12/4/2016

4ο Κεφάλαιο - Παρεμβολή

Η παρεμβολή είναι ένας τρόπος προσέγγισης συναρτήσεων με απλούστερες συναρτήσεις με διάφορες επιθυμητές ιδιότητες. Οι τιμές τους να υπολογίζονται εύκολα, να παραγωγίζονται εύκολα, να ολοκληρώνονται εύκολα κλπ.

Έστω f μία συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής και $\{x_0, \ldots, x_n\}$ ένα σύνολο $(n+1)$ ανά δύο διαφορετικών μεταξύ τους σημείων του πεδίου ορισμού της f, στα οποία οι τιμές της f είναι γνωστές.

Στην παρεμβολή Lagrange ζητείται μία συνάρτηση φ από ένα συγκεκριμένο σύνολο συναρτήσεων, ώστε η φ να παρεμβάλλεται στα σημεία $(x_i, f(x_i))$ $i=0,\ldots,n$ δηλαδή $\varphi(x_i) = f(x_i)$, $i=0,\ldots,n$. Με άλλα λόγια, ζητούμε το γράφημα της φ να διέρχεται από τα σημεία $(x_i, f(x_i))$ $i=0,\ldots,n$.

Στην παρεμβολή Hermite ζητούμε επιπλέον οι τιμές παραγώγων συγκεκριμένης τάξης της φ να συμπίπτουν με αντίστοιχες της f.

Συνήθως η παρεμβολή γίνεται με πολυώνυμα, με κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις ή με ρητές συναρτήσεις (λόγω πολυωνύμων)

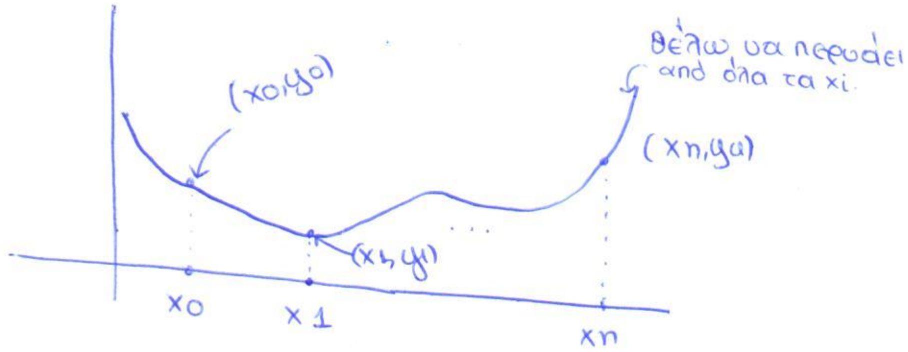
Πολυωνυμική παρεμβολή

Θεώρημα (παρεμβολή τύπου Lagrange)

Έστω $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$

Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n (γράφουμε $p \in \mathbb{P}_n$) τ.ω

(*) $p(x_i) = y_i \quad i = 0, \ldots, n$



Απόδειξη

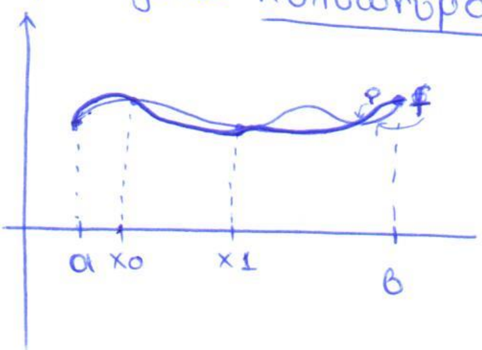
Θέτουμε, $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ και η (*) γράφεται ως γραμμικό σύστημα $(n+1)$ εξισώσεων με $(n+1)$ αγνώστους τους συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_n$ του p.
Το αντίστοιχο <u>ομογενές</u> σύστημα είναι $q(x_i) = 0$, $i = 0, \ldots, n$, $q \in \mathbb{P}_n$ (+)
Αλλά το q είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n με τουλάχιστον $(n+1)$ ρίζες, της $x_0, \ldots, x_n$. Επομένως, $q(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, δηλαδή το (+) έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

Συμπέρασμα, το (*) λύνεται μονοσήμαντα. ■

∞

Αν f μία συνάρτηση και $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω $p(x_i) = f(x_i)$ $i = 0, \ldots, n$ με $x_0, \ldots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία, τότε λέμε ότι το p <u>παρεμβάλλεται</u> στην f στα σημεία $x_0, \ldots, x_n$.

Το p λέγεται <u>πολυώνυμο παρεμβολής</u> (ή πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange) της f στα σημεία $x_0, \ldots, x_n$.



Θεώρημα (παράσταση του σφάλματος παρεμβολής)

Έστω $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{n+1}[\alpha,b]$, $x_0,\dots,x_n \in [\alpha,b]$ ανά δύο διαφορετικά σημεία και $p \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0,\dots,x_n$. Τότε ισχύει

$$\forall\, x \in [\alpha,b] \ \ \exists\, \underset{\substack{\parallel \\ \xi(x)}}{\xi} \in (\alpha,b) \qquad f(x)-p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \quad (**)$$

Απόδειξη

- $x \in \{x_0,\dots,x_n\}$ τότε η $(**)$ ισχύει για κάθε ξ
- Έστω $x \in [\alpha,b]$, $x \notin \{x_0,\dots,x_n\}$

θέτουμε $\Phi(t) := \prod_{i=0}^{n}(t-x_i)$ και $\varphi(t) = f(t)-p(t) - \underbrace{\frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)\neq 0}}_{\text{αριθμός}}\cdot \Phi(t)$, $t \in [\alpha,b]$

Προφανώς, $\varphi \in C^{n+1}[\alpha,b]$.

Τώρα, $\varphi(x_i)=0$, $i=0,\dots,n$ και $\varphi(x) = f(x)-p(x) - \frac{f(x)-p(x)}{\cancel{\Phi(x)}}\cdot\cancel{\Phi(x)} = 0$

Συμπέρασμα, η φ έχει στο $[\alpha,b]$ τουλάχιστον $n+2$ ρίζες.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, η φ' έχει στο (α,b) τουλ. $n+1$ ρίζες

—//— —//— , η φ'' —//— —//— n ρίζες

⋮ ⋮ ⋮

, η $\varphi^{(n+1)}$ —//— 1 ρίζα, έστω ξ.

Άρα, $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$ και $\xi \in (\alpha,b)$.

Όμως, $\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \cancel{p^{(n+1)}(t)} - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\,\Phi^{(n+1)}(t)$.

0 (επειδή το p είναι πολ/μο βαθμού n)

- $p^{(n+1)}(t)=0$ γιατί $p \in \mathbb{P}_n$.

• $\Phi(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-x_i) = t^{n+1} + q(t)$ με $q \in \mathbb{P}_n$

$\Rightarrow \Phi^{(n+1)}(t) = (n+1)! + \cancel{q^{(n+1)}(t)}^{\,0}$

$\Rightarrow \Phi^{(n+1)}(t) = (n+1)!$

Συμπέρασμα, $\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \dfrac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \cdot (n+1)!$

Αφού $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$, θα έχουμε $f^{(n+1)}(\xi) - \dfrac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}(n+1)! = 0$

$\Rightarrow f(x)-p(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Phi(x)$ αυτή είναι η (**) ■

__Πόρισμα__ (**) $\Rightarrow$

$$\underbrace{\max_{a\le x\le b}|f(x)-p(x)|}_{\|f-p\|_\infty} \le \frac{1}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| \cdot \max_{a\le \xi\le b}|f^{(n+1)}(\xi)|$$

$$\|f-p\|_\infty \le \max_{a\le x\le b}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}$$

__Παράσταση και υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής__

__α) Παράσταση σε μορφή του Lagrange__

Έστω $x_0,\dots,x_n$ σημεία στο $\mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε, για κάθε $i\in\{0,\dots,n\}$ υπάρχει ακριβώς ένα $L_i \in \mathbb{P}_n$ τ.ω. $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, $j=0,\dots,n$

(δηλαδή $L_i(x_i)=1$, και $L_i(x_j)=0$ για $j\ne i$)

Προφανώς, αφού τα x_j, για $j\neq i$, είναι ρίζες του L_i θα έχουμε ① $L_i(x) = a_i \cdot \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x-x_j)$

Τώρα, θέλουμε ακόμα $L_i(x_i)=1$, δηλαδή $a_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i-x_j) = 1$,

Οπότε ② $a_i = \dfrac{1}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i-x_j)}$

Από ① και ② έπεται $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$, $i=0,\dots,n$

Τα $L_0,\dots,L_n$ λέγονται <u>πολυώνυμα του Lagrange</u> ως προς τα σημεία $x_0,\dots,x_n$. ∎

<u>Ισχυρισμός</u>: Αν $p\in\mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής μίας συνάρτησης f στα $x_0,\dots,x_n$ τότε $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{f(x_i)}_{\text{αριθμος}} L_i(x) \in \mathbb{P}_n$ ③

Αυτή η παράσταση λέγεται παράσταση πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή του Lagrange.

<u>Απόδειξη ισχυρισμού (3)</u>

Συμβολίζουμε με q το δεξιό μέλος της (3). <u>Ιδιότητες του q</u>:

α) $q\in\mathbb{P}_n$

β) $q(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \overbrace{L_i(x_j)}^{\delta_{ij}} = f(x_j) \overbrace{L_j(x_j)}^{1} = f(x_j)$, $j=0,\dots,n$

Δηλαδή το $q\in\mathbb{P}_n$ είναι πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_0,\dots,x_n$.

Λόγω της μοναδικότητας του πολυωνύμου παρεμβολής, το q συμπίπτει με το p. ∎

Κύριο πλεονέκτημα:

Η απλότητα της (3) καθιστά αυτήν την παράσταση πολύ χρήσιμη για θεωρητικούς σκοπούς.

Μειονεκτήματα:

α) Προσθήκη ενός σημείου παρεμβολής x_{n+1} ή αφαίρεση ενός σημείου παρεμβολής απαιτεί τον εκ νέου υπολογισμό του πολυωνύμου του Lagrange

β) Ο υπολογισμός τιμών του p σε κάποιο σημείο με την (3) απαιτεί πάρα πολλές πράξεις.(Πολύ περισσότερες από την παράσταση σε μορφή Νεύτωνα)

β)

Παράσταση σε μορφή του Νεύτωνα

Έστω $x_0,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $y_0,\dots,y_n \in \mathbb{R}$.

Γράφουμε το $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω $p(x_i)=y_i$, $i=0,\dots,n$ στη μορφή

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

Παρατηρούμε ότι: $p(x_0)=y_0 \rightsquigarrow a_0=y_0$

$p(x_1)=y_1 \rightsquigarrow \underbrace{a_0}_{y_0}+a_1(x_1-x_0)=y_1$ και λύνω ως προς a_1.

$\Leftrightarrow a_1 = \dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$

$p(x_2)=y_2 \rightsquigarrow a_2=\left(\dfrac{y_2-a_0}{x_2-x_0}-a_1\right) / (x_2-x_1)$

13/4/2016

Παράσταση και υπολογισμός

α) Παράσταση σε μορφή Lagrange

β) Παράσταση σε μορφή Νεύτωνα

Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $y_0, \dots y_n \in \mathbb{R}$. Γράφοντας το πολυώνυμο $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω $p(x_i)=y_i$ $i=0,\dots,n$ στη μορφή

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) \quad (*)$$

μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τους συντελεστές $a_0, \dots, a_n$ διαδοχικά:

$p(x_0) = y_0 \rightsquigarrow a_0 = y_0$

$p(x_1) = y_1 \rightsquigarrow a_1 = \dfrac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0}$

$p(x_2) = y_2 \rightsquigarrow a_2 = \left(\dfrac{y_2 - a_0}{x_2 - x_0} - a_1\right) / (x_2 - x_1)$

$\vdots$

Μειονέκτημα

Δεν είναι βολικό για θεωρητικούς σκοπούς

Πλεονεκτήματα

1) Αν έχουμε υπολογίσει τους συντελεστές $a_0, \dots, a_n$ στην $(*)$ τότε η τιμή του p σε ένα σημείο x υπολογίζεται εύκολα με το σχήμα του Horner.

$$p(x) = a_0 + (x-x_0)\Big(a_1 + (x-x_1)\big(a_2 + \dots + (x-x_{n-1})\,a_n\big)\dots\Big)$$

2) Από την $(*)$ προκύπτει ότι $\forall\ 0 \leq k \leq n$ το πολυώνυμο $p_k \in \mathbb{P}_k$

$$p_k(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_k(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})$$

Είναι το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange που αντιστοιχεί στα σημεία (x_i, y_i), $i=0,\dots,k$. Ιδιαίτερα έχοντας υπολογίσει $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω $p(x_i)=y_i$ $i=0,\dots,n$ για να υπολογίσουμε ένα $\tilde{p} \in \mathbb{P}_{n+1}$ τ.ω $\tilde{p}(x_i) = y_i$, $i=0,\dots,n+1$ γράφουμε το $\tilde{p}$ στη μορφή

$$\tilde{p}(x) = p(x) - a_{n+1}(x-x_0)\dots(x-x_n)$$ με μόνο άγνωστο τον a_{n+1}.

Ένας τρόπος υπολογισμού των συντελεστών $a_0,\dots,a_n$ στην ⊛ είναι με χρήση των λεγόμενων <u>διαιρεμένων διαφορών</u>.

Διαιρεμένες διαφορές

Έστω $f\in C[a,b]$, $x_0,\dots \in [a,b]$ τ.ω $x_i \neq x_j$ για $i\neq j$. Τότε ορίζουμε επαγωγικά ως προς i

$$\Delta^0(x_0)(f) = f(x_0)$$

$$\Delta^i(x_0,\dots,x_i)(f) = \frac{\Delta^{i-1}(x_1,\dots,x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0,\dots,x_{i-1})(f)}{x_i - x_0}, \quad i\geq 1$$

Πίνακας διαιρεμένων διαφορών

	$n=0$	$n=1$	$n=2$
x_0	$\Delta^0(x_0)(f) = f(x_0)$		
x_1	$\Delta^0(x_1)(f) = f(x_1)$ →	$\Delta^1(x_0,x_1)(f)$	
x_2	$\Delta^0(x_2)(f) = f(x_2)$ →	$\Delta^1(x_1,x_2)(f)$ →	$\Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)$
	⋮	⋮	⋮

Πρόταση (παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Νεύτωνα με διαιρεμένες διαφορές)

Έστω $x_0,\dots,x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, $f\in C[a,b]$ και $p\in\mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_0,\dots,x_n$ (δηλαδή $p(x_i)=f(x_i)$, $i=0,\dots,n$). Τότε ισχύει

$$p(x) = \underbrace{\Delta^0(x_0)(f)}_{a_0} + \underbrace{\Delta^1(x_0,x_1)(f)}_{a_1}(x-x_0) + \dots + \underbrace{\Delta^n(x_0,\dots,x_n)(f)}_{a_n}(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

γ) Παρεμβολή σε ένα σημείο κατά Aitken-Neville

· Για τον υπολογισμό της τιμής του πολυωνύμου παρεμβολής σε ένα σημείο, δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε πρώτα το πολυώνυμο παρεμβολής, δηλαδή όλους τους συντελεστές του. Ένας άλλος τρόπος είναι η λεγόμενη μέθοδος των Aitken-Neville

Ιδέα

Έστω $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n$ τα πολυώνυμα παρεμβολής μίας συνάρτησης f στα σημεία

$$x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$$

$$x_{m+1}, \dots, x_{m+n}, x_{m+n+1}$$

αντίστοιχα. Τότε το πολυώνυμο $q \in \mathbb{P}_{n+1}$,

$$q(x) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} p_1(x) & x_m - x \\ p_2(x) & x_{m+n+1} - x \end{vmatrix},$$ παρεμβάλλεται στην f

στα σημεία $x_m, \dots, x_{m+n+1}$.

Απόδειξη (για το $q(x)$)

Πραγματικά έχουμε:

$$q(x_m) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} \overset{=f(x_m)}{p_1(x_m)} & \overset{0}{\overset{\shortparallel}{x_m - x_m}} \\ p_2(x_m) & x_{m+n+1} - x_m \end{vmatrix} = p_1(x_m) = f(x_m) \quad \checkmark$$

Δεν ξέρω πόσο κάνει

$$q(x_{m+n+1}) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} p_1(x_{m+n+1}) & x_m - x_{m+n+1} \\ \underbrace{p_2(x_{m+n+1})}_{= f(x_{m+n+1})} & 0 \end{vmatrix} = p_2(x_{m+n+1}) = f(x_{m+n+1})$$

Για $i \in \{m+1, \dots, m+n\}$ (κοινά σημεία παρεμβολής), $q(x_i) = \dfrac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} \overbrace{P_1(x_i)}^{=f(x_i)} & x_m - x_i \\ \underbrace{P_2(x_i)}_{=f(x_i)} & x_{m+n+1} - x_i \end{vmatrix}$

$$= \frac{f(x_i)(x_{m+n+1} - \cancel{x_i} - x_m + \cancel{x_i})}{x_{m+n+1} - x_m} = \frac{f(x_i)\cancel{(x_{m+n+1} - x_m)}}{\cancel{x_{m+n+1} - x_m}} = f(x_i).$$ Ικανοποιείται.

<u>Συμβολισμός</u> (έχω το πολυώνυμο & βρίσκω την τιμή του στο ξ.)

$P(x_i, \dots, x_{i+j}; \xi)$ = η τιμή του πολυωνύμου βαθμού το πολύ j που παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $x_i, \dots, x_{i+j}$, στο σημείο ξ

<u>Πίνακας των Aitken - Neville</u>

x_i	y_i	$p \in \mathbb{P}_1$	$p \in \mathbb{P}_2$	...
x_0	y_0			
x_1	y_1	$p(x_0, x_1; \xi)$		
x_2	y_2	$p(x_1, x_2; \xi)$	$p(x_0, x_1, x_2; \xi)$	
x_3	y_3	$p(x_2, x_3; \xi)$	$p(x_1, x_2, x_3; \xi)$	
⋮	⋮	⋮	⋮	

Θεώρημα (του Faber)

Για κάθε πίνακα σημείων παρεμβολής,

$$\begin{array}{llll} x_{00} & & & \\ x_{10} & x_{11} & & \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ x_{n0} & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \\ \vdots & & & \end{array}$$

σε ένα διάστημα $[a,b]$ υπάρχει $f \in [a,b]$ τ.ω αν $p_n \in \mathbb{P}_n$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_{n0}, \dots, x_{nn}$, τότε ισχύει

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\max_{a\le x\le b} |f(x)-p_n(x)| \right) = \infty. \blacksquare$$

Λόγω αυτού του αποτελέσματος και του γεγονότος ότι οι υπολογισμοί με πολυώνυμα μεγάλου βαθμού παρουσιάζουν προβλήματα ευστάθειας, η πολυωνυμική παρεμβολή δεν χρησιμοποιείται για μεγάλο n. Η πολυωνυμική παρεμβολή είναι χρήσιμη για την κατασκευή τύπων αριθμητικής ολοκλήρωσης, διαμόρφωσης κλπ.

Η προσέγγιση συναρτήσεων γίνεται σήμερα σχεδόν αποκλειστικά με κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις (splines).

Παρεμβολή τύπου Hermite

Θεώρημα (παρεμβολή τύπου Hermite)

Έστω $m_0, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0$, $N = m_0 + \dots + m_n + n$, και $M = \max(m_0, m_1, \dots, m_n)$.

Αν $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $f \in C^M[a,b]$ τότε το "πρόβλημα παρεμβολής τύπου Hermite" ζητείται $p \in \mathbb{P}_N$ τ.ω

$$(*)\begin{cases} p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), & i=0,\dots,m_0 \\ p^{(i)}(x_1) = f^{(i)}(x_1), & i=0,\dots,m_1 \\ \vdots & \vdots \\ p^{(i)}(x_n) = f^{(i)}(x_n) & i=0,\dots,m_n \end{cases}$$

αυτό λύνεται μονοσήμαντα.

Απόδειξη

Το $(*)$ είναι ένα γραμμικό σύστημα με $(N+1)$ αγνώστους, τους συντελεστές του p; και $(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1)$

$$= \underbrace{m_0+m_1+\dots+m_n}_{N} + (n+1) \rightarrow \text{οι μονάδες \#}$$

$= N+1$. εξισώσεις.

Θεωρούμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα,

$$(+)\begin{cases} \text{ζητείται } q \in \mathbb{P}_N \text{ τ.ω} \\ q^{(i)}(x_0) = 0, & i=0,\dots,m_0 \\ q^{(i)}(x_1) = 0, & i=0,\dots,m_1 \\ \vdots \\ q^{(i)}(x_n) = 0, & i=0,\dots,m_n \end{cases}$$

Το q είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ N και έχει τουλάχιστον $(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1) = \dots = N+1$ ρίζες (μετρώντας και τις πολλαπλότητα)

Άρα, $q=0$, δηλαδή το $(+)$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Συμπέρασμα, το $(*)$ έχει ακριβώς μία λύση ∎ θεώρημα

Ειδική περίπτωση, η πιο συνηθισμένη :

$m_0 = m_1 = \dots = m_n = 1$

Ζητείται $p \in \mathbb{P}_{\underbrace{2n+1}_{2n+1}}$ τ.ω $p(x_i) = f(x_i)$, $p'(x_i) = f'(x_i)$ $i = 0, \dots, n.$ (**)

Θεώρημα (παράσταση του σφάλματος της παρεμβολής Hermite (**))

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία, και $f \in C^{2n+2}[a,b]$. Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ το πολυώνυμο που ικανοποιεί την (**)

Τότε, για το σφάλμα παρεμβολής έχουμε :

$$\forall x \in [a,b] \quad \exists \xi \in (a,b) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$$

Μνημονικός κανόνας

Έστω $f \in C^{N+1}[a,b]$ $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $p \in \mathbb{P}_N$ το πολυώνυμο που ικανοποιεί την (*).

Τότε :

$$\forall x \in [a,b], \ \exists \xi \in (a,b) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x - x_0)^{m_0+1} (x - x_1)^{m_1+1} \dots (x - x_n)^{m_n+1}$$

Ειδικές περιπτώσεις

$m_0 = m_1 = \dots = m_n = 0$ $\rightsquigarrow$ παρεμβολή Lagrange

$m_1 = m_0 = \dots = m_n = 1$ $\rightsquigarrow$ αποτέλεσμα προηγούμενου θεωρήματος.

$\propto$ο

Θεώρημα (Παράσταση του σφάλματος της παρεμβολής τύπου Hermite)

Έστω $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $x_0,\dots,x_n\in[a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $f\in C^{2n+2}[a,b]$

Έστω $p\in\mathbb{P}_{2n+1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής τύπου Hermite, $p(x_i)=f(x_i)$, $p'(x_i)=f'(x_i)$, ... $i=0,\dots,n$

Τότε (*) $\forall x\in[a,b]$ $\exists \xi\in[a,b]$ $f(x)-p(x)=\dfrac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$

Απόδειξη

• $x\in\{x_0,\dots,x_n\}$, η (*) ισχύει τότε για κάθε $\xi\in(a,b)$ αφού και τα δύο μέλη της είναι ίσα με μηδέν

• $x\in[a,b]$, $x\notin\{x_0,\dots,x_n\}$ χ.π.τ.γ υποθέτουμε ότι $a\le x_0<x_1<x_2<\dots<x_n\le b$

Έστω $x\in(x_j,x_{j+1})$ για κάποιο $j\in\{0,1,\dots,n-1\}$

(Στις περιπτώσεις $a\le x< x_0$ ή $x_n<x\le b$ η απόδειξη γίνεται εντελώς παρόμοια)

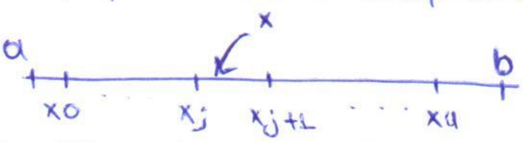
Ορίζουμε

$$\psi(t):=\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)^2 \quad \text{και} \quad \varphi(t):=f(t)-p(t)-\frac{f(x)-p(x)}{\psi(x)}\psi(t) \quad t\in[a,b]$$

Προφανώς $\varphi\in C^{2n+2}[a,b]$

Έχουμε $\varphi(x_0)=\varphi(x_1)=\dots=\varphi(x_j)=\varphi(x)=\varphi(x_{j+1})=\dots=\varphi(x_n)=0$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχουν σημεία



$x_0<\xi_0<x_1<\xi_1<x_2<\dots<x_{j-1}<\xi_{j-1}<x_j<\xi_j<x$

$<\xi_{j+1}<x_{j+1}<\dots<\xi_n<x_n$

τ.ω. $\varphi'(\xi_i)=0$, $i=0,\dots,n$

Επιπλέον

$\varphi'(x_i)=0$, $i=0,\dots,n$ αφού $f'(x_i)=p'(x_i)$ και $\psi'(x_i)=0$.

Άρα, η φ' έχει στο (a,b) τουλάχιστον $2n+2$ ρίζες. Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle η $\varphi^{(2n+2)}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\xi\in(a,b)$

Όμως

$$y^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \cancel{p^{(2n+2)}(t)}^{\,0} - \frac{f(x)-p(x)}{\psi(x)} \underbrace{\boxed{\psi^{(2n+2)}(t)}}_{=(2n+2)!}$$

$$\psi(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-x_i)^2 = t^{2n+2} + q(t) \text{ με } q \in \mathbb{P}_{2n+1}$$

$$\psi^{(2n+2)}(t) = (2n+2)! + \emptyset$$

Άρα, $$y^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\psi(x)}(2n+2)!$$

Επομένως, για $t=\xi$,

$$0 = f^{(2n+2)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\psi(x)}(2n+2)! \Rightarrow f(x)-p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\psi(x)$$ ■

Παρεμβολή με splines

Έστω $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$.

Splines ως προς αυτόν τον διαμερισμό λέγονται γενικά συναρτήσεις οι οποίες σε κάθε υποδιάστημα $[x_i,x_{i+1}]$ έχουν μία συγκεκριμένη μορφή, πχ είναι πολυώνυμα το πολύ βαθμού m. Συνήθως απαιτείται και κάποια ομαλότητα.

Ειδική περίπτωση

Ορισμός (ομαλή splines)

Έστω $[a,b]$ ένα διάστημα και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του και $m \in \mathbb{N}$. Τα στοιχεία του γραμμικού χώρου $S_m(\Delta) = \{ s \in C^{m-1}[a,b] : s|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, i=0,\dots,n-1\}$ λέγονται (πολυωνυμικές) splines βαθμού m (ως προς Δ) ■

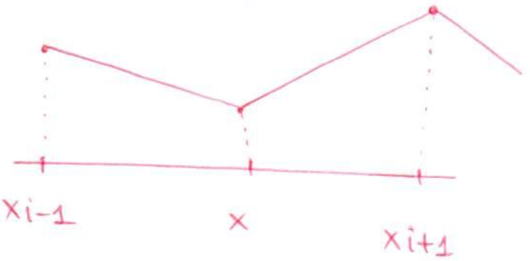
Στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται πολύ συχνά οι splines $\underline{S_1(\Delta)}$ και $\underline{S_3(\Delta)}$, οι λεγόμενες γραμμικές και κυβικές splines, αντίστοιχα.

<u>Παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις</u> ($S_1(\Delta)$)

$\Delta: \; a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$$S_1(\Delta) = \left\{ s \in C[a,b] : s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1 ,\; i = 0, \dots, n \right\}$$

Τα στοιχεία αυτού του χώρου λέγονται <u>γραμμικές splines</u> ή συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις.



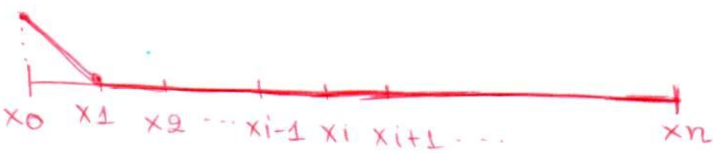
<u>Ερώτημα</u>

να μην μηδενίζεται σε όσο το δυνατόν μικρότερο διάστημα

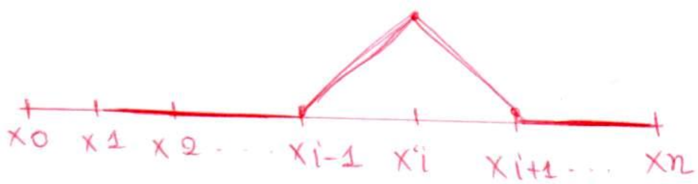
Ποιά είναι η διάσταση του $S_1(\Delta)$; "Βολική" βάση;

<u>Απάντηση</u>

Ορίζουμε τις συναρτήσεις,



$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_0} , & x_0 \le x \le x_1 \\ 0 , & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} , & x_{i-1} \le x \le x_i \\ -\dfrac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} , & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 , & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} , & x_{n-1} \le x \le x_n \\ 0 , & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ισχυρίζομαι,

- $\varphi_i \in S(\Delta)$, $i=0,\dots,n$

- $\varphi_0 \dots, \varphi_n$ γραμμικά ανεξάρτητα

<u>Απόδειξη</u>

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} c_i\underbrace{\varphi_i(x_j)}_{=\delta_{ij}} = 0 \qquad j=0,\dots,n$$

Αυτό σημαίνει $\Rightarrow c_j \underbrace{\varphi_j(x_j)}_{=1} = 0$, $j=0,\dots,n$

$\Rightarrow c_j = 0$, $j=0,\dots,n$ ∎ γα, ισχυρισμοί

Ισχυρίζομαι, $\cdot \{\varphi_0,\dots,\varphi_n\}$ βάση του $S_1(\Delta)$

$$S \in S_1(\Delta) \Rightarrow S = \sum_{i=0}^{n} S(x_i)\varphi_i$$

<u>Απόδειξη</u>

Πράγματι, για $x\in[x_j, x_{j+1}]$ ισχύει $S(x) = \sum_{i=0}^{n} S(x_i)\varphi_i(x)$, γιατί και τα δύο μέλη είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ 1, και έχουν τις ίδιες τιμές στα άκρα του διαστήματος:

$$\sum_{i=0}^{n} S(x_i)\underline{\varphi_i(x_j)} = S(x_j)\varphi_j(x_j) = S(x_j)$$

και

$$\sum_{i=0}^{n} S(x_i)\varphi_i(x_{j+1}) = S(x_{j+1})\varphi_{j+1}(x_{j+1}) = S(x_{j+1})$$

Συμπέρασμα, $\{\varphi_0,\dots,\varphi_n\}$ βάση του $S_1(\Delta)$ ∎ ισχυρισμός

$\Rightarrow \dim(S_1(\Delta)) = n+1$ ∎ ερώτημα.

Παρεμβολή

Έστω $f \in C[a,b]$. Τότε υπάρχει ακριβώς μία $S \in S_1(\Delta)$ τ.ω. $S(x_i)=f(x_i)$, $i=0,\dots,n$

Μάλιστα, $S=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i$

Το γράφημα της S είναι η τεθλασμένη γραμμή που διέρχεται από τα σημεία $(x_i,f(x_i))$, $i=0,\dots,n$.

Αν $p_i \in \mathbb{P}_1$ τ.ω. $p_i=f(x_i)$, $p_i(x_{i+1})=f(x_{i+1})$ τότε προφανώς

$$S\Big|_{[x_i,x_{i+1}]}=p_i,$$

δηλαδή, $S(x)=p_i(x)$, $x\in[x_i,x_{i+1}]$

Επίσης,

$$p_i(x)=f(x_i)+\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i), \quad x\in[x_i,x_{i+1}].$$

Θεώρημα (Εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις)

Έστω $f\in C^2[a,b]$, $\Delta: a=x_0<\dots<x_n=b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$ και $S_1(\Delta)$ η παρεμβάλλουσα της f στα $x_0,\dots,x_n$, $S(x_i)=f(x_i)$, $i=0,\dots,n$. Αν $h_i=x_i-x_{i-1}$ και $h:=\max_{1\le i\le n} h_i$ τότε ισχύει $\max_{a\le x\le b}|f(x)-S(x)| \le \frac{h^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$

Απόδειξη

Για $x\in[x_i,x_{i+1}]$ έχουμε $S(x)=p_i(x)$.

Άρα, $f(x)-S(x)=f(x)-p_i(x)$, $x\in[x_i,x_{i+1}]$

Όμως, όπως ξέρουμε,

$$\forall x\in[x_i,x_{i+1}]\ \exists \xi\in(x_i,x_{i+1}) .\ f(x)-p_i(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1})$$

Επομένως, για $x\in[x_i,x_{i+1}]$

$$f(x)-S(x)=f(x)-p_i(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1})$$

$$\Rightarrow \max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f(x)-p(x)| \le \frac{1}{2}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|(x-x_i)(x-x_{i+1})|\max_{x_i\le\xi\le x_{i+1}}|f''(\xi)| \quad (*)$$

όμως,

$$\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |(x-x_i)(x-x_{i+1})| = \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \Big(\underbrace{(x_{i+1}-x)}^{\ge 0} \underbrace{(x-x_i)}^{\ge 0} \Big) = (x_{i+1}-x)^{+}(x-x_i)$$

$$= \underbrace{x_{i+1}-x_i}_{=h_{i+1}}$$

$$= \frac{h_{i+1}}{2} \cdot \frac{h_{i+1}}{2} = \frac{(h_{i+1})^2}{4}$$ ■ απόδειξη για αυτό που κύκλωσα πριν

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x)-p(x)| \le \frac{(h_{i+1})^2}{8} \max_{x_i \le \cancel{x} \le x_{i+1}} |f''(\cancel{x})|$$

$$\le \frac{h^2}{8} \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$ ανεξάρτητο του i

$$\Rightarrow \max_{a \le x \le b} |f(x)-p(x)| \le \frac{h^2}{8} \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$ ■ θεωρήματος

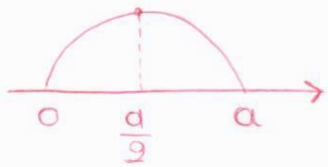
$p(x) = x(a-x), \quad 0 \le x \le a$

$p(x) = ax - x^2$

$p(0) = p(a) = 0$

$p'(x) = a - 2x \longrightarrow p'(x) = 0,\ x = \frac{a}{2}$

$p''(x) = -2 < 0$



το μέγιστο λαμβάνεται στο $x = \frac{a}{2}$

Παρεμβολή με κυβικές splines

$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$S_3(\Delta) = \{ s \in C^2[a,b] \quad s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3,\ i = 0, \dots, n-1 \}$

χώρος των κυβικών splines ως προς τον διαμερισμό Δ.

Ερώτημα

Έστω $f \in C[a,b]$. Υπάρχει μοναδική $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ ή μήπως απαιτούνται επιπρόσθετες συνθήκες;

Απάντηση

• Πλήθος αγνώστων

$4n$, 4 συντελεστές για κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$

• Πλήθος συνθηκών

• Συνθήκες παρεμβολής

$2n$, 2 συνθήκες σε κάθε υποδιάστημα για την παρεμβολή στα άκρα του.

εξασφαλίζουν και τη συνέχεια της S στους εσωτερικούς κόμβους $x_1, \dots, x_{n-1}$

• Συνθήκες συνέχειας της S' στα $x_1, \dots, x_{n-1}$

$n-1$

• Συνθήκες συνέχειας της S'' στα $x_1, \dots, x_{n-1}$

$n-1$

Συνολικά

$4n-2$

Συμπέρασμα, απαιτούνται 2 επιπρόσθετες συνθήκες. ■ τα θεωρ. κάτω + 2 συνθήκες.

Θεώρημα (Παρεμβολή με κυβικές splines)

Έστω $f \in C^1[a,b]$. Με τον συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως, υπάρχει ακριβώς μία $S \in S_3(\Delta)$ τ.ω

$$\begin{cases} S(x_i) = f(x_i), & i = 0, \dots, n \\ S'(x_0) = f'(x_0) \\ S'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$ ■

Θεώρημα

$f \in C^2[a,b]$. Υπάρχει ακριβώς μία $S \in S_3(\Delta)$ τ.ω

$$\begin{cases} S(x_i) = f(x_i), & i = 0, \dots, n \\ S''(x_0) = f''(x_0) \\ S''(x_n) = f''(x_n) \end{cases}$$ ■

Ορισμός

Στοιχεία $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ λέγονται φυσικές κυβικές splines.

Θεώρημα

Υπάρχει ακριβώς μία φυσική κυβική splines $S \in S_3(\Delta)$ τ.ω

$$S(x_i) = f(x_i) \quad , i = 0, \dots, n \;\blacksquare$$

3 θεωρήματα πριν

καθένα από τα τρία αυτά προβλήματα παρεμβολής γράφεται ως γραμμικό σύστημα με ίδιο πλήθος εξισώσεων και αγνώστων. Οι πίνακες συντελεστών έχουν αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, οπότε είναι αντιστρέψιμα, επομένως τα προβλήματα αυτά λύνονται όπως μονοσήμαντα.

Θεώρημα (εκτίμηση του σφάλματος)

Έστω Δ: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$,

$$h = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}), \quad M = \frac{h}{\min\limits_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})}$$

Αν $f \in C^4[a,b]$ και $S \in S_3(\Delta)$ τ.ω

$$\begin{cases} S(x_i) = f(x_i) & , i = 0, \dots, n \\ S'(x_0) = f'(x_0) \\ S'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$

Τότε υπάρχουν σταθερές C_m, $m = 0,1,2,3$ ανεξάρτητες της f και του h (η C_3 εξαρτάται από το M) τ.ω

$$\| f^{(m)} - S^{(m)} \|_\infty \le C_m h^{4-m} \| f^{(4)} \|_\infty , \quad m = 0,1,2,3$$

Μάλιστα,

$$C_0 = \frac{5}{384}, \quad C_1 = \frac{1}{24} \quad (\text{βέλτιστες})$$

$$C_2 = \frac{3}{8}, \quad C_3 = \max\left\{ 2, \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{M}\right) \right\} \;\blacksquare$$

Κυβικές splines του Hermite

Μεταξύ της παρεμβολής με κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις και με κυβικές splines υπάρχει η εξής διαφορά:

Η τοπική συμπεριφορά της παρεμβάλλουσας γραμμικής spline εξαρτάται μόνο από την τοπική συμπεριφορά της παρεμβαλλόμενης συνάρτησης, ενώ η τοπική συμπεριφορά της παρεμβάλλουσας κυβικής spline εξαρτάται από την ολική συμπεριφορά της f (για τον προσδιορισμό της S χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές της f στα $x_0, \dots, x_n$)

Ερώτημα

Μπορούμε να παρεμβάλουμε με τμηματικές κυβικές συναρτήσεις έτσι ώστε η τοπική συμπεριφορά της παρεμβάλλουσας να εξαρτάται μόνο από την τοπική συμπεριφορά της παρεμβαλλόμενης συνάρτησης ?

Απάντηση

ΝΑΙ, με κυβικές splines του Hermite!

κυβικές splines του Hermite

Ορισμός (κυβικές splines του Hermite)

Έστω $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του διαστήματος $[a,b]$. Τα στοιχεία του χώρου

$$\left\{ s \in C^1[a,b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3, \ i = 0, \dots, n \right\}$$

λέγονται κυβικές splines του Hermite ως προς τον διαμερισμό Δ.

Θεώρημα (Παρεμβολή με κυβικές splines του Hermite)

Έστω $f \in C^1[a,b]$ και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$. Τότε υπάρχει ακριβώς μία κυβική spline του Hermite ως προς Δ τ.ω

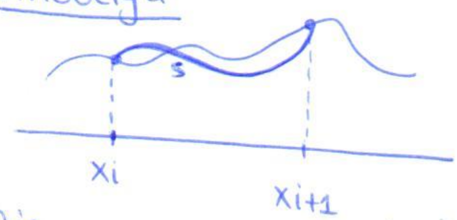
$$\left.\begin{aligned} S(x_i) &= f(x_i) \\ S'(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned}\right\} \ i = 0, \dots, n$$

Αν επι πλέον $f \in C^4[a,b]$, τότε

$$\|f-S\|_\infty < \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty \quad \text{με } h = \max_{0\le i\le n-1} (x_{i+1}-x_i)$$

το σφάλμα μειώνεται ≈ 5 φορές σε σχέση με τον τύπο που είχαμε πριν

Απόδειξη



θέλω να φτιάξω μια S, ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ 3

Σύμφωνα με το θεώρημα 4.4 υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο $P_i \in \mathbb{P}_3$ τ.ω

$$(*) \quad \left.\begin{aligned} P_i(x_j) &= f(x_j) \\ P_i'(x_j) &= f'(x_j) \end{aligned}\right\} \; j = i, i+1$$

Αυτό ισχύει για κάθε $i \in \{0, \dots, n-1\}$

Τώρα η συνάρτηση $S: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\; S(x) = P_i(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ είναι η, προφανώς μοναδική, κυβική spline Hermite που ικανοποιεί την (*)

Εκτίμηση σφάλματος

$x \in [x_i, x_{i+1}]$ (σχέση (4.16))

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \; \exists \xi \in (x_i, x_{i+1})$

$$f(x) - P_i(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2.$$

Επομένως, για $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $f(x) - S(x) = f(x) - P_i(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2$

$$\Rightarrow |f(x) - S(x)| \le \frac{1}{4!} \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left((x-x_i)^2 (x_{i+1}-x)^2 \right) \max_{x_i \le \xi \le x_{i+1}} |f^{(4)}(\xi)| \quad (1)$$

$$\cdot \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left((x-x_i)^2 (x_{i+1}-x)^2 \right) = \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \Big(\underbrace{(x-x_i)(x_{i+1}-x)}_{\geqslant 0} \Big)^2 = \Big(\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \big((x-x_i)(x_{i+1}-x) \big) \Big)^2$$

$$= \left(\frac{(x_{i+1}-x_i)}{2} \frac{(x_{i+1}-x_i)}{2} \right)^2 = \frac{(x_{i+1}-x_i)^4}{2^4} \le \frac{h^4}{2^4}$$

Άρα, (1) $|f(x)-s(x)| \le \dfrac{1}{4!}\,\dfrac{h^4}{\rho^4}\,\max\limits_{a\le\xi\le b}|f^{(4)}(\xi)|$

Το δεξιό μέλος είναι ανεξάρτητο του i, οπότε

$$\forall\, x\in[a,b] \quad |f(x)-s(x)| \le \underbrace{\frac{1}{4!\,\rho^4}}_{=\frac{1}{384}}\, h^4 \max_{a\le\xi\le b}|f^{(4)}(\xi)|$$