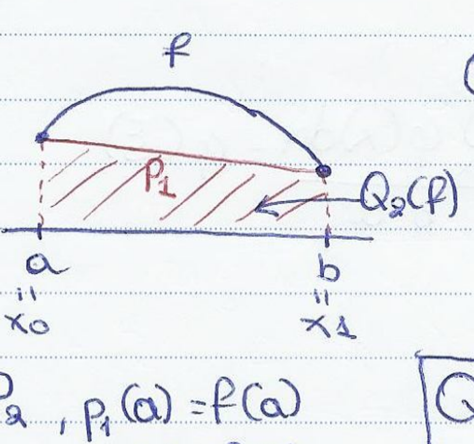
<u>Απάντηση</u>: Όχι γενικά

Λόγω αυτού του γεγονότος πρακτικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι αντίστοιχοι τύποι μόνο για μικρό n.

<u>Ο τύπος του τραπεζίου.</u>

$\boxed{n=1}$

$$Q_2(f) = \int_a^b p_1(x)\,dx = (b-a)\left[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$



$p_1 \in \mathbb{P}_2$, $p_1(a) = f(a)$
$p_1(b) = f(b)$

$$\boxed{Q_2(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]}$$

Τι μπορούμε να πούμε για το αντίστοιχο σφάλμα του τύπου τραπεζίου.

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)dx - Q_2(f) \qquad P_1(a)=f(a),\ P_1(b)=f(b)$$

$$= \int_a^b f(x)dx - Q_2(P_1) \qquad \int_a^b P_1(x)dx = Q_2(P_1)$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_1(x)dx$$

$$R_2(f) = \int_a^b [f(x) - P_1(x)]dx$$

Αν η $f \in C^2[a,b]$, τότε

$\forall\, x \in [a,b] \ \exists\ \xi(x) \in (a,b)$ $\quad f(x) - P_1(x) = \dfrac{f''(\xi(x))}{2!}(x-a)(x-b)$

Άρα

$$R_2(f) = \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi(x))(x-a)(x-b)\,dx$$

Αν η φ συνεχής τότε $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = \varphi(\xi)\cdot\underbrace{\int_a^b 1\,dx}_{b-a}$

$$\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b \underbrace{\max_{a\le y\le b} \varphi(y)}_{M}dx = M(b-a)$$

$$m := \min_y \varphi(y)$$

$$\Rightarrow m \le \frac{\int_a^b \varphi(x)dx}{b-a} \le M \underset{\text{ΘΕΤ}}{\Rightarrow} \frac{\int_a^b \varphi(x)dx}{b-a} = \varphi(\xi)$$

$$R_2(f) = \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi(x))(x-a)(x-b)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi(x))\underbrace{(x-a)(b-x)}_{\geq 0}\,dx$$

$$\Rightarrow -2R_2(f) = \int_a^b f''(\xi(x))(x-a)(b-x)\,dx$$

Έστω $m := \min\limits_{a\leq y\leq b} f''(y)$, $M := \max\limits_{a\leq y\leq b} f''(y)$.

Τότε

$$m\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx \leq -2R_2(f) \leq M\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{-2R_2(f)}{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx} \leq M.$$

ΘΕΤ

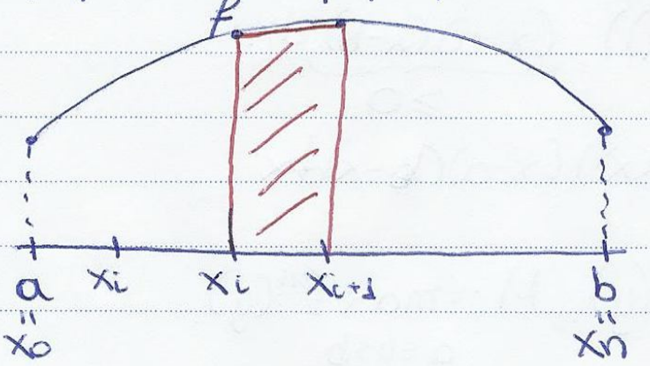
$$\overset{f''(\xi)}{\Rightarrow}$$

$$R_2(f) = -\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx = \frac{(b-a)^3}{6}$$

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12}\cdot f''(\xi)$$

Σύνθετος Τύπος του τραπεζίου:

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, και $x_i := a+ih$, $i=0,\dots,n$ ο ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα h.



$$\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

Εφαρμόζουμε τον (απλό) τύπο του τραπεζίου σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n+1$, και αθροίζουμε τα αποτελέσματα.

Έτσι παίρνουμε το σύνθετο τύπο του τραπεζίου Q^T_{n+1}

$$Q^T_{n+1} = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

Παράσταση του σφάλματος:

$f \in C^2[a,b]$

Το σφάλμα του σύνθετου τύπου του τραπεζίου είναι το άθροισμα των σφαλμάτων του απλού τύπου του τραπεζίου σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ για $i=0,\dots,n-1$

$$R^T_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)dx - Q^T_{n+1}(f)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - Q^T_{n+1}(f)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left[-\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} f''(\xi_i) \right]$$

$$= -\frac{h^3}{12} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$$

$$= -\frac{h^3}{12} n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = -\frac{n h^3}{12} f''(\xi)$$

$$= -\frac{n \cdot h \cdot h^2}{12} \cdot f''(\xi)$$

$$= -\frac{(b-a)}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi)$$

Άρα

$$R^T_{n+1}(f) = -\frac{(b-a)}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi)$$

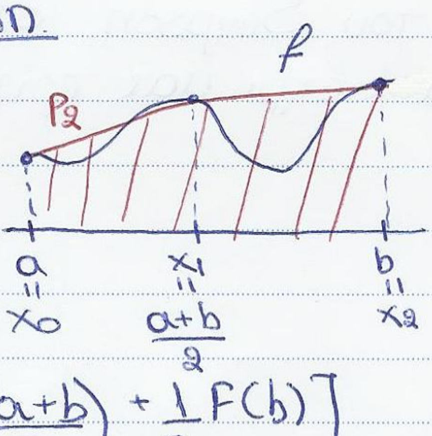
$$\Rightarrow |R^T_{n+1}(f)| \le \frac{b-a}{2} \cdot h^2 \cdot \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

$$= C h^2$$

Το σφάλμα είναι δεύτερης τάξης

<u>Ο τύπος του Simpson</u>

$\boxed{n=2}$



$$Q_3(f) = \frac{b-a}{2} \left[\frac{1}{3} f(a) + \frac{4}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3} f(b) \right]$$

$$= \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2) \right]$$

Ξέρουμε ότι

$$\forall p \in \mathbb{P}_2 \quad \int_a^b p(x)\,dx = Q_3(p)$$

Ο τύπος του Simpson ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και δύο.

Θέτουμε $q_i(x) := x^i$, $i=0,1,2,\dots$

Τότε $R_3(q_0) = R_3(q_1) = R_3(q_2) = 0$.

Ισχυρισμός: $R_3(q_3) = 0$

• πράξεις

• $q_3(x) = \overbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}^{p(x)} + q(x)$ με $q \in \mathbb{P}_2$

Τώρα $R_3(q_3) = R_3(p) + \underbrace{R_3(q)}_{=0}$

$$= R_3(p) = \underbrace{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 dx}_{=0} - \underbrace{Q_3(p)}_{=0}$$

$= 0$.

Ο τύπος του Simpson ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι και τρίτου βαθμού

Άσκηση 6.3 21/5/13

$n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ τ.ω. $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$x_1, \dots, x_n \in [a,b]$

<u>ΝΔΟ:</u>

$\exists\, \xi \in [a,b]$ $\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) = \varphi(\xi)$

<u>Απόδειξη</u>

$$\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \leq \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}_{=1} \max_{a\leq x\leq b} \varphi(x) = \max_{a\leq x\leq b} \varphi(x)$$

$$\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \geq (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \cdot \min_{a\leq x\leq b} \varphi(x) = \min_{a\leq x\leq b} \varphi(x)$$

Άρα

$$\min_x \varphi(x) \leq \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \leq \max_x \varphi(x)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τ.ω.

$$\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) = \varphi(\xi)$$

Άσκηση 6.4.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ομόσημα.

$n \in \mathbb{N}$, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$

<u>ΝΔΟ</u>

$\exists\, \xi \in [a,b]$ $\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \varphi(\xi)$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\lambda_i \geq 0$.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη Άσκηση

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \min_x \varphi(x) \leq \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \leq (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \max_x \varphi(x)$$

<u>1η Περίπτωση</u> $\lambda_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ Τότε η σχέση ισχύει για κάθε ξ

2η Περίπτωση: $\lambda_i > 0$, για κάποιο i

Τότε έχουμε

$$\min_x \varphi(x) \leq \frac{\lambda_1 \varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(x_n)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} \leq \max_x \varphi(x)$$

Θ.Ε.Τ. $\qquad \varphi''(\xi)$

Άσκηση 6.9.

$Q \quad [a,b]$.

$R(f) := \int_a^b f(x)dx - Q(f)$

Ν.Δ.Ο.: Υπάρχει το πολύ ένα $k \in \mathbb{N}$ ε.ω.

$\exists\, C_k \in \mathbb{R} : \forall f \in C^k[a,b]$

$\quad \exists\, \xi \in [a,b] \quad \boxed{R(f) = C_k f^{(k)}(\xi)}\ (*)$

$C_k \neq 0$: Τότε

$\forall\, p \in \mathbb{P}_{k-1} \quad R(p) = 0$. (γιατί $p^{(k)} = 0$)

$p(x) := x^k$. Τότε έχουμε

$R(p) = C_k \cdot k! \neq 0$

Αυτό μπορεί να συμβεί το πολύ για ένα k.

Ισχυρισμός: Η $(*)$ δεν μπορεί να ισχύει με $C_k = 0$.

$Q(f) = w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n)$

$p(x) := (x-x_1)^2 \ldots (x-x_n)^2, \ p \in \mathbb{P}_{2n}$

Τότε

$$R(p) = \int_a^b p(x)dx - \underbrace{Q(p)}_{0} = \int_a^b (x-x_1)^2 \ldots (x-x_n)^2 dx > 0, \ \text{↯ (Άτοπο)}$$

Άσκηση 6.10

$[-a,a]$

$Q_n(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_{n-1} \cdot f(x_{n-1})$

Newton-Cotes

Έστω i και j τ.ω.: $x_i = -x_j$

ΝΔΟ: $\boxed{w_i = w_j}$

(δηλαδή ότι ο τύπος Q_n είναι συμμετρικός)

(*) $\forall p \in \mathbb{P}_{n-1}: \int_{-a}^{a} p(x)\,dx = Q_n(p)$

Έστω L_i και L_j τα πολυώνυμα

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}, \quad L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$$

Τότε για $p=L_i$ και $p=L_j$ η (*) δίνει

$$w_i = \int_{-a}^{a} L_i(x)\,dx, \quad w_j = \int_{-a}^{a} L_j(x)\,dx$$

Τώρα

$$w_i = \int_{-a}^{a} L_i(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}\,dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{x+x_k}{\underset{= -x_j}{x_i}+x_k}\,dx$$

$$\underset{x=-t}{=} -\int_{a}^{-a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{-t+x_k}{-x_j+x_k}\,dt$$

$$= \int_{-a}^{a} \underbrace{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{t-x_k}{x_j-x_k}}_{L_j(t)}\,dt = w_j$$

Άσκηση 6.11

$[-a,a]$

Q_n Newton-Cotes

$\varphi : [-a,a]$ περιττή συνάρτηση

ΝΔΟ:

$$Q_n(\varphi) = \int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx.$$

- $$\int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx = 0$$

$$\int_{-a}^{0} \varphi(x)\,dx \overset{x=-t}{=} -\int_{a}^{0} \varphi(-t)\,dt = -\int_{a}^{0} (-\varphi(t))\,dt = \int_{a}^{0} \varphi(t)\,dt$$

$$= -\int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $Q_n(\varphi) = 0$.

$\varphi(x_1) = -\varphi(x_n)$ $\qquad w_1 = w_n$

$\vdots$

$\varphi(0) = 0.$

Αφού $\varphi(0)=0$, έχουμε

$$Q_n(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} w_i \varphi(x_i)$$

ακέραιο μέρος

$$= \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} w_i \underbrace{[\varphi(x_i) + \varphi(-x_i)]}_{=0} = 0$$

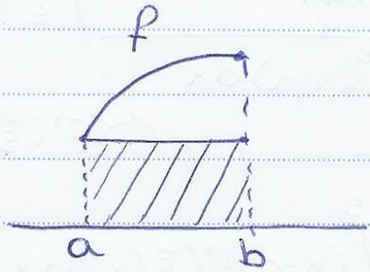
συμμετρία

Άσκηση 6.13

$Q(f) = (b-a)\cdot f(a)$

αριστερός τύπος του ορθογωνίου

$R(f) = \int_a^b f(x)dx - Q(f)$



α) ΝΔΟ: Ο Q ολοκληρώνει σταθερές συναρτήσεις ακριβώς

• $f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$

$R(f) = \int_a^b \gamma\, dx - (b-a)\cdot\gamma$

$= (b-a)\gamma - (b-a)\gamma = 0.$

β) $\forall f \in C^1[a,b] \ \exists\ \xi \in (a,b): R(f) = \frac{(b-a)^2}{2}\cdot f'(\xi)$

• $R(f) = \int_a^b f(x)dx - \underbrace{(b-a)\cdot f(a)}_{\int_a^b f(a)\,dx}$

$= \int_a^b \underbrace{[f(x) - f(a)]}_{(x-a)\cdot f'(\xi(x))} dx$

$= \int_a^b \underbrace{(x-a)}_{\geq 0}\cdot f'(\xi(x))\,dx$

$\int_a^b (x-a)\cdot f'(\xi(x))\,dx$, θέτουμε $m := \min_{a\leq y\leq b} f'(y)$

$M := \max_{a\leq y\leq b} f'(y)$

Άρα

$m\underbrace{\int_a^b (x-a)\,dx}_{\geq 0} \leq \int_a^b \underbrace{(x-a)}_{\geq 0}\cdot f'(\xi(x))\,dx \leq M\cdot\int_a^b (x-a)\,dx$

$$\Rightarrow m \le \frac{\int_a^b (x-a) f'(\xi(x))\,dx}{\int_a^b (x-a)\,dx} \le M$$

$$= f'(\xi).$$

Άρα $\int_a^b (x-a) f'(\xi(x))\,dx = f'(\xi) \int_a^b (x-a)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$

δ) $n \in \mathbb{N},\ h := \frac{b-a}{n},\ x_i := a + ih,\ i = 0, \dots, n$

$$Q_n^0(f) = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

<u>ΝΔΟ</u>: $\forall f \in C^1[a,b]\ \exists\, \xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b f(x)\,dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{2} h \cdot f'(\xi)$$

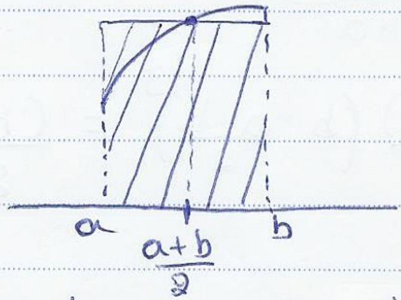
$$\int_a^b f(x)\,dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h f(x_i) \right]}_{= \frac{h^2}{2} \cdot f'(\xi_i)} = \frac{h^2}{2} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)}_{= n f'(\xi)}$$

$, \xi \in (x_i, x_{i+1})$

$$\frac{h^2}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) = \frac{b-a}{2} \cdot h f'(\xi).$$

Άσκηση 6.14



$Q(f) = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

τύπος του μέσου

$R(f) = \int_a^b f(x)dx - Q(f)$

a) **ΝΔΟ**

ο Q ολοκληρώνει πολυώνυμα μέχρι και πρώτου βαθμού ακριβώς

<u>1ος τρόπος</u>

$q_0(x) = 1 \quad , R(q_0) = (b-a) - (b-a) = 0$

$q_1(x) = x$

$= \left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{a+b}{2}$

<u>2ος τρόπος.</u>

$p(x) = \gamma x + \delta$

$R(p) = \ldots = 0$

β) $\forall f \in C^2[a,b] \ \exists \ \xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$(*) \ R(f) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\xi)$

<u>1ος τρόπος</u>

$p \in \mathbb{P}_1 \qquad p\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$R(f) = \int_a^b f(x)dx - \underbrace{Q(f)}_{\substack{\parallel \\ Q(p) \\ \parallel \\ \int_a^b p(x)dx}} = \int_a^b \underbrace{[f(x) - p(x)]}_{\substack{\parallel \\ \frac{1}{2}\left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2 \cdot f''(\xi(x))}} dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}_{\geq 0} f''(\xi(x))\,dx = \frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$=\frac{1}{3}f''(\xi)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3 = \frac{(b-a)^3}{24}$$

<u>2^{os} τρόπος</u>

$$R(f)=\int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{(b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx} =$$

$$=\int_a^b \left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]dx$$

Taylor

$$=\int_a^b\left[\cancel{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi(x))-\cancel{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right]dx =$$

$$=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\underbrace{\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx}_{=0}+\frac{1}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi(x))\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi(x))\,dx$$

γ) $n \in \mathbb{N},\ h=\frac{b-a}{2},\ x_i=a+ih,\ i=0,\dots,n$

<u>ΝΔΟ</u>

$\forall f\in C^2[a,b]\ \exists\ \xi\in(a,b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)=\frac{b-a}{24}h^2 f''(\xi)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\right]}$$

(*)

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{24} f''(\xi_i) = \quad , \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

$$\min_x f''(x) \le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi) \le \max_x f''(x)$$

$$= \frac{h^3}{24} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)}_{= n\cdot f''(\xi)}$$

$$= \frac{nh\cdot h^2}{24} f''(\xi) = \frac{b-a}{24} h^2\cdot f''(\xi)$$

23/5/13

Τύπος του Simpson

$[a,b]$

$$Q_3(f) = \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right]$$

$h = \frac{b-a}{2}$, $x_i := a+ih$, $i=0,1,2$

$$Q_3(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) - 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$\forall\, p \in \mathbb{P}_3 \quad \int_a^b p(x)dx = Q_3(p)$

$R_3(f) = \int_a^b f(x)dx - Q_3(f)$

Παράσταση του σφάλματος

Ισχυρισμός :

$\forall\, f \in C^4[a,b] \ \exists\, \xi \in (a,b)$

$$(*) \quad \boxed{R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} \cdot f^{(4)}(\xi)}$$

Απόδειξη

Έστω $p \in \mathbb{P}_3$ τ.ω. $p(x_i) = f(x_i)$, $i=0,1,2,$

$p'(x_1) = f'(x_1)$

Τότε $R(f) = \int_a^b f(x)dx - \underbrace{Q_3(f)}_{= Q_3(p) = \int_a^b p(x)dx}$

$$\Rightarrow R(f) = \int_a^b \left[f(x) - p(x)\right]dx$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 4.15 ισχύει ότι

$\forall\, x \in [a,b] \ \exists\, \xi(x) \in (a,b)$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$$

Άρα

$$R(f) = \frac{1}{24} \int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) \cdot f^{(4)}(\xi(x))\,dx$$

$$= -\frac{1}{24} \int_a^b \underbrace{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (b-x)}_{\geq 0} \cdot f^{(4)}(\xi(x))\,dx$$

$$= -\frac{1}{24} \cdot f^{(4)}(\xi) \underbrace{\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (b-x)\,dx}_{= \frac{(b-a)^5}{2^3 \cdot 15}}$$

$$= -\frac{1}{2^4 \cdot 12 \cdot 15} (b-a)^5 \cdot f^{(4)}(\xi)$$

Σύνθετος τύπος του Simpson

Έστω $n \in \mathbb{N}$ άρτιος, $h = \frac{b-a}{2}$, $x_i := a+ih$, $i=0,\dots,n$.

Εφαρμόζοντας τον (απλό) τύπο του Simpson στα υποδιαστήματα $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_n]$ και αθροίζοντας τα αποτελέσματα, παίρνουμε το σύνθετο τύπο του Simpson Q^S_{n+1}

$$Q^S_{n+1}(f) =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Παράσταση του σφάλματος του σύνθετου τύπου του Simpson

$$R^{S}_{n+1} = \int_a^b f(x)dx - Q^{S}_{n+1}(f)$$

Ισχυρισμός:

$\forall\, f \in C^4[a,b]\ \exists\, \xi \in (a,b)$

$$R^{S}_{n+1}(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 \cdot f^{(4)}(\xi)$$

Το σφάλμα είναι το άθροισμα των σφαλμάτων του (απλού) τύπου του Simpson στα υποδιαστήματα $[x_0,x_2],[x_2,x_4],\dots,[x_{n-2},x_n]$. Άρα σύμφωνα με την (*),

$$R^{S}_{n+1}(f \quad \frac{1}{2^4 \cdot 180}\Big[(x_2-x_0)^{(4)}(\xi_1) +$$

$$R^{S}_{n+1}(f) = -\frac{1}{2^4 \cdot 180}\Big[\underbrace{(x_2-x_0)}_{2h}{}^5 \cdot f^{(4)}(\xi_1) + \underbrace{(x_4-x_2)}_{2h}{}^5 \cdot f^{(4)}(\xi_2) + \dots + \underbrace{(x_n-x_{n-2})}_{2h}{}^5 \cdot f^{(4)}(\xi_{n/2})\Big]$$

$$= -\frac{(2h)^5}{2^4 \cdot 180} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^{(4)}(\xi_i)$$

$$= -\frac{2h \cdot h^4}{180} \cdot \frac{n}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i)}_{f^{(4)}(\xi)}$$

$$= -\frac{b-a}{180} \cdot h^4 f^{(4)}(\xi)$$

Τύποι Ολοκλήρωσης του Gauss

$w:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση βάρους
- $w(x) \geq 0$
- $0 < \int_a^b w(x)dx < \infty$

<u>Στόχος</u>: Για $n \in \mathbb{N}$ να προσδιορίσουμε έναν τύπο ολοκλήρωσης Q_n,

(*) $Q_n(f) = w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$, τ.ω να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα του μεγαλύτερου δυνατού βαθμού.

- Κανένας τύπος (*) δεν μπορεί να ολοκληρώνει ακριβώς όλα τα $p \in \mathbb{P}_{2n}$

$p(x) = (x-x_1)^2 \dots (x-x_n)^2$

$p \in \mathbb{P}_{2n}$

$Q_n(p) = 0$

$\int_a^b w(x)p(x)dx = \int_a^b w(x)\underbrace{(x-x_1)^2 \dots (x-x_n)^2}_{\geq 0}dx > 0$

$w: [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Υπάρχει ακριβώς ένα $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$ (βαθμού ακριβώς n με μέγιστο βάθμιο συντελεστή τη μονάδα) τ.ω.

$\int_a^b w(x)p_n(x) \cdot r_{n-1}(x)\,dx = 0 \quad \forall\, r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$

Τα $p_0, p_1, \dots$ λέγονται <u>ορθογώνια πολυώνυμα</u> ως προς w.

- Το p_n έχει (για $n \geq 1$) n απλές ρίζες $x_1, \dots, x_n$ όλες στο διάστημα (a,b)

Θεώρημα (Ύπαρξη και μοναδικότητα τύπων του Gauss)

$w:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση βάρους

$n \in \mathbb{N}$ και $p \in \mathbb{P}_n$

Τότε:

α) Με κόμβους $\boxed{x_1<\dots<x_n}$ τις ρίζες του p_n, υπάρχουν μοναδικά ορισμένα $w_1,\dots,w_n$ τ.ω. για τον $Q_n(f)=w_1f(x_1)+\dots+w_nf(x_n)$ να ισχύει

$(*)$ $\forall p \in \mathbb{P}_{n-1}$ $\int_a^b w(x)p(x)dx = Q_n(p)$.

και μάλιστα τα w_i είναι θετικά

Απόδειξη

Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Αν $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ τ.ω. $q(x_i)=p(x_i)$, $i=1,\dots,n$,

Άρα

$$\underbrace{(p-q)(x)}_{\in \mathbb{P}_{2n-1}} = \underbrace{(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}_{\overset{\shortparallel}{p_n(x)}}\cdot r_{n-1}(x), \quad r_{n-1}\in\mathbb{P}_{n-1}$$

Συνεπώς $\boxed{p = q + p_n r_{n-1}}$

Επομένως,

$$\int_a^b w(x)p(x)dx = \int_a^b w(x)q(x)dx + \underbrace{\int_a^b w(x)p_n(x)r_{n-1}(x)dx}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$$= \int_a^b w(x)q(x)dx = \int_a^b w(x)\cdot\sum_{i=1}^n p(x_i)\cdot L_i(x)dx$$

$$\left(q(x) = \sum_{i=1}^n p(x_i)\cdot\underbrace{L_i(x)}_{\text{Lagrange}}\right)$$

$$\int_a^b w(x)\cdot\sum_{i=1}^n p(x_i)\cdot L_i(x)dx = \sum_{i=1}^n p(x_i)\underbrace{\int_a^b w(x)L_i(\omega)dx}_{w_i}$$

ανεξάρτητα του p

Έστω $Q'_n(f) = w'_1 f(x_1) + \dots + w'_n f(x_n)$ τύπος που ολοκληρώνει όλα τα $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ ακριβώς. Τότε

$$\underbrace{Q_n(L_i^2)}_{= w_i} = \underbrace{\int_a^b w(x) \underbrace{[L_i(x)]^2}_{\in \mathbb{P}_{2n-2}} dx}_{>0.} = Q'_n(L_i^2) = w'_i$$

β) Αν $Q_n(f) = \tilde{w}_1 f(x_n)$ τω να ισχύει η (+) τότε τα $x_1, \dots, x_n$ είναι ρίζες του P_n

Απόδειξη

Έστω $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Θέτω $p(x) := (x-x_1)\dots(x-x_n) r_{n-1}(x)$

Τότε $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$

$Q_n(p) = 0$

Άρα

$$\forall\, r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1} \quad \int_a^b w(x) \underbrace{(x-x_1)\dots(x-x_n)}_{\tilde{P}_n(x)} \cdot r_{n-1}(x)\,dx = 0$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα

$\tilde{P}_n = P_n$

24/5/13

<u>Θεώρημα</u> (Παράσταση του σφάλματος τύπων ολοκλήρωσης του Gauss)

Έστω $[a,b]$, $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση βάρους, $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$ τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w.
Έστω $n \in \mathbb{N}$ και Q_n ο τύπος του Gauss με n κόμβους ως προς w. Τότε, για κάθε $f \in C^{2n}[a,b]$, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b w(x)f(x)dx - Q_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b w(x)\left[p_n(x)\right]^2 dx.$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x_1,\dots,x_n$ οι κόμβοι του Q_n.
Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ τ.ω. $\begin{cases} p(x_i)=f(x_i), & i=1,\dots,n, \\ p'(x_i)=f'(x_i), & i=1,\dots,n. \end{cases}$
(Παρεμβολή Hermite)

Τότε

$$\int_a^b w(x)f(x)dx - \underbrace{Q_n(f)}_{\substack{= Q_n(p) \\ = \int_a^b w(x)p(x)dx}} =$$

$$= \int_a^b w(x)f(x)dx - \int_a^b w(x)p(x)dx = \int_a^b w(x)\left[f(x)-p(x)\right]dx$$

Τώρα, έχουμε (από την παράσταση του σφάλματος της παρεμβολής Hermite)

$\forall x \in [a,b] \quad \exists \xi(x) \in (a,b)$

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$$

Άρα

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx - Q_n(f) = \frac{1}{(2n)!}\int_a^b w(x) f^{(2n)}(\xi(x)) \underbrace{(x-x_1)^2\dots(x-x_n)^2}_{[p_n(x)]^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{(2n)!}\int_a^b \underbrace{w(x)[p_n(x)]^2}_{\geq 0} f^{(2n)}(\xi(x))\,dx =$$

(πρέπει αν ζητηθεί να αποδειχτεί πώς βγαίνει η παράγωγος έξω από το ολοκλήρωμα)

$p_n(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)$

$$= \frac{f^{(2n)}(\xi_1)}{(2n)!}\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2\, dx$$

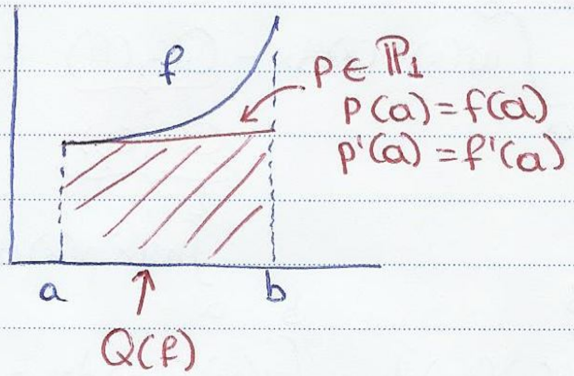
Άσκηση 6.15

$Q(f) = (b-a)\cdot f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\cdot f'(a)$, $f \in C^1[a,b]$

$R(f) := \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$

$p(x) = f(a) + (x-a)\cdot f'(a)$

$\int_a^b p(x)\,dx = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a)$



a) $\forall p \in \mathbb{P}_1 \quad R(p) = 0$

1ος τρόπος:

• $q_i(x) = x^i$

$R(q_0) = \dots = 0$, $R(q_1) = \dots = 0$

$q_0(x) = 1$

2^{os} τρόπος.

- $p(x) = \gamma + \delta x$

$$R(p) = \int_a^b p(x)dx - Q(p) = \int_a^b (\gamma+\delta x)dx - \left[(b-a)p(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot p'(a)\right]$$

$$= \delta \cdot \frac{b^2-a^2}{2} + \gamma(b-a) - \left[(b-a)(\gamma+\delta a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \delta\right] = \dots = 0.$$

β) $\forall f \in C^2[a,b] \ \exists \xi \in (a,b)$.

(*) $R(f) = \frac{(b-a)^3}{6} \cdot f''(\xi)$

$$R(f) = \int_a^b f(x)dx - \underbrace{\int_a^b \left[f(a) + (x-a) \cdot f'(a)\right]dx}_{Q(f)}$$

$$= \int_a^b \left[f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)\right]dx$$

Taylor

$$= \int_a^b \left[\cancel{f(a)} + \cancel{(x-a)f'(a)} + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(\xi(x)) - \cancel{f(a)} - \cancel{(x-a)f'(a)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)^2 \cdot f''(\xi(x))dx = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)^2 dx =$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \frac{(b-a)^3}{3}$$

γ) $n \in \mathbb{N}, h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + ih, i = 0, \dots, n$

<u>ΝΔΟ</u>: $\forall f \in C^2[a,b]\ \exists\ \xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}\left[h\, f(x_i) + \frac{h^2}{2}\cdot f'(x_i)\right] = \frac{b-a}{6}\cdot h^2\cdot f''(\xi)$$

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}\left[h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}\left[h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \left[h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right]\right\}}_{(*)\ \frac{h^3}{6} f''(\xi_i)}$$

$$= \frac{h^3}{6}\, n \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)}_{= f''(\xi)} = \frac{n\cdot h\cdot h^2}{6} = \frac{b-a}{6}\cdot h^2\cdot f''(\xi)$$

Άσκηση 6.8.

$[-1,1]$ $\quad Q_n^T \quad Q_m^S$, $\quad f(x) = \dfrac{x^6}{30} - x^2$.

ΝΔΟ: $Q_n^T(f) \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx \leq Q_m^S(f)$

σχέσεις του βιβλίου
$$\begin{cases} (6.4) & R_{n+1}^T(f) = -\dfrac{b-a}{12} h^2 \cdot f''(\xi) \\ (6.9) & R_{n+1}^S(f) = -\dfrac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \end{cases}$$

Άρα

$$\exists\, \xi \in (-1,1): \int_{-1}^{1} f(x)dx - Q_n^T(f) = \underbrace{\underbrace{-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{n-1}\right)^2}_{\leq 0} \underbrace{f''(\xi)}_{<0}}_{\geq 0}$$

$f'(x) = \dfrac{x^5}{5} - 2x$, $f''(x) = x^4 - 2 < 0$

Άρα $\int_{-1}^{1} f(x)dx \geq Q_n^T(f)$.

$$\exists\, \theta \in (-1,1): \int_{-1}^{1} f(x)dx - Q_m^S(f) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{90}\left(\frac{2}{m-1}\right)^4}_{\leq 0} \underbrace{f^{(4)}(\theta)}_{\geq 0}}_{\leq 0}$$

$f'''(x) = 4x^3$, $f^{(4)}(x) = 12x^2 \geq 0$.

Άρα $\int_{-1}^{1} f(x)dx \leq Q_m^S(f)$