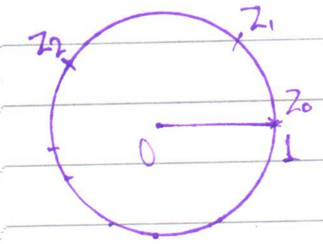
Θυμάμαι:

$z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$

έχει λύσεις:

$$z_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$



Τα z_i είναι οι κορυφές του κανονικού n-γώνου που είναι εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο και έχει μια κορυφή στο σημείο $(1,0)$

$$(x-2)^6 = 10^{-6} \iff x_k - 2 = 10^{-1} e^{\frac{2i\pi k}{6}} \iff$$

$$|x_k - x^*| = \frac{1}{10} \left| e^{\frac{2\pi i k}{6}} \right| = 1 \iff |x_k - x^*| = \frac{1}{10}$$

καλή κατάσταση

$$(x-2)^6 = 0 \iff x - 2 = 0$$

$$x - 2 = 10^{-6} \longrightarrow \tilde{x} - 2 = 10^{-6}.$$

$$|\tilde{x} - 2| = 10^{-6}$$

2ο ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Έστω f μια συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής. Ζητούνται $\boxed{x \in \mathbb{R}}$ τ.ω. $f(x) = 0$, δηλαδή ρίζες της f.

"Αριθμητικές μέθοδοι"

Αριθμητικές μέθοδοι: δίνουν κατά κανόνα μια ακολουθία προσεγγίσεων $x_0, x_1, x_2, \dots$ η οποία, υπό κατάλληλες προϋποθέσεις, συγκλίνει σε μια ρίζα x^* της f.

5|3|2015

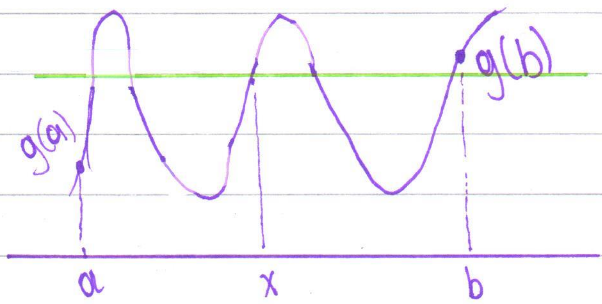
"Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων"

Συμβολισμός: Αν $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $n \in \mathbb{N}$ τότε
$C(I) = \{f \mid f: I \to \mathbb{R} \text{ , } f \text{ συνεχής}\}$
$C^n(I) = \{f \in C(I) : f \text{ n φορές συνεχώς παραγωγίσιμη}\}$
$C[a,b]$, $C(a,b)$, $C^n[a,b]$, $C^n(a,b)$

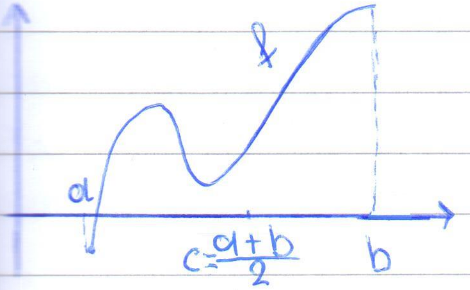
"Η μέθοδος της διχοτόμησης"

Είναι η απλούστερη αριθμητική μέθοδος προσέγγισης των ριζών x^* μιας εξίσωσης $f(x)=0$.
Βασίζεται στο θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Θυμάμαι:
Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής
Έστω $g \in C[a,b]$ και $k \in \mathbb{R}$ ένας αριθμός μεταξύ των $g(a)$ και $g(b)$. Τότε, υπάρχει $x \in [a,b]$ τω $g(x) = k$



Ιδέα της διχοτόμησης



(πρόσημο) $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$f \in C[a,b]$, $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$
$f(a) \cdot f(b) < 0$

Θέτουμε $c = \frac{a+b}{2}$

1^{η} περίπτωση $f(c)=0 \longrightarrow$ Το c είναι ρίζα.

2^{η} περίπτωση $f(c) \neq 0$.

- Αν $f(a)\cdot f(c) < 0$, τότε υπάρχει ρίζα της f στο $[a, c]$
- Αν $f(a)\cdot f(c) > 0$, τότε $f(c)\cdot f(b) < 0$, οπότε υπάρχει ρίζα στο $[c, b]$

Δηλαδή, τα διαστήματα $[a, c]$, και $[c, b]$ έχουν μήκος το μισό του $[a, b]$

Αν $x^* \in [a, b]$ τότε $\left| x^* - \frac{1}{2}(a+b) \right| \leq \frac{b-a}{2}$

Δεδομένα αλγορίθμου διχοτόμησης: a, b, f τ.ω. s

a, b, f τ.ω. $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$

$f \in C[a, b]$ και $\varepsilon > 0$

↳ (μέγιστο σφάλμα, ή ανοχή σφάλματος)

Αλγόριθμος

υπολόγισε $f(a)$, $\delta = b - a$

1. $\delta \leftarrow \frac{\delta}{2}$

   Αν $\delta \leq \varepsilon$, τύπωσε: a, b. Έξοδος

   διαφορετικά (δλδ αν $\delta > \varepsilon$):

   υπολόγισε $c = \frac{a+b}{2}$, $f(c)$

   τύπωσε: $a, b, c, \delta, f(c)$

   Αν $f(c) = 0$, Έξοδος

   διαφορετικά (δλδ αν $f(c) \neq 0$):

   αν $\operatorname{sgn} f(c) = \operatorname{sgn} f(a)$

   $a \leftarrow c$ $f(a) \leftarrow f(c)$

   διαφορετικά (δηλαδή $\operatorname{sgn} f(c) \neq \operatorname{sgn} f(a)$)

   $b \leftarrow c$,

   πήγαινε στο 1.

"Πρακτικά ζητήματα για τον αλγόριθμο της μεθόδου διχοτόμησης"

1. Το ερώτημα $\operatorname{sgn} f(c) = \operatorname{sgn} f(a)$ δεν πρέπει να τίθεται στη μορφή $f(c)\cdot f(a) < 0$, γιατί μπορεί να οδηγήσει σε υπερχείλιση.
2. Το $c = \frac{a+b}{2}$ καλό είναι να υπολογίζεται ως $c = a + \frac{b-a}{2}$

γιατί διαφορετικά μπορεί να οδηγήσει σε σημείο έξω από το (a, b).

Παράδειγμα

$\beta = 10$, $t = 2$, $U = -L = 10$. Κάνω αποκοπή

$a = .61$, $b = .66$

$fl(a+b) = fl(\underbrace{1.27}) = 1.2$

↳ έχω 3 ψηφία και δεν μπορώ να τα κρατήσω το 7 κόβεται

$c = \frac{fl(a+b)}{2} = 0.6 < a$

3. Πολύ μικρή ανοχή σφάλματος μπορεί να οδηγήσει σε φαύλο κύκλο.

$c = a + \frac{b-a}{2}$

Αν $fl(c + fl(\varepsilon)) = c$ τότε στο επόμενο βήμα θα έχουμε το ίδιο διάστημα όπως και στο προηγούμενο.

"Σύγκλιση και εκ των προτέρων εκτίμηση του σφάλματος"

Πρόταση (Εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου της διχοτόμησης)

Έστω $f \in C[a,b]$, $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των προσεγγίσεων (δηλαδή των μέσων των διαδοχικών διαστημάτων) που δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης. Τότε είτε $x_N = x^*$ για κάποιο N, είτε $x_N \to x^*$, $n \to \infty$, όπου $x^* \in [a,b]$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. Μάλιστα, ισχύει η εκτίμηση

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

απόδειξη:
Θέτω $a_1 = a$, $b_1 = b$
ας συμβολίσουμε με $I_i = [a_i, b_i]$ $i = 1, 2, \ldots$ τα διαδοχικά διαστήματα που κατασκευάζει η μέθοδος του μέσου. Έστω x_i το μέσον του I_i.
Προφανώς $I_{i+1} \subset I_i$. Επειδή σε κάθε I_i υπάρχει μια ρίζα της f, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ρίζα x^* της f που περιέχεται σε όλα τα I_i, τα οποία στην περίπτωση που δεν τύχει να συμβεί $x_N = x^*$, είναι άπειρο το πλήθος.
Τώρα: $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ και $|x^* - x_n| \leq \dfrac{b_n - a_n}{2}$

Αλλά: $b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \dfrac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \ldots = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$

ότι αφαιρώ από το n μπαίνει εκθέτης στο 2.

οπότε
$$|x^* - x_n| \leq \frac{\frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2^n} = \frac{b - a}{2^n}$$

Προφανώς $\dfrac{b-a}{2^n} \to 0$, για $n \to \infty$ οπότε $x_n \to x^*$, $n \to \infty$

Πλεονεκτήματα
1. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί υπό γενικές συνθήκες στην f, απαιτεί μόνο συνέχεια της f και αλλαγή προσήμου της f σε μια περιοχή μιας ρίζας της.
2. Συγκλίνει πάντα, όταν μπορεί να εφαρμοστεί.
3. Απαιτεί μόνο έναν υπολογισμό της f ανά βήμα.
4. Μπορούμε να προσδιορίσουμε εκ των προτέρων το πλήθος των βημάτων που εξασφαλίζουν την προσέγγιση μιας ρίζας με μια προκαθορισμένη ακρίβεια.

Μειονεκτήματα

1. Η μέθοδος συγκλίνει πολύ αργά και αυτό έχει ως αποτέλεσμα το υπολογιστικό κόστος να είναι υψηλό.

Στην πράξη χρησιμοποιείται για έναν αρχικό χοντρικό εντοπισμό μιας ρίζας.

10/3/2015

"Επαναληπτικές μέθοδοι"

Ιδέα: Γράφουμε μια εξίσωση $f(x)=0$ ισοδύναμα στη μορφή $x=\varphi(x)$. (Αυτό μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Ξεκινώντας από μια αρχική προσέγγιση x_0, υπολογίζουμε μία ακολουθία προσεγγίσεων $(x_n)_{\in\mathbb{N}}$ αναδρομικά ως εξής:

$$x_n=\varphi(x_{n-1}) \quad ,n\in\mathbb{N}$$

Ορισμός: (σταθερό σημείο)
Ένα σημείο x^* στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης φ, λέγεται σταθερό σημείο της, ανν $\varphi(x^*)=x^*$

Ερώτηση: Έστω ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n=\varphi(x_{n-1})$ $n\in\mathbb{N}$ συγκλίνει. Είναι τότε το όριό της σταθερό σημείο της φ;

$$x^*=\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_{n-1})\overset{*}{=}\varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})=\varphi(x^*)$$

Η ισότητα $*$ ισχύει, αν και μόνο αν η φ είναι συνεχής στο x^*

Πρόταση: (ύπαρξη σταθερού σημείου)
Κάθε συνεχής συνάρτηση $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ έχει στο $[a,b]$ (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο.

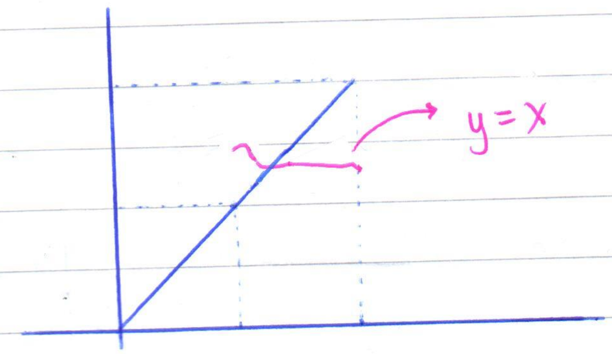
απόδειξη:

- $\varphi(a) = a$
- $\varphi(b) < b$
- $\varphi(a) > 0, \quad \varphi(b) < b$

Στις δύο πρώτες περιπτώσεις το a ή το b είναι σταθερό σημείο της φ.
Στην τρίτη περίπτωση: Θεωρώ τη συνάρτηση $g: [a,b] \to \mathbb{R}$
$g(x) = \varphi(x) - x$
Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι η g έχει ρίζα στο $[a,b]$

- Η g είναι συνεχής
- $g(a) = \varphi(a) - a > 0$
- $g(b) = \varphi(b) - b < 0$

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής η g έχει στο $(0,b)$



Ορισμός: (συνθήκη του Lipschitz)
Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Λέμε ότι μια συνάρτηση $\varphi: I \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί στο I τη συνθήκη του Lipschitz, αν $\forall x, y \in I \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x-y|$
Αν ισχύει η συνθήκη του Lipschitz για $L<1$, τότε η φ λέγεται συστολή στο I.

Παρατηρήσεις

→ Κάθε $\varphi \in C^1[a,b]$ ικανοποιεί στο $[a,b]$ τη συνθήκη του Lipschitz

Θυμάμαι: Θεώρημα Μέσης Τιμής

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} = \varphi'(\xi) \text{ με } \xi \text{ μεταξύ των } x \text{ και } y$$

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} = \varphi'(\xi) \Rightarrow \varphi(x)-\varphi(y) = \varphi'(\xi)(x-y) \Rightarrow$$

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| = \underbrace{|\varphi'(\xi)|}_{\leq \text{ και } |\varphi'(\xi)| \quad \xi\in(a,b)} \cdot |x-y|$$

τότε $\forall x,y \in [a,b] \quad |\varphi(x)-\varphi(y)| \leq L|x-y|$

→ Αν $\varphi \in C^1(a,b)$, τότε η φ δεν ικανοποιεί αναγκαστικά τη συνθήκη του Lipschitz στο (a,b)

Παράδειγμα

$\varphi(x) = \sqrt{x} \qquad x\in(0,1]$

$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \forall x,y\in(0,1]$ υπάρχει ξ μεταξύ τους τ.ω.

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\right| = |\varphi'(\xi)| = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$ καθώς τα x,y τείνουν στο μηδέν, $\frac{1}{2\sqrt{\xi}} \to 0$

Θεώρημα (της συστολής)

Έστω $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ μια συστολή με σταθερά L $(L<1)$. Τότε η φ έχει στο $[a,b]$, ακριβώς ένα σταθερό σημείο x^*

$\exists!$ (η $\exists 1$) $x^* \in [a,b]$ $\quad \varphi(x^*) = x^*$

Για τυχαία αρχική τιμή $x_0 \in [a,b]$ η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $x_n = \varphi(x_{n-1})$ $n\in\mathbb{N}$, συγκλίνει στο x^*. Για τα σφάλματα ισχύουν οι εκτιμήσεις:

1^{η} εκτίμηση:

$|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*| \leq L^n \max(x_0 - a, b - x_0)$

2^{η} εκτίμηση:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

3^{η} εκτίμηση:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

απόδειξη $1^{ης}$ εκτίμησης

• Μοναδικότητα σταθερού σημείου

Έστω $x^*, y^* \in [a,b]$ σταθερά σημεία της φ και $x^* \neq y^*$ τότε,

$|\underbrace{\varphi(x^*)}_{x^*} - \underbrace{\varphi(y^*)}_{y^*}| \leq L|x^* - y^*| \Rightarrow$

$\Rightarrow |x^* - y^*| \leq L|x^* - y^*| \Rightarrow |x^* - y^*| < |x^* - y^*|$ ↯ (άτοπο)

• Ύπαρξη +(1)

Η φ είναι συνεχής αφού είναι συστολή. Επίσης $\varphi: [a,b] \to [a,b]$

Άρα σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση η φ έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

Τώρα $x_n - x^* = \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*) \Rightarrow |x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)|$

$\leq L|x_{n-1} - x^*|$

$\Rightarrow |x_n - x^*| \leq L|x_{n-1} - x^*|$

Από αυτή τη σχέση έπεται επαγωγικά ότι $|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*|$

• Ύπαρξη + (2):

$x_0 \in [a,b]$, $x_1 = \varphi(x_0) \in [a,b]$ διαπιστώνουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{\in \mathbb{N}}$ είναι καλά ορισμένη

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ συγκλίνει.

Ισχυρισμός: Η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι ακολουθία Cauchy

Έχουμε: $|x_n - x_{n-1}| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})| \leq L|x_{n-1} - x_{n-2}|$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι: $|x_n - x_{n-1}| \leq L^{n-1} |x_1 - x_2|$

Παρατήρηση:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ α όριο, $a_n \to a$, $n \to \infty$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$ $|a_n - a| \leq \varepsilon$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία (ακολουθία Cauchy) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n, m \geq N$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$

Για $n, k \in \mathbb{N}_0$ έχουμε:

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \underbrace{|x_{n+k} - x_{n+k-1}|}_{\leq L^{n+k-1} |x_1 - x_0|} + \underbrace{|x_{n+k-1} - x_{n+k-2}|}_{\leq L^{n+k-2} |x_1 - x_0|} + \dots + \underbrace{|x_{n-1} - x_n|}_{\leq L^n |x_1 - x_0|} \Rightarrow$$

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \underbrace{(L^n + L^{n+1} + \dots + L^{n+k-1})}_{=} |x_1 - x_0|$$

$$L^n (1 + L + \dots + L^{k-1}) = \frac{L^k - 1}{L - 1}$$

$$\Rightarrow |x_{n+k} - x_n| = L^n \frac{1 - L^k}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

άρα $|x_{n+k} - x_n| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|$

Το δεξιό μέλος τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο ∞, οπότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι όπως η ακολουθία Cauchy

Ιδιαίτερα η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει. Έστω x^* το όριό της. Προφανώς $x^* \in [a, b]$. Σύμφωνα με όσα ξέρουμε συμπεραίνουμε ότι το x^* είναι σταθερό σημείο της φ.

$|x_{n+k} - x_n| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|$ $\quad$ $|x^* - x_n| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|$

$n \to \infty$

απόδειξη $3^{ης}$ εκτίμησης

Θέτω $y_0 : x_{n-1}$. Τότε $y_1 = \varphi(y_0) = \varphi(x_{n-1}) = x_n$

Σύμφωνα με τη $2^η$ έχουμε $|y_1 - x^*| \leq \frac{L}{1 - L} |y_1 - y_0|$ οπότε:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1 - L} |x_n - x_{n-1}|$$

1) $|x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*|$
2) $|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$
3) $|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$

12/3/2015

Παρατηρήσεις (στο Θεώρημα συστολής)

1. Το φράγμα στο δεξιό μέλος της 1' περιέχει το άγνωστο σταθερό σημείο x^*, οπότε δεν μπορεί να υπολογιστεί.

Έχουμε: $x_1 - x_0 = (x_1 - x^*) + (x^* - x_0) = \varphi(x_0) - \varphi(x^*) + (x^* - x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x_1 - x_0| \le |\varphi(x_0) - \varphi(x^*)| + |x^* - x_0|$$
$$\le L|x_0 - x^*| + |x^* - x_0|$$
$$= (1+L)|x_0 - x^*|$$

Άρα:

$$\frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \le \frac{L^n}{1-L}(1+L)|x_0 - x^*| \Rightarrow$$
$$= \frac{1+L}{1-L} L^n |x_0 - x^*|$$

Συμπέρασμα: Το φράγμα στη (2) είναι το πολύ $\frac{1+L}{1-L}$ φορές μεγαλύτερο του φράγματος στην (1).

Έχουμε: $|x_n - x_{n-1}| \le L^{n-1} |x_1 - x_0|$

Συμπέρασμα: Το φράγμα στην (3) είναι το πολύ όσο και το φράγμα στη (2).

Η (2) είναι εκτίμηση εκ των προτέρων, ενώ η (3) είναι εκτίμηση εκ των υστέρων

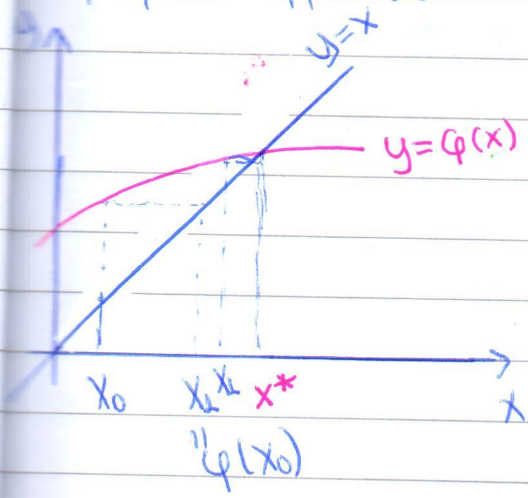
2. Μπορούμε να εξασθενίσουμε τη συνθήκη $L<1$ και να συμπεράνουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $x_n = \varphi(x_{n-1})$ συγκλίνει;

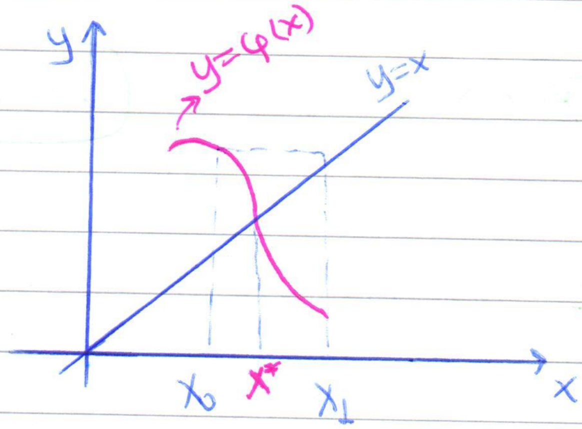
Απάντηση: ΟΧΙ

3/2015 Παράδειγμα
$\varphi(x) = -x, \quad x \in [-1, 1]$
- $\varphi: [-1, 1] \to [-1, 1]$
- $\forall x, y \in [-1, 1] \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| = |-x - (-y)| = |-x + y| = |x - y| \ (L = 1)$

Μοναδικό σταθερό σημείο: $x^* = 0$
Έστω $x_0 \in [-1, 1]$, $x_0 \neq 0$. Ποια είναι η ακολουθία $x_n = \varphi(x_{n-1})$,
$x_0, -x_0, x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots$
Η ακολουθία δεν συγκλίνει!

Γεωμετρική ερμηνεία





Πότε είναι "γρήγορη" η σύγκλιση της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο θεώρημα της συστολής;

"Ταχύτητα σύγκλισης ακολουθιών"

Ορισμός: (ταχύτητας σύγκλισης ακολουθίας)
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία και x^* το όριό της. Λέμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά ή ότι η τάξη σύγκλισης είναι (τουλάχιστον) ένα αν υπάρχει σταθερά $C < 1$ και $N \in \mathbb{N}$ τ.ω. (*) $|x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*| \quad \forall n \geq N$
Λέμε ότι η σύγκλιση είναι (τουλάχιστον) τάξης p, με ($p > 1$) αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τ.ω. (**) $|x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*|^p$

(Η $\circledast$ ισχύει πάντα στο θεώρημα της συστολής με $C=1$ για κάθε n)

Για $p=2$ ή $p=3$ μιλάμε για τετραγωνική ή κυβική σύγκλιση, αντίστοιχα.

Παρατηρήσεις:

1. Όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη σύγκλισης, τόσο ταχύτερα συγκλίνει η ακολουθία
2. Ισχυρισμός Αν η τάξη σύγκλισης είναι p, τότε είναι και (τουλάχιστον) q, για $1 \leq q \leq p$

Γιατί;

Διότι $(**) \leftrightarrow |x_{n+1} - x^*| \leq \underbrace{C |x_n - x^*|^{(p-q) \geq 0}}_{\leq C} |x_n - x^*|^q$

Ερώτημα: Πώς μπορούμε να βρούμε την τάξη σύγκλισης;

Υπόθεση: $x_n \neq x^*$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Τότε: $|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^p \Leftrightarrow \dfrac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} \leq C \Leftrightarrow$

$$\left| \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} \right| \leq C$$

Απάντηση: Αν η ακολουθία $\left(\dfrac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη

Ειδική περίπτωση: Έστω ότι $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = a$ τότε η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον p.

Ισχυρισμός: Αν $a \neq 0$ (και $p > 1$) τότε η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς p

Έστω ότι η τάξη σύγκλισης είναι $p+\varepsilon$ με $\varepsilon>0$. Τότε, θα έχουμε

$$|x_{n+1}-x^*| \le C|x_n-x^*|^{p+\varepsilon} \Leftrightarrow \left|\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}\right| \le C|x_n-x^*|^{\varepsilon}$$

Για $n\to\infty$, αυτή η εκτίμηση δίνει $|\alpha|\le 0$, άτοπο.

Υποθέτουμε, πέραν των άλλων υποθέσεων, ότι η συνάρτηση φ στο διάστημα της συστολής είναι συνεχώς παραγωγίσιμη.
Τότε έχουμε $x_{n+1}-x^* = \varphi(x_n)-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_n)(x_n-x^*)$ με ξ_n μεταξύ των x_n και x^*

Άρα: $\dfrac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = \varphi'(\xi_n) \qquad \xi_n \to x^*,\ n\to\infty$

οπότε: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = \lim_{n\to\infty}\varphi'(\xi_n) = \varphi'$

Αν $\varphi'(x^*)\neq 0$ τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα η ταχύτητα σύγκλισης είναι ακριβώς ένα.
Συμπέρασμα: Αν θέλουμε η τάξη σύγκλισης να είναι μεγαλύτερη του 1, πρέπει υποχρεωτικά να έχουμε.

"Η μέθοδος του Νεύτωνα"

f συνεχώς παραγωγίσιμη x^* ρίζα της f. Αν η x_n είναι μια προσέγγιση της x^*, τότε η μέθοδος του Νεύτωνα δίνει τη νέα προσέγγιση $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n\in\mathbb{N}_0$

Υπόθεση $f'(x_n)\neq 0$

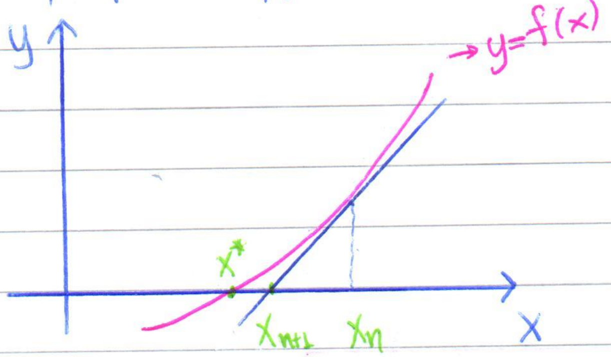
Η μέθοδος του Νεύτωνα είναι επαναληπτική μέθοδος x_{n+1}
$x_{n+1}=\varphi(x_n)$ $n\in\mathbb{N}_0$ με $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

1ος τρόπος

πίσω →

$2^{ος}$ τρόπος

Γεωμετρική ερμηνεία



Εξίσωση εφαπτομένης

$$\frac{y-f(x_0)}{x-x_n} = f'(x_n) \Leftrightarrow$$

$$y = f(x_n)+(x-x_n)f'(x_n)$$

Για $y=0$ παίρνουμε:

$$f(x_n)+(x-x_n)f'(x_n)=0 \Leftrightarrow x-x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow$$

$$x = \underbrace{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{"x_{n+1}}$$

$1^{ος}$ τρόπος

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x = \underbrace{x+g(x)\cdot f(x)}_{\varphi(x)}$$

Ερώτημα: Για ποια επιλογή της g ισχύει $\varphi'(x^*)=0$;

Έχουμε: $\varphi'(x) = 1+g'(x)f(x)+g(x)\cdot f'(x) \Rightarrow$

$\varphi'(x) = 1+g'(x^*)\overset{=0}{f(x^*)}+g(x^*)\cdot f'(x^*) \Rightarrow$

$\varphi'(x) = 1+g(x^*)\cdot f'(x^*)$

φυσιολογική επιλογή $g(x) = -\frac{1}{f'(x^*)}$

τότε: $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Υπόθεση: Η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*.

Τότε: $\varphi'(x) = \frac{[f'(x)]^2 - f(x)\cdot f'(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)-f''(x)}{[f'(x)]^2}$

οπότε $\varphi'(x^*)=0$

Θεώρημα (Τοπικά τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)
Έστω x^* απλή ρίζα μιας συνάρτησης f (δηλαδή τ.ω. η $f(x^*)=0$ κι' $f'(x^*)\neq 0$), και έστω ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*.
Τότε υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I με μέσον το x^*, τέτοια ώστε για κάθε $x_0 \in I$, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που κατασκευάζεται με τη μέθοδο του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x)=0$ συγκλίνει στο x^*. Μάλιστα ισχύει $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$, δηλαδή η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική και ακριβώς τετραγωνική αν $f''(x^*)\neq 0$.

17/3/2015

απόδειξη
Η συνάρτηση επανάληψης $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*. Επομένως
$\varphi'(x) = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$ οπότε $\varphi'(x)=0$
Επομένως υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I, με μέσον το x^*, τ.ω. $\max|\varphi'(x)| = L<1$.
Αυτό σημαίνει ότι η φ είναι συστολή στο I (με σταθερά Lipschitz) L). Επί πλέον, αν $x\in I$ τότε:
$\varphi(x) - x^* = \varphi(x) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x-x^*) \Rightarrow$
$|\varphi(x)-x^*| = \underbrace{|\varphi'(\xi)|}_{\leq L<1}|x-x^*| \Rightarrow |\varphi(x)-x^*| \leq |x-x^*|$

Αφού το x^* είναι μέσον του I συμπεραίνουμε ότι $\varphi(x)\in I$
Επομένως η φ απεικονίζει το διάστημα I στον εαυτό του.

Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής για κάθε $x_0 \in I$ η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι καλά ορισμένη και συγκλίνει στο x^*

Μένει να αποδείξουμε την (*)

Έχουμε: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (1)

αναπτύσσοντας κατά Taylor ως προς το σημείο x^* έχουμε:

$$f(x_n) = \underbrace{f(x^*)}_{=0} + (x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})$$ + με ξ_{n1}, ξ_{n2} μεταξύ x_n κ' x^*

Αντικαθιστώντας στην (1) αυτές τις εκφράσεις παίρνουμε:

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = (x_n - x^*)^2 \frac{f''(\xi_{n2}) - \frac{1}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(\xi_{n2}) - \frac{1}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) - (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(x^*) - \frac{1}{2} f''(x^*)}{f'(x^*)} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

Συμπέρασμα

Το διάστημα I δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων και μπορεί να είναι πολύ μικρό. Γι' αυτό η μέθοδος του Νεύτωνα χρησιμοποιείται συνήθως σε συνδυασμό με άλλες μεθόδους, όπως η μέθοδος της διχοτόμησης, οι οποίες μας οδηγούν σε καλές αρχικές προσεγγίσεις.

Το πλεονέκτημα είναι ότι η μέθοδος του Νεύτωνα επιταχύνει πολύ τη σύγκλιση.

Θεώρημα ("Ολική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)
Έστω $a \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $f: [a, \infty] \to \mathbb{R}$ τ.ω. να είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και τ.ω. $f(a) > 0$, $f'(x) \geq 0$, $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, \infty)$
Τότε η f έχει ακριβώς μια ρίζα ρ στο διάστημα $[a, \infty)$. Για οποιοδήποτε $x_0 \geq a$, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ συγκλίνει στο ρ.

απόδειξη

• Μοναδικότητα της ρίζας
Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μια ρίζες.

• Ύπαρξη ρίζας
Αφού έχουμε $f(a) < 0$ και η f είναι συνεχής αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $a > b$ τ.ω. $f(b) \geq 0$
Όμως: $f(b) = f(a) + (b-a)\underbrace{f'(a)}_{>0} + \frac{(b-a)^2}{2}\underbrace{f''(\xi)}_{>0}$

$$\geq f(a) + (b-a) f'(a)$$

Αρκεί να ισχύει: $f(a) + (b-a) f'(a) > 0 \Leftrightarrow b - a > -\frac{f(a)}{f'(a)} \Leftrightarrow$

$b > a - \frac{f(a)}{f'(a)}$

• Σύγκλιση:
$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ έχω $\varphi'(x) = \frac{f(x) \cdot \overbrace{f''(x)}^{>0}}{\underbrace{[f'(x)]^2}_{>0}}$

Συμπεράσματα Για $x > \rho$: $\varphi'(x) > 0$
$x < \rho$: $\varphi'(x) < 0$

Τώρα $x_{n+1} - \rho = x_n - \varphi(\rho) = \varphi'(\xi_n)(x_n - \rho)$ με ξ_n μεταξύ x_n και ρ.

Συμπέρασμα: $x_n < \rho \rightarrow x_{n+1} - \rho > 0 \Rightarrow x_{n+1} > \rho$
$x_n > \rho \rightarrow x_{n+1} - \rho > 0 \Rightarrow x_{n+1} > \rho$

Οπότε οι όροι $x_n > \rho$, $n = 1, 2, \dots$

Ισχυρισμός: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνήσια φθίνουσα

$$x_{n+1} = x_n - \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{>0} \Rightarrow x_{n+1} < x_n$$

Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα και φραγμένη προς τα κάτω από το ρ. Επομένως είναι συγκλίνουσα.
Έστω $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Θέλω νδο $y = \rho$.

$$\underset{\downarrow \atop y}{x_{n+1}} = \underset{\downarrow \atop y}{x_n} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{δηλαδή} \quad y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow y = \rho$$

Τι συμβαίνει με τη μέθοδο του Νεύτωνα σε περίπτωση πολλαπλής ρίζας;

Παράδειγμα
$f(x) = x^2$. Έχει μοναδική ρίζα στο 0 που είναι διπλή ρίζα.
Λύση:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^2}{2x_n} = \frac{1}{2} x_n$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{2^n} x_0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ιδιαίτερα έχουμε σύγκλιση $x_n \to 0$, $n \to \infty$

Τώρα: με $x^* = 0$

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{τάξη σύγκλισης} = 1.$$

Γενική περίπτωση

Έστω x^* ρίζα πολλαπλότητας $m \geq 2$ μιας συνάρτησης f, δηλαδή $f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$ και $f^{(m)}(x^*) \neq 0$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για αρχικές τιμές x_0 "κοντά" στο x^* η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει στο x^*

Ισχυρισμός: Η τάξη σύγκλισης είναι ένα.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Taylor: $$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2!} f''(x^*) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot f^{(m-1)}(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_{n1})$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(x^*) + \dots + \frac{(x_n - x^*)^{m-2}}{(m-2)!} f^{(m-1)}(x^*) +$$

$$+ \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_{n2})$$

Άρα $$x_{n+1} - x^* = x - x^* - \frac{\frac{(x_n - x^*)^{\cancel{m}}}{m!} f^{(m)}(\xi_{n1})}{\frac{\cancel{(x_n - x^*)^{m-1}}}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_{n2})} \Rightarrow$$

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{1}{m} \frac{f^{(m)}(\xi_{n1})}{f^{(m)}(\xi_{n2})}$$

Επομένως: $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{1}{m} \neq 0$$

$\Rightarrow$ τάξη σύγκλισης $= 1$.

Αν γνωρίζουμε την πολλαπλότητα τότε η παραλλαγή της μεθόδου του Νεύτωνα

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ συγκλίνει <u>τετραγωνικά</u>.

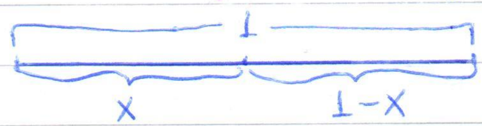
Συνοψίζοντας: Στην περίπτωση απλής ρίζας η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει ταχύτατα (τοπικά). Απαιτεί γνώση της f'. Στην περίπτωση που δεν γνωρίζουμε την f' (ή αν ο υπολογισμός $f'(x_n)$ είναι δαπανηρός) καταφεύγουμε σε μεθόδους του τύπου του Νεύτωνα. Η πιο γνωστή τέτοια μέθοδος είναι η μέθοδος της τέμνουσας.

Μέθοδος της τέμνουσας

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Απαιτούνται δύο αρχικές τιμές x_0 και x_1

Τάξη σύγκλισης $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Και.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{x} = p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

19/3/2015

Θεώρημα (Τάξης σύγκλισης της μεθόδου της τέμνουσας)
Έστω x^* ρίζα μιας συνάρτησης f και έστω $(a,b) \subset \mathbb{R}$ με $x^* \in (a,b)$ και $f \in C^2(a,b)$, $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) \neq 0$. Τότε υπάρχει ένα διάστημα I που περιέχει το x^* τ.ω. για $x_0, x_1 \in I$, $x_0 \neq x_1$, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδος της τέμνουσας για την εξίσωση $f(x) = 0$ είναι καλά ορισμένη και συγκλίνει στο x^*. Η τάξη σύγκλισης είναι $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$

Μέθοδος Νεύτωνα VS μέθοδος τέμνουσας"

Υπολογισμοί ανά βήμα:

- μέθοδος Νεύτωνα: Ένας υπολογισμός της f και ένας της f'.
- μέθοδος τέμνουσας: Ένας υπολογισμός το $f(x_n)$ (Η τιμή $f(x_{n-1})$ υπολογίστηκε στο αμέσως προηγούμενο βήμα.

Η μέθοδος του Νεύτωνα απαιτεί γνώση της f' ενώ η μέθοδος της τέμνουσας όχι.

Υπόθεση: Το κόστος του υπολογισμού τιμών της f' είναι το ίδιο με εκείνο της f.

Ερώτημα: Ποιά από τις δύο αυτές μεθόδους είναι οικονομικότερη;

Παρατήρηση:

Αν η τάξη σύγκλισης μιας ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι p $(p>1)$, τότε η τάξη σύγκλισης της ακολουθίας (x_{2n}) είναι p^2.

$|x_{m+1}-x^*| \leq C\,|x_n-x^*|^p$

$$|x_{2(m+1)}-x^*| = |x_{2m+2}-x^*| \leq C\,|x_{2m+1}-x^*|^p \leq C$$
$$\leq C\,(C\,|x_{2m}-x^*|^p)^p \leq C^{p+1}\,|x_{2m}-x^*|^{p^2}$$

Τώρα: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \approx 2{,}62 > 2$

τάξη της μεθόδου του Νεύτωνα

τάξη της ακολουθίας $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία που δίνει η μέθοδος της τέμνουσας.

Συμπέρασμα: Συνολικά οικονομικότερη είναι η μέθοδος της τέμνουσας.

Ασκήσεις $2^{ου}$ κεφαλαίου

20/3/2015

Άσκηση 2.18 (βιβλίου)

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x^*) = x^*$

$p \geq 2$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη

Έστω $\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$

$\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$

α) Για x_0 αρκετά κοντά στο x^*, $x_n \to x^*$, $n \to \infty$

$\varphi'(x^*) = 0 \longrightarrow$ υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I με μέσον το x^*

τ.ω. $\max|\varphi'(x)| = L < 1$

Τότε, όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι καλά ορισμένη και συγκλίνει στο x^*.

β) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \dfrac{1}{p} \varphi^{(p)}(x^*)$ δηλαδή η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς p

$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \varphi(x^*) + (x_n - x^*)\varphi'(x^*) + \dots + \dfrac{(x_n - x^*)^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(x^*) + \ = 0$

Taylor

$+ \dfrac{(x_n - x^*)^p}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n)$ με ξ_n μεταξύ των x_n και x^*.

$\Rightarrow x_{n+1} = x^* \dfrac{(x_n - x^*)^p}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n)$

$\Rightarrow \dfrac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \dfrac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \dfrac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)$

$\xi_n \to x^*$, $n \to \infty$

Άσκηση 2.4 (βιβλίου)

$f: [-1, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{8}$

να προσεγγίσω ρίζες με τη μέθοδο της διχοτόμησης

Ν.δ.ο $x_n \to \dfrac{1}{2}$, $n \to \infty$

Λύση

Εξετάζω αν μπορώ να εφαρμόσω τη μέθοδο της διχοτόμησης.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία που προκύπτει από τη μέθοδο της διχοτόμησης.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f(-1)<0,\quad f(\sqrt{2})=\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^3>0 \\ \bullet\ f \text{ συνεχής}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{εφαρμόζεται η μέθοδος της διχοτόμησης}$$

Επομένως όπως ξέρουμε από τη θεωρία ισχύει $x_n \to x^*$, $n\to\infty$ με $x^*\in[-1,\sqrt{2}]$ ρίζα της f.
Η μοναδική ρίζα της f είναι το $\frac{1}{2}$ συνεπώς $x^*=\frac{1}{2}$.

27/3/2015

Άσκηση 2.7 (βιβλίου)

$\varphi:[a,b]\to[a,b]$, $\varphi\in C^1[a,b]$ $\max|\varphi'(x)|<1$ $\quad a\le x\le b$
$x^*\in[a,b]$ τ.ω. $\varphi(x^*)=x^*$
$x_0\in[a,b]$, $x_0\neq x^*$, $x_n=\varphi(x_{n-1})$ $n\in\mathbb{N}_0$

Νδο

α) $\forall x\in[a,b]$, $\varphi'(x)>0 \Rightarrow$ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει μονότονα στο x.

β) $\forall x\in[a,b]$ $\varphi'(x)<0 \Rightarrow$ το x^* περιέχεται μεταξύ x_{i-1} και x_i για κάθε $i\in\mathbb{N}$

Λύση:

Η ύπαρξη μοναδικότητας του x^* και το γεγονότα $\lim_{n\to+\infty} x_n=x^*$ έπονται από το θεώρημα της συστολής.

Έχουμε: $x_i-x^*=\varphi(x_{i-1})-\varphi(x^*) \underset{\uparrow}{=} \varphi'(\xi_i)(x_{i-1}-x^*)$

θεώρημα μέσης τιμής

$x_i - x^* = \varphi'(\xi_i)(x_i - x^*)$

Άρα:

$(x_i - x^*)(x_{i-1} - x^*) = \varphi'(\xi_i)(x_{i-1} - x^*)^2$ (*) Από εδώ έπεται αμέσως το β.

Επίσης, αν $\varphi'(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$, από την (*) έπεται ότι:

1. $(x_i - x^*)(x_{i-1} - x^*) > 0$

Επιπλέον

2. $|x_i - x^*| = \underbrace{|\varphi'(\xi_i)|}_{<1} \overbrace{|x_{i-1} - x^*|}^{\neq 0}$
$< |x_{i-1} - x^*|$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις (1) και (2) έπεται το α.

Άσκηση 2.8 (βιβλίου)

$x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{x_n/2}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad x_0 \in [0,1]$

<u>Νδο</u> Η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ συγκλίνει και το όριό της βρίσκεται στο $[0,1]$

<u>Λύση:</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x_n}{2}}$

Τότε $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ $\quad n \in \mathbb{N}_0$

Αρχικά να αποδείξουμε ότι η φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος της συστολής.

Έχουμε: $\varphi'(x) = \frac{1}{2} e^{x_n/2} > 0 \Rightarrow$ η φ είναι αύξουσα

Επομένως, ισχύει:

$\forall x \in [0,1]$ $\quad \varphi(0) \le \varphi(x) \le \varphi(1)$

Όμως, $\varphi(0) = \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2}$

$\varphi(1) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{2}$

Οπότε $\forall x \in [0,1] \quad \frac{1}{2} \leq \varphi(x) \leq \frac{\sqrt{e}}{2} \leq 1$

Συνεπώς: $\varphi : [0,1] \rightarrow [0,1]$

Επί πλέον $L = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |\varphi'(x)| = \max \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{4} < 1$, οπότε

η φ είναι συστολή.

Το αποτέλεσμα έπεται από το θεώρημα της συστολής.

Άσκηση 2.9 (βιβλίο)

$x_0 \in [0,1] \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n}) \quad n \in \mathbb{N}_0$

Νδο η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο όριο που βρίσκεται στο $[0,1]$

Λύση:

$\varphi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ και $\varphi(x) = \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n})$

$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(1 - e^x) \leq 0 \Rightarrow \varphi$ φθίνουσα

Άρα $\forall x \in [0,1] \quad \varphi(1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(0)$

Τώρα $\varphi(0) = \frac{1}{3}(2 - e^0) = \frac{1}{3}$

$\varphi(1) = \frac{1}{3}(2 - e)$

Οπότε:

$\forall x \in [0,1] \quad \underbrace{\frac{3-e}{3}}_{<0} \leq \varphi(x) \leq \underbrace{\frac{1}{3}}_{<1}$

Ιδιαίτερα: $\varphi : [0,1] \rightarrow [0,1]$

Επίσης $L = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} \frac{e^x - 1}{3} = \frac{e-1}{3} < 1$

Άρα η φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος της συστολής, οπότε προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Άσκηση 2.10 (βιβλίου)

$x_0 \in [0,1]$

$x_{n+1} = \frac{1}{6}\left(3 + 4x_n^2 - e^{x_n}\right) \quad n \in \mathbb{N}_0$

Ν.δ.ο $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in [0,1]$ και $|x_n - x^*| \leq \frac{a^n}{1-a}|x_1 - x_0|,\ n \in \mathbb{N}$

με $a = \frac{8-e}{6}$

απόδειξη

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) = \frac{1}{6}\left(3 + 4x^2 + e^{x_1}\right)$

$\varphi'(x) = \frac{1}{6}\left(8x - e^x\right)$

$\varphi''(x) = \frac{1}{6}\left(8 - e^x\right) > 0 \Rightarrow$ Η φ' είναι αύξουσα

Άρα: $L = \max|\varphi'(x)| =$

$\max\left(|\varphi'(a)|, |\varphi'(b)|\right) =$

$\max\left(\frac{1}{6}, \frac{8-e}{6}\right) = \frac{8-e}{6} = a < 1$

Σημείωση: f αύξουσα $a \leq x \leq b$
$\max|f(x)| = \max\left(f(|a|), f(|b|)\right)$

δηλαδή η φ είναι συστολή με σταθερά Lipschitz a.
Μένει να αποδείξουμε ότι $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ και όλα τα ζητούμενα έπονται από το θεώρημα της συστολής.

Έχουμε: $\max_{0\leq x\leq 1} \varphi(x) \leq \max_{0\leq x\leq 1}\left(\frac{1}{6}(3+4x^2+e^x)\right) + \max_{0\leq x\leq 1}\left(\frac{-1}{6}e^x\right) =$

$\frac{1}{6}(3+4) - \frac{1}{6}e^0 = \frac{7}{6} - \frac{1}{6} = 1 \leq 1,$

$\min_{0\leq x\leq 1}\varphi(x) \geq \min\left(\frac{1}{6}(3+4x^2)\right) + \min_{0\leq x\leq 1}\left(\frac{-1}{6}e^x\right) =$

$= \frac{3}{6} - \frac{e^1}{6} = \frac{3-e}{6} > 0$

Σημείωση: Για δυο συναρτήσεις
$\max_x (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) \leq \max_x \varphi_1(x) + \max_x \varphi_2(x)$

Οπότε $\forall x \in [0,1]$ ισχύει ότι $\frac{3-e}{6} \leq \varphi \leq 1 \Rightarrow \varphi:[0,1] \to [0,1]$

31/3/2015

Άσκηση 2.11 (βιβλίου)

$x_0 \in \mathbb{R}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $x_{n+1} = \cos(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$

Νδο $x_n \to x^*$, $n \to \infty$ με $\cos x^* = x^*$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sqrt{1-(x^*)^2}$

Λύση

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \cos x$

Τότε $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$

Είναι η φ συστολή;

$\varphi'(x) = -\sin x$

οπότε $\max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}} |\sin x| = 1 \Rightarrow L = 1$

Άρα η φ δεν είναι συστολή στο $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση: Για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $x_n \in [-1,1]$ $n \geq 1$

Θεωρούμε ότι: $\varphi: [-1,1] \to [-1,1]$

$\varphi(x) = \cos x$

Τότε $x_{n+1} = \varphi(x)$, $n \geq 1$

Τώρα $L = \max_{-1\leq x\leq 1} |\varphi'(x)| = \max_{-1\leq x\leq 1} |\sin x| = \max_{0\leq x\leq 1} |\sin x| = \max_{0\leq x\leq 1} \sin x$

Σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής υπάρχει ακριβώς ένα $x^* \in [-1,1]$ τω $\underbrace{\cos x^*}_{\geq 0} = x^*$ και $x_n \to x^*$, $n \to \infty$
$(0 \leq x^* \leq 1)$

Τώρα: $x_{n+1} = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi_n)\cdot(x_n - x^*) = -(\sin\xi_n)(x_n - x^*)$

με ξ_n μεταξύ x_n και x^*

Άρα $\dfrac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sin\xi_n \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \lim_{n\to\infty} (\sin\xi_n) = -\sin x^* = \sqrt{1-\cos^2 x^*} = \sqrt{1-(x^*)^2}$$

Σημείωση:

$\varphi : [a,b] \to [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$ $a \le \varphi(x) \le b \Leftrightarrow$

$\min\limits_{x\in[a,b]} (\varphi(x)) \geq a$ και $\max\limits_{x\in[a,b]} \varphi(x) \le b$