Κεφάλαιο 2

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

Πρόβλημα:

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ με I ένα διάστημα. Θέλουμε να προσδιορίσουμε ρίζες της f, δηλαδή αριθμούς $x^* \in I$ τ.ω $f(x^*)=0$.

· Αν η f είναι πολυώνυμο μέχρι τετάρτου βαθμού, υπάρχουν σχετικοί τύποι για τις ρίζες.

Γενικά, οι αριθμητικές μέθοδοι δίνουν μια ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \ldots$ προσεγγίσεων. Υπό κάποιες προϋποθέσεις έχουμε ότι $x_n \to x^*$, $n \to \infty$. Παίρνουμε τότε ως προσέγγιση της x^* έναν όρο x_N για αρκετά μεγάλο N

συμβολισμός για συνέχεια

συμβολισμός για παραγωγισιμότητα

f: συνεχής στο I: $f \in C(I)$

f: n φορές παραγωγίσιμη στο I: $f \in C^n(I)$

$I=(a,b)$, $f \in C(a,b)$ ή $f \in C[a,b]$ ή $f \in C^n[a,b]$

Η μέθοδος της διχοτόμησης

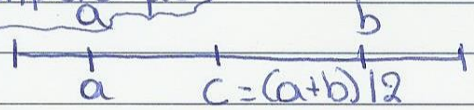
Βασίζεται στο θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής.

Θεώρημα: Έστω $g \in C[a,b]$ και K ένας αριθμός μεταξύ των $g(a)$ και $g(b)$. Τότε υπάρχει (τουλάχιστον ένα) x στο $[a,b]$ τ.ω. $g(x)=K$.

Διχοτομούμε το διάστημα. γιατί είναι το σημείο με)

(Παίρνω πάντα το μέσο για ρίζα - τη μικρότερη απόσταση

· $f(a)f(b)<0$.



1η Περίπτωση: $f(c)=0$ τότε το c είναι ρίζα

2η Περίπτωση: $f(c) \neq 0$

a) $f(c)\cdot f(a)<0$. Τότε υπάρχει ρίζα της f στο διάστημα $[a,c]$

b) $f(c)\cdot f(b)<0$. " " " " " " " $[c,b]$

Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει ρίζα της f σ' ένα διάστημα (είτε το $[a,c]$ είτε $[c,b]$ με μήκος το μισό του μήκους του $[a,b]$)

Δεδομένα του αλγορίθμου: a, b, f, ε τ.ω. $f \in C[a,b]$, $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$ (→ πρόσημο)
και ένα $\varepsilon > 0$ → πόσο σφάλμα (ανοχή σφάλματος, μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα) μπορώ να κάνω.

Αλγόριθμος:

Υπολόγισε $f(a)$, $\delta = b - a$

1. $\delta \leftarrow \delta/2$

   αν $\delta \leq \varepsilon$, τύπωσε a, b, έξοδος

   διαφορετικά (δηλαδή αν $\delta \geq \varepsilon$):

   υπολόγισε $c = \dfrac{a+b}{2}$, $f(c)$

   τύπωσε $a, b, c, \delta, f(c)$

   αν $f(c) = 0$, έξοδος

   διαφορετικά (δηλαδή αν $f(c) \neq 0$):

   αν $\operatorname{sgn} f(c) = \operatorname{sgn} f(a)$

   $a \leftarrow c$, $f(a) \leftarrow f(c)$

   διαφορετικά (δηλαδή αν $\operatorname{sgn} f(c) \neq \operatorname{sgn} f(a)$)

   $b \leftarrow c$

   πήγαινε στο 1.

Αριθμητική Ανάλυση 28/2/12

Πρακτικά ζητήματα για τον αλγόριθμο της μεθόδου της διχοτόμησης

1. Το ερώτημα αν $\mathrm{sgn} f(a) = \mathrm{sgn} f(c)$ δεν πρέπει να τίθεται στη μορφή αν $f(a)f(c)>0$, γιατί μπορεί να οδηγήσει σε υπερχείλιση

2. Το $c = \frac{a+b}{2}$ καλό να υπολογίζεται ως $c = \frac{b-a}{2}$ γιατί διαφορετικά (1) μπορεί να οδηγηθούμε σε σημείο έξω από το διάστημα $[a,b]$

Παράδειγμα $\beta=10$, $t=2$, $U=-L=10$, αποκοπή

$a=0.6$, $b=.66$ $fl(a+b)=fl(1.27)=1.2 \Rightarrow c=\frac{1.2}{2}=0.6<a$! το οποίο δεν είναι κοντά στο μέσο.

3. Πολύ μικρή ανοχή σφάλματος ε, μπορεί να οδηγήσει σε φαύλο κύκλο.

$c = a + \frac{b-a}{2}$ Αν $fl(a+fl(e))=a$, τότε $c=a$!

Πρόταση (Εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου της διχοτόμησης.)

(είναι απαραίτητο τα διαφορετικά sgn)

Έστω $f \in C[a,b]$, $\mathrm{sgn} f(a) \neq \mathrm{sgn} f(b)$, και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των προσεγγίσεων (δηλαδή των μέσων των διαστημάτων) που δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης. Τότε, είτε $x_N = x^*$, είτε $x_N \to x^*$, $n\to\infty$, όπου x^* ρίζα της f.

είναι εντός του $[a,b]$.

Μάλιστα, ισχύει η εκτίμηση $|x^* - x_0| \leq \frac{b-a}{2^n}$, $n=1,2,\ldots$

Απόδειξη: Θέτουμε $a_1 = a$, $b_1 = b$ και συμβολίζω με $I_i = [a_i, b_i]$, $i=1,2,\ldots$ τα διαδοχικά διαστήματα που δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης. Τότε $I_{i+1} \subset I_i$ και το μήκος το I_{i+1} είναι το μισό του μήκους του I_i. Υπάρχει μια ρίζα x^* της f που περιέχεται σε όλα τα I_i.

1) Η μέθοδος σταματάει μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Τότε $x_N = x^*$.

2) Το πλήθος των βημάτων είναι άπειρο.

Εκτίμηση του σφάλματος: • $b_n - a_n = \frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2}-a_{n-2}}{2^2} = \ldots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = \boxed{\frac{b-a}{2^{n-1}}}$

• $x^* \in [a_n, b_n]$, $|x^* - x_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n}$

Συνδυάζοντας τα δύο • προκύπτει $|x^*-x_n| \le \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n}$

Πλεονεκτήματα

1. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί υπό γενικές συνθήκες στην f: απαιτεί συνέχεια στην f και αλλαγή προσήμου της f σε μια περιοχή μιας ρίζας της.
ανοιχτό διάστημα
→ συγκλίνουν οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος που περιέχει τη ρίζα.
2. Συγκλίνει πάντα, όταν μπορεί να εφαρμοστεί.
3. Απαιτεί μόνο έναν υπολογισμό της f ανά βήμα.

Μειονεκτήματα

1. Η μέθοδος συγκλίνει πολύ αργά οπότε το συνολικό κόστος της μεθόδου είναι υψηλό.

Η μέθοδος χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με άλλες για έναν "χοντρικό" υπολογισμό του διαστήματος γύρω από τη ρίζα, αφού βρεθεί το διάστημα την "αφήνουμε".

Επαναληπτικές μέθοδοι

$f, f(x^*)=0$, x^* ρίζα
$\varphi, \varphi(x^*)=x^*$, x^* σταθερό σημείο.

(σταθερό σημείο είναι αυτό στο οποίο αν εφαρμόσω μια συνάρτηση παίρνω το ίδιο σημείο)

Ιδέα: $f(x)=0 \iff \boxed{x=\varphi(x)}$

x_n, $\boxed{x_{n+1} := \varphi(x_n)}$

Υπόθεση: $x_n \to x^*$, $n \to \infty$

Ερώτηση: Είναι τότε το x^* σταθερό σημείο της φ;

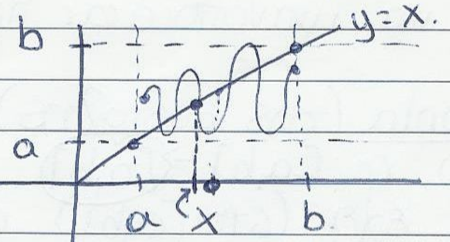
το όριο μπαίνει μέσα μόνο αν η φ είναι συνεχής

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(x^*)$$

Υπόθεση: φ συνεχής στο x^*

Πρόταση: Έστω $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ (η φ απεικονίζει το διάστημα στον εαυτό του) μία συνεχής συνάρτηση. Τότε η φ έχει στο $[a,b]$ (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο.

Απόδειξη



i. $\varphi(a)=a$ ή $\varphi(b)=b$. V

ii. $\varphi(a)>a$ και $\varphi(b)<b$.

Έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x):=\varphi(x)-x$.

$$\left(\begin{array}{l} \forall n\in\mathbb{N}\ \exists m\in\mathbb{N} : n\le m \ \text{V} \\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N} : n\le m \ \text{X} \end{array}\right)$$

Ιδιότητες της g: συνεχής.

$g(a)=\varphi(a)-a>0.$

$g(b)=\varphi(b)-b<0.$

Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής η g έχει στο (a,b) τουλάχιστον μία ρίζα x^*.

Τότε $g(x^*)=0 \Leftrightarrow \varphi(x^*)-x^*=0 \Leftrightarrow \varphi(x^*)=x^*$ οπότε το x^* είναι σταθερό σημείο της φ.

Θεώρημα (Συνθήκη του Lipschitz). ΣΟΣ

Λέμε ότι μία συνάρτηση $\varphi: I\to\mathbb{R}$, με I ένα διάστημα, ικανοποιεί στο I τη συνθήκη Lipschitz, αν υπάρχει $L\ge 0$ τ.ω. $\forall x,y\in I$ $|\varphi(x)-\varphi(y)|\le L|x-y|$

(το L δεν εξαρτάται από x, y)

Αν $L<1$, τότε η φ λέγεται συστολή στο I.

→ διαιρώ

Παρατήρηση • $\varphi\in C^1[a,b]$, για $\boxed{x\ne y}$ έχουμε:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}=\varphi'(\xi)$$ με ξ μεταξύ x και y άρα

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\right|=|\varphi'(\xi)|\le \max|\varphi'(\theta)|,\ \theta\in[a,b]$$

$L=\max|\varphi'(\theta)|$

$\Rightarrow |\varphi(x)-\varphi(y)|\le L|x-y|$

(Συμπέρασμα: η συνθήκη Lipschitz είναι κάτι ανάμεσα από συνέχεια και παραγωγισιμότητα)

Περιπτωση με πιο χαλαρη υποθεση

$\varphi(x)=\sqrt{x}$, $x\in(0,1]$

$\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\lim_{x\searrow 0}\varphi'(x)=\infty$ αρα δεν ικανοποιει τη συνθηκη Lipschitz.

[για να ικανοποιειται πρεπει η παραγωγος να ειναι φραγμενη]

Θεωρημα (της συστολης) ΣΠΣ! $\nearrow$ 2 οι συνθηκες 4|3|13

Εστω $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ μια συστολη με σταθερα $L\,(L<1)$. Τοτε η φ εχει (στο $[a,b]$) ακριβως ενα σταθερο σημειο,

$\exists_1\, x^*\in[a,b]: \varphi(x^*)=x^*$

Για τυχουσα αρχικη τιμη $x_0\in[a,b]$, η ακολουθια $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, με $x_n:=\varphi(x_{n-1})$ ειναι καλα ορισμενη (δλδ ολα τα στοιχεια της ανηκουν στο $[a,b]$), συγκλινει στο x^* και για τα σφαλματα x_n-x^* ισχυουν οι εκτιμησεις:

(1) $|x_n-x^*|\le L^n|x_0-x^*|$ (επειδη $\exists$ το x^* στο δεξι μελος δεν υπολογιζεται)

$L^n|x_0-x^*|\le L^n\max(x_0-a,b-x_0)$.

(2) $|x_n-x^*|\le \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$

(3) $|x_n-x^*|\le \frac{L}{1-L}\cdot|x_n-x_{n-1}|$

Αποδειξη

Μοναδικοτητα: Εστω $x^*,y^*\in[a,b]$, τ.ω. $x^*\ne y^*$ και $\varphi(x^*)=x^*, \varphi(y^*)=y^*$.

$|x^*-y^*|=|\varphi(x^*)-\varphi(y^*)|\le \underset{<1}{L}\,\underset{\ne 0}{|x^*-y^*|}<|x^*-y^*|$ Ατοπο!

Υπαρξη και (1): Η $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ ειναι συνεχης, οποτε συμφωνα με την προηγουμενη προταση (μετα το Lipschitz), η φ εχει (τουλαχιστον) ενα σταθερο σημειο $x^*\in[a,b]$.

• Εστω $x_{n-1}\in[a,b]$. Τοτε $x_n=\varphi(x_{n-1})\in[a,b]$. Αφου $x_0\in[a,b]$ επαγωγικα συμπεραινουμε οτι $x_n\in[a,b]$, ιδιαιτερα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ειναι καλα ορισμενη

Τωρα: $|x_n-x^*|=|\varphi(x_{n-1})-\varphi(x^*)|\overset{\text{απο Lipschitz}}{\le} L|x_{n-1}-x^*|$

$|x_n-x^*|\le L|x_{n-1}-x^*| \Rightarrow$ (επαγωγικα) $|x_n-x^*|\le L^n|x_0-x^*|$

• Ύπαρξη και (2):

για το αν (ακ) συγκλίνει.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

• a^* όριο.

$\forall\, \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N$

$|a_n-a^*|\leq\varepsilon$

• $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy ή βασική ακολουθία.

$\forall\, \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m\geq N$

$|a_n-a_m|\leq\varepsilon$

$$|x_n-x_{n-1}|=|\varphi(x_{n-1})-\varphi(x_{n-2})| \leq L\,|x_{n-1}-x_{n-2}|$$

$$|x_n-x_{n-1}|\leq L\,|x_{n-1}-x_{n-2}|$$

$\Rightarrow$ (επαγωγικά) $|x_n-x_{n-1}|\leq L^{n-1}\cdot|x_1-x_0|$

Για $k\in\mathbb{N}$ έχουμε.

(πρέπει όσο μεγαλώνει το n μικραίνει η διαφορά)

$$|x_{n+k}-x_n|=|(x_{n+k})-x_{n+k-1})+(x_{n+k-1}-x_{n+k-2})+\ldots+(x_{n+1}-x_n)|$$

$$\leq \underbrace{|(x_{n+k})-x_{n+k-1}|}_{\leq L^{n+k-1}|x_1-x_0|}+\underbrace{|x_{n+k-1}-x_{n+k-2}|}_{\leq L^{n+k-2}|x_1-x_0|}+\ldots+\underbrace{|x_{n+1}-x_n|}_{\leq L^{n}|x_1-x_0|}$$

$$\leq L^n\underbrace{(1+L+\ldots+L^{k-1})}_{=\frac{1-L^k}{1-L}}|x_1-x_0|$$

αφού το L^k το σβήνω, μεγαλώνει

Άρα $|x_{n+k}-x_n|\leq L^n\cdot\dfrac{1-\cancel{L^k}}{1-L}|x_1-x_0|$

$$\Rightarrow |x_{n+k}-x_n|\leq \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$$

Το δεξιό μέλος τείνει στο μηδέν καθώς $n\to\infty$, άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy. Επομένως $x_n\to x^*$, $n\to\infty$.
Ιδιαίτερα $x^*\in[a,b]$

Ισχυρισμός: το x^* είναι σταθερό σημείο της φ:

$$x^*=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_{n-1})$$

$$\underset{\text{συνεχής}}{=}\varphi(\lim_{n\to\infty}x_{n-1})=\varphi(x^*)$$

Τώρα: $|x_{n+k}-x_n|\leq \dfrac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$

$k\to\infty$

$$|x^*-x_n|\leq\frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$$

Απόδειξη

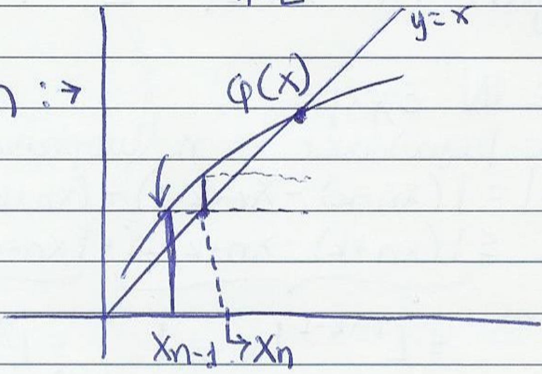
Εκτίμηση (3):

Θέτουμε $y_0 := x_{n-1}$ και έχουμε $y_1 = \varphi(y_0) = \varphi(x_{n-1}) = x_n$.

Επομένως, σύμφωνα με τη (2), έχουμε $|y_1 - x^*| \le \frac{L^{(1)}}{1-L}|y_1 - y_0|$ ή

$$|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|$$

Γεωμετρική Εξήγηση :→



Σύγκριση των (3) Εκτιμήσεων

$|x_n - x_{n-1}| \le L^{n-1}|x_1 - x_0|$

Άρα $\frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}| \le \frac{L^n}{1-L}\cdot|x_1 - x_0|$

η (3) είναι καλύτερη εκτίμηση του σφάλματος από τη (2). Όμως η (2) είναι εκτίμηση εκ των προτέρων (βρίσκω κάτι πριν βρω το x_n), ενώ η (3) είναι εκτίμηση εκ των υστέρων.

Τώρα $|x_1 - x_0| = |(x_1 - x^*) + (x^* - x_0)| \le \underbrace{|x_1 - x^*|}_{\le L|x_0 - x^*|} + |x_0 - x^*|$

$\le (L+1)|x_0 - x^*|$

Άρα το φράγμα στη (2) το πολύ είναι κατά του παράγοντα $\frac{L+1}{1-L}$ μεγαλύτερο του πρώτου φράγματος της (1)

→ένα σταθερό σημείο το 0

Για τη συνάρτηση $\varphi : [-a,a] \to [a,a]$, $\varphi(x) := -x$, έχουμε

$\forall x,y [-a,a]$ $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |-x-(-y)| = |x-y|$

Έστω $x_0 \in [-a,a]$, $x_0 \neq 0$. Τότε η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $x_n = \varphi(x_{n-1})$ είναι $x_0, -x_0, x_0, -x_0 \dots$ Δε συγκλίνει!

Ταχύτητα Σύγκλισης Ακολουθιών.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια ακολουθία τ.ω. $x_n \to x^*$, $n \to \infty$.

Ορισμός: Λέμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει τουλάχιστον γραμμικά ή ότι η ταχύτητα σύγκλισης είναι τουλάχιστον 1 (ένα), αν
$\exists C_1 < 1\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N\ |x_{n+1} - x^*| \le C_1|x_1 - x^*|$ (*)

Λέμε ότι η ταχύτητα σύγκλισης είναι $p > 1$, αν $\exists C > 0$ τ.ω.
$\forall n \in \mathbb{N}\ |x_{n+1} - x^*| \le C|x_n - x^*|^p$.

Για $p = 2$ ή 3 μιλάμε για τετραγωνική ή κυβική (αντίστοιχα) σύγκλιση.

Όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη σύγκλισης, τόσο ταχύτερα συγκλίνει μια ακολουθία.

Παρατηρήσεις:

1) Έστω η ταχύτητα σύγκλισης είναι p. Ισχυρισμός: Τότε η ταχύτητα σύγκλισης είναι (τουλάχιστον) q, για $1 \le q < p$.

• $$|x_{n+1} - x^*| \le C\,|x_n - x^*|^p \le \underbrace{\left(C\,|x_n - x^*|^{\overset{>0}{p-q}}\right)}_{\tilde{C}} |x_n - x^*|^q$$

Στην περίπτωση $q=1$, το $\tilde{C}$ μπορούμε να το πάρουμε μικρότερο του 1 αρκεί το n να είναι μεγάλο (γιατί $x_n - x^* \to 0, n \to \infty$).

2) Πώς προσδιορίζουμε την ταχύτητα σύγκλισης;

Έστω $x_n \neq x^*$, $n \in \mathbb{N}_0$. Τότε η $(*)$ (στην προηγούμενη σελίδα) γράφεται στη μορφή

$\left|\dfrac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p}\right| \le C$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία

$\dfrac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p}$ είναι φραγμένη. Ειδική περίπτωση: Η $\dfrac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p}$

συγκλίνει. $\dfrac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} \to a, n \to \infty$. (Όταν $p=1$ απαιτούμε $|a| < 1$).

Αν $a \neq 0$, η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς p: εξ' αιτίας αυτής της υπόθεσης καταλήγω σε άτοπο.

Έστω ότι η τάξη σύγκλισης είναι $p+\varepsilon$, με $\varepsilon > 0$.

$$|x_{n+1} - x^*| \le C\,|x_n - x^*|^{p+\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p}\right| \le C\,|x_n - x^*|^{\varepsilon} \Rightarrow |a| \le 0 \text{ άτοπο!}$$

Αριθμητική Ανάλυση 5/3/13

Άσκηση 1.12

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\, dx, \quad n = 0,1,2,\dots$$

a) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνησίως φθίνουσα

β) Τύπος για το y_n

γ) $a >> 0$.

$y_{n-1} \to y_n$, y_0.

$$y_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+a}\, dx = \log(x+a)\Big|_{x=0}^{x=1} = \log(1+a) - \log(a) = \log\left(\frac{a+1}{a}\right)$$

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+a) - a\cdot x^{n-1}}{x+a} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx - a\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+a} dx = \frac{1}{n} - a y_{n-1}$$

$$y_0 = \log\frac{a+1}{a}, \quad y_n = \frac{1}{n} - a y_{n-1}, \quad n = 1,2,\dots$$

Ευστάθεια;

$$\tilde{y}_0, \quad \tilde{y}_n = \frac{1}{n} - a\tilde{y}_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_n - \tilde{y}_n = -a y_{n-1} + a\tilde{y}_{n-1} = -a(y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1})$$

$$\Rightarrow y_n - \tilde{y}_n = (-a)^n (y_0 - \tilde{y}_0) \Rightarrow |y_n - \tilde{y}_n| = a^n |y_0 - \tilde{y}_0|$$

τετριμμένη επαγωγή

Το a^n αυξάνει πολύ γρήγορα, άρα ο αλγόριθμος είναι ασταθής

δ) Ευσταθή τρόπο για να υπολογίσουμε το y_{10}.

$\Rightarrow$

$\tilde{y}_{20} = ;$, $0 \le y_n \le \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1}$

$0 \le y_{20} \le \frac{1}{21a}$

$\tilde{y}_{20} = 0$ με μέγιστο σφάλμα $1/21 \cdot a$

$\tilde{y}_{n-1} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} - \tilde{y}_n\right)$, $n = 20, 19, \dots, 11$

Άσκηση 1.13

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+(1-a)y=0 \end{array}\right\}, a \in \mathbb{R}$$

Για $a=0$, το πρόβλημα δεν έχει λύση.
Έστω $a \neq 0$ και έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{x}+\tilde{y}=1+\varepsilon_1 \\ \tilde{x}+(1-a)\tilde{y}=\varepsilon_2 \end{array}\right\}$$ Θέτουμε $u = \tilde{x} - x$ και $v = \tilde{y} - y$

$$\left.\begin{array}{l} u+v=\varepsilon_1 \\ u+(1-a)v=\varepsilon_2 \end{array}\right\}$$

Άρα $u = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{a}$

$v = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{a}$

Για a κοντά στο 0 το πρόβλημα έχει κακή κατάσταση, ενώ για μεγάλη απόλυτη τιμή του a η κατάσταση είναι καλή.

Άσκηση 2.18

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x^*) = x^*$, $p \ge 2$. Η φ είναι p φορές παρ/μη (συνεχώς) σε μία περιοχή του x^*

Έστω $\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$ και $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$

ΝΔΟ: Για x_0 αρκετά κοντά στο x^*, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}_0$,

α) $x_n \to x_n^*$, $n \to \infty$

β) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{1}{p!} \underbrace{\varphi^{(p)}(x^*)}_{\neq 0}$, δηλ η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς p.

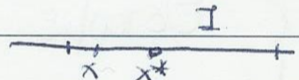
β) $x_{n+1} = \varphi(x_n) \overset{\text{Taylor}}{=} \varphi(x^*) + (x_n - x^*)\cdot\varphi'(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^2}{2!}\varphi''(x^*) + \dots$

$\dots + \frac{(x_n-x^*)^{p-1}}{(p-1)!}\cdot\varphi^{(p-1)}(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^p}{p!}\cdot\varphi^{(p)}(\xi_n)$ με ξ_n μεταξύ x_n και x^*.

$$\Rightarrow x_{n+1} = x^* + \frac{(x_n-x^*)^p}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n) \Rightarrow \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p} = \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)$$

(γιατί $\xi_n \to x^*$, $n\to\infty$)

α) Υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I με μέσον το x^* τ.ω. $\max_{x\in I}|\varphi'(x)| = L < 1$. Άρα, η φ $I \to \mathbb{R}$ είναι συστολή



Έστω $x \in I$. Τότε $|\varphi(x)-x^*| = |\varphi(x)-\varphi(x^*)| = L|x-x^*| \le |x-x^*| \Rightarrow \varphi(x) \in I$

Άρα ξέρω $\varphi: I \to I$, συστολή. Το αποτέλεσμα έπεται από το θεώρημα της συστολής.

Αριθμητική Ανάλυση 7/3/13

$\varphi: [a,b] \to [a,b]$, συστολή $(L<1)$
$\varphi(x^*) = x^*$
$x_0 \in [a,b]$ $x_n := \varphi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$
Τότε: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

Τι μπορούμε να πούμε για την τάξη σύγκλισης;

$x_{n+1} \leq \varphi(x_n) - \varphi(x^*) \Rightarrow$
$|x_{n+1} - x^*| \underset{\underset{<1}{\uparrow}}{\leq} L|x_n - x^*|$, $n \in \mathbb{N}_0$.

τάξη σύγκλισης ≥ 1.

Υπόθεση: $\varphi \in C^1[a,b]$.

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*)$$
$$= \varphi'(\xi_n) \cdot (x_n - x^*).$$

με ξ_n μεταξύ x_n και x^*.

Άρα:

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \varphi'(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi'(x^*)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \varphi'(x^*), \; p=1$$

Συμπέρασμα: Αν $\varphi'(x^*) \neq 0 \Rightarrow p = 1$.

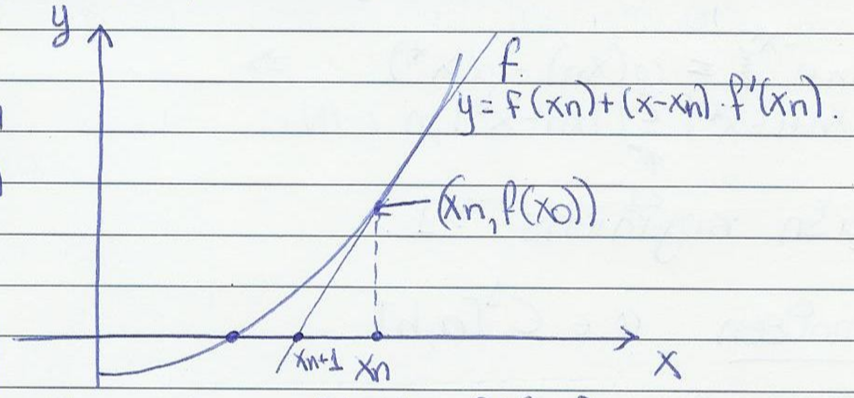
Για να $p > 1$, απαιτείται $\varphi'(x^*) = 0$.

Μέθοδος του Νεύτωνα

f παραγωγίσιμη.
Θέλουμε να βρούμε κάποια ρίζα, δηλαδή να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0$.
Για αρχική τιμή x_0, η μέθοδος του Νεύτωνα είναι

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad f'(x_n) \neq 0.$$

Γεωμετρική Ερμηνεία



η ιδιότητα της y είναι ότι είναι γραμμική δηλαδή είναι της μορφής $y=ax+b$.
$f'(x_n) \neq 0$ οπότε δεν είναι παράλληλη η $f(x_n)$ στο $x'x$.

εναλλακτικά $\dfrac{y-f(x_n)}{x-x_n} = f'(x_n)$ αυτό ψάχνω

για $y=0$: $f(x_n)+(x-x_n)\cdot f'(x_n) = 0$

$$\Rightarrow (x-x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ x_{n+1}}}{x} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\boxed{x = \underbrace{x+f(x)g(x)}_{\varphi(x)}}$ → δε την ξέρω την $g(x)$

$\Rightarrow \varphi'(x) = 1+f(x)\,g'(x)+f'(x)\,g(x)$

$\varphi'(x^*) = 1+f(x^*)g'(x^*)+f'(x^*)\cdot g(x^*)$
$= 1+f'(x^*)g(x^*)$

Τώρα $\varphi'(x^*) \Leftrightarrow g(x^*) = -\dfrac{1}{f'(x^*)}$

Λογική επιλογή (για να ελπίζουμε σε $p>1$) είναι $g(x) = \dfrac{-1}{f'(x)}$

Τότε $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, πράγμα που οδηγεί στη μέθοδο του Νεύτωνα!

Μέθοδος του Νεύτωνα

$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n \in \mathbb{N}_0$ με $\boxed{\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}}$ → συνάρτηση επανάληψης της μεθόδου του Νεύτωνα.

Υπόθεση: η f είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο x^*
$F(x^*)=0$, $F'(x^*)\neq 0$ (Η x^* είναι απλή ρίζα της f)

Τότε:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \Rightarrow \varphi'(x^*)=0$$

Θεώρημα (Τοπική τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

Έστω x^* $\boxed{\text{απλή}}$ ρίζα μιας συνάρτησης f, και έστω ότι η f είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*. Τότε, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I, με μέσον το x^*, τ.ω για κάθε $x_0 \in I$, η ακολουθία (x_n), που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα, για την f, συγκλίνει στο x^*.
Μάλιστα ισχύει $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$, δηλαδή η τάξη σύγκλισης ≥ 2. Αν $f''(x^*)\neq 0$, τότε $p=2$.

Απόδειξη: Ξέρουμε ότι $\varphi'(x^*)=0$, με $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, άρα υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I, με μέσον το x^*, τ.ω. $\max_{x\in I} |\varphi'(x)| = L$, $L<1$.

οπότε η φ είναι συστολή στο I. Επιπλέον (Άσκηση 2.18) $\varphi: I \to I$
Επομένως, για κάθε $x_0 \in I$, σύμφωνα με το Θεώρημα της συστολής η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x^*.

Τώρα:

$$f(x_n) = \cancelto{0}{f(x^*)} + (x_n - x^*)f'(x) + \frac{(x_n-x^*)^2}{2}\cdot f''(\xi_n)$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*)\cdot f''(\theta_n)$$ (με ξ_n, θ_n μεταξύ x_n και x^*)

Άρα $$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-x^*)\cdot f'(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^2}{2} f''(\xi_n)}{f'(x^*) + (x_n-x^*)\cdot f''(\theta_n)}$$ (αφαιρώ από τα δύο μέλη το x^*)

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n-x^*)f'(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^2}{2}\cdot f''(\xi_n)}{(f'(x^*) + (x_n-x^*)\cdot f''(\theta_n))}$$

$$= \frac{(x_n-x^*)^2\cdot f''(\theta_n) - \frac{(x_n-x^*)^2}{2}\cdot f''(\xi_n)}{f'(x^*) + (x_n-x^*)\cdot f''(\theta_n)}$$

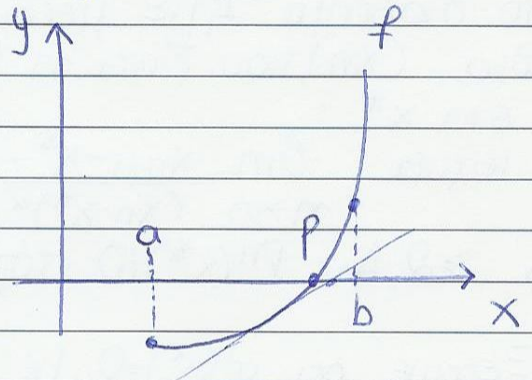
$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \frac{f''(\theta_n)-\frac{1}{2}f''(\xi_n)}{f'(x^*)+(x_n-x^*)\cdot f''(\theta_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{f''(x^*)-\frac{1}{2}f''(x^*)}{f'(x^*)} =$$

$$= \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

<u>Θεώρημα</u> (<u>Ολική</u> σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και τ.ω. $f(a)<0$ και $f'(x)>0$ και $\underset{\text{κυρτή}}{f''(x)>0}$ για $x \geq a$.

Τότε η f έχει ακριβώς μία ρίζα $p>a$.
Για <u>οποιοδήποτε</u> $x_0 \in [a,\infty)$ η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την f συγκλίνει στο p



<u>Απόδειξη</u>:

<u>Μοναδικότητα</u>: $f'(x)>0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα $\Rightarrow$ η f έχει <u>το πολύ μία</u> ρίζα

<u>Ύπαρξη ρίζας</u>: $f(b) = f(a)+(b-a)\cdot f'(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^2}{2}\cdot \underbrace{f''(\theta)}_{>0}}_{\geq 0}$

$$\geq f(a)+(b-a)\cdot f'(a)$$

Τώρα $\quad f(a)+(b-a)f'(a)>0 \Leftrightarrow (b-a) > -\frac{f(a)}{f'(a)}$

Άρα για $b > a-\frac{f(a)}{f'(a)}$ έχουμε $f(b)>0$

Σύμφωνα με το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $p \in (a,b)$ τ.ω. $f(p)=0$.

(Παρατήρηση: $f(x)>0 \Leftrightarrow x>p$
$f(x)<0 \Leftrightarrow x<p$)

Σύγκλιση: $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$

$x > p \Leftrightarrow \varphi'(x) > 0$
$x < p \Leftrightarrow \varphi'(x) < 0$

$x_{n+1} = \varphi(x_n) \Rightarrow x_{n+1} - p = \varphi(x_n) - \varphi(p) = \varphi'(\xi_n)(x_n - p)$

με ξ_n μεταξύ x_n και p.

α) $x_n < p \Rightarrow x_{n+1} > p$
β) $x_n > p \Rightarrow x_{n+1} > p$

σε όλες τις περιπτώσεις $x_n > p \ \forall \ n \geq 1$.

$x_1 > p$, $n \geq 1$.

$x_{n+1} = x_n - \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{<0} < x_n$.

$(x_n)_{x \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη προς τα κάτω από το p

Επομένως
$\lim_{n \to \infty} x_n = y \geq p$, Τώρα $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$\cancel{y} = \cancel{y} - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow \boxed{y = p}$

11/3/13

Μέθοδος του Νεύτωνα
f: ομαλή

· x^* απλή ρίζα της f

τάξη σύγκλισης $= 2$

Ερώτημα: Ποια είναι η τάξη σύγκλισης, αν η x^* είναι πολλαπλή ρίζα της f;

Παράδειγμα: $f(x) = x^2$.

Το $x^* = 0$ είναι διπλή ρίζα της f

Το βήμα από τη μέθοδο του Νεύτωνα είναι:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n)^2}{2x_n} = \frac{1}{2}x_n$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n \implies \boxed{x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n x_0} \implies x_n \to 0,\ n \to \infty$$

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \implies \boxed{p = 1}$$

Γενικά: x^* ρίζα τάξης m της f, δηλαδή:

$$f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(m-1)}(x^*) = 0 \quad \text{και} \quad f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Taylor

$$f(x_n) = \cancel{f(x^*)}^{0} + (x_n - x^*)\cancel{f'(x^*)}^{0} + \ldots + \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \cancel{f^{(m-1)}(x^*)}^{0} + \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} \cdot f^{(m)}(\xi_n)$$

$$= \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} \cdot f^{(m)}(\xi_n)$$

$$f'(x_n) = \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot f^{(m)}(\theta_n)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{(x_n-x^*)^{\cancel{m}}}{\cancel{m!}} \cdot f^{(m)}(\xi_n)}{\frac{(x_n-x^*)^{\cancel{m-1}}}{\cancel{(m-1)!}} \cdot f^{(m)}(\theta_n)}$$

Άρα: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x^*}{m!} \cdot \frac{f^{(m)}(\xi_n)}{f^{(m)}(\theta_n)}$

Για x_0 αρκετά κοντά στο x^*, ισχύει $x_n \to x^*, n \to \infty$

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{x_n - x^*}{m} \cdot \frac{f^{(m)}(\xi_n)}{f^{(m)}(\theta_n)}$$

Επομένως:

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{f^{(m)}(\xi_n)}{f^{(m)}(\theta_n)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{1}{m} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{m} \Rightarrow \boxed{p=1}$$

Παραλλαγή της μεθόδου του Νεύτωνα

$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ δίνει $\boxed{p=2}$

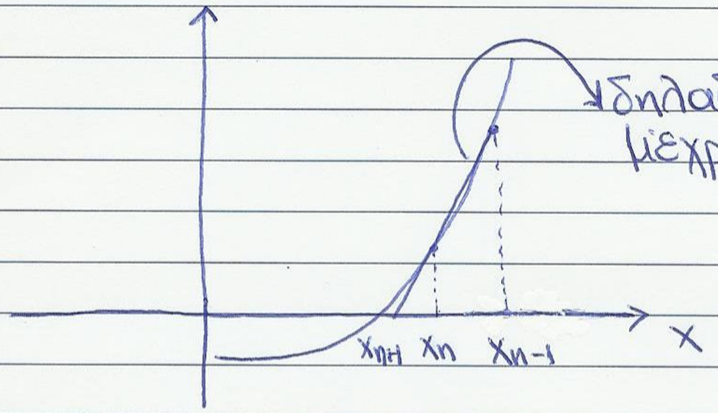
Μέθοδος της τέμνουσας: (αν δεν ξέρω την f')

Νεύτωνας: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Τέμνουσας: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$, $n = 1, 2, \dots,$

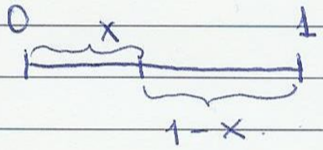
Γεωμετρική ερμηνεία



δηλαδή φέρνω την τέμνουσα μέχρι να τμήσει τον άξονα $x'x$.

Θεώρημα (Τάξη σύγκλισης της μεθόδου της τέμνουσας)

Έστω x^* ρίζα μιας συνάρτησης f, και έστω $(a,b) \subset \mathbb{R}$ με $x^* \in (a,b)$ τ.ω. $f \in C^2(a,b)$, $f'(x^*) \neq 0$ και $f''(x^*) \neq 0$.
Τότε υπάρχει ένα διάστημα I, που περιέχει το x^* τ.ω. για $x_0, x_1 \in I$, $x_1 \neq x_0$, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που δίνει η μέθοδος της τέμνουσας συγκλίνει στο x^*.
Η τάξη σύγκλισης είναι $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$



Αν $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

Χρυσή τομή: $\frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Σύγκριση: Νεύτωνας-τέμνουσα:

Νεύτωνας: $p=2$, ένας υπολογισμός της f και ένας της f'

Τέμνουσα: $p \simeq 1{,}62$, ένας υπολογισμός της f

Υπόθεση: Το κόστος υπολογισμού της f' είναι ίδιο με της f.

(γενικά αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$, τάξη $=p$
$(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$, τάξη $=p^2$)

$$p^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \simeq 2{,}62 > 2.$$

Άρα σε αυτήν την περίπτωση η μέθοδος της τέμνουσας συγκλίνει "ταχύτερα".

12/3/13

Ασκηση 2.4

$f:[-1,\sqrt{2}]\to\mathbb{R}$

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$

Διχοτόμηση: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

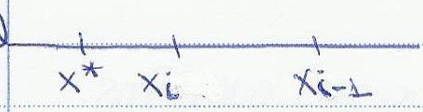
Ν.Δ.Ο. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$

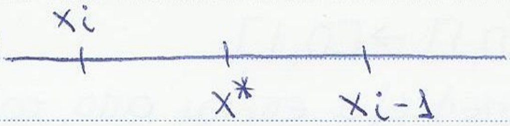
• $f(-1)=\left(-1-\frac{1}{2}\right)^3<0$, • $f(\sqrt{2})=\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^3>0$

f συνεχής αφού είναι πολυώνυμο
Σύμφωνα με τη θεωρία, η μέθοδος της διχοτόμησης εφαρμόζεται και $x_n\to x^*, n\to\infty$ με x^* ρίζα της f
Αφού η μόνη ρίζα της f είναι το $\frac{1}{2}$, θα έχαμε $x_n\to x^*, n\to\infty$

Ασκηση 2.7

$\varphi:[a,b]\to[a,b]$, $\varphi\in C^1[a,b]$
$\max|\varphi'(x)|<1$, $a\le x\le b$ (άρα η φ είναι συστολή)
$x_0\in[a,b]$, $x_n:=\varphi(x_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}_0$
x^* σταθερό σημείο της φ , $\boxed{x_0\neq x^*}$
ΝΔΟ: α) Αν $\forall x\in[a,b]$ $\varphi'(x)>0$, τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει μονότονα στο x^*
β) Αν $\forall x\in[a,b]$ $\varphi'(x)<0$ τότε το x^* περιέχεται μεταξύ του x_{i-1} και x_i, για κάθε i

α) 

β) 

Λύση: Από το θεώρημα της συστολής ξέρουμε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

Τώρα: $x_i - x^* = \varphi(x_{i-1}) - \varphi(x^*)$

$\overset{\text{ΘΜΤ}}{=} \varphi'(\xi_i)\,(x_{i-1}-x^*)$, με ξ_i μεταξύ x_{i-1} και x^*

Αν $\varphi'(\xi_i)<0$, τότε $(x_i-x^*)(x_{i-1}-x^*)<0$, άρα έχουμε το β)

Αν $0\le\varphi'(\xi_i)<1$, τότε $(x_i-x^*)(x_{i-1}-x^*)>0$ και $|x_i-x^*|<|x_{i-1}-x^*|$, οπότε παίρνουμε το α)

Άσκηση 2.8 $x_0 \in [0,1]$

$x_{n+1} := \frac{1}{2} e^{\frac{x_n}{2}}$, $n \in \mathbb{N}_0$

ΝΔΟ: $x_n \to x^*$, $n\to\infty$ και $x^* \in [0,1]$

Λύση:

$\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$ (προς το παρόν)

$\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{x/2}$ $(x_{n+1} = \varphi(x_n))$

$\varphi'(x) = \frac{1}{2} e^{x/2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot e^{x/2} > 0$

• $\max_{0\le x\le 1} |\varphi'(x)| = \max_{0\le x\le 1} \varphi'(x) = \varphi'(1) = \frac{1}{4} e^{1/2} = \frac{\sqrt{e}}{4} < 1$

$\Rightarrow$ η φ συστολή

• φ αύξουσα $\Rightarrow \forall\, x \in [0,1]$

$\underset{1/2\,\ge 0}{\underset{\shortparallel}{\varphi(0)}} \le \varphi(x) \le \underset{\sqrt{e}/2\,\le 1}{\underset{\shortparallel}{\varphi(1)}} \Rightarrow 0 \le \varphi(x) \le 1$

$\Rightarrow \varphi: [0,1] \to [0,1]$

Το αποτέλεσμα έπεται από το θεώρημα της συστολής.

Άσκηση 2.9: $x_0 \in [0,1]$

$x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + x - e^{x_n}),\ n \in \mathbb{N}_0$

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) = \frac{1}{3}(2 + x - e^{x})$

$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(\quad 1 - e^{x}) = \frac{1}{3}(1 - e^{x}) \leq 0 \quad (e^{x} \geq 1,\ \forall x \geq 0)$

$\Rightarrow \varphi$: φθίνουσα

Άρα $\forall x \in [0,1] \quad \underset{\underset{\frac{3-e}{3} \geq 0}{\shortparallel}}{\varphi(1)} \leq \varphi(x) \leq \varphi(0) = \frac{1}{3} \leq 1$

$\Rightarrow \varphi : [0,1] \to [0,1]$

Επιπλέον $\max\limits_{0 \leq x \leq 1} |\varphi'(x)| = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} \frac{e^{x} - 1}{3} = \frac{e^{1} - 1}{3} = \frac{e - 1}{3} < 1$

Άρα η φ είναι συστολή

Άσκηση 2.10 26/3/13

$x_0 \in [0,1]$

$$x_{n+1} := \frac{1}{6}\left[3+4(x_n)^2 - e^{x_n}\right] \quad , n \in \mathbb{N}_0$$

ΝΔΟ: $x_n \to x^* \in [0,1]$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{a^n}{1-a}|x_1 - x_0| \quad , \text{με } a := \frac{8-e}{6}$$

Λύση

Ορίζω $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \frac{1}{6}(3+4x^2-e^x)$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{6}(8x - e^x)$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{6}(8-e^x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

Άρα η φ' είναι αύξουσα (και μάλιστα γνήσια)

Επομένως

$$\underbrace{\varphi'(0)}_{=-\frac{1}{6}} \leq \varphi'(x) \leq \underbrace{\varphi'(1)}_{=\frac{8-e}{6}} \quad , \forall x \in [0,1]$$

Οπότε $\max\limits_{0\leq x\leq 1}|\varphi'(x)| = \max\Big(|\varphi'(0)|, |\varphi'(1)|\Big) =$

$$= \max\left(\frac{1}{6}, \frac{8-e}{6}\right) = \frac{8-e}{6} = a < 1$$

Συμπέρασμα: Η φ είναι συστολή στο $[0,1]$ με σταθερά Lipschitz a.

Απομένει να αποδείξουμε ότι $\varphi : [0,1] \to [0,1]$. (και τότε τα αποτελέσματα έπονται από το Θεώρημα της συστολής)

• $\max\limits_{0\le x\le 1} \varphi(x) \le \underbrace{\max\limits_{0\le x\le 1}\left(\frac{1}{6}(3+4x^2)\right)}_{= \frac{7}{6}} + \underbrace{\max\limits_{0\le x\le 1}\left(-\frac{1}{6}e^x\right)}_{= -\frac{1}{6}} = 1 \le 1$

• $\min\limits_{0\le x\le 1} \varphi(x) \ge \underbrace{\min\limits_{0\le x\le 1}\left(\frac{1}{6}(3+4x^2)\right)}_{\frac{3}{6}} + \underbrace{\min\limits_{0\le x\le 1}\left(-\frac{1}{6}e^x\right)}_{-\frac{e}{6}} = \frac{3-e}{6} \ge 0$

$\forall x \in [0,1] \quad 0 \le \varphi(x) \le 1$, δηλαδή η $\varphi : [0,1] \to [0,1]$

Άσκηση 2.11

$x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} := \cos(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$

ΝΔΟ: $x_n \to x^*$, $\cos x^* = x^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{x_n - x^*} = -\sqrt{1-(x^*)^2}$

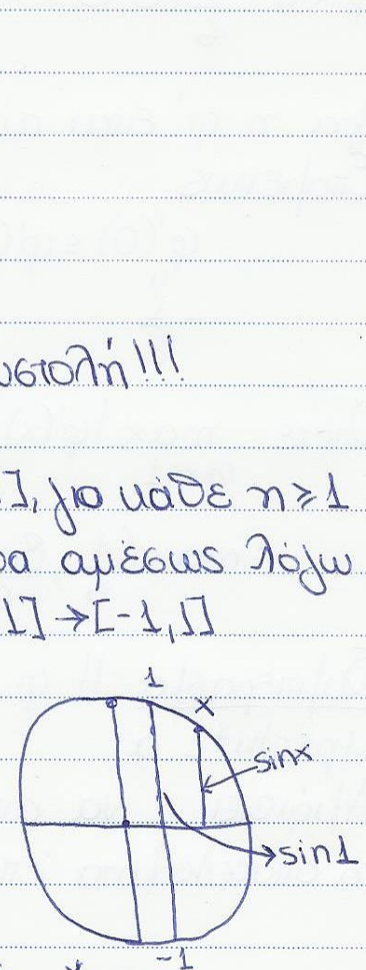
Λύση

Ορίζω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \cos x$

$\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |-\sin x| = 1$, δεν είναι συστολή!!!

Για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $x_n \in [-1,1]$, για κάθε $n \ge 1$
Θεωρώ $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \cos x$ άρα αμέσως λόγω συνημιτόνου μπορώ να γράψω: $\varphi : [-1,1] \to [-1,1]$
Τώρα:

$\max\limits_{-1\le x\le 1} |\varphi'(x)| = \max\limits_{-1\le x\le 1} |-\sin x| = \sin 1$



Άρα η φ είναι συστολή
Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής $x_n \to x^*$, $n\to\infty$, και $\cos x^* = x^* > 0$

$x_{n+1} - x^* = \cos x_n - \cos x^*$

$= -(\sin(\xi_n)) \cdot (x_n - x^*)$, με ξ_n μεταξύ x_n και x^*

Άρα:

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sin(\xi_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\lim_{n\to\infty} \sin(\xi_n)$$

$$= -\sin x^* = -\sqrt{1-\cos^2 x^*} = -\sqrt{1-(x^*)^2}$$