2. Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

Δεδομένο: Μια συνάρτηση f

Ζητούμενα: $x^* \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x^*)=0$
(x^* ρίζα της f)

Αριθμητική μέθοδος

Γενικά, δίνουν μια ακολουθία προσεγγίσεων
$x_0, x_1, x_2, \ldots$

Υπο κατάλληλες συνθήκες: $x_n \to x^*$, $n \to +\infty$

Τότε προσεγγίζουμε το x^* με κάποιο x_N, για "αρκετά μεγάλο" N.

Συμβολισμοί

I διάστημα, $n \in \mathbb{N}_0$

$C(I) = \{ f : I \mapsto \mathbb{R},\ f \text{ συνεχής στο } I \}$

$C^n(I) = \{ f \in C(I) : f \text{ } n \text{ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο } I \}$

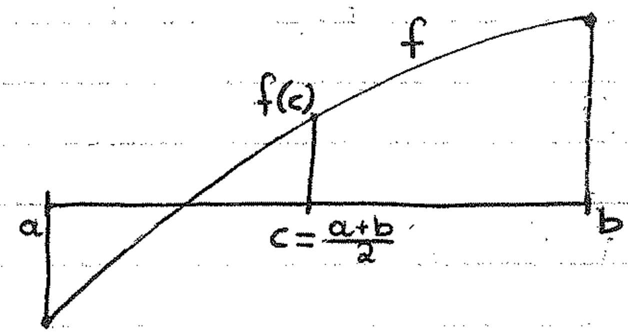
$I = (a,b) \Longrightarrow C((a,b)) = C(a,b)$

$I = [a,b] \Longrightarrow C([a,b]) = C[a,b]$

Μέθοδος της διχοτόμησης

<u>Δεδομένα:</u> $f \in C[a,b]$, $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{αν } x>0 \\ -1, & \text{αν } x<0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$$



Η μέθοδος βασίζεται στο θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής.

<u>Θεώρημα:</u> Αν $g \in C[a,b]$ και K ένας αριθμός ανάμεσα στους $g(a)$ και $g(b)$, τότε υπάρχει $x \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $g(x)=K$.

x^* ρίζα της f, $x^* \in [a,b]$

$$\boxed{\left|x^* - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}}$$

44

$\underline{1^{\eta}\ \text{Περίπτωση}}$: $f(a)=0$ ή $f(b)=0$

Τότε το a ή το b είναι ρίζα της f.

$\underline{2^{\eta}\ \text{Περίπτωση}}$: $f(a)\cdot f(b)<0$

$c=\frac{a+b}{2}$

α) $\underline{f(c)=0}$

Τότε το c είναι ρίζα της f.

β) $\underline{f(c)\neq 0}$

β$_1$) $\underline{f(a)f(c)<0}$

Τότε υπάρχει ρίζα της f στο $[a,c]$

β$_2$) $\underline{f(a)f(c)>0 \text{ , (τότε } f(b)f(c)<0)}$

Τότε υπάρχει ρίζα της f στο $[c,b]$

Το μήκος των διαστημάτων $[a,c]$ και $[c,b]$ είναι το μισό του μήκους του διαστήματος $[a,b]$.

Δεδομένα του αλγόριθμου

a, b, f τέτοια ώστε $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$
$f \in C[a,b]$ και $\varepsilon > 0$
(Το ε είναι η ανοχή σφάλματος, μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα).

Αλγόριθμος

Υπολόγισε $f(a)$, $\delta = b - a$

1. $\delta \leftarrow \frac{\delta}{2}$
    Αν $\delta \leq \varepsilon$, Τύπωσε a, b, Έξοδος.
    Διαφορετικά (δηλαδή $\delta > \varepsilon$)
        Υπολόγισε $c = \frac{a+b}{2}$, $f(c)$
        Τύπωσε $a, b, c, \delta, f(c)$
        Αν $f(c) = 0$, Έξοδος
        Διαφορετικά (δηλαδή $f(c) \neq 0$)
            Αν $\operatorname{sgn} f(c) = \operatorname{sgn} f(a)$
                $a \leftarrow c$
                $f(a) \leftarrow f(c)$
            Διαφορετικά (δηλαδή $\operatorname{sgn} f(c) \neq \operatorname{sgn} f(a)$)
                $b \leftarrow c$
            Πήγαινε στο 1

Το αποτέλεσμα του αλγορίθμου $\frac{a+b}{2}$ είναι προσέγγιση μιας ρίζας x^* της f τέτοια ώστε $\left|x^* - \frac{a+b}{2}\right| \leq \varepsilon$

Πρακτικά Θέματα

1. $\text{sgn} f(a) \neq \text{sgn} f(b)$

Αυτό πρέπει να χρησιμοποιείται

$f(a)\, f(c) > 0$

Όχι αυτό, γιατί μπορεί να οδηγήσει σε υπεκχείλιση όταν οι τιμές $f(a)$ και $f(b)$ έχουν πολύ μικρή απόλυτη τιμή.

2. $c = \frac{a+b}{2}$

Όχι έτσι, γιατί μπορεί να βγούμε εκτός του διαστήματος

$c = a + \frac{b-a}{2}$

Αυτό πρέπει να κάνουμε

Παράδειγμα: $\beta = 10$, $t = 2$, $U = -L = 10$, αποκοπή

$a = .61$, $b = .66$

$a + b = 1.27$

$fl(a+b) = 1.2$

$\frac{fl(a+b)}{2} = 0.6 < a$!!!

3. Αν επιλέξουμε το ε πολύ μικρό, μπορεί να οδηγηθούμε σε φαύλο κύκλο.

$$c = a + \frac{b-a}{2}$$

Αν το ε (οπότε και το $\frac{b-a}{2}$) είναι υπερβολικά μικρό, μπορεί να πάρουμε στον υπολογιστή:

$$c = fl\left(a + fl\left(\frac{b-a}{2}\right)\right) = a$$

Πρόταση: (Εκτίμηση του σφάλματος στη μέθοδο της διχοτόμησης)

Έστω $f \in C[a,b]$, $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των προσεγγίσεων (δηλαδή των μέσων των διαδοχικών διαστημάτων) που παράγει η μέθοδος της διχοτόμησης. Τότε, είτε $x_N = x^*$, για κάποιο N, είτε $x_n \to x^*$, $n \to +\infty$, όπου $x^* \in [a,b]$ μια ρίζα της f.
Μάλιστα για τα σφάλματα $|x^* - x_n|$ ισχύει:

$$\boxed{|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots}$$

Απόδειξη

Θέτοντας $a_1 = a$, $b_1 = b$, ας συμβολίσουμε με $I_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots$, τα διαστήματα που δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης.
Προφανώς $I_{i+1} \subset I_i$. Επειδή σε κάθε I_i υπάρχει μια ρίζα της f, υπάρχει ρίζα x^* της f που περιέχεται σε όλα τα I_i.

Τα I_i είναι πεπερασμένα το πλήθος, αν τύχει για κάποιο N να ισχύει $x_N = x^*$, διαφορετικά είναι άπειρα το πλήθος. Έχουμε:

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \ldots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

και

$$|x^* - x_n| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2}\ \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = \frac{b_1 - a_1}{2^n} \Longleftrightarrow$$

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Τώρα, $\frac{b-a}{2^n} \to 0,\ n \to +\infty$,

οπότε, $x_n \longrightarrow x^*,\ n \to +\infty$

Πλεονεκτήματα

1) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί υπό γενικές συνθήκες στην f. Απαιτεί συνέχεια της f και αλλαγή προσήμου της f σε μια περιοχή της ρίζας.

2) Συγκλίνει πάντα, όταν μπορεί να εφαρμοσθεί ($x_n \rightarrow x^*$, $n \rightarrow +\infty$)

3) Απαιτεί μόνο έναν υπολογισμό της f σε κάθε βήμα.

4) Μπορούμε να προσδιορίσουμε εκ των προτέρων ένα πλήθος βημάτων που εξασφαλίζουν την προσέγγιση μιας ρίζας με δεδομένη ακρίβεια.

Μειονεκτήματα

1) Η μέθοδος δεν μπορεί να προσεγγίσει ρίζες σε μια περιοχή των οποίων η f δεν αλλάζει πρόσημο.

2) Η μέθοδος συγκλίνει αργά, οπότε απαιτούνται πολλά βήματα και το συνολικό κόστος είναι υψηλό.

Η μέθοδος χρησιμοποιείται στην πράξη για έναν αρχικό χοντρικό εντοπισμό μιας ρίζας.

Επαναληπτικές μέθοδοι

Ιδέα: $f(x) = 0 \iff x = \varphi(x)$

Κάθε ρίζα x^* της f έχει την ιδιότητα $\varphi(x^*) = x^*$. Τέτοια σημεία λέγονται σταθερά σημεία της φ.

Αρχική προσέγγιση x_0

$$x_n := \varphi(x_{n-1}) \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$(x_{n+1} := \varphi(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Ορισμός: Ένα σημείο x^* του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης φ λέγεται σταθερό σημείο της φ, αν $\varphi(x^*) = x^*$.

Υπόθεση: $x_n \to y \, , \, n \to +\infty$

$$y = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_{n-1})$$

Υπόθεση: Η φ είναι συνεχής στο y

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n\to+\infty} x_{n-1}\right) = \varphi(y)$$

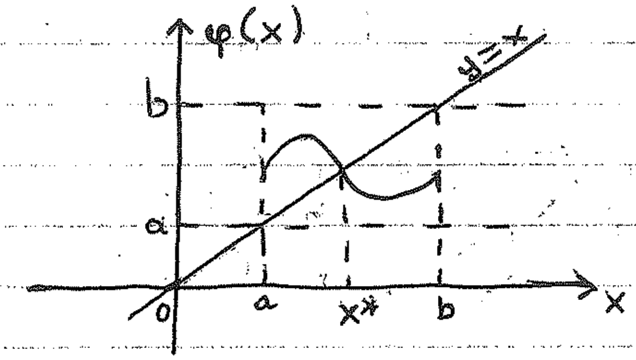
Άρα καταλήγουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{c} x_n \to y \, , \, n \to +\infty \\ \text{και} \\ \varphi \text{ συνεχής στο } y \end{array}\right\} \Rightarrow y \text{ σταθερό σημείο της } \varphi.$$

52

★ Πρόταση (Ύπαρξη σταθερού σημείου)

Κάθε συνεχής συνάρτηση $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ έχει στο $[a,b]$ (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο.



Απόδειξη

1η Περίπτωση: $\varphi(a) = a$
2η Περίπτωση: $\varphi(b) = b$
3η Περίπτωση: $\varphi(a) > a$, $\varphi(b) < b$

Ορίζουμε $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \varphi(x) - x$

Ιδιότητες της g: g συνεχής,
$g(a) = \varphi(a) - a > 0$
$g(b) = \varphi(b) - b < 0$

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $x^* \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $g(x^*) = 0$.

Τότε $\varphi(x^*) - x^* = 0$, δηλαδή $\varphi(x^*) = x^*$

Ορισμός (Συνθήκη του Lipschitz)

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Λέμε ότι μια συνάρτηση $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί στο I τη <u>συνθήκη του Lipschitz</u>, αν υπάρχει σταθερά $L \geq 0$ τέτοια ώστε:

$$\forall x, y \in I \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L\,|x-y|$$

Αν το L μπορεί ~~να~~ επιλεγεί μικρότερο του 1, $L<1$, τότε η φ λέγεται <u>συστολή</u> στο I.

Παρατήρηση 1

Αν $\varphi \in C^1[a,b]$, τότε η φ ικανοποιεί στο $[a,b]$ τη συνθήκη του Lipschitz με $L = \max\limits_{a \leq x \leq b} |\varphi'(x)|$

$$\forall x,y \in [a,b] \ \exists \xi \in [a,b] : \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x-y)$$

$$\Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x-y| \leq L\,|x-y|$$

$$\Rightarrow |\varphi'(\xi)| \leq L$$

Παρατήρηση 2

Αν $\varphi \in C^1(a,b)$, τότε δεν ικανοποιεί αναγκαστικά τη συνθήκη του Lipschitz στο (a,b)

Παράδειγμα: $\varphi(x) = \sqrt{x}, \quad x \in (0,1)$

$x, y \in (0,1): \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x-y)$
με ξ μεταξύ x και y

$$\varphi'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} |x-y|$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\xi}} \to +\infty, \quad \xi \to 0$$

* Θεώρημα της Συστολής

Έστω $\varphi: [a, b] \to [a, b]$ μια συστολή με σταθερά $L < 1$. Τότε η φ έχει στο $[a, b]$ ακριβώς ένα σταθερό σημείο x^*.

Για τυχαία αρχική τιμή $x_0 \in [a, b]$, η ακολουθία $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$, είναι καλά ορισμένη, συγκλίνει στο x^*, και για τα σφάλματα $x_n - x^*$ ισχύουν:

$$(1): |x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*| \leq L^n \max(x_0 - a, b - x_0)$$

$$(2): |x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$$(3): |x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

Παρατηρήσεις:

1) Η (2) είναι εκτίμηση εκ των προτέρων, δίνει πληροφορία για το x_n χωρίς να το χρησιμοποιεί.
Αντίθετα, η (3) είναι εκτίμηση εκ των υστέρων.

2) Η (3) δίνει καλύτερο φράγμα για το σφάλμα από τη (2):

$$|x_n - x_{n-1}| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})| \Leftrightarrow$$
$$|x_n - x_{n-1}| \leq L |x_{n-1} - x_{n-2}| \Leftrightarrow$$
$$|x_n - x_{n-1}| \leq L^{n-1} |x_1 - x_0|$$

56

3) $|x_1 - x_0| = |(x_1 - x^*) - (x_0 - x^*)| \Leftrightarrow$

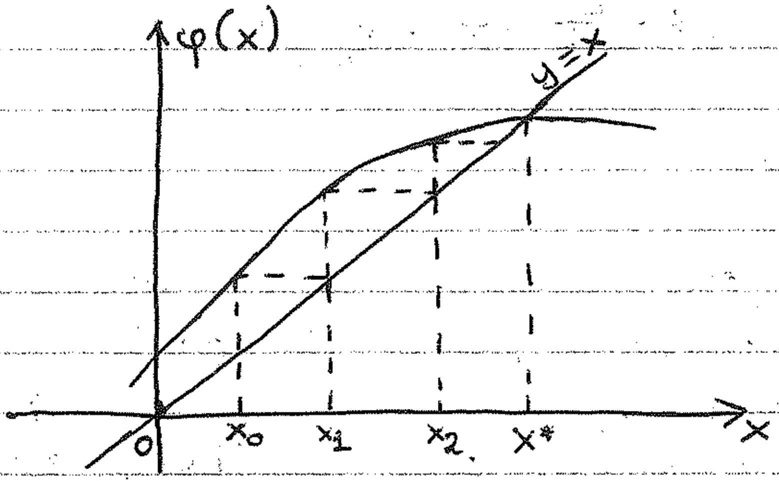
$|x_1 - x_0| \leq |x_1 - x^*| + |x_0 - x^*| \Leftrightarrow$

$|x_1 - x_0| \leq |\varphi(x_0) - \varphi(x^*)| + |x_0 - x^*| \Leftrightarrow$

$|x_1 - x_0| \leq L\,|x_0 - x^*| + |x_0 - x^*| \Leftrightarrow$

$|x_1 - x_0| \leq (L+1)\,|x_0 - x^*|$

<u>Συμπέρασμα:</u> Το φράγμα της (2) είναι το πολύ $\frac{L+1}{1-L}$ φορές μεγαλύτερο από το πρώτο φράγμα της (1).



$x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$

Η μέθοδος της διχοτόμησης ΔΕΝ γράφεται σε αυτή τη μορφή.

Ταχύτητα σύγκλισης μιας ακολουθίας

$x_n \to x^*$, $n \to +\infty$

Ορισμός (Τάξη σύγκλισης ακολουθίας)

Λέμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά (ή ότι η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον ένα), αν υπάρχει $C<1$ και $N \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*|, \text{ για } n \geq N$$

Λέμε ότι η σύγκλιση είναι (τουλάχιστον) τάξης $p>1$, αν υπάρχει $C>0$, τέτοιο ώστε:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*|^p$$

$$C\,|x_n - x^*|^p = C\,|x_n - x^*|^{p-1} \cdot |x_n - x^*|$$

Για $p=2$ μιλάμε για τετραγωνική σύγκλιση.

Για $p=3$ μιλάμε για κυβική σύγκλιση.

Παρατηρήσεις

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \to x^*$, $n \to +\infty$

$x_n \neq x^*$

- Αν η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον p, τότε η τάξη είναι και q, με $1 \leq q \leq p$

$$\forall n\in\mathbb{N}: |x_{n+1} - x^*| \leq C_1 |x_n - x^*|^p \iff$$

$$|x_{n+1} - x^*| \leq (C_1 |x_n - x^*|^{p-q}) \cdot |x_n - x^*|^q \iff$$

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \widetilde{C_1} |x_n - x^*|^q$$

Σημείωση (Προσδιορισμός της τάξης σύγκλισης)

$x_n \to x^*,\ n \to +\infty,\ x_n \neq x^*$

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*|^p \iff$$

$$\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} \leq C \iff$$

$$\left| \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} \right| \leq C$$

Η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον p, αν η ακολουθία $\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p}$ είναι φραγμένη.

Υπόθεση: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = a$

Τότε η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον p.
(Για $p = 1$ πρέπει $|a| < 1$)

★ Σημαντικό: Αν $a \neq 0$, η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς p.

Αν η τάξη ήταν $p + \varepsilon$, με $\varepsilon > 0$, τότε θα είχαμε:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*|^{p+\varepsilon} \iff$$

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*|^p \cdot |x_n - x^*|^\varepsilon \iff$$

$$\left| \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} \right| \leq C\,|x_n - x^*|^\varepsilon \iff$$

$$\underset{|a|}{\Big\downarrow{\scriptstyle n \to +\infty}} \qquad \underset{0}{\Big\downarrow{\scriptstyle n \to +\infty}}$$

$|a| \leq 0$ Άτοπο! (υποθέσαμε $a \neq 0$)

Παρατηρήσεις στο Θεώρημα της Συστολής

• Τι μπορεί να συμβεί αν $L \geq 1$;

1ο παράδειγμα: $\varphi : [-a, a] \to [-a, a]$

$\varphi(x) = x$

$\forall x, y [-a, a] : |\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$

$\Rightarrow L = 1$

Έχει άπειρα σταθερά σημεία.

2ο παράδειγμα: $\varphi : [-a, a] \to [-a, a]$

$\varphi(x) = -x$

$\forall x, y \in [-a, a] : |\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$

$\Rightarrow L = 1$

Έχει ένα μόνο σταθερό σημείο το $x^* = 0$.

Έστω $x_0 \in [-a, a]$, $x_0 \neq 0$

Η ακολουθία $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, είναι:

$x_0, -x_0, x_0, -x_0, x_0, -x_0, \ldots$

Δεν συγκλίνει!

• Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος της συστολής. Επιπλέον υποθέτουμε $\varphi \in C^1[a,b]$

Τότε:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi(x_n) \\ x^* &= \varphi(x^*) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{θεώρημα μέσης} \\ \text{τιμής}}}{=} \varphi'(\xi_n)(x_n - x^*),$$

με ξ_n μεταξύ των x_n και x^*.

$x_n \neq x^*, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \varphi'(\xi_n)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \lim_{n\to+\infty} \varphi'(\xi_n) = \varphi'\left(\lim_{n\to+\infty} \xi_n\right) = \varphi'(x^*)$$

Αν $\varphi'(x^*) \neq 0$, η τάξη σύγκλισης είναι <u>ακριβώς ένα.</u>

<u>Σημείωση:</u>

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*)$$

$$\Longrightarrow |x_{n+1} - x^*| = |\varphi(x_n) - \varphi(x^*)| \leq L\,|x_n - x^*|$$

$$\Longrightarrow |x_{n+1} - x^*| \leq L\,|x_n - x^*| \ , \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } L<1$$

Μέθοδος του Νεύτωνα

$f \qquad f(x^*) = 0$

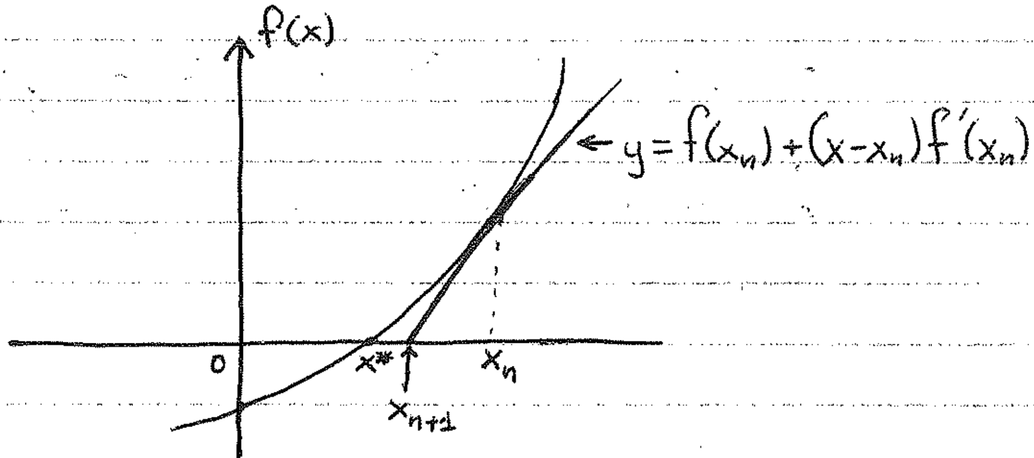
$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Υπόθεση: f παραγωγίσιμη και $f'(x_n) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$

Συνάρτηση επανάληψης: $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$\boxed{x_{n+1} = \varphi(x_n)}$$

Γεωμετρική ερμηνεία



$y = a(x - x_n) + \beta$, $x = x_n \rightsquigarrow y = \beta = f(x_n)$

$a = f'(x_n)$, η κλίση της ευθείας

$$0 = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n)$$

$$\Longrightarrow x - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Longrightarrow x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Υποθέσεις:

- Η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*
- $f'(x^*) \neq 0$, (η x^* είναι απλή ρίζα της f)

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)\, f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)\, f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\Longrightarrow \varphi'(x^*) = 0$$

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = x + f(x)\, g(x) = \varphi(x)$$

$$f(x^*) = 0 \Longrightarrow \varphi'(x) = 1 + f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

$$f'(x^*) \neq 0 \Longrightarrow \varphi'(x^*) = 1 + f'(x^*) g(x^*) + \underbrace{f(x^*)}_{0} g'(x^*)$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\varphi'(x^*)}_{0} = 1 + f'(x^*) g(x^*)$$

$$\Longrightarrow g(x^*) = -\frac{1}{f'(x^*)}$$

Κατάλληλη επιλογή:

$$g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

$$\Longrightarrow \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

64

★★ Θεώρημα (Τοπικά τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

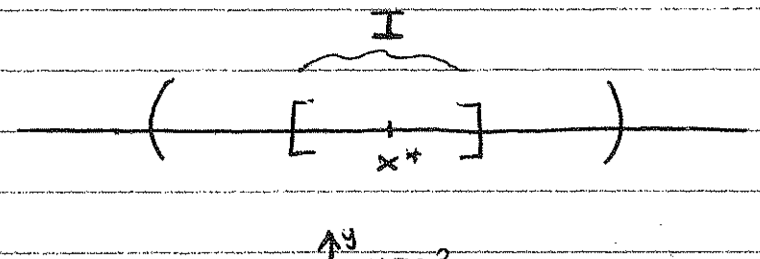
Έστω x^* μια απλή ρίζα της συνάρτησης f (δηλαδή $f(x^*)=0$ και $f'(x^*)\neq 0$), και έστω ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*.
Τότε, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I, με μέσον το x^*, τέτοιο ώστε για κάθε $x_0\in I$, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που κατασκευάζεται με τη μέθοδο του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x)=0$, δηλαδή:

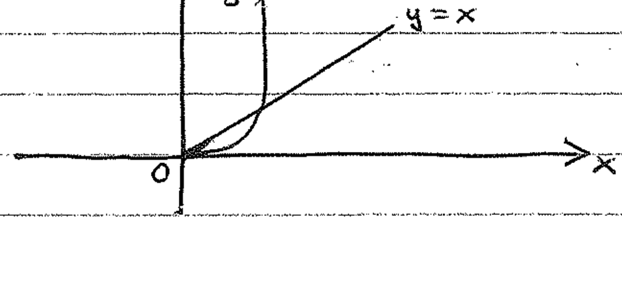
$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n\in\mathbb{N}_0,$$

να συγκλίνει στο x^*. Μάλιστα ισχύει:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)},$$

οπότε η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική και, αν $f''(x^*)\neq 0$, η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς δύο.





Απόδειξη

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Άρα $\varphi'(x^*) = 0$

Επομένως, αφού η φ' είναι συνεχής σε μία περιοχή του x^*, υπάρχει κλειστό διάστημα I (με μέσον το x^*) τέτοιο ώστε:

$$|\varphi'(x)| \leq L < 1 \ , \ \forall x \in I$$

Επομένως η φ είναι συστολή στο I.

Θα αποδείξουμε ότι $\varphi: I \to I$

Πραγματικά, για $x \in I$ έχουμε:

$$\varphi(x) - x^* = \varphi(x) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x - x^*),$$

με ξ μεταξύ x και x^*. Άρα:

$$|\varphi(x) - x^*| = \underbrace{|\varphi'(\xi)|}_{\leq L < 1} |x - x^*| \leq |x - x^*|$$

δηλαδή $\varphi(x) \in I$

Σύμφωνα με το Θεώρημα της συστολής, για κάθε $x_0 \in I$, έχουμε $x_n \to x^*$, $n \to +\infty$

(66)

Τώρα:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Έχουμε:

$$f(x_n) = \underbrace{f(x^*)}_{0} + (x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})$$

με ξ_{n1} και ξ_{n2} μεταξύ x_n και x^*.

Οπότε:

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})} \Leftrightarrow$$

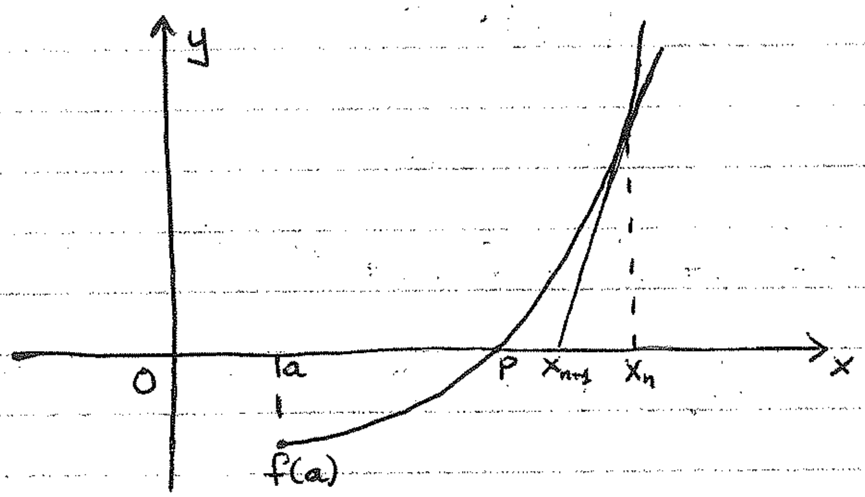
$$x_{n+1} - x^* = \frac{(x_n - x^*)^2 f''(\xi_{n2}) - \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})}$$

$$\Longrightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(\xi_{n2}) - \frac{1}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})}$$

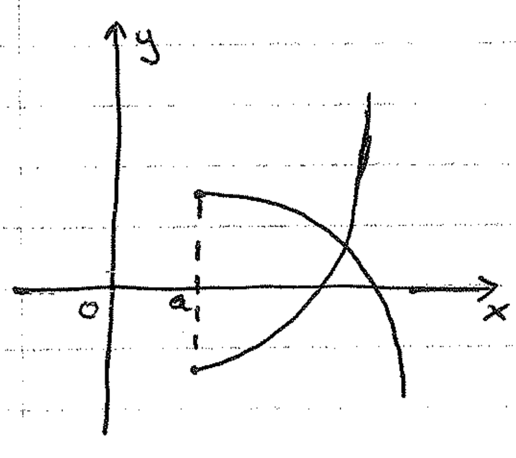
$$\xrightarrow{n \to +\infty} \frac{f''(x^*) - \frac{1}{2} f''(x^*)}{f'(x^*)} = \frac{f''(x^*)}{2 f'(x^*)}$$

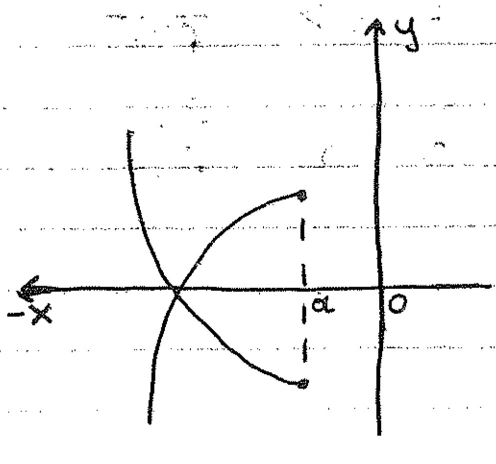
★★ Πρόταση ("Ολική" σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, και τέτοια ώστε $f(a) < 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $x \geq a$.
Τότε η f έχει ακριβώς μία ρίζα $p > a$.
Για οποιοδήποτε $x_0 \geq a$, η ακολουθία που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την $f(x) = 0$, συγκλίνει στη p.



Γενικά, υπάρχουν 4 περιπτώσεις, που αποδεικνύονται με όμοιο τρόπο:





(68)

Απόδειξη

1) Μοναδικότητα ρίζας

Η f είναι γνήσια αύξουσα, οπότε έχει το πολύ μία ρίζα.

2) Ύπαρξη ρίζας

Αφού η f είναι συνεχής και $f(a)<0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $b>a$, τέτοιο ώστε $f(b)>0$.

Αναπτύσσω κατά Taylor:

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(\xi),$$

με $\xi\in(a,b)$, και $f''(\xi)>0$ και $\frac{(b-a)^2}{2}\geq 0$

Αρκεί να πάρουμε το b έτσι ώστε:

$$f(a)+(b-a)f'(a)>0 \iff$$

$$b-a>-\frac{f(a)}{f'(a)} \iff$$

$$\boxed{b>a-\frac{f(a)}{f'(a)}}$$

3) Σύγκλιση

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$

$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$\varphi'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$, όπου $\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} > 0$

Η $\varphi'(x)$ (και η $f(x)$) είναι <u>θετική</u> για $x > p$ και <u>αρνητική</u> για $x < p$.

$x_{n+1} - p = \varphi(x_n) - p = \varphi(x_n) - \varphi(p) = \varphi'(\xi_n)(x_n - p)$

Άρα: $\boxed{x_{n+1} - p = \varphi'(\xi_n)(x_n - p)}$, με ξ_n μεταξύ x_n και p

$$\left.\begin{aligned} & \bullet\ x_n > p \Rightarrow x_{n+1} > p \\ & x_n < p \Rightarrow x_{n+1} > p \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_n > p \text{ για } n \geq 1$$

• Για $n \geq 1$ έχουμε:

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$

με $f(x_n) > 0$, $f'(x_n) > 0$

Άρα, η ακολουθία $(x_n)_{n \geq 1}$ είναι φθίνουσα.

70

Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη προς τα κάτω. Επομένως συγκλίνει:

$\lim_{n\to+\infty} x_n = y \geq p.$

Μένει να αποδείξουμε ότι $y=p$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} \to y, \quad x_n \to y, \quad \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \to \frac{f(y)}{f'(y)}, \quad n\to+\infty$$

$$\Longrightarrow y = y - \frac{f(y)}{f'(y)}$$

$$\Longrightarrow f(y) = 0$$

$$\Longrightarrow y = p$$

Μέθοδος του Νεύτωνα και πολλαπλή ρίζα.

Παράδειγμα: $f(x) = x^2$

Το x^* είναι διπλή ρίζα της f.

$(f(0) = f'(0) = 0 \,,\; f''(0) = 2 \neq 0)$

$x_0 \in \mathbb{R} \,,\; x_0 \neq 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Longleftrightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^2}{2x_n} \Longleftrightarrow$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n$$

$$\Longrightarrow x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n x_0 \,,\quad n \geq 1$$

Για οποιοδήποτε x_0, έχουμε:

$$x_n \longrightarrow x^* = 0 \,,\quad n \to +\infty$$

Τάξη σύγκλισης:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n \Longleftrightarrow$$

$$x_{n+1} - x^* = \frac{1}{2}(x_n - x^*)$$

$$\Longrightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \frac{1}{2}$$

Τάξη σύγκλισης $= 1$

(72)

<u>Γενικά</u>: x^* ρίζα πολλαπλότητας $m \geq 2$ μιας συνάρτησης f

$$\left(f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(m-1)}(x^*) = 0,\ f^{(m)}(x^*) \neq 0\right)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για x_0 αρκετά κοντά στο x^* η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει στο x^*.

Ποια είναι η τάξη σύγκλισης;

$$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \ldots + \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_{n1})$$

με ξ_{n1} μεταξύ x^* και x_n

$$\Longrightarrow f(x_n) = \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_{n1})$$

$$\Longrightarrow f'(x_n) = \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_{n2})$$

με ξ_{n2} μεταξύ x^* και x_n

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Longleftrightarrow$$

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{\frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_{n1})}{\frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_{n2})}$$

$$\Longrightarrow x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*)}{m} \frac{f^{(m)}(\xi_{n1})}{f^{(m)}(\xi_{n2})}$$

$$\Longrightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{f^{(m)}(\xi_{n1})}{m f^{(m)}(\xi_{n2})} \xrightarrow{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{m} \neq 0$$

Συμπέρασμα:

Για $m \geq 2$ η τάξη σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα είναι ένα.

Αν η πολλαπλότητα m είναι γνωστή, τότε η "παραλλαγή" της μεθόδου του Νεύτωνα

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

έχει τάξη σύγκλισης δύο.

Μέθοδος της τέμνουσας

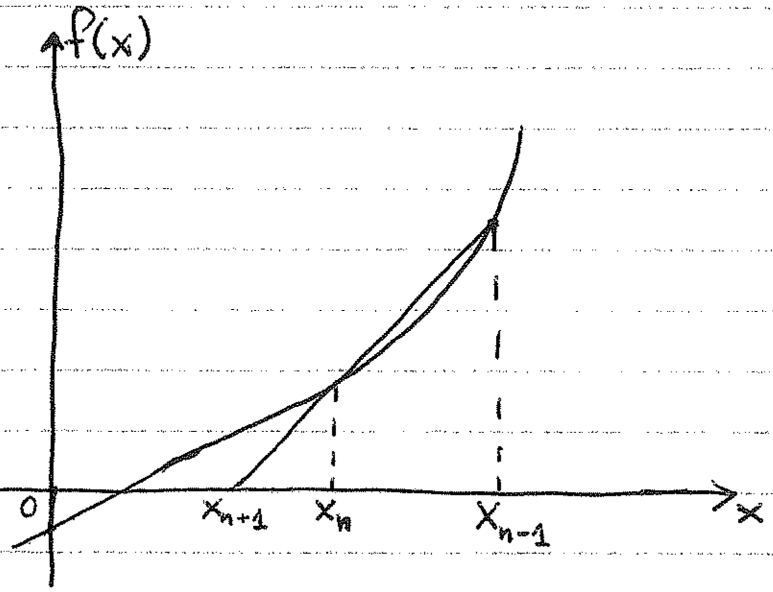
Νεύτωνας: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Μέθοδος της τέμνουσας:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

Απαιτούνται δύο αρχικές προσεγγίσεις x_0 και x_1.



Θεώρημα (Τάξη σύγκλισης της μεθόδου της τέμνουσας)

Έστω x^* ρίζα μιας συνάρτησης f, και έστω $(a,b) \subset \mathbb{R}$ με $x^* \in (a,b)$, $f \in C^2(a,b)$, $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) \neq 0$. Τότε, υπάρχει ένα διάστημα I τέτοιο ώστε για $x_0, x_1 \in I$, $x_0 \neq x_1$, η ακολουθία που δίνει η μέθοδος της τέμνουσας για την εξίσωση $f(x)=0$ είναι καλά ορισμένη και συγκλίνει στο x^*.

Η τάξη σύγκλισης της μεθόδου είναι
$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$

Παρατήρηση (Χρυσή Τομή)

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Σύγκριση των μεθόδων του Νεύτωνα και της τέμνουσας.

	Κόστος ανά βήμα	Τάξη
Νεύτωνας:	2	2
τέμνουσα:	~~2~~ 1	$1.62 \rightsquigarrow (1.62)^2 > 2$

Νεύτωνας: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

τέμνουσα: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x_n & \rightsquigarrow & \text{τάξη } p \\ y_n = x_{2n} & \rightsquigarrow & \text{τάξη } p^2 \end{array}}$$

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*|^p$$

$$|y_{n+1} - x^*| = |x_{2(n+1)} - x^*| = |x_{2n+2} - x^*|$$

$$\Longrightarrow |y_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_{2n+1} - x^*|^p$$

$$\Longrightarrow |y_{n+1} - x^*| \leq C\left(C\,|x_{2n} - x^*|^p\right)^p \Longleftrightarrow$$

$$|y_{n+1} - x^*| \leq C^{p+1}\left(|y_n - x^*|\right)^{p^2}$$

(14)

Άσκηση 2.18

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x^*) = x^*$

$\varphi'(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$, $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{n+1} := \varphi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$

a) ΝΔΟ για x_0 αρκετά κοντά στο x^*,
$x_n \to x^*$, $n \to +\infty$

$\varphi'(x^*) = 0$

Άρα, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I με μέσο το x^*, τέτοιο ώστε $\max\limits_{x\in I} |\varphi'(x)| = L < 1$

Τότε $\varphi: I \to I$ και είναι συστολή στο I
(βλ. Απόδειξη Θεωρήματος 2.2)

Το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα της συστολής β) ΝΔΟ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$

Τάξη σύγκλισης $= p$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \varphi(x^*) + (x_n - x^*)\varphi'(x^*) + \dots +$$

$$+ \frac{(x_n - x^*)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^p}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n)$$

με ξ_n μεταξύ x_n και x^*

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = \frac{(x_n - x^*)^p}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(x^*)$$

16

★ Άσκηση 2.4

$f:[-1,\sqrt{2}] \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της διχοτόμησης, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ΝΔΟ $x_n \to \frac{1}{2}$, $n \to +\infty$

- $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3$
- $f(-1) = (-1 - \frac{1}{2})^3 < 0$
- $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2} - \frac{1}{2})^3 > 0$

Αφού η f είναι συνεχής και έχει ετερόσημες τιμές στα άκρα του διαστήματος, η ακολουθία x_n συγκλίνει σε μια ρίζα της f.

Η μοναδική ρίζα της f είναι το $\frac{1}{2}$, οπότε:

$x_n \to \frac{1}{2}$, $n \to +\infty$

Άσκηση 2.7

$\varphi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$

$\varphi \in C^1[a, b]$, $\max\limits_{a \le x \le b} |\varphi'(x)| < 1$ (συστολή)

$x^* \in [a, b]$, $\varphi(x^*) = x^*$

$x_0 \in [a, b]$, $x_0 \neq x^*$

$x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$

$x_n \to x^*$, $n \to +\infty$ (αυτό έπεται από το θεώρημα της συστολής)

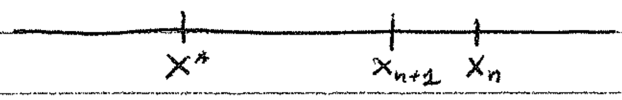
α) $\varphi'(x) > 0$, $x \in [a, b]$

ΝΔΟ: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει μονότονα στο x^*

β) $\varphi'(x) < 0$, $x \in [a, b]$

ΝΔΟ: το x^* περιέχεται μεταξύ x_{i-1} και x_i

α)



β)

(18)

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi_n)(x_n - x^*)$$

α) $(x_{n+1} - x^*)(x_n - x^*) > 0$ και $|x_{n+1} - x^*| < |x_n - x^*|$

β) $(x_{n+1} - x^*)(x_n - x^*) < 0$

★ Άσκηση 2.8

$x_0 \in [0,1]$

$x_{n+1} := \frac{1}{2} e^{\frac{x_n}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$

ΝΔΟ: $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} x^* \in [0,1]$

Απόδειξη

Ορίζουμε $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$

Προφανώς $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η φ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος της συστολής (στο $[0,1]$).

$\varphi'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} > 0$

Η φ είναι αύξουσα

Επομένως:

$\forall x \in [0,1] : \varphi(0) \leq \varphi(x) \leq \varphi(1)$

Όμως, $\varphi(0) = \frac{1}{2} \geq 0$ και $\varphi(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1$, άρα:

$\Rightarrow \forall x \in [0,1] : 0 \leq \varphi(x) \leq 1$

Δηλαδή, $\varphi : [0,1] \to [0,1]$

Τώρα:

$$L = \max_{0\le x\le 1} |\varphi'(x)| = \frac{1}{4}\max_{0\le x\le 1} e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$L = \frac{1}{4}\sqrt{e} = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\sqrt{e}}{2}}_{<1} \le \frac{1}{2} < 1$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής, η φ έχει στο $[0,1]$ ακριβώς ένα σταθερό σημείο x^* και $x_n \longrightarrow x^*$, $n \to +\infty$

★ Άσκηση 2.9

$x_0 \in [0,1]$

$x_{n+1} := \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n})$, $n \in \mathbb{N}_0$

ΝΔΟ: $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x^* \in [0,1]$

Απόδειξη

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{3}(2 + x - e^x)$

$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(1 - e^x) \leq 0$

Άρα η φ είναι φθίνουσα, οπότε:

$\forall x \in [0,1] : \varphi(1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(0)$

Όμως $\varphi(1) = \frac{3-e}{3} \geq 0$ και $\varphi(0) = \frac{1}{3} \leq 1$

Επομένως: $\forall x \in [0,1] : 0 \leq \varphi(x) \leq 1$

Οπότε: $\varphi : [0,1] \to [0,1]$

Η φ' είναι φθίνουσα $\left(\varphi''(x) = \frac{-1}{3} e^x < 0\right)$, οπότε:

$\forall x \in [0,1] : \varphi'(1) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(0) \iff$

$\forall x \in [0,1] : \frac{1-e}{3} \leq \varphi'(x) \leq 0$

$\Rightarrow \max\limits_{0\leq x\leq 1} |\varphi'(x)| = \left|\frac{1-e}{3}\right| = \frac{e-1}{3} < 1$, Άρα η φ συστολή

★ Άσκηση 2.10

$x_0 \in [0,1]$

$x_{n+1} = \frac{1}{6}(3 + 4(x_n)^2 - e^{x_n})$

• $x_n \longrightarrow x^* \in [0,1]$

• $|x_n - x^*| \leq \frac{a^n}{1-a} |x_1 - x_0|$, με $a = \frac{8-e}{6}$

$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{6}(3 + 4x^2 - e^x)$

$\varphi'(x) = \frac{1}{6}(8x - e^x)$

$\varphi''(x) = \frac{1}{6}(8 - e^x) > 0$

$\Longrightarrow \varphi'$ αύξουσα

Άρα:

$\forall x \in [0,1] : \varphi'(0) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(1) \iff$

$\forall x \in [0,1] : -\frac{1}{6} \leq \varphi'(x) \leq \frac{8-e}{6}$

Οπότε:

$\max\limits_{0 \leq x \leq 1} |\varphi'(x)| = \max\left(\left|-\frac{1}{6}\right|, \left|\frac{8-e}{6}\right|\right) = \frac{8-e}{6}$

Η φ είναι συστολή με σταθερά $L = \frac{8-e}{6} = a$

Μένει να αποδείξουμε ότι $\forall x \in [0,1]: 0 \leq \varphi(x) \leq 1$

Δεν είναι εύκολο να βρούμε τα ακρότατα.

Αλλά, για $x \in [0,1]$:

$$\frac{1}{6}(3+4\cdot 0^2 - e^1) \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{6}(3+4\cdot 1^2 - e^0) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{3-e}{6} \geq 0 \qquad 0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

Έχουμε $\varphi: [0,1] \to [0,1]$ συστολή με σταθερά $L=a$.

Το αποτέλεσμα έπεται από το θεώρημα της συστολής.

Άσκηση 2.11

$x_0 \in \mathbb{R}$

$x_{n+1} = \cos(x_n)\ ,\quad n \in \mathbb{N}_0$

ΝΔΟ: $x_n \longrightarrow x^* \ (\cos x^* = x^*)\ ,\quad n \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sqrt{1-(x^*)^2}$$

Απόδειξη

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\quad \varphi(x) = \cos x$

$\varphi'(x) = -\sin x$

$\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)| = 1$, ΟΧΙ ΣΥΣΤΟΛΗ!

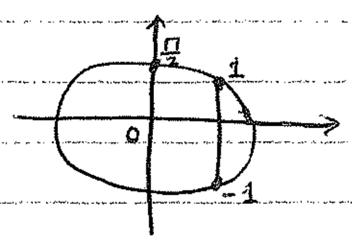
Για $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $x_n \in [-1,1]$, $n \geq 1$,
αφού $-1 \leq \cos x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Ορίζουμε, $\varphi : [-1,1] \to [-1,1]$, $\varphi(x) = \cos x$

Τώρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι η φ είναι συστολή στο $[-1,1]$

$\varphi'(x) = -\sin x\ ,\quad |\varphi'(x)| = |\sin x| \leq \sin 1$

$\max\limits_{-1\leq x\leq 1} |\varphi'(x)| = \sin 1 = L < 1$



Σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής, η φ έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο $x^* \in [-1,1]$ $\cos x^* = x^*$ και $x_n \to x^*$, $n \to +\infty$

Για $x \in [-1,1]$ ισχύει ότι $\cos x > 0$, οπότε $x^* > 0$

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) \iff$$

$$x_{n+1} - x^* = \varphi'(\xi_n)(x_n - x^*) \iff$$

$$x_{n+1} - x^* = -(\sin \xi_n)(x_n - x^*)$$

όπου ξ_n μεταξύ x_n και x^*

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sin \xi_n \xrightarrow{n \to +\infty} -\sin x^*$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sin x^* = -\sqrt{1 - (\cos x^*)^2} \iff$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sqrt{1 - (x^*)^2}$$